Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Artikel: Flexion et flambage d'un certain type de plaques continues orthotropes

Autor: Nowacki, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4038

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IVb2

Flexion et flambage d'un certain type de plaques continues orthotropes

Biegung und Beulung eines bestimmten Types von durchlaufenden orthotropen Platten

Bending and buckling of some types of continuous orthotropic plates

PROF. Dr W. NOWACKI
Gdansk

Flexion des plaques continues

I. L'équation différentielle connue de flexion d'une plaque orthotrope [1] est posée comme suit

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \tag{1}$$

$$D_x = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_x \frac{h^3}{12} \qquad D_y = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_y \frac{h^3}{12} \qquad C = G_0 \frac{h^3}{12}$$

$$2H = \frac{D_x}{m_y} + \frac{D_y}{m_x} + 4C \qquad m_x E_x = m_y E_y$$

où E_x, E_y sont les modules d'élasticité suivant les axes x et y ;
m_x, m_y sont les nombres de Poisson pour ces directions ;
G_0 est la constante des matériaux (le corrélatif du module d'élasticité transversale pour plaque isotrope).

Les forces de section sont unies à la flexion dans (x, y) au moyen des relations suivantes (fig. 1) :

---

(1) M. T. Huber : 1. *La théorie générale des hourdis en béton armé* (*Czasopismo techniczne*, Lwów, 1914); 2. *Teoria plyt.* (*Tow. Naukowe*, Lwów, 1921); 3. *Probleme der Statik technisch wichtiger orthotropen Platten*, Warszawa, 1929.

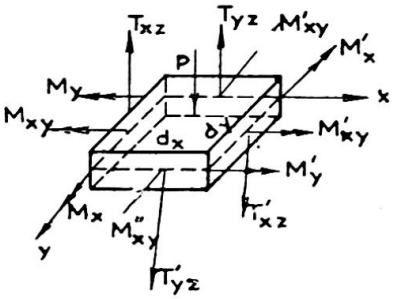


Fig. 1.

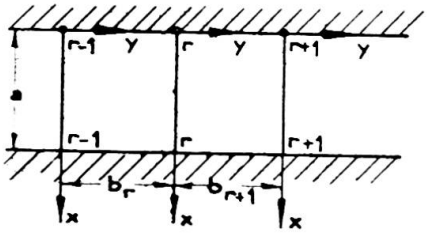


Fig. 2.

$$M_x = -D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m_y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad M_y = -D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m_x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = -2\,C\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$T_{xz} = -D_x\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{D_x}{m_y} + 2C\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \tag{2}$$

$$T_{yz} = -D_y\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(\frac{D_y}{m_x} + 2C\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}$$

Dans le cas de plaque isotrope

$$D_x = D_y = D \qquad m_x = m_y = m \qquad C = \frac{1}{2}\frac{m-1}{m}D.$$

II. Considérons l'élément de la plaque continue, limité par les droites $x=0$, $x=a$, ainsi que par les droites $y=0$, $y=b$ (fig. 2). Sur les droites d'appui $y=0$, $y=b$, $x=0$, $x=a$ se produiront les moments fléchissants et de torsion. Les moments fléchissants $M_y(x, 0)$ sur les lignes d'appui $y=0$, $y=b$, ainsi que les moments $M_x(0, y)$ sur les lignes d'appui $x=0$, $x=a$ seront considérés comme grandeurs hyperstatiques.

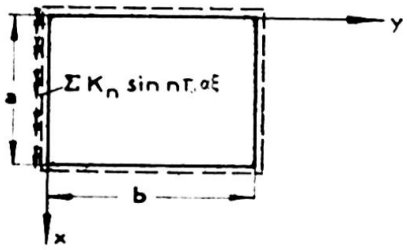
Pour déterminer les moments $M_y(x, 0)$ et $M_x(0, y)$ nous allons profiter des conditions de continuité de la plaque sur ces appuis.

Cependant, avant de poser les équations conditionnelles on doit étudier le système fondamental de la plaque à appui libre le long de ses bords, uniformément chargée du poids p ainsi que par le moment

$$M_y(x, 0) = \sum_n^{\infty} Kn \sin\frac{n\pi x}{a}$$

le long de l'arête $y=0$.

a) *Charge de la plaque par le moment* $\sum_{1,2}^{\infty} Kn \sin\frac{n\pi x}{a}$ (fig. 3).



Pour ce genre de charge aux données

$$y = \eta b \qquad x = \xi b \qquad b = \alpha a$$

$$\varepsilon^4 = \frac{D_x}{D_y} \qquad \rho = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}$$

Fig. 3.

nous amenons l'équation (1) à l'expression sans dimension

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + 2\rho\varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = 0 . \tag{3}$$

Admettant que

$$w = \sum_{n=1,2}^{\infty} Y_n(\eta) \sin n\pi\alpha\xi$$

nous transformons l'équation (3) en

$$Y_n^{(IV)} - 2\rho\nu^2 Y_n'' + \nu^4 Y_n = 0 \qquad \nu = \varepsilon n\pi\alpha \tag{4}$$

L'équation caractéristique

$$r^4 - 2\rho\nu^2 r^2 + \nu^4 = 0$$

donne quatre racines.

I $\quad \rho > 1 \quad r_{1,2} = \pm\lambda_1 \quad r_{3,4} = \pm\lambda_2 \quad \lambda_{1,2} = \nu\sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}}$

II $\quad \rho = 1 \quad r_{1,2} = \nu \quad r_{3,4} = -\nu$

III $\quad \rho < 1 \quad r_{1,2} = \varphi_1 \pm i\varphi_2 \quad r_{3,4} = -(\varphi_1 \pm i\varphi_2) \quad \varphi_{1,2} = \nu\sqrt{\frac{1 \pm \rho}{2}}$

où $\qquad \lambda_{1,2} = \varphi_1 \pm i\varphi_2 .$

Nous allons considérer le premier cas uniquement; nous obtiendrons l'intégrale du deuxième cas au moyen de passage aux limites; le passage du premier cas au troisième s'effectuera par voie de substitution

$$\lambda_{1,2} = \varphi_1 \pm i\varphi_2 .$$

Pour $\rho > 1$ la solution générale de l'équation (4) sera

$$Y_n(\eta) = U_{1n} \cos\lambda_1\eta + U_{2n} \sin\lambda_1\eta + U_{3n} \cos\lambda_2\eta + U_{4n} \sin\lambda_2\eta . \tag{5}$$

Les constantes d'intégration $U_{1n}, \ldots, U_{4n}$ seront déterminées par les conditions des bords de la plaque

$$Y_n(0) = 0 \qquad Y_n(1) = 0 \qquad Y''(0) = -\frac{Kn\,b^2}{D_y} \qquad Y''(1) = 0 .$$

Nous trouverons

$$U_{1n} = -\frac{K_n b^2}{2 D_y \nu^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} ; \qquad U_{2n} = -U_{1n} \operatorname{ctg} \lambda_1$$

$$U_{3n} = -U_{1n} \qquad U_{4n} = U_{1n} \operatorname{ctg} \lambda_2 . \tag{6}$$

L'inclinaison de la surface de flexion de la plaque le long de l'arête $y = 0$ et de $y = b$ donne

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{b}{D_y} \sum_{n=1,2}^{\infty} K_n \Phi_n \sin n\pi\alpha\xi \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b} = -\frac{b}{D_y} \sum_{n=1,2}^{\infty} K_n \Psi_n \sin n\pi\alpha\xi \tag{7}$$

$$\Phi_n = \frac{1}{2\nu^2\sqrt{\rho^2 - 1}} \cdot \frac{\lambda_1 \cos\lambda_1 \sin\lambda_2 - \lambda^2 \cos\lambda_2 \sin\lambda_1}{\sin\lambda_1 \sin\lambda_2} \tag{8}$$

$$\Psi_n = \frac{1}{2\,\nu^2\sqrt{\rho^2-1}} \cdot \frac{\lambda_2 \sin\lambda_1 - \lambda_1 \sin\lambda_2}{\sin\lambda_1 \sin\lambda_2} \tag{9}$$

L'angle d'inclinaison de la surface de flexion aux arêtes $x=0$, $x=a$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\pi}{a}\sum_{n=1,2}^{\infty} n Y_n(\eta) \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{\pi}{a}\sum_{n=1,2}^{\infty} n(-1)^n Y_n(\eta) \tag{10}$$

sera transformé par le développement de la fonction $Y_n(\eta)$ en série de Fourier, en série double infinie

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{a}{D_x}\sum_n^{\infty}\sum_i^{\infty} K_n A_{i,n} \sin i\pi\eta$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{a}{D_x}\sum_n^{\infty}\sum_i^{\infty} K_n A_{i,n} (-1)^n \sin i\pi\eta$$

où

$$A_{i,n} = \frac{i}{n^3\pi^2\alpha^2} \cdot \frac{1}{\left[1+2\rho\left(\frac{i}{n\alpha\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{i}{n\alpha\varepsilon}\right)^4\right]} \quad \rho \gtreqless 1. \tag{11}$$

b) *Charge par le moment* $M = \sum_n^{\infty} K_n \sin n\pi\alpha\xi$ *le long de l'arête* $y=b$ (fig. 4).

Sans changer les constantes d'intégration $U_{1n}, \ldots, U_{4n}$ (équation 6) il faut dans la fonction $Y_n(\eta)$ (équation 5) poser $\eta' = 1-\eta$ au lieu de η.

En conséquence

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{b}{D_y}\sum_n^{\infty} K_n \Psi_n \sin n\pi\alpha\xi \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b} = -\frac{b}{D_y}\sum_n^{\infty} K_n \Phi_n \sin n\pi\alpha\xi$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{a}{D_x}\sum_n^{\infty}\sum_i^{\infty} K_n (-1)^i A_{i,n} \sin i\pi\eta$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = -\frac{a}{D_x}\sum_n^{\infty}\sum_i^{\infty} K_n (-1)^{i+n} A_{i,n} \sin i\pi\eta\,.$$

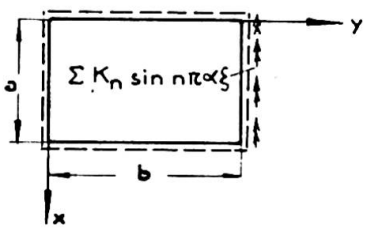


Fig. 4.

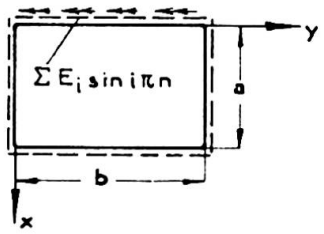


Fig. 5.

c) *Le moment* $M = \sum_{i}^{\infty} E_i \sin i\pi\eta$ *agit le long de l'appui* $x = 0$ (fig. 5).

Admettant que $w = \sum_{n}^{\infty} \chi_i \sin i\pi\eta$

nous amenons l'équation (3) à l'expression

$$X_i^{IV} - 2\rho\theta^2 X_i'' + \theta^4 X_i = 0 \qquad \theta = \frac{i\pi}{\varepsilon}.$$

Pour $\rho > 1$ nous obtiendrons la solution générale

$$X_i(\xi) = U_{1i} \cos \mu_1\xi + U_{2i} \sin \mu_1\xi + U_{3i} \cos \mu_2\xi + U_{4i} \sin \mu_2\xi \tag{12}$$

$$\mu_{1,2} = \theta \sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}}.$$

Des conditions des bords

$$X_i(0) = 0 \qquad X_i\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \qquad X_i''(0) = -\frac{E_i a^2}{D_x} \qquad X_i''\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

nous obtiendrons

$$U_{1i} = -\frac{E_i a^2}{2 D_x \omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \quad U_{2i} = U_{1i} \operatorname{ctg} \chi_1 \qquad U_{3i} = -U_{1i}$$

$$U_{4i} = U_{1i} \operatorname{ctg} \chi_2 \tag{13}$$

$$\omega = \frac{\theta}{\alpha} \qquad \chi_{1,2} = \frac{\mu_{1,2}}{\alpha}.$$

Ensuite

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{a}{D_x} \sum_{i}^{\infty} E_i \Phi_i \sin i\pi\eta \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = -\frac{a}{D_x} \sum_{i}^{\infty} E_i \Psi_i \sin i\pi\eta$$

où

$$\Phi_i = \frac{1}{2\omega^2\sqrt{\rho^2 - 1}} \frac{\chi_1 \cos \xi_1 \sin \chi_2 - \chi_2 \cos \chi_2 \sin \chi_1}{\sin \chi_1 \sin \chi_2};$$

$$\Psi_i = \frac{1}{2\omega^2\sqrt{\rho^2 - 1}} \cdot \frac{\chi_2 \sin \chi_1 - \chi_1 \sin \chi_2}{\sin \chi_1 \sin \chi_2} \tag{14}$$

Et enfin

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{b}{D_y} \sum_{i}^{\infty} \sum_{n}^{\infty} E_i B_{i,n} \sin i\pi\alpha\xi$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b} = \frac{b}{D_y} \sum_{i}^{\infty} \sum_{n}^{\infty} E_i B_{i,n} (-1)^i \sin i\pi\alpha\xi$$

où

$$B_{i,n} = \frac{n\alpha^2}{\pi^2 i^3 \left[1 + 2\rho\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^2 + \left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^4\right]} \quad \rho \gtreqless 1. \tag{15}$$

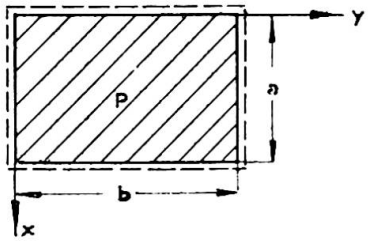


Fig. 6.

d) *Charge de la plaque par* p = const. (fig. 6).

La surface de flexion est traduite par l'équation

$$w = \frac{4\,pa^4}{D_x} \sum_{n=1,3}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n\pi}\right)^5 + Y_n(\eta)\right] \sin n\pi\alpha\xi \quad \overline{Y}_n = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^5 + Y_n(\eta). \quad (16)$$

Ici la fonction $Y_n(\eta)$ est identique à la fonction $Y_n(\eta)$ de l'équation (5).

Nous déterminons les constantes d'intégration des conditions aux limites suivantes

$$\overline{Y}_n(0) = 0\,, \quad \overline{Y}_n''(0) = 0\,, \quad \overline{Y}_n(1) = 0\,, \quad \overline{Y}_n''(1) = 0\,.$$

D'où pour $\rho > 1$

$$U_{1n} = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^5 \frac{\lambda_2^2}{2\,\nu^2\sqrt{\rho^2-1}}\,; \qquad U_{2n} = U_{1n}\,\frac{1-\cos\lambda_1}{\sin\lambda_1}$$

$$U_{3n} = -\,U_{1n}\,\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\,; \qquad U_{4n} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\,\frac{\cos\lambda_2 - 1}{\sin\lambda_2}\,U_{1n}\,. \quad (17)$$

L'inclinaison de la plaque aux arêtes $y = 0$ et $y = b$ sera amenée à l'expression

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = -\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b} = \frac{4\,pb^3}{D_y} \sum_{n=1,3}^{\infty} \Theta_n \sin n\pi\alpha\xi$$

$$\Theta_n = \frac{\varepsilon\alpha^2}{2\,\nu^5\sqrt{\rho^2-1}} \left[\lambda_1\,\frac{\cos\lambda_2 - 1}{\sin\lambda_2} - \lambda_2\,\frac{\cos\lambda_1 - 1}{\sin\lambda_1}\right]. \quad (18)$$

Dans la suite de nos considérations nous allons profiter du développement de la surface de flexion de la plaque en série

$$w = \frac{4\,pb^4}{D_y} \sum_{i=1,3}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{i\pi}\right)^5 + X_i(\xi)\right] \sin i\pi\eta\,. \quad (19)$$

L'inclinaison de la plaque aux arêtes $x = 0$ ainsi que $x = a$ donne pour $\rho > 1$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = -\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{4\,pa^3}{D_x} \sum_{i=1,3}^{\infty} \Theta_i \sin i\pi\eta$$

où

$$\Theta_i = \frac{1}{2\,\varepsilon\alpha\sqrt{\rho^2-1}\;\omega^5} \left[\chi_1\,\frac{\cos\chi_2 - 1}{\sin\chi_2} - \chi_2\,\frac{\cos\chi_1 - 1}{\sin\chi_1}\right] \quad (20)$$

et les constantes d'intégration

$$U_{1i} = \left(\frac{1}{i\pi}\right)^5 \frac{\chi_2^2}{2\,\omega^2\sqrt{\rho^2-1}}\,; \qquad U_{2i} = U_{1i}\,\frac{1-\cos\chi_1}{\sin\chi_1}\,;$$

$$U_{3i} = -\,U_{1i}\,\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} \qquad U_{4i} = U_{1i}\,\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}\,\frac{\cos\chi_2 - 1}{\sin\chi_2} \tag{21}$$

III. Considérons les deux aires contiguës de la plaque continue; l'aire r à la caractéristique d'orthotropie ρ_r et chargée de p_r, ainsi que l'aire $r+1$ à la caractéristique d'orthotropie ρ_{r+1} et chargée de p_{r+1}.

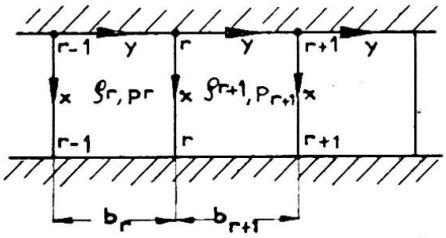


Fig. 7.

Nous nous bornerons à une plaque continue aux arêtes $x=0$, $x=a$ rigidement encastrée.

Désignons par M^{r-1}, M^r, M^{r+1} les moments d'appui M_y en droites $r-1$, r, $r+1$, en outre $M^r = \sum_n^\infty K_n^r \sin n\pi\alpha\xi$ et par M^r, M^{r+1} les moments M_x aux arêtes $x=0$, $x=a$ de l'aire r ainsi que de l'aire $r+1$; avec cela

$$M^r = \sum_i^\infty E_i^r \sin i\pi\eta.$$

La condition d'encastrement rigide de la plaque à l'arête $x=a$ ou bien $x=0$ de l'aire r de la plaque donne

$$\sum \frac{\partial w^{r+1}}{\partial x}\Big/_{x=0} = 0$$

d'où

$$\frac{i}{\pi^2\alpha^2_{r+1}} \sum_n^\infty \frac{K_n^r - K_n^{r+1}(-1)^i}{n^3\left[1+2\rho\left(\frac{i}{n\alpha\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{i}{n\alpha\varepsilon}\right)^4\right]_{r+1}}$$
$$+\,E_i^{r+1}(\Phi_i^{r+1}+\Psi_i^{r+1}) + 4\,p_{r+1}a^2\,\Theta_i^{r+1} = 0 \tag{22}$$
$$(i=1,\,2,\,\ldots)\,, \qquad (n=1,\,3,\,5,\,\ldots)\,.$$

La condition de continuité de la plaque sur l'appui r-r conduit à l'équation

$$-\frac{\partial w^r}{\partial y}\Big/_{y=b_r} + \frac{\partial w^{r+1}}{\partial y}\Big/_{y=0} = 0$$

ou bien à

$$\frac{n}{\pi^2}\left\{\beta^{r+1}\alpha^2{}_{r+1}\sum_i^\infty\frac{2\,E_i^{r+1}}{i^3\left[1+2\rho\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^2+\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^4\right]_{r+1}}\right.$$

$$\left.-\beta^r\alpha_r{}^2\sum_i^\infty\frac{2\,E_i^r(-1)^i}{i^3\left[1+2\rho\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^2+\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^4\right]_r}\right\}$$

$$+K_n^{r-1}\beta^r\Psi_n^r+K_n^r(\beta^r\Phi_n^r+\beta^{r+1}\Phi_n^{r+1})+K_n^{r+1}\Psi_n^{r+1}\beta^{r+1}$$

$$+4\,(p_rb_r^2\beta^r\Theta_n^r+p_{r+1}b^2{}_{r+1}\beta^{r+1}\Theta_n^{r+1})=0 \qquad (23)$$

$$(n=1,\,3,\,5,\,\ldots),\qquad (i=1,\,2,\,\ldots)\,.$$

$\beta^r=\dfrac{D_y{}^0\,,\,b_r}{D_y{}^r\,b_0}$ où b_0 est la longueur comparative de la travée, et $D_y{}^0$ la caractéristique comparative de flexion de la plaque.

Dans le cas d'encastrement rigide de la plaque continue en droite $x=0$ et d'appui libre en droite $x=a$, il faut dans l'équation (22) poser $\Psi_i^{r+1}=0$ et dans l'équation (23) au lieu de $2\,E_i^{r+1}$, $2\,E_i^r$ la valeur seule E_i^{r+1}, E_i^r.

Les grandeurs i, n prennent les valeurs successives 1, 2, 3, ...

Enfin dans le cas de plaque continue librement appuyée le long des arêtes $x=a$, $x=0$ l'équation (22) n'est pas applicable et dans l'équation (23) il y a lieu de poser $E_i=0$. Nous obtiendrons de la sorte un système simple d'équations

$$K_n^{r-1}\beta^r\Psi_n^r+K_n^r(\beta^r\Phi_n^r+\beta^{r+1}\Phi_n^{r+1})$$
$$+K_n^{r+1}\beta^{r+1}\Psi_n^{r+1}+4\,(p_rb_r^2\beta^r\Theta_n^r+p_{r+1}b^2{}_{r+1}\beta^{r+1}\Theta_n^{r+1})=0 \qquad (24)$$

$$(n=1,\,3,\,5,\,\ldots)\,.$$

Pour une plaque rigidement encastrée le long des quatre arêtes (aire $r+1$) $K_n^r=K_n^{r+1}=K_n$, $\beta^r=0$ et dans le cas particulier de plaque carrée $a=b$, $\alpha=1$, de même $K_n=E_n$.

Il en résulte le système d'équations

$$\frac{2\,n}{\pi^2}\sum_i^\infty\frac{E_i}{i^3\left[1+2\rho\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^2+\left(\frac{n\alpha\varepsilon}{i}\right)^4\right]}+E_n(\Phi_n+\Psi_n)+4\,pa^2\,\Theta_n=0$$

$$(n=1,\,3,\,5,\,\ldots)\,,\qquad (i=1,\,3,\,5,\,\ldots)\,.$$

Enfin pour plaque continue à libre appui le long des droites $x=0$, $x=a$, nous obtiendrons aux mêmes indices géométriques et d'élasticité ainsi qu'à la même charge $p=$ const. des aires, l'équation

$$K_n^{r-1}+2\,c_nK_n^r+K_n^{r+1}=W_n\,,\qquad c_n=\Phi_n/\Psi_n$$

$$(r=1,\,2,\,\ldots,\,z-1)$$

$$W_n=\frac{8\,pb^2\,\Theta_n}{\Psi_n}$$

que nous pouvons considérer comme équation aux différences non homogène du second ordre. Et voici la solution de cette équation

$$K_n^r = -\frac{W_n}{2(1+c_n)} \left\{ (-1)^r \left[\operatorname{tg} \frac{wz}{2} \sin \omega_r - \cos \omega_r \right] + 1 \right\}$$

$$\omega = \ln \frac{1}{\sigma} \qquad \sigma = -c_n + \sqrt{c_n^2 - 1}$$

pour

$$z \to \infty \qquad K_n^r \approx -\frac{W_n}{2(1+c_n)} = -\frac{4\,pb^2\,\Theta_n}{\Psi_n + \Phi_n} .$$

Nous remarquons que dans chaque cas particulier le nombre d'équations est conforme au nombre d'inconnues. Les grandeurs K, E étant connues nous pourrons déterminer la surface de flexion de la plaque, et par conséquent les valeurs des forces de section des équations (2).

Flambage d'une plaque continue orthotrope à appui libre sur les arêtes

$$x = 0 , \qquad x = a .$$

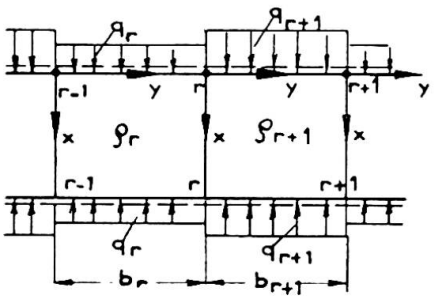


Fig. 8.

I. Pour $q > q_k$ (q_k = charge critique) la plaque fléchira et le long de l'arête $y = 0$ se produiront les moments fléchissants et de torsion.

L'équation différentielle du problème

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + 2\,H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{25}$$

à l'aide des valeurs comme dans l'alinéa I*a* sera amenée à l'expression

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + 2\,\rho\varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon^4 \pi^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \qquad \varphi = \frac{qb^2}{\pi^2 D_x} \tag{25a}$$

Examinons tout d'abord le flambage d'une plaque rectangulaire librement appuyée sur trois arêtes et le long de la quatrième encastrée d'une façon élastique (fig. 9).

Admettant que

$$w = \sum_n^{\infty} Y_n(\eta) \sin n\pi\alpha\xi$$

nous obtiendrons

$$Y_n^{IV} - 2\,\rho\nu^2 Y_n'' + \nu^2 (\nu^2 - \pi^2 \varphi \varepsilon^2)\, Y_n = 0 . \tag{26}$$

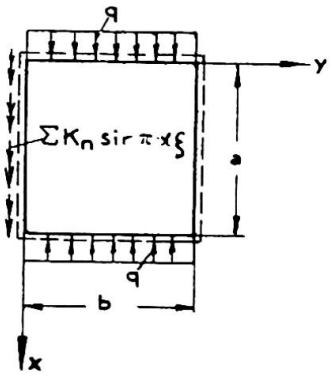


Fig. 9.

L'équation caractéristique

$$r^4 - 2\rho\nu^2 r^2 + \nu^2(\nu^2 - \pi^2\varphi\varepsilon^2) = 0$$

donne quatre racines.

Pour $\rho \gtreqless 1$ nous obtiendrons deux racines réelles et deux imaginaires

$$r_{1,2} = \pm m_1 \quad r_{3,4} = \pm i m_2 \quad m_{1,2} = \nu\sqrt{\sqrt{\rho^2 - 1 + \delta} \pm \rho}$$

$$\delta = \left(\frac{\pi\varepsilon}{\nu}\right)^2 \varphi \quad \nu = n\pi\alpha\varepsilon\,.$$

La solution générale de l'équation (26) sera la suivante

$$Y_n(\eta) = U_{1n}\cos m_1\eta + U_{2n}\sin m_1\eta + U_{3n}\cos m_2\eta + U_{4n}\sin m_2\eta \tag{27}$$

$$m_1^2 + m_2^2 = 2\nu^2\sqrt{\rho^2 - 1 + \delta} \qquad m_1^2 - m_2^2 = 2\nu^2\rho\,. \tag{27a}$$

Les conditions aux limites du problème

$$Y_n(0) = 0 \qquad Y_n(1) = 0 \qquad Y_n''(0) = -\frac{K_n b^2}{D_y} \qquad Y_n''(1) = 0$$

conduisent aux constantes d'intégration

$$U_{1n} = -\frac{K_n b^2}{D_y}\frac{1}{m_1^2 + m_2^2} \qquad U_{3n} = -U_{1n}$$

$$U_{2n} = -U_{1n}\operatorname{ctg} m_1 \qquad U_{4n} = U_{1n}\operatorname{ctg} m_2\,.$$

Les équations suivantes déterminent l'inclinaison de la surface de flexion aux arêtes $y = 0$, $y = b$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{b}{D_y}\sum_n^\infty K_n\,\overline{\Phi}_n \sin n\pi\alpha\xi \qquad \overline{\Phi}_n = \frac{m_1\operatorname{ctg} m_1 - m_2\operatorname{ctg} m_2}{m_1^2 + m_2^2} \tag{28}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b} = -\frac{b}{D_y}\sum_n^\infty K_n\,\overline{\Psi}_n \sin n\pi\alpha\xi \qquad \overline{\Psi}_n = \frac{m_2\operatorname{cosec} m_2 - m_1\operatorname{cosec} m_1}{m_1^2 + m_2^2} \tag{29}$$

Remarquons qu'à $\delta = 0$, c'est-à-dire $q = 0$, les grandeurs $\overline{\Phi}_n \to \Phi_n$, $\overline{\Psi}_n \to \Psi_n$.

Pour encastrer rigidement la plaque en l'arête $y=0$, nous obtiendrons de la condition $\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right/_{y=0}=0$ l'équation du flambage de la plaque $\overline{\Phi}_n=0$.

Cette équation $m_1 \operatorname{ctg} m_1 = m_2 \operatorname{ctg} m_2$, ainsi que les relations (27*a*) vont nous déterminer ∞ la quantité infinie des racines δ.

II. Revenant au flambage de la plaque continue nous adopterons à $q > q_k$ les moments $M_y^r(x, 0)$ comme valeurs supplémentaires du système. La condition de continuité de la plaque aux appuis donne

$$-\left.\frac{\partial w^r}{\partial y}\right/_{y=br}+\left.\frac{\partial w^{r+1}}{\partial y}\right/_{y=0}=0$$

Nous obtiendrons le système d'équations homogènes

$$K_n^{r-1}\beta^r\overline{\Psi}_n^r+K_n^r(\beta^r\overline{\Phi}_n^r+\beta^{r+1}\overline{\Phi}_n^{r+1})+K_n^{r+1}\beta^{r+1}\overline{\Psi}_n^{r+1}=0$$

$$(r=1, 2, \ldots, z-1)\,, \qquad (n=1, 2, \ldots, \infty)\,. \tag{30}$$

$$\beta^r=\frac{D_y^0 b_r}{D_y^r b^0}\,.$$

Nous poserons autant d'équations (30) qu'il y a de grandeurs inconnues des moments d'appui. Ce système sera non contradictoire, lorsque le déterminant du système d'équations $\Delta(\delta)$ sera égal à zéro.

Cette dernière condition ainsi que les relations (27*a*) établissent le critère du flambage de la plaque.

L'équation (30) comprend une série de cas particuliers.

a) Plaque librement appuyée sur ses arêtes $r-1$, $r+1$

$$K_n^{r-1}=K_n^{r+1}=0\,, \qquad \Delta(\delta)=\beta^r\overline{\Phi}_n^r+\beta^{r+1}\overline{\Phi}_n^{r+1}=0\,.$$

b) Plaque encastrée rigidement le long des arêtes r, $r+1$.

Dans l'équation (30) il faut poser

$$K_n^{r-1}=K_n^r=K_n\,, \qquad \beta^{r+1}=0\,, \qquad \Delta(\delta)=\overline{\Phi}_n+\overline{\Psi}_n=0.$$

Dans le cas particulier $b\longrightarrow\infty$ nous obtiendrons $q_k=\frac{\pi^2 D_x n^2}{a^2}$.

c) Plaque continue aux valeurs équivalentes de q, b, ρ dans toutes les aires avec le nombre d'appuis $z+1$.

En traitant l'équation

$$K_n^{r-1}+\overline{c}K_n^r+K_n^{r+1}=0$$

$$(r=1, 2, \ldots, z-1)$$

$$\overline{c}=\frac{\overline{\Phi}_n}{\overline{\Psi}_n}$$

comme équation linéaire aux différences du second ordre avec solution $K_n^r=A_n\cos ar+B_n\sin ar$; en tenant compte des conditions des bords

($K_n^0 = 0$, $K_n^z = 0$) nous amènerons la condition du flambage de la plaque à l'expression

$$\cos \frac{\pi}{z} = \frac{\overline{\Phi}}{\overline{\Psi}}$$

ce qui, pour une quantité infinie de travées, donne $\overline{\Phi} = \overline{\Psi}$, ou bien

$$m_1 \operatorname{ctg} \frac{m_1}{2} = m_2 \operatorname{ctg} \frac{m_2}{2} .$$

Résumé

Ce mémoire présente un critère de flambage d'une plaque continue orthotrope librement appuyée sur son périmètre et sollicité par une charge uniformément répartie sur ses arêtes $x = 0$ et $x = a$.

Zusammenfassung

Es wurde für eine gleichmässig verteilte, in der Plattenmittelebene an den Rändern $x = 0$ und $x = a$ angreifende Kraft ein allgemeines Beulungskriterium für die orthotrope, durchlaufende, an den gleichen Rändern frei aufliegende Platte ermittelt.

Summary

This work presents the general solution of a continuous orthotropic plate whose edges ($x = 0$ and $x = a$) are loaded with $p = \text{const.}$ and freely supported on its perimeter.