

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 3 (1948)

**Artikel:** Etude expérimentale de la rupture dans les pièces fléchies en béton armé

**Autor:** Chambaud, R. / Lebelle, P. / Pascal, R.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4134>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Va3

## **Etude expérimentale de la rupture dans les pièces fléchies en béton armé**

## **Experimentelle Untersuchungen über den Bruch von auf Biegung beanspruchten Eisenbetonelementen**

## **Experimental investigation on failure in reinforced concrete units under bending**

R. CHAMBAUD

Conseiller scientifique de l'Institut technique du Bâtiment et des Travaux publics, Paris

En collaboration avec

P. LEBELLE

Directeur de l'Institut technique du Bâtiment  
et des Travaux publics, Paris

R. PASCAL

Ingénieur civil  
des Ponts et Chaussées, Paris

Sous le patronage de l'Institut technique du Bâtiment et des Travaux publics  
et de la Chambre syndicale des Constructeurs en Ciment armé de France

### Introduction

La nature et les conditions des essais entrepris aux Laboratoires du Bâtiment et des Travaux publics à Paris ont été définies dans la *Publication préliminaire*, de même que les buts à atteindre.

Rappelons que les essais ont porté sur des poutres à section rectangulaire armées en traction seulement et soumises à la flexion circulaire (c'est-à-dire à la flexion sous moment constant dans la zone centrale) jusqu'à rupture.

La charge de rupture a été mesurée avec précision et les circonstances de la déformation et de la fissuration ont été observées avec soin au moyen d'appareils perfectionnés. Notamment on a mesuré l'importance et la répartition des déformations élastiques et plastiques au moyen de strain-gages externes et de cellules à résistance noyées à l'intérieur du béton. On a mesuré également les modules d'élasticité des bétons par une méthode vibratoire nouvelle ainsi que les résistances des bétons sur cubes témoins, les limites d'élasticité (ou d'écoulement) des aciers ainsi que l'étendue de leurs paliers de ductilité, leur résistance à la rupture et leur limite d'allongement.

Le nombre important des essais a permis d'obtenir des résultats statistiques, dont l'interprétation nous a conduits à une théorie de la déformation élasto-plastique permettant de prévoir le moment limite de rupture d'une poutre à section rectangulaire quand on connaît les caractéristiques des matériaux employés et le pourcentage des armatures tendues.

On en a déduit une méthode simple de calcul à coefficient de sécurité constant, que nous appelons la méthode élasto-plastique et qui s'oppose à la méthode classique ou purement élastique.

La conclusion est qu'on peut, avec une sécurité normale, utiliser la résistance à la flexion des sections rectangulaires dans des limites beaucoup plus étendues qu'on ne le fait habituellement d'après la théorie classique, notamment par l'emploi de hauts pourcentages d'acier tendu, et que l'économie possible sur les armatures comprimées est considérable, ces armatures s'avérant inutiles dans la grande majorité des cas, pour des pourcentages d'acier tendu pouvant atteindre 4 et 6 % et parfois davantage, suivant les caractéristiques des matériaux employés, acier et béton.

La place limitée dont nous disposons ne nous permet pas de donner le détail de nos expériences ni les tableaux complets de nos résultats numériques. Ils seront exposés dans un autre recueil et nous nous contenterons de résumer ici les points les plus importants de notre étude.

#### Notations

$b$	largeur de la poutre ;
$h_1$	hauteur utile ;
$\omega'$	section d'acier tendu ;
$\varpi' = \frac{\omega'}{bh_1}$	pourcentage d'acier tendu ;
$\varpi'_{cr}$	pourcentage critique ;
$n$	contrainte maximum de rupture du béton dans les pièces fléchies ;
$n_0$	résistance en compression sur cubes, au jour de l'essai ;
$n'_e$	limite d'écoulement de l'acier ;
$M$	moment de flexion ;
$\zeta = \varpi' \frac{n'_e}{n_0}$	pourcentage réduit ;
$\mu = \frac{M}{bh_1^2 n_0}$	moment réduit ;
$K = \frac{M}{bh_1^2}$	moment unitaire ;
$\sigma$	coefficient de sécurité.

#### Définition des essais

Le nombre des poutres essayées est de 82, leur section totale  $100 \times 135$  mm ou  $125 \times 150$  mm, leur portée théorique 2,90 m ou 3,70 m, la partie centrale, soumise à un moment constant, a 0,70 m de longueur.

Les ciments employés sont de deux sortes : un superciment à haute résistance initiale, classe 315/400 et un ciment artificiel Portland, classe 250/315.

Les aciers sont des aciers doux, mi-doux, mi-durs et durs et présentent tous un palier de ductilité très marqué (l'allongement avant le début de la période de raffermissement par écrouissage n'était jamais inférieur à 7,6 ‰ pour les aciers les plus durs; il n'a pas été mesuré avec précision pour les aciers doux mais on peut admettre, d'après des mesures sur des aciers analogues, qu'il était d'au moins 20 ‰).

Les diamètres d'armatures utilisés sont de 8, 12, 16 et 18 mm.

Les dosages en ciment varient de 275 à 525 kg/mc, les pourcentages d'acier tendu de 0,95 à 6,28 %.

Les résistances du béton à la compression, mesurées sur cubes de 14,1 cm de côté au jour de l'essai, varient de 128 à 595 kg/cm<sup>2</sup> si l'on considère les cubes individuellement, ou de 140 à 466 kg/cm<sup>2</sup> si l'on considère les moyennes par séries de cubes se rapportant à une même poutre.

Les limites d'écoulement des aciers pris individuellement varient de 24,8 à 76,1 kg/mm<sup>2</sup>, leurs moyennes correspondant aux aciers d'une même poutre de 25,4 à 67,2 kg/mm<sup>2</sup>. Les résistances de rupture varient de 36,5 à 106,2 kg/mm<sup>2</sup> et les allongements maxima avant rupture mesurés entre repères d'écartement réglementaire de 38,8 à 8,1 %.

On a préparé en même temps qu'était coulée la poutre, une série d'éprouvettes destinées à renseigner sur les qualités physiques et mécaniques du béton et conservées dans les mêmes conditions que la poutre.

L'essai de compression sur cubes a été fait au moyen d'une presse Amsler de 500 tonnes. Le cube a été placé entre les plateaux de la presse avec interposition de deux feuilles de carton de 2 à 4 mm d'épaisseur.

Le module d'élasticité a été déterminé par une méthode vibratoire qui donne le module d'élasticité instantané initial, c'est-à-dire celui qui correspond à la tangente à la courbe contrainte/déformation à l'origine. C'est le seul qui soit intéressant et corresponde à une caractéristique réelle du béton, car tous les autres sont plus ou moins influencés par le fluage, même pour des chargements et déchargements quasi instantanés, c'est-à-dire effectués dans des périodes de temps comprises entre quelques minutes et une demi-heure ou une heure, comme l'ont très nettement montré nos mesures de flèches et de déformation effectuées au cours des essais principaux.

On a prélevé sur chacune des barres longitudinales des poutres un échantillon pour déterminer les caractéristiques de l'acier, ce qui représente en tout 328 échantillons.

Pour un certain nombre de barres en acier dur on a fait une détermination précise des allongements élastiques et plastiques au moyen d'un extensomètre système Mercier permettant de mesurer des allongements de 5 microns sur une base de 100 mm. On en a déduit les diagrammes contraintes/allongements.

Pour chaque poutre, la flèche au milieu a été mesurée par un fleximètre enregistreur. Dans un certain nombre de cas cet appareil a permis de mesurer la déformation plastique et le fluage jusqu'à rupture, ce qui nous a donné des renseignements très intéressants sur les grandes déformations susceptibles d'intervenir dans le phénomène de rupture par flexion.

Un des objectifs principaux de nos essais était de mesurer l'importance des raccourcissements que le béton comprimé est susceptible de supporter

avant rupture par flexion, les renseignements donnés à cet égard par les expérimentateurs qui nous ont précédés étant fort contradictoires. Nous avons donc munis un certain nombre de poutres d'extensomètres précis permettant de faire les mesures en divers points situés dans le voisinage de la section probable de rupture. Ces extensomètres étaient constitués par des strain-gages à résistance, à bases de 20 et 180 mm, collés sur la face supérieure et sur les faces latérales des poutres.

Les poutres ont été chargées et rompues au moyen d'une machine à levier procédant par quanta de charges successifs. La durée d'application de chaque quantum de charge partielle était de l'ordre de 10 à 20 minutes. Pour un certain nombre de poutres, on a procédé à un déchargement complet après application d'une charge correspondant à la moitié ou aux trois quarts de la charge probable de rupture, suivi d'un rechargement poursuivi jusqu'à rupture. Ceci afin de contrôler l'importance des déformations plastiques irréversibles et du fluage. Cette opération a parfois été répétée deux fois au cours d'un essai de poutre. La durée totale d'un essai de flexion a été en général comprise entre 1 heure et 2 heures. Dans un cas extrême elle a atteint près de 4 h 1/2.

L'appréciation du phénomène de rupture ne donne pas lieu à ambiguïté, il est très facile à saisir : sous l'application de chaque quantum de charge il se produit une déformation instantanée, puis pendant les 10 à 20 minutes que dure l'application du quantum, un fluage faible au début de l'essai, puis de plus en plus important, à mesure que la charge augmente. Insensible sous le 1/10 de la charge totale ce fluage peut atteindre 20 à 25 % de la flèche instantanée à moitié charge de rupture et 80 % sous les 9/10 de la charge de rupture, avec une lente tendance à la stabilisation. Après application du dernier quantum au contraire, ce fluage se poursuit en s'accroissant et l'affaissement se produit assez brutalement au bout d'un temps qui varie en général entre quelques minutes et une trentaine de minutes. Dans un cas par exemple, nous avons eu la chance de pouvoir suivre ce fluage pendant 28 minutes et même, après ce temps, la rupture étant sur le point de se produire, nous avons pu, en supprimant rapidement la charge, observer un relèvement élastique égal à 35 % de la flèche maximum observée.

#### Dispersion des mesures d'écrasement sur cubes et analyse statistique des résultats

Comme nous l'avons dit, on a pris soin de mesurer séparément pour chaque poutre les caractéristiques mécaniques des matériaux, aciers et bétons.

La valeur de la résistance sur cubes admise pour chaque poutre était la moyenne des résultats d'écrasement de 8 à 10 cubes en général.

Les essais sur cubes (plus de 600 cubes essayés) ont permis de constater une dispersion assez importante pour les cubes de même gâchée ou de même composition. Cela nous a conduits à entreprendre sur ces résultats une étude statistique dont nous avons exposé de vive voix devant le Congrès les principes et les conclusions. Nous ne pouvons malheureusement nous étendre ici sur cette question.

Nous en avons tiré des renseignements intéressants montrant que les résultats statistiques obtenus sont dignes de confiance malgré les écarts individuels.

La résistance sur cubes étant ainsi connue avec une approximation suffisante, nous avons pu en déduire la résistance vraie du béton de la poutre travaillant en flexion dans les conditions de l'expérience, résistance qui *a priori* n'a pas plus de raisons d'être égale à la résistance de compression sur prismes qu'à la résistance de compression sur cubes, les conditions de travail étant essentiellement différentes. En fait elle se rapproche davantage de cette dernière contrairement à l'opinion de certains auteurs qui préfèrent s'en rapporter à la résistance sur prismes. Nous dirons plus loin un mot de la méthode d'ajustement qui nous a permis de fixer la résistance vraie.

### Etude des déformations

On s'est attaché surtout à mesurer les raccourcissements éprouvés, en fonction de la charge et du temps, par les fibres supérieures du béton au voisinage de la section de rupture, la connaissance précise de ces déformations étant essentielle pour notre théorie.

Nous résumons ci-dessous les conséquences que nous avons cru pouvoir tirer de nos mesures.

1° Pour toutes charges, la déformation comprend une déformation élastique instantanée réversible et une déformation fonction du temps (fluage) qui n'est que très partiellement réversible par suppression de la charge. Ce phénomène s'observe même pour des charges ne représentant pas plus de 20 à 30 % de la charge limite et même pour des durées de chargement courtes, de l'ordre de 10 à 25 minutes. L'importance relative du fluage croît avec le rapport entre la charge appliquée et la charge limite de rupture. Au voisinage de la rupture, dans une expérience dont la durée est de 1 à 4 heures environ, le fluage total dépasse généralement la déformation élastique totale.

2° Les diagrammes de retour après déchargement dans un temps très court (une ou deux minutes) permettent de définir un coefficient d'élasticité instantané  $E_0$ ,  $\alpha$  étant la fraction de la charge rapportée à la charge de rupture.  $E_0$  correspond à la partie sensiblement rectiligne du diagramme de retour charges/déformations et représente le coefficient d'élasticité instantané moyen quand le taux de charge passe de  $\alpha$  à 0. Ce coefficient diminue quand la charge appliquée augmente. On a approximativement pour tous les bétons considérés

$$\begin{aligned} E_{0,3} &= 0,90 E_0, & E_{0,8} &= 0,57 E_0, \\ E_{0,5} &= 0,80 E_0, & E_{0,9} &= 0,42 E_0, \\ E_{0,7} &= 0,67 E_0, \end{aligned}$$

ces résultats étant donnés simplement à titre d'ordres de grandeur.

3° Les sections transversales de la poutre restent sensiblement planes pendant la déformation jusqu'au voisinage de la rupture, résultat prévisible *a priori* par simple raison de symétrie, puisqu'il s'agit de flexion circulaire.

4° Pour tous les bétons et toutes les conditions d'armatures la fibre supérieure du béton subit avant rupture un raccourcissement important, mais ce phénomène est difficile à saisir parce qu'il est local et assez analogue, toutes proportions gardées, au phénomène de striction dans les



essais de traction simple des barres d'acier doux. Comme la position de la section de rupture n'est pas exactement connue à l'avance, le phénomène peut passer inaperçu si le strain-gage destiné à le mesurer n'est pas situé à l'endroit optimum. En plaçant trois strain-gages collés sur la face supérieure de la poutre, l'un au milieu, les autres de part et d'autre à une distance de 10 à 15 cm, nous avons eu la chance de l'observer plusieurs fois, mais il n'est pas rare de voir, quelques instants avant la rupture, le strain-gage placé dans la zone restreinte affectée par la rupture accuser un raccourcissement deux fois plus important que ses voisins. Il faut naturellement, pour avoir les meilleurs résultats, opérer avec des strain-gages à base courte (20 mm dans notre cas). Nous croyons que la difficulté d'observer ces déformations purement locales est la raison pour laquelle les auteurs qui ont étudié cette question, ont indiqué des chiffres si différents les uns des autres (raccourcissements limites de 1 à 2 ‰ pour les uns et jusqu'à 7 et 8 ‰ pour les autres).

5° Le raccourcissement maximum de la fibre supérieure du béton avant rupture ne paraît pas sensiblement différent d'un béton à l'autre. Les bétons moins résistants ont un coefficient d'élasticité plus faible et sont plus plastiques, mais ils se rompent sous une charge unitaire plus faible de sorte qu'il se produit une espèce de compensation. L'ensemble de tous nos essais, attentivement dépouillés et interprétés nous a conduits à proposer comme valeur la plus plausible du raccourcissement maximum du béton avant rupture par flexion une quantité uniformément égale à 3,6/1 000 pour des bétons dont les résistances varient entre 150 et 500 kg/cm<sup>2</sup>. C'est la valeur qui sert de base à notre théorie élasto-plastique.

#### Bases d'une théorie élasto-plastique de la flexion

Nous partons des bases suivantes que nous considérons comme suffisamment bien établies par nos expériences ou par des faits antérieurement connus.

1° Au cours de la flexion les sections droites de la poutre se déforment en restant planes.

2° Le module d'élasticité des aciers est constant jusqu'à la limite d'écoulement. Nous ne l'avons pas mesuré spécialement pour les aciers au carbone de nuances très diverses que nous avons utilisés car on sait qu'il est presque rigoureusement indépendant de la dureté de l'acier. Nous avons admis pour l'acier la valeur

$$E_a = 21\,000 \text{ kg/mm}^2.$$

3° Après dépassement de la limite d'écoulement, l'acier continue de s'allonger à tension constante, en utilisant le palier de ductilité.

4° Le coefficient d'élasticité initial instantané du béton est lié à sa résistance sur cubes  $n_0$  par la formule

$$E_0 = k/\sqrt{n_0}$$

et nous pouvons admettre

$$k = 19\,000 \text{ (kg}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{cm}^{-1}) .$$

5° Dans la section de rupture par flexion, la fibre la plus comprimée

du béton éprouve un raccourcissement maximum qui atteint au moment de la rupture la valeur

$$\varepsilon_1 = 3,6/1\,000.$$

6° Au cours de la flexion, les différentes fibres comprimées du béton se déforment suivant un diagramme dont la courbe a pour tangente à l'origine le coefficient angulaire  $E_0$ . La courbe progresse en s'écartant de cette tangente et atteint l'ordonnée maximum  $n$  correspondant à la contrainte de rupture du béton par flexion en un point A où elle présente une tangente horizontale. L'abscisse du point A est approximativement égale à  $2\,n/E_0$ . A partir de ce point la déformation se poursuit à tension légèrement décroissante jusqu'à un raccourcissement limite  $\varepsilon_1$  après quoi se produit la rupture. Nous avons été conduits à assimiler la courbe entre l'origine et le sommet A à une demi-période de sinussoïde en axes obliques, et au delà du sommet à une parabole cubique. Nous n'avons pu donner ici les définitions analytiques complètes. Elles paraîtront dans un autre recueil.

7° La contrainte maximum  $n$  du béton au moment de la rupture est inconnue. Le phénomène de flexion est essentiellement différent du phénomène d'écrasement par compression tel qu'il se produit dans les expériences de rupture de cubes ou de prismes.

Il est cependant vraisemblable que la contrainte de rupture par flexion  $n$  est proportionnelle à la contrainte de rupture par compression dans les essais sur cubes et que seul est inconnu le coefficient de proportionnalité; nous admettons donc que l'on peut écrire

$$n = (1 + \lambda)n_0,$$

$\lambda$  étant un coefficient assez voisin de zéro, mais pour le moment inconnu. Le meilleur moyen de le déterminer sera de le laisser figurer avec une valeur arbitraire dans les formules et de le déterminer après coup par une méthode d'ajustement, en comparant les résultats de nos formules avec les grandeurs effectivement observées dans nos expériences. La meilleure valeur de  $\lambda$  sera celle qui donne le meilleur accord entre l'ensemble des grandeurs observées et l'ensemble des grandeurs calculées. Nous avons ainsi été conduits à attribuer à  $\lambda$  la valeur  $\lambda = 0$ .

8° On néglige enfin la résistance offerte par le béton tendu. Il est clair qu'au moment de la rupture elle n'intervient que très peu, la fissuration étant généralement déjà accentuée avant rupture. Peut-être aurait-elle une influence dans les cas de poutres très faiblement armées, mais cette influence est pratiquement nulle dans les cas que nous avons considérés, et elle devrait de toutes façons par prudence être négligée.

Ces bases étant admises, le problème de la rupture élasto-plastique des poutres rectangulaires sans armatures comprimées soumises à la flexion simple est complètement défini et sa solution n'est plus qu'une question de calcul algébrique.

#### Formules de la flexion élasto-plastique

Les quantités connues sont :

- $n_0$  résistance sur cubes ;
- $n_c'$  limite d'écoulement de l'acier ;
- $\varpi'$  pourcentage de l'acier tendu.



On pose

$$\mu = \frac{M}{bh_1^2 n_0}, \quad \zeta = \varpi' \frac{n_e'}{n_0}.$$

Nous ne pouvons développer ici les calculs faits sur les bases précédentes et donnerons seulement les résultats.

PREMIER RÉSULTAT. — Il existe un pourcentage critique  $\varpi'_{cr}$  fonction de  $n_e'$  et  $n_0$  dont nous avons fourni l'expression.

Pour  $\varpi' < \varpi'_{cr}$ , l'acier travaille à sa limite d'écoulement au moment de la rupture.

Pour  $\varpi' > \varpi'_{cr}$ , la rupture survient avant que le taux de travail de l'acier n'ait atteint sa limite d'écoulement. Il en résulte qu'il n'y a jamais intérêt pratiquement à dépasser le pourcentage critique, aucune armature n'étant prévue en compression.

Voici quelques valeurs du pourcentage critique  $\varpi'_{cr}$  en % :

$n_e' \backslash n_0$	100	200	300	400	500
2 000	3,54	6,82	9,84	—	—
3 000	2,14	4,11	5,93	7,69	9,35
4 000	1,47	2,82	4,09	5,27	6,40
5 000	1,08	2,08	3,01	3,88	4,72
6 000	0,83	1,60	2,31	2,99	3,65

Dans ce tableau les contraintes  $n_0$  et  $n_e'$  sont données en kg/cm<sup>2</sup>

SECOND RÉSULTAT. — Le moment de rupture est donné par la formule

$$\mu = \zeta \varphi (1 - \beta \zeta \varphi).$$

Dans cette formule  $\beta$  est un coefficient fonction de  $n_0$  et voisin de 1/2 dont voici quelques valeurs :

$n_0 =$	100	200	300	400	500
$\beta =$	0,5030	0,5065	0,5103	0,5146	0,5190

$\varphi$  est un coefficient égal à 1 quand  $\varpi' < \varpi'_{cr}$ .

Quand  $\varpi' > \varpi'_{cr}$ ,  $\varphi$  est une fonction de  $n_0$ ,  $n_e'$ ,  $\varpi'$  dont nous ne donnerons pas ici l'expression assez compliquée, parce qu'elle n'a pas d'intérêt pratique et nous a seulement servi à vérifier l'accord entre l'expérience et la théorie dans le domaine des pourcentages d'acier dépassant le pourcentage critique.

La théorie fait également connaître la position de la fibre neutre à la rupture et le taux de travail limite de l'acier pour  $\varpi' > \varpi'_{cr}$ . Nous ne pouvons nous étendre ici sur ces résultats secondaires.

Nous avons également traduit nos résultats en abaques qui figurent dans une autre publication.

Comparaison des résultats expérimentaux et théoriques.  
Justification de la théorie

Pour les 82 poutres essayées on a déterminé d'une part le moment de rupture d'après la charge de rupture observée et d'autre part d'après la théorie ci-dessus. On a ainsi pu comparer le moment réduit observé,  $\mu_{\text{obs}}$  et le moment réduit calculé,  $\mu_{\text{calc}}$ , et déterminer le rapport  $\rho = \frac{\mu_{\text{obs}}}{\mu_{\text{calc}}}$ , théoriquement égal à l'unité. Un de ces rapports présentait une valeur anormale (1,23) que nous avons écartée comme probablement entachée d'une ou plusieurs erreurs accidentelles. Nous avons calculé la moyenne arithmétique de 81 rapports restants. Elle est égale à l'unité, à 2/1 000 près, ce qui justifie *a posteriori* la valeur  $\lambda = 0$  admise dans la formule  $n = n_0(1 + \lambda)$ .

D'autre part, en classant les résultats de  $\rho$  par fréquence des écarts, nous constatons qu'on obtient le tableau suivant où  $\tau_i$  représente la valeur absolue de l'écart par rapport à la moyenne, et  $f$  la fréquence observée :

Ecart				Fréquences	
0	<	$\tau_i$	$\leq$	2,5 %	$f = 25$
2,5 %	<	$\tau_i$	$\leq$	5 %	$f = 21$
5 %	<	$\tau_i$	$\leq$	7,5 %	$f = 15$
7,5 %	<	$\tau_i$	$\leq$	10 %	$f = 10$
10 %	<	$\tau_i$	$\leq$	12,5 %	$f = 5$
12,5 %	<	$\tau_i$	$\leq$	15 %	$f = 3$
15 %	<	$\tau_i$	$\leq$	17,5 %	$f = 1$
17,5 %	<	$\tau_i$	$\leq$	20 %	$f = 1$
Total des résultats : $N = \Sigma f = 81$ .					

L'écart quadratique moyen est égal à 6,43 %. Il ne dépasse pas sensiblement celui qui résulte de la dispersion existant dans les mesures d'écrasement du béton, et cela prouve que la méthode élasto-plastique de détermination du moment de rupture par flexion est digne de confiance et repose sur des bases comportant une grande part de vérité.

La courbe expérimentale des fréquences définie par les données ci-dessus est très voisine de la courbe normale de Gauss, ce qui confirme que la loi de Gauss est applicable avec une bonne approximation dans les conditions de nos expériences.

REMARQUE. — Nous ferons à cette occasion une remarque sur une question de notations.

Les orateurs qui nous ont précédé en séance du Congrès ont pris comme valeur de la probabilité élémentaire normale l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx$$

tandis que nous avons admis de notre côté l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

plus généralement utilisée par les probabilistes modernes.

Ces deux expressions sont évidemment équivalentes puisqu'il s'agit d'un simple changement de variable, mais la seconde a un avantage, c'est que dans ce système l'unité d'abscisse représente l'écart quadratique moyen, tandis que dans le premier elle ne représente rien de physique. On peut en effet dresser le tableau comparatif suivant :

	1 <sup>er</sup> Système	2 <sup>e</sup> Système
Ecart moyen . . . . .	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5642$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,7979$
Ecart médian . . . . .	0,4769	0,6745
Ecart quadratique moyen . .	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$	1,0000

On voit que l'écart quadratique moyen se lit immédiatement sur les diagrammes du second système tandis qu'aucun des trois écarts utilisables n'est dans ce cas si l'on emploie le premier système.

#### Application à la détermination du coefficient de sécurité réel en flexion

Une première application très importante de nos résultats d'expériences et de la théorie élastoplastique par laquelle nous les avons interprétés, consiste à déterminer le coefficient de sécurité que fournissent les calculs effectués suivant la méthode classique.

Pour cette dernière nous prenons comme référence le nouveau règlement français du M. R. U., 1945 <sup>(1)</sup>, avec le coefficient d'équivalence  $m = 15$ .

Cette méthode est basée sur l'hypothèse des déformations purement élastiques. On prend comme taux de travail du béton comprimé les 28/100 de la résistance sur cubes, mesurée à 90 jours et comme taux de travail de l'acier tendu les 60/100 de la limite élastique quand cette limite est égale ou inférieure à 24 kg/mm<sup>2</sup>. Quand elle a une valeur supérieure on admet une contrainte égale en kg/mm<sup>2</sup> à

$$R_a' = 14,4 + 0,4 (n_e' - 24)$$

avec certaines limitations relatives au danger de fissuration.

A l'égard du béton, le coefficient de sécurité théorique est donc

$$\sigma = \frac{1}{0,28} = 3,57$$

<sup>(1)</sup> Règles d'utilisation du béton armé applicables aux travaux dépendant du Ministère de la Reconstruction et de l'Urbanisme et aux travaux privés. *Institut technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, Paris.

A l'égard de l'acier, il varie de

$$\sigma = \frac{24}{14,4} = 1,667, \text{ pour } n_e' = 24 \text{ kg/mm}^2$$

à

$$\sigma = \frac{60}{28,8} = 2,083, \text{ pour } n_e' = 60 \text{ kg/mm}^2$$

Cela ne nous renseigne en aucune façon sur le coefficient de sécurité réel de l'ensemble, mais nos formules permettent de la calculer très simplement.

Pour un béton armé caractérisé par les valeurs

$$n_0 = 300 \text{ kg/cm}^2, \quad n_e' = 3\,000 \text{ kg/cm}^2, \quad \varpi' = 1,09 \%$$

on trouve

$$\sigma_{\text{réel}} = 1,99.$$

C'est un cas qui correspond à de bons ouvrages normaux.

Pour un béton armé caractérisé par les valeurs

$$n_0 = 500, \quad n_e' = 3\,000, \quad \varpi' = 2,35 \%$$

on trouve

$$\sigma_{\text{réel}} = 2,01.$$

D'autres exemples donnent des résultats analogues, et en résumé on peut admettre qu'en règle générale, le coefficient de sécurité offert par les calculs classiques est *voisin de 2* quand les contraintes maxima admissibles du béton et de l'acier sont réalisées.

#### Critique de la théorie classique et recherche d'une méthode rationnelle

Dans la méthode classique, dès que le pourcentage d'acier tendu dépasse 1 ou 2 % environ suivant les cas, des aciers comprimés deviennent nécessaires. Mais on ne peut songer à élever indéfiniment le moment résistant en augmentant l'acier comprimé, la dépense deviendrait vite prohibitive et l'on peut admettre comme limite pratique le moment résistant qui correspond à un pourcentage d'acier comprimé *égal au pourcentage d'acier tendu*. Aller au delà ne serait pas de bonne construction et nuirait au serrage convenable du béton.

Dans ces conditions avec un béton armé tel que  $n_0 = 300$ ,  $n_e' = 3\,000$ , (en  $\text{kg/cm}^2$ ) la limite maximum du pourcentage total d'acier utilisable sera approximativement de

$$\left. \begin{array}{l} \varpi' = 3 \text{ \% en traction} \\ \varpi = 3 \text{ \% en compression} \end{array} \right\} \text{ Total : } 6 \%$$

et le moment maximum admissible correspondra dans la théorie classique à

$$K_{\text{adm}} = 445 \text{ (en tonnes et m}^2\text{)}$$

avec un coefficient de sécurité voisin de 2.

D'après notre théorie, on aurait avec le pourcentage critique  $\varpi' = 5,93 \%$

$$\left. \begin{array}{l} \varpi' = 5,93 \text{ \%} \\ \varpi = 0 \end{array} \right\} \text{ Total : } 5,93 \%$$

et le moment de rupture serait  $K = 1\,239$  d'où avec  $\sigma = 2$

$$K_{adm} = \frac{1\,239}{2} = 619,5.$$

Cela montre qu'en mettant en traction les aciers prévus en compression on augmenterait la résistance de la poutre d'une quantité supérieure à

$$\frac{619,5 - 445}{445} = 39 \%$$

ou, si l'on veut, pour un moment appliqué donné, on augmenterait de 39 % le coefficient de sécurité en plaçant en traction les aciers que la théorie classique prévoit en compression. Et à sécurité égale, l'économie d'acier possible est de 30 %.

Autre exemple :

Avec un béton armé présentant les mêmes caractéristiques. Si nous mettons  $\varpi' = 2 \%$  en traction nous devons d'après la théorie classique mettre  $\varpi = 1,51 \%$  en compression et nous aurons  $K_{adm} = 294$  avec une sécurité voisine de 2. Tandis que si nous mettons  $\varpi' = 3,51 \%$  en traction et  $\varpi = 0$  en compression, la théorie élastoplastique montre que pour le même moment appliqué on a

$$\sigma = 2,95 \text{ au lieu de } 2$$

soit une majoration de 47,5 % environ de la sécurité; et si nous mettons

$$\left\{ \begin{array}{l} \varpi' = 2,25 \% \text{ en traction} \\ \varpi = 0 \text{ en compression} \end{array} \right.$$

la théorie élastoplastique montre qu'on aura le même moment admissible avec  $\sigma = 2$ , soit une économie de 36 % dans les armatures.

Des comparaisons analogues pourraient facilement être faites avec des bétons de caractéristiques quelconques, et en résumé nous pouvons formuler les conclusions générales suivantes.

### Conclusions

1° Les calculs effectués par la méthode classique appliquée aux pièces rectangulaires fléchies donnent un coefficient de sécurité voisin de 2 quand l'acier travaille au taux maximum admissible et le béton à un taux égal ou inférieur au taux maximum admissible. Cette conclusion est approximativement vraie en cas d'existence d'aciers comprimés, tout au moins lorsque leur importance ne dépasse pas celle de l'acier tendu, condition qu'il faut considérer comme une limite pratique imposée par des raisons d'économie et de bonne construction.

2° Pour les faibles pourcentages d'acier tendu, jusqu'au pourcentage critique classique (1,09 % dans notre exemple pour  $n_0 = 300$ ,  $n_c' = 3\,000$ ) toujours très inférieur au pourcentage critique réel (5,93 % dans notre exemple) rien d'essentiel n'est changé par l'application de la théorie élastoplastique.

3° La théorie classique nécessite l'emploi d'aciers comprimés dès qu'un

certain pourcentage d'acier tendu, généralement faible, est dépassé. Au contraire, la présente théorie montre l'inutilité des aciers comprimés jusqu'à un pourcentage d'acier tendu beaucoup plus important qui est fonction de la résistance du béton et de la limite élastique de l'acier. Autrement dit jusqu'au pourcentage critique réel d'acier tendu (5,93 % dans notre exemple) aucun acier n'est nécessaire en compression pour réaliser un coefficient de sécurité égal à 2. Cette valeur du coefficient de sécurité est celle que nous considérons comme normale et que nous prendrons pour base dans la méthode de calcul élastoplastique que nous proposons : il n'y a qu'une chance sur 10 000 pour que la marge qu'elle laisse disponible soit absorbée, si l'on admet dans les conditions de chantier un écart quadratique moyen égal à 14 % par rapport aux conditions de calcul. Cette chance tombe à 1/100 000 si l'écart quadratique moyen est seulement de 12 %.

4° Non seulement, dans les limites indiquées, les aciers comprimés sont inutiles, mais ils seraient toujours mieux utilisés en traction. Dans le domaine des hauts pourcentages totaux (3 à 6 % dans notre exemple) on majorerait le coefficient de sécurité (de 47,5 % à 39 % dans notre exemple) rien qu'en plaçant en traction les aciers qu'on avait prévus en haut. En règle générale, les aciers comprimés dans les poutres fléchies sont indéfendables.

5° Dans le domaine des hauts pourcentages d'acier une économie importante (de 36 à 30 % dans notre exemple) est possible sur l'acier total, et cet acier doit être placé en traction.

6° En restant dans les limites du pourcentage critique réel pour l'acier tendu (5,93 % dans notre exemple) on peut prévoir, quand c'est nécessaire, un moment admissible notablement supérieur à celui qui résulte de la théorie classique avec égalité d'acier en traction et en compression, ( $K_{adm} = 619,5$  au lieu de 445 dans notre exemple, soit une majoration possible de 39 %). L'emploi de ces hauts pourcentages n'est pas économique, mais il peut rendre des services dans le cas où l'on se trouve en présence de poutres fortement chargées dont la hauteur est limitée (accès du Métropolitain, planchers de cinéma, entrepôts et magasins, passages supérieurs, etc.).

Voici un tableau tiré de nos formules qui montre des limites possibles avec un coefficient de sécurité égal à 2. En pratique, une limitation, dont nous n'avons pas fait état, pourra intervenir du fait du risque de fissuration ou déformation excessive.

a) Pour un béton  $n_0 = 200 \text{ kg/cm}^2$  (unités en t et m pour les moments) on peut appliquer :

$M = 446 bh_1^2$	avec	6,82 %	d'acier à limite élastique	$= 20 \text{ kg/mm}^2$
424 $bh_1^2$	»	4,11 %	»	»
402 $bh_1^2$	»	2,82 %	»	»
				30 kg
				40 kg

b) Pour un béton  $n_0 = 400 \text{ kg/cm}^2$  on peut appliquer :

$M = 808 bh_1^2$	avec	7,69 %	d'acier à limite élastique	$= 30 \text{ kg/mm}^2$
766 $bh_1^2$	»	5,26 %	»	»
730 $bh_1^2$	»	3,88 %	»	»
688 $bh_1^2$	»	2,99 %	»	»
				40 kg
				50 kg
				60 kg



La marge disponible est considérable et, en principe, englobe tous les cas de la pratique, ce qui montre qu'il ne sera pratiquement jamais nécessaire d'employer des aciers comprimés.

Méthode de calcul proposée pour les sections rectangulaires en flexion simple

La méthode de calcul que nous proposons en application de la théorie élastoplastique résulte des considérations qui précèdent. Elle est extrêmement simple et peut se définir comme suit :

1° On ne considérera que le domaine dans lequel le pourcentage d'acier tendu est inférieur au pourcentage critique réel ( $\varpi' < \varpi'_{cr}$ ). En effet, on a vu ci-dessus que le champ d'application correspondant est suffisamment étendu pour répondre pratiquement à tous les besoins. D'autre part, nos formules montrent que le moment réduit  $\mu$  considéré comme fonction de  $\zeta$ , c'est-à-dire, à un facteur près, du pourcentage n'augmente plus que faiblement au delà de  $\varpi'_{cr}$ , c'est-à-dire que le rendement de l'acier tendu dépassant  $\varpi'_{cr}$ , est négligeable, la rupture étant conditionnée par le béton. En conséquence, nous n'aurons pas à faire usage des formules concernant le domaine  $\varpi' > \varpi'_{cr}$ . On considérera donc comme pourcentage limite des aciers tendus le pourcentage critique correspondant aux données particulières qui caractérisent l'acier et le béton employés.

2° Pour un pourcentage  $\varpi'$  donné et un coefficient de sécurité  $\sigma$ , le moment admissible limite sera donné par la formule

$$M_{adm} = \frac{\mu}{\sigma} n_0 b h_1^2 = \frac{\zeta(1 - \beta\zeta)}{\sigma} n_0 b h_1^2$$

avec

$$\zeta = \varpi' \frac{n'_e}{n_0} .$$

On prendra en général  $\sigma = 2$ . Le pourcentage d'acier satisfaisant à  $\varpi' < \varpi'_{cr}$  on sait qu'aucun acier comprimé n'est nécessaire.

Une condition supplémentaire de non-fissuration et de rigidité suffisante pourra intervenir éventuellement en cas d'acier à haute limite d'élasticité.

3° Si le moment de flexion appliqué  $M$  est donné, les formules ci-dessus donnent par inversion le pourcentage nécessaire, lequel résulte d'une simple équation du second degré dont on peut d'ailleurs éviter la résolution en préparant des tableaux numériques à l'avance ou des abaques dont la construction ne présente aucune difficulté.

4° Bien que nous n'ayons pas développé ici le calcul des déformations et celui des taux de travail effectifs des matériaux pour des efforts appliqués inférieurs à la limite de rupture, la théorie élastoplastique ci-dessus exposée contient tous les éléments d'un pareil calcul qui trouvera place dans un travail ultérieur, en même temps qu'une méthode de calcul des flèches et déformations.

De même, nous n'avons pu entrer ici dans le détail des observations que nous avons faites sur la progression des fissures au cours de l'essai de flexion jusqu'à rupture. Nous dirons seulement que nous n'avons pas

observé de fissuration dangereuse sous une charge égale à la moitié de la charge de rupture, même pour des poutres armées d'aciers durs. L'appareil employé permettait d'observer les fissures à partir d'une ouverture de 2 à 3/100 de millimètre. Elles apparaissaient en général sous le 1/3 de la charge de rupture, ne dépassaient pas dans les cas les plus défavorables 4 à 5/100 sous 1/2 charge de rupture et n'atteignaient 10/100 que sous une charge de l'ordre de 85 % de la charge de rupture.

Les nombreux et importants essais qui ont été nécessaires pour cette étude et qui ont duré plus de 4 mois ont été exécutés aux Laboratoires du Bâtiment et des Travaux publics, à Paris, avec une compétence et un soin tout à fait remarquables par M. Chefdeville, ingénieur chef de la Section des recherches, et ses collaborateurs, auxquels nous sommes heureux d'exprimer ici nos remerciements et nos amicales félicitations.

### Remarque finale

La résistance sur cubes que nous avons appelée  $n_c$  et qui sert de base aux formules, dépend dans une large mesure des conditions d'essais. Il importe donc de préciser que nous avons utilisé ici des cubes de 14,1 cm de côté pour des bétons à agrégats de 10 mm de grosseur maximum, que ces cubes ont été préparés dans des moules métalliques rigides, serrés par vibration de surface, essayés sur une presse Amsler avec interposition de carton et comprimés parallèlement aux lits de coulage, sous une vitesse de chargement de l'ordre de 20 kg/cm<sup>2</sup>/seconde.

Une nouvelle méthode d'écrasement, plus perfectionnée, mise récemment au point par nos Laboratoires, remplace actuellement le carton par un dressage précis des faces avec un mortier spécial (soufre + argile + noir de fumée) et obtient des résultats plus élevés d'environ 20 % avec l'avantage d'une dispersion bien moindre. Si  $n_c$  est la résistance ainsi mesurée, nos formules s'appliquent sous réserve de prendre  $n_c = \theta n_c$ ,  $\theta$  étant un coefficient de correction dont les statistiques en cours nous donneront bientôt la valeur exacte.

### Résumé

Les auteurs ont étudié expérimentalement la rupture dans les pièces fléchies en béton armé. Leurs essais ont porté sur 82 poutres à section rectangulaire et ont été conduits avec un soin extrême, qui n'avait sans doute pas encore été apporté jusqu'ici dans ce genre d'expériences. Ils ont pu en tirer la conclusion nette que la théorie classique sous-estime considérablement la résistance du béton comprimé dans le domaine des forts pourcentages d'acier tendu et que l'emploi d'aciers comprimés n'est pratiquement jamais justifié. Ils proposent une théorie élastoplastique de calcul des pièces fléchies, à coefficient de sécurité constant dont ils montrent le bon accord avec leurs expériences et qui conduit à des économies très importantes pour les pièces fortement armées.

### Zusammenfassung

Die Verfasser haben experimentell den Bruch von auf Biegung beanspruchten Eisenbetonelementen untersucht. Ihre Versuche bezogen sich auf 82 Rechteckbalken und wurden mit einer Sorgfalt durchgeführt, wie sie bis heute bei dieser Art von Experimenten zweifellos noch nie angewandt worden ist. Die Verfasser haben den eindeutigen Schluss ziehen können, dass die klassische Theorie die Druckfestigkeit des Betons im Bereich der

starken Armierungsgehalte beträchtlich unterschätzt und dass die Anordnung einer Druckarmierung praktisch nie gerechtfertigt ist. Sie schlagen für Biegungsbeanspruchung eine elasto-plastische Berechnungsweise mit konstantem Sicherheitskoeffizienten vor und zeigen, dass sie mit ihren Versuchen übereinstimmt und zu wichtigen Einsparungen bei stark armierten Balken führt.

### Summary

The authors carried out an experimental study of failure in reinforced concrete parts under bending. Their tests included 82 beams of rectangular section and were carried out with the greatest care, such as had no doubt not been the case hitherto in this kind of experiments. They were able to reach the decisive conclusion that the classical theory considerably underestimates the resistance of compressed concrete in the realm of high percentages of stressed steel and that the use of compressed steel is practically never justified.

They propound an elastoplastic theory for calculating concrete units under bending, with a constant safety factor. That theory which proved to agree with the experiments carried out by the authors leads to a very important economy in strongly reinforced parts.