

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Artikel: Contribution à la statique des ponts suspendus à poutre de rigidité

Autor: Courbon, J.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-4030>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IIIb2

Contribution à la statique des ponts suspendus à poutre de rigidité

Beitrag zur Statik der Hängebrücken mit Versteifungsträger

Contribution to the statics of suspension bridges with stiffening girders

J. COURBON
Ingénieur, Paris

§ 1. Deux principes fondamentaux interviennent dans le calcul des ponts suspendus : d'une part le théorème de Godart qui fournit l'expression de la déformation, du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans une travée suspendue en fonction de la poussée; d'autre part l'équation qui sert à la détermination de la poussée (composante horizontale de la traction des câbles).

Rappelons d'abord brièvement les résultats déduits du théorème de Godart.

En l'absence de toute surcharge et à la température de réglage, le câble porteur d'une travée, suspendue de portée l , supposée sur appuis simples et dont la charge permanente est d'intensité constante p' , décrit une parabole dont l'équation rapportée à sa corde (l'origine des abscisses étant à l'extrémité de gauche de la travée) est (fig. 1)

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x) . \quad (1)$$

Dans ces conditions la poussée du câble est $Q' = p' \frac{l^2}{8f}$.

Supposons maintenant que la température vienne à varier ou que des surcharges (constituées par des charges isolées, ou des charges d'intensité constante réparties sur tout ou partie de la travée); le câble se déforme, son ordonnée devenant $y + v$; la poussée devient $Q' + Q$. On sait alors que si μ désigne le moment fléchissant que produiraient les surcharges dans la poutre de rigidité si elle n'était pas suspendue, le moment fléchissant M dans la poutre a pour expression

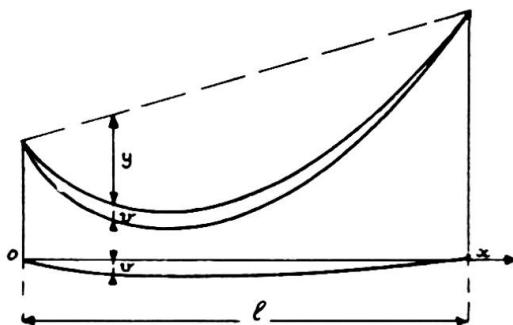


Fig. 1.

$$M = \mu - (Q' + Q) v - Qy \quad (2)$$

et que la déformation v satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - K^2 v = - \frac{K^2}{Q' + Q} [\mu - Qy], \quad (3)$$

avec $K^2 = \frac{Q' + Q}{EI}$,

I désignant le moment d'inertie de la poutre de rigidité, que nous supposons constant et E son module d'élasticité.

Dans les conditions de surcharges définies précédemment, on peut partager la poutre en un certain nombre d'intervalle à l'intérieur de chacun desquels la surcharge répartie garde une intensité uniforme, sans qu'il y ait de surcharges isolées. Les limites des intervalles sont donc, outre les extrémités de la poutre, les points d'application des surcharges concentrées et les extrémités des zones de surcharges d'intensité constante. A l'intérieur de chacun des intervalles ainsi définis, le second membre de l'équation différentielle (3) est un polynôme du second degré, et son intégrale générale peut s'écrire :

$$v = \frac{Q}{Q' + Q} \left[\frac{A}{K^2} e^{Kx} + \frac{B}{K^2} e^{-Kx} + \frac{\mu}{Q} - y + \frac{1}{K^2} \left(\frac{p'}{Q'} - \frac{p}{Q} \right) \right] \quad (4)$$

p désigne l'intensité de la surcharge dans l'intervalle considéré (qui peut être nulle) et A et B deux constantes. Il y a autant de couples de constantes que d'intervalle, et on les détermine en écrivant que v est nul pour $x = 0$ et $x = l$, et que v et $\frac{dv}{dx}$ sont continus aux limites communes à deux intervalles. On se rend compte qu'on obtient bien ainsi autant d'équations qu'il y a d'inconnues à déterminer.

Des équations (4) et (2) on déduit aisément l'expression de M ,

$$M = - \frac{Q}{K^2} \left[A e^{Kx} + B e^{-Kx} + \frac{p'}{Q'} - \frac{p}{Q} \right] \quad (5)$$

puis celle de l'effort tranchant T dans la poutre de rigidité :

$$T = \frac{dM}{dx} = - \frac{Q}{K} [A e^{Kx} - B e^{-Kx}] \quad (6)$$

§ 2. Les résultats du paragraphe précédent montrent que tout le problème du calcul de la poutre de rigidité revient à la détermination de

l'accroissement de la poussée Q dû aux surcharges et à la température. Rigoureusement on obtiendrait Q en écrivant que la variation de longueur du câble due à la déformation v , compte tenu des déplacements de ses extrémités, est égale à la variation de longueur due à l'allongement élastique et à la température. On obtiendrait ainsi une équation qui conduirait à des calculs fort longs, ne pouvant être exécutés que par des méthodes d'intégration numérique approchée.

On peut simplifier cette équation de bien des façons en négligeant des quantités très petites. La méthode exposée ci-après consiste à utiliser une relation due à M. l'Inspecteur général des Ponts et Chaussées Mabilleau (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1937). Sous forme différentielle cette relation (dite équation des déplacements orthogonaux) s'écrit :

$$\frac{du}{ds} = - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \frac{Q}{E'S} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 + \tau \left(\frac{ds}{dx} \right)^2$$

s désigne l'abscisse curviligne du câble; E' et S son module d'élasticité et sa section; τ la variation unitaire de longueur due à la température; enfin u est le déplacement horizontal d'un point du câble.

On peut intégrer la relation précédente, et lui donner la forme intégrale suivante :

$$u_1 - u_0 = - \frac{8f}{l^2} \int_0^l v dx + \frac{Q}{E'S} L_s + \tau L_t. \quad (7)$$

dans laquelle u_0 et u_1 sont les déplacements horizontaux de l'origine et de l'extrémité du câble, et L_s et L_t les intégrales

$$L_s = \int_0^l \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx \quad L_t = \int_0^l \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 dx. \quad (8)$$

L'équation (7) est en quelque sorte l'analogie de l'équation de Bresse relative aux déformations des poutres à fibre moyenne que l'on utilise pour la détermination de la poussée d'un arc à 2 articulations.

§ 3. On applique aisément les résultats précédents au calcul d'un pont suspendu à n travées, sans câbles de tête. Nous supposons que le câble n'exerce aucune réaction horizontale sur le sommet des pylônes, et que les poutres de rigidité sont indépendantes.

Nous utiliserons les notations définies précédemment, en affectant de l'indice i celles afférentes à la i^{e} travée, nous désignerons en outre par u_i , le déplacement du câble au droit du pylône p_i .

L'équilibre, sans surcharges à la température de réglage exige que l'on ait

$$Q' = p_i' \frac{l_i^2}{8f_i} \quad \text{ou} \quad \frac{8f_i}{l_i^2} = \frac{p_i}{Q'} \quad (i = 1, 2 \dots n). \quad (9)$$

Lorsque les travées sont complètement ou partiellement surchargées, ou si la température est différente de la température de réglage, la poussée devient $Q' + Q$. On détermine Q en écrivant pour chaque travée et pour les

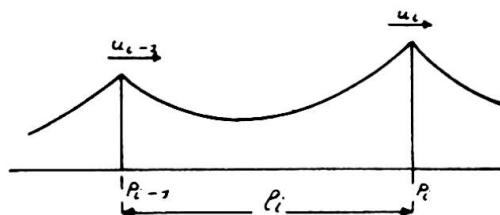


Fig. 2.

câbles de retenue la relation (7); (en effet la relation (7) s'applique aux câbles de retenue s'ils sont suffisamment tendus, en faisant $v = 0$). On ajoute les équations obtenues afin d'éliminer les u_i et l'on obtient l'équation

$$\frac{Q}{E'S} \mathcal{L}_s + \gamma \mathcal{L}_t = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{8f_i}{l_i^2} \int_0^{l_i} v_i dx . \quad (10)$$

\mathcal{L}_s et \mathcal{L}_t désignant les intégrales (8) calculées d'une extrémité à l'autre du câble (d'ancrage à ancrage).

Si les câbles de retenue étaient longs, ou trop peu tendus, il suffirait d'ajouter au premier membre de cette équation un terme correctif dépendant de Q , mais petit; ceci ne modifierait en rien les transformations effectuées par la suite.

Il est alors naturel de remplacer v_i par sa valeur déduite de (4); on parvient ainsi à l'équation :

$$Q = \frac{\sum_i \frac{8f_i}{l_i^2} \int_0^{l_i} \left(u_i - \frac{p_i}{K_i^2} \right) dx - \gamma (Q' + Q) \mathcal{L}_t}{\sum_i \frac{8f_i}{l_i^2} \left[\frac{2}{3} f_i l_i - \frac{8f_i}{l_i K_i^2} - \frac{1}{K_i^2} \int_0^{l_i} (A_i e^{K_i x} + B_i e^{-K_i x}) dx \right] + \frac{Q' + Q}{E'S} \mathcal{L}_s} .$$

C'est exactement l'équation utilisée par les ingénieurs américains pour le calcul du pont de Philadelphie, et obtenue en utilisant le principe des travaux virtuels.

Cette équation contient Q au second membre car les (A_i, B_i) et les K_i dépendent de Q . On pourrait la résoudre par itération, la substitution d'une valeur approchée de Q dans le second membre fournissant une nouvelle valeur de Q plus approchée. Mais les calculs auxquels on est ainsi conduit sont fort longs, car il faut à chaque approximation calculer toutes les constantes (A_i, B_i) , et il faut ne pas perdre de vue qu'il y a, dans chaque travée autant de couples de constantes qu'il y a d'intervalles de surcharges, au sens du paragraphe 1, dans cette travée.

§ 4. Mais on peut donner à l'équation (11) une autre forme dans laquelle ne figurent plus les (A_i, B_i) . On évitera ainsi dans les approximations successives le calcul fastidieux et long de ces constantes. Les calculs de transformation étant assez compliqués, nous nous bornerons à énoncer les résultats obtenus.

On définit tout d'abord dans chaque travée une fonction $\mathcal{F}(x)$; l'abscisse x étant comptée à partir de l'extrémité de gauche de la travée :

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{12} (3 l x^2 - 2 x^3) - \frac{x}{K^2} + \frac{1}{K^3} \frac{e^{Kx} - e^{K(l-x)}}{e^{Kl} + 1} \quad (12)$$

dont la dérivée est

$$\mathcal{F}'(x) = \frac{x(l-x)}{2} - \frac{1}{K^2} + \frac{1}{K^3} \frac{e^{Kx} + e^{K(l-x)}}{e^{Kl} + 1} . \quad (13)$$

Supposons alors que la travée considérée supporte des surcharges concentrées P_j aux abscisses α_j et des surcharges d'intensité constante p_j réparties entre les points d'abscisses β_{j-1} et β_j , on pourra définir une expression \mathcal{F} par la relation

$$\mathcal{F} = \sum_j P_j \mathcal{F}'(\alpha_j) + \sum_j p_j [\mathcal{F}(\beta_j) - \mathcal{F}(\beta_{j-1})] \quad (14)$$

Cette formule (14) peut du reste encore s'écrire

$$\mathcal{F} = \int_0^l p(x) \mathcal{F}'(x) dx \quad (14')$$

$p(x)$ désignant la fonction de charge, $p(x)$ peut du reste parfaitement ne pas être continue et même comprendre des charges concentrées : dans le cas, par exemple où $p(x)$ se réduit à la seule charge concentrée P à l'abscisse α , $p(x)$ sera nulle en tout point de l'intervalle $(0, l)$, sauf pour $x = \alpha$, où $p(x)$ tend vers l'infini de façon que l'intégrale de $p(x)$ prise dans un intervalle contenant la valeur α soit égale à P ; dans ces conditions, on aura, $\varphi(x)$ étant une fonction continue

$$\int_0^x p(x) \cdot \varphi(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ P\varphi(\alpha) & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

Ceci posé, \mathcal{F}_i désignant l'expression \mathcal{F} ainsi définie relative à la i^e travée on peut transformer l'équation (11) de façon à la mettre sous la forme :

$$Q = \frac{\sum_i \frac{8f_i}{l_i^2} \mathcal{F}_i - \tau(Q' + Q) L_s}{\sum_i \frac{8f_i}{l_i^2} \left[\frac{2}{3} f_i l_i - \frac{8f_i}{l_i K_i^2} + \frac{2}{K_i^3} \left(\frac{p'_i}{Q'} \right) \frac{e^{K_i l_i} - 1}{e^{K_i l_i} + 1} \right] + \frac{Q' + Q}{E'S} L_s} \quad (15)$$

Telle est l'équation que nous avions en vue; elle s'écrit directement sans passer par l'intermédiaire des constantes (A_i, B_i) . En outre, elle a l'avantage sur l'équation (11) de conduire à des approximations successives beaucoup plus rapidement convergentes; il suffit en pratique de faire deux ou au plus trois approximations successives, de sorte que la résolution de l'équation (15) ne demande guère plus d'une demi-heure pour un projeteur entraîné disposant d'une table de la fonction e^x et d'une machine à calculer.

On observera que le dénominateur de l'équation (15) ne dépend des surcharges que par l'intermédiaire des K_i , c'est-à-dire de Q ; ce dénominateur varie peu d'un cas de surcharges à un autre. Cette remarque permet de trouver la disposition des surcharges conduisant à un effet maximum (par exemple, moment fléchissant maximum en un point de la poutre de rigidité) au moyen de la considération de pseudo-lignes d'influences; en effet, on connaît toujours une valeur approchée de Q correspondant au cas de surcharges et de température envisagé; en substituant cette valeur dans le second membre de l'équation (15), on peut définir une pseudo-ligne d'influence de la poussée dont l'équation est, la charge unité se trouvant dans la i^e travé à l'abscisse α :

$$Q = \frac{\frac{8f_i}{l_i^2} \cdot \mathcal{F}'_i(\alpha)}{\sum_i \frac{8f_i}{l_i^2} \left[\frac{2}{3} f_i l_i - \frac{8f_i}{l_i K_i^2} + \frac{2}{K_i^3} \left(\frac{p'_i}{Q'} \right) \frac{e^{K_i l_i} - 1}{e^{K_i l_i} + 1} \right] + \frac{Q' + Q}{E'S} L_s}$$

Il faut noter que le dénominateur est alors une constante, ainsi que la valeur de K_i qui figure dans $\mathcal{F}'_i(\alpha)$. On peut alors à partir de la défini-

tion de la pseudo-ligne d'influence de Q définir la pseudo-ligne d'influence de l'effet considéré (flèche, moment fléchissant, effort tranchant en un point, de la poutre de rigidité). On connaîtra ainsi les zones d'ordonnées positives ou négatives de ces lignes et par suite la disposition des surcharges la plus défavorable. La disposition des surcharges étant ainsi déterminée, on calculera Q au moyen de l'équation (15), et l'on pourra si la valeur de Q qui a servi à la détermination des pseudo-lignes d'influence, n'était pas suffisamment approchée, recommencer le tracé de ces lignes.

L'emploi des pseudo-lignes d'influence permet donc de donner une solution théorique au problème de la recherche du maximum d'un effet. On peut encore, dans des cas simples où les surcharges ne dépendent que de un ou de deux paramètres, faire le calcul de l'effet pour quelques valeurs de ces paramètres et déterminer le maximum de l'effet au moyen des formules d'interpolation.

Nous noterons encore la formule suivante qui permet de déterminer le déplacement des câbles sur les pylônes :

$$u_i - u_{i-1} = - \frac{8f_i}{l_i^2} \left[\frac{\mathcal{F}_i}{Q' + Q} - \frac{Q}{Q' + Q} \left(\frac{2}{3} f_i l_i - \frac{8f_i}{l_i K_i^2} + \frac{2}{K_i^3} \cdot \frac{p_i'}{Q} \cdot \frac{e^{K_i l_i} - 1}{e^{K_i l_i} + 1} \right) \right] + \frac{Q}{E'S} L_{si} + \tau L_{ti} \quad (16)$$

§ 5. Donnons le principe d'une méthode permettant de calculer un couple de constante (A, B) relatif à un intervalle de surcharges donné, sans avoir à calculer tous les couples. Reprenons l'équation différentielle (3), et supposons que le cas de surcharges envisagé résulte de la superposition de n cas de surcharges produisant dans la poutre sur appuis simples de même portée l que la travée considérée des moments fléchissants $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$. On a évidemment :

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

L'intégrale de l'équation (3) que nous cherchons est caractérisée par la propriété que v est nul pour $x = 0$ et $x = l$, et que v et $\frac{dv}{dx}$ sont continus dans l'intervalle $(0, l)$.

Considérons alors les équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_0}{dx^2} - K^2 v_0 &= - \frac{K^2 Q}{Q' + Q} y \\ \frac{d^2 v_j}{dx^2} - K^2 v_j &= - \frac{K^2}{Q' + Q} \mu_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (17)$$

Et soient v_0 et v_j les intégrales de ces équations jouissant des mêmes propriétés que v , c'est-à-dire s'annulant pour $x = 0$ et $x = l$, et continues ainsi que leurs dérivées premières dans l'intervalle $(0, l)$. Il est évident que l'intégrale cherchée v n'est autre que

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

On aboutit ainsi à un principe de superposition permettant de déduire immédiatement tout couple de constantes pour un intervalle quelconque d'un cas de surcharges tel que celui défini au paragraphe 1, de l'étude des deux cas de surcharges simples suivants :

- 1° Charge concentrée unique à l'abscisse α ;
- 2° Charge répartie d'intensité constante entre les abscisses β et γ .

§ 6. La détermination des efforts dans les poutres de rigidité est ainsi résolue pour les cas de surcharges définis au paragraphe 1. La méthode s'applique encore dans le cas d'une fonction de charge $p(x)$ quelconque. La détermination de la poussée n'est pas changée si l'on définit, dans l'équation (15), les \mathcal{F}_i par la formule (14'). Par contre, dans l'intégration de l'équation (3), A et B deviennent des fonctions de x que l'on peut calculer au moyen de la méthode classique de variation des constantes.

On peut enfin, comme l'a montré M. Blaise, ingénieur des Ponts et Chaussées, dans les *Annales des Ponts et Chaussées* de mars-avril 1946, aménager la méthode exposée ci-dessus de façon à pouvoir l'appliquer à des poutres de rigidité d'inertie variable; il faut alors renoncer à l'intégration formelle de l'équation (3), et employer les méthodes de calcul aux différences finies, les points de division correspondant aux suspentes; les calculs deviennent longs, mais très systématiques.

§ 7. On peut examiner les hypothèses qui ont servi de base à cette théorie. En particulier, l'équation (7) n'est qu'approchée; pour se rendre compte de l'erreur commise, il suffit de refaire le calcul au moyen de la méthode indiquée au début du paragraphe 2. L'expérience montre alors que l'erreur relative sur la poussée est de l'ordre de 10^{-3} , et l'erreur relative sur les moments fléchissants de $2,5 \cdot 10^{-3}$. L'emploi de l'équation (7) est donc parfaitement justifié.

L'allongement des suspentes sous l'action des surcharges étant parfaitement négligeable, il subsiste le point suivant: au cours de la déformation, les points d'attache des suspentes sur le câble subissent outre un déplacement vertical, un déplacement horizontal qui a été négligé; il en résulte que les suspentes deviennent obliques, et par suite exercent sur le câble des forces horizontales de rappel qui tendent à diminuer le déplacement vertical; en conséquence, on trouvera dans les poutres de rigidité des efforts un peu plus grands que les efforts réels. Cet effet est du reste faible, si les suspentes courtes ont une longueur suffisante. Nous ne croyons pas du reste qu'aucune théorie des ponts suspendus en ait jamais tenu compte.

Le fait de supposer le moment d'inertie des poutres de rigidité constant introduit également des erreurs lorsque les poutres sont de section variable (le moment d'inertie varie toujours peu le long de la poutre). Aux points où le moment d'inertie est maximum, le moment fléchissant est plus élevé que le moment fléchissant calculé, comme on peut s'en rendre compte, soit en faisant le calcul aux différences finies, soit en divisant la poutre en un certain nombre d'intervalles dans chacun desquels le moment d'inertie peut être considéré comme constant. Dans cette dernière hypothèse, l'équation (3) est valable dans chacun des intervalles, K variant seulement, d'un intervalle à l'autre.

Nous avons constaté sur plusieurs exemples que les erreurs dues à l'hypothèse de la verticalité des suspentes et à l'hypothèse du moment d'inertie constant se compensaient sensiblement.

§ 8. Nous avons eu l'occasion d'appliquer la méthode précédente dans de nombreux projets. Permettant d'effectuer sans difficulté le calcul d'un pont à plusieurs travées, cette méthode a augmenté la tendance consistant à substituer toutes les fois qu'on le peut, au pont suspendu à travée

unique, le pont suspendu à trois travées symétriques, à câbles porteurs continus, sans câbles de tête. On obtient ainsi des ouvrages dont l'aspect est très satisfaisant et qui sont très économiques. En effet, les câbles sont beaucoup moins importants car ils sont moins longs et leur tension est beaucoup plus faible; les poutres de rigidité sont plus légères; la dépense supplémentaire due aux piles est en général compensée par la diminution des massifs d'ancrage.

L'expérience montre que la portée de la travée centrale doit être environ les 6/10 de l'ouverture totale; on obtient ainsi des efforts du même ordre dans les poutres de rigidité de la travée centrale des travées de rive.

La méthode exposée permet également la détermination des déplacements horizontaux des câbles en tête des pylônes; ces déplacements sont en général assez faibles pour qu'on puisse supprimer les appareils de dilatation à rouleaux lourds et coûteux placés sous les selles d'appui des câbles; les pylônes encastrés à leur base, subissent alors des flexions du fait du déplacement de leur sommet imposé par les câbles; mais on peut montrer que la flexibilité des pylônes est accrue par la forte charge verticale qu'ils supportent, et que la réaction horizontale qu'ils exercent sur les câbles est du même ordre de grandeur que celle due au frottement de roulement dans le cas d'appareils à rouleaux de dilatation bien entretenus; il est donc logique de négliger cette réaction dans le calcul de l'ouvrage. Il arrive souvent que les déplacements des pylônes vers le milieu du pont sont un peu plus grands que les déplacements vers la rive; on peut alors compenser les efforts dans les pylônes en imposant au moment du réglage du pont, c'est-à-dire en l'absence de surcharges et à température moyenne, un léger déplacement du sommet du pylône vers la rive.

Dans les petits ouvrages, des pylônes flexibles paraîtraient trop grêles; il est alors préférable d'articuler les pylônes à leur base, plutôt que de prévoir des appareils à rouleaux.

Les pylônes en béton armé sont plus économiques que les pylônes métalliques. L'articulation de base, lorsqu'elle est prévue, est du type préconisé par M. Freyssinet; on obtient ainsi une articulation très économique qui, en raison des faibles rotations qui lui sont imposées, peut supporter des réactions élevées par unité de longueur. Dans le cas de pylônes flexibles, on arrive aisément à éliminer tout effort de traction dans le béton.

Les poutres de rigidité des petits ouvrages (120 m de portée environ) sont en général à âme pleine, pour les ouvrages moyens (200 m de portée environ), nous préférons employer une poutre de rigidité à triangulation Warren double à membrures à caissons, dont les nœuds de charge sont les points de croisement des diagonales; le tablier est placé à mi-hauteur des

poutres, les pièces de pont étant assemblées sur les poutres par l'intermédiaire des montants reliant les nœuds centraux à la membrure inférieure; les suspentes, situées dans l'axe des poutres, sont directement attachées sur le nœud central; il en résulte des avantages pour le montage, les pièces de pont étant d'abord suspendues avant l'exécution des poutres.

La dalle en béton armé du tablier, qui constitue l'âme de la poutre au vent, est rendue solidaire de longerons métalliques latéraux assemblés sur les nœuds centraux; les membrures des poutres de rigidité peuvent ainsi

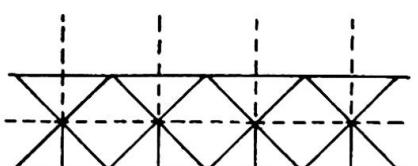


Fig. 3.

jouer le rôle de membrures de la poutre au vent, sans que les efforts de compression ou de traction qui leur sont transmis par la dalle par l'intermédiaire des nœuds centraux n'entraînent d'efforts secondaires de flexion dans la triangulation.

§ 9. Il est possible d'appliquer la théorie précédente au calcul des ponts à câble de tête, comme l'a montré M. Avenas, ingénieur des Ponts et Chaussées (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1947). Nous désignerons par Q'_i la composante horizontale de la traction du câble porteur, et par q'_i la composante horizontale de la traction du câble de tête dans la i^{e} travée, en l'absence de surcharges et à la température de réglage; l'équilibre dans ces conditions exige que $Q'_i + q'_i$ soit constant.

Lorsque le pont est surchargé, ces composantes horizontales deviennent respectivement $Q'_i + Q_i$ et $q'_i + q_i$, et comme l'on néglige les réactions horizontales exercées par les pylônes sur les câbles, la somme $Q = Q_i + q_i$ ne varie pas d'une travée à l'autre.

L'expression $u_i - u_{i-1}$ est alors donnée, lorsque l'on considère le câble porteur associé à la poutre de rigidité par la relation (16), et lorsque l'on considère le câble de tête par la relation suivante :

$$u_i - u_{i-1} = \frac{q_i}{E'S'_i} L_{si}' + \tau L_{ti}' + R_i. \quad (17)$$

dans laquelle S'_i désigne la section du câble de tête, L_{si} et L_{ti} les intégrales (8) pour le câble de tête et R_i un terme correctif petit égal à :

$$R_i = \frac{P_i^2 l_i \cos^2 \theta_i}{2 H} \left[\frac{1}{q'_i} - \frac{1}{(q'_i + q_i)^2} \right]$$

θ_i étant l'angle avec l'horizontale de la corde joignant les extrémités du câble de tête de la i^{e} travée et P_i le poids total du câble de tête dans cette travée.

Supposons connues des valeurs de départ approchées des Q_i et des q_i , on pourra calculer des valeurs plus approchées de la façon suivante : en donnant à Q_i et q_i ces valeurs de départ dans les formules (16) et (17), on aura :

$$u_i - u_{i-1} = C_i Q_i + D_i = c_i q_i + d_i$$

C_i , D_i , c_i , d_i ayant des valeurs numériques connues. En tenant compte de ce que $q_i + Q_i = Q$, on en déduira :

$$Q_i = \alpha_i Q + \beta_i \quad q_i = \alpha'_i Q + \beta'_i \quad (18)$$

$$u_i - u_{i-1} = \gamma_i Q + \delta_i \quad (19)$$

La condition $\Sigma(u_i - u_{i-1}) = 0$ fournira alors la valeur de Q .

$$Q = - \frac{\Sigma \delta_i}{\Sigma \gamma_i}.$$

Les formules (18) et (19) feront alors connaître des valeurs plus approchées pour Q_i , q_i et $u_i - u_{i-1}$.

Deux ou trois approximations au plus suffisent si l'on choisit de la façon suivante les valeurs de départ des Q_i et q_i : on prend $q_i = 0$, ce qui revient à négliger le terme R_i de la formule (17) dans la première approximation ; et l'on détermine les Q_i de départ en faisant $u_i = 0$; en effet, les Q_i exacts différeront assez peu de ces valeurs, car une légère variation de la

distance des appuis des câbles porteurs d'une travée ne donne qu'une faible variation de la poussée des câbles porteurs.

§ 10. L'équation des déplacements orthogonaux du paragraphe 2 peut également se mettre sous la forme suivante :

$$u_i - u_{i-1} = \int_0^l v_i \frac{d^2 y_i}{dx^2} dx + \frac{Q}{E'S} L_{s_i} + \tau L_{t_i}, \quad (20)$$

qui se prête bien au calcul des ponts suspendus auto-ancrés, dans lesquels le câble est fixé à ses extrémités sur la poutre de rigidité.

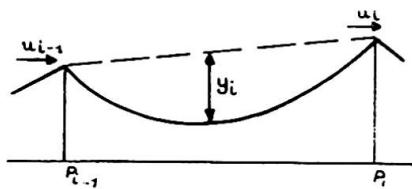


Fig. 4.

Considérons donc un pont suspendu auto-ancré à n travées articulées en leurs extrémités, et dont la poutre de rigidité rectiligne a pour module d'élasticité E , pour section S et pour longueur totale L . La figure d'équilibre du câble dans la i^e travée, sans surcharges et à la température de réglage est, comme dans un pont suspendu ordinaire, une parabole lorsque la charge permanente p'_i est d'intensité constante; s'il n'en était pas ainsi, y , serait un funiculaire de p'_i , ce qui se traduit par l'équation

$$Q' y_i = \mu'_i$$

μ'_i désignant le moment fléchissant que produirait la charge p'_i dans la poutre sur appuis simples de même portée que la poutre de rigidité.

Lorsque l'ouvrage est surchargé ou que la température est différente de la température de réglage, y_i devient $y_i + v_i$, la poussée augmente de Q , et l'on se rend compte immédiatement que le moment fléchissant M_i dans la poutre de rigidité, compte tenu du moment $(Q' + Q) v_i$ dû à la compression de la poutre a l'expression simple

$$M_i = \mu_i - Q y_i. \quad (21)$$

Il suffit alors pour déterminer Q d'écrire que le déplacement relatif des extrémités du câble est égal au raccourcissement total de la poutre. Compte tenu de ce que

$$\frac{d^2 v_i}{dx^2} = - \frac{M_i}{EI_i}$$

on aboutit à l'équation

$$Q \left[\sum_i \int_0^{l_i} \frac{y_i^2 dx}{EI_i} + \left(\frac{L}{ES} + \frac{\mathcal{L}_s}{E'S'} \right) \right] = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\mu_i y_i dx}{EI_i} + \tau (L - \mathcal{L}_s). \quad (22)$$

Il en résulte que le calcul des ponts suspendus auto-ancrés est beaucoup plus simple que celui des ponts suspendus ordinaires; en particulier on peut tracer des lignes d'influence pour Q , et pour les moments fléchissants dans la poutre de rigidité.

Si la poutre de rigidité n'est pas rectiligne, il suffit dans la théorie précédente de remplacer y_i par $Y_i = y_i + y'_i$, y'_i désignant l'ordonnée de la fibre moyenne de la poutre dans la i^e travée comptée positivement vers le haut à partir de la corde joignant ses extrémités dans cette travée.

Il serait possible de réaliser économiquement des ponts auto-ancrés à trois travées symétriques, en prévoyant des poutres en béton armé associées au houardis. La portée de la travée centrale pourrait atteindre une centaine de mètres. L'inconvénient de tels ouvrages est le montage qui exige des échafaudages.

§ 11. La méthode exposée dans ces quelques pages n'apporte rien de nouveau en ce qui concerne les résultats numériques, par rapport aux méthodes employées lors de la construction des grands ponts suspendus américains, tels que le pont de Philadelphie, puisque l'équation de la poussée, sous sa première forme (11) est la même, bien qu'obtenue par une autre voie. Par contre, la nouvelle forme de l'équation de la poussée, dont la résolution est très rapide, permet d'abréger d'une façon considérable le temps passé dans les calculs numériques.

Cette équation présente également l'intérêt théorique de montrer dans quelle mesure le principe de superposition est valable pour les ponts suspendus. On peut dire que pour un pont suspendu considéré dans un état initial donné de température et de surcharges, il existe des lignes d'influence sous l'action d'une charge concentrée infiniment petite se déplaçant sur l'ouvrage; mais ces lignes d'influence varient (du reste assez peu) avec l'état initial.

Résumé

La méthode de calcul des ponts suspendus est basée, d'une part sur l'expression des efforts dans la poutre de rigidité en fonction de la composante horizontale (ou poussée) de la traction des câbles, d'autre part, sur une relation approchée donnant en fonction du déplacement vertical des points d'un câble les déplacements horizontaux des extrémités du câble. On retrouve ainsi, pour déterminer la variation de poussée due aux surcharges et aux variations de température l'équation utilisée par les ingénieurs américains. Mais on a transformé cette équation, dont l'utilisation entraînait de longs calculs, de manière à lui donner une nouvelle forme conduisant à des calculs très rapides, et mettant en évidence les effets de superposition des charges.

La méthode indiquée permet un calcul aisément des ponts à trois travées symétriques qui sont des ouvrages économiques et d'aspect agréable; elle a ainsi réagi sur la conception même des ouvrages, notamment en ce qui concerne les pylônes : suppression des appareils de dilatation au sommet des pylônes qui sont soit encastrés, soit articulés à leur base. On signale également un type de poutre de rigidité bien adapté aux efforts qu'elles ont à supporter du fait des surcharges et du vent.

La note se termine par l'extension de la méthode aux ponts suspendus à travées multiples et à câbles de tête, et aux ponts suspendus auto-ancrés.

Zusammenfassung

Die Berechnungsweise der Hängebrücken stützt sich einerseits auf die Ermittlung der Beanspruchung des Versteifungsträgers durch die Horizontalkomponente (oder Druckkomponente) des Seilzuges, andererseits auf eine Näherungsbeziehung, die die Horizontalverschiebungen der Kabel-

enden in Funktion der vertikalen Verschiebung des Kabels ergibt. Man kommt so auf die durch die amerikanischen Ingenieure angewandte Gleichung zur Berechnung der den Auflasten und Temperaturunterschieden entsprechenden Änderungen des Druckes. Diese Gleichung, die in ihrer Anwendung lange Berechnungen nötig macht, wurde nun in eine neue Form gebracht, in der sie sich sehr schnell lösen lässt und die die Überlagerungswirkungen der Lasten augenscheinlich macht.

Das beschriebene Verfahren gestattet die einfache Berechnung der wirtschaftlich und ästhetisch günstigen Brückenbauten mit drei symmetrisch angeordneten Öffnungen und war auch von Einfluss auf den Entwurf solcher Bauwerke, besonders hinsichtlich der Pfeilerausbildung. Es führte zum Wegfall der Dilatationseinrichtungen auf der Spitze der entweder eingespannten oder gelenkig gelagerten Pfeiler. Es wird auch eine Bauart des Versteifungsträgers angegeben, die die Beanspruchungen infolge Auflasten und Wind gut aufnimmt.

Der Aufsatz schliesst mit der Erweiterung des Verfahrens auf Hängebrücken mit vielen Öffnungen und solche mit Schräkgabeln, und auf Hängebrücken mit aufgehobenem Horizontalschub.

Summary

The method of calculating suspension bridges is based, on the one hand, on research as to the stress of the stiffening girder by the horizontal components (or pressure components) of the traction of the cables and, on the other hand, on an approximate relation which gives the horizontal displacements of the cable ends in function of the vertical displacement of the cable. We thus find the equation used by American engineers for calculating the differences in pressure corresponding to differences in load and temperature. This equation, for the use of which long calculations are required, has now been presented in another form in which it is quickly solved and which places clearly on record the effects of superposing of loads.

The process described allows of simple calculation of economically and aesthetically suitable bridges comprising three symmetrically arranged spans and also had an influence on the designing of such structures, particularly as regards placing of the piers. Information is also given concerning a type of stiffening-girder well adapted to cope with load and wind stresses.

The paper ends with an extension of the process to suspension bridges with multiple spans and oblique cables and to self-anchored suspension bridges.