

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Rubrik: IV: Slabs and various curved structures in reinforced concrete

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IV

Dalles, voûtes et parois en béton armé

Flächentragwerke des Eisenbetons

**Slabs and various curved structures
in reinforced concrete**

Rapporteur général – Generalberichterstatter – General Reporting Member

PROF. Dr P. LARDY

Ecole Polytechnique Fédérale à Zurich

IVa

Dalles champignons

Pilzdecken

Flat slabs or girderless floors

Théorie et méthodes de calcul — Calculs approchés.

Theorie und Berechnungsmethoden — Näherungsberechnungen.

Theory and methods of calculation — Calculation by approximation.

IVb

Dalles continues

Durchlaufende Platten

Continuous slabs

Méthodes de calcul — Conditions aux limites — Flexibilité variable — Calculs approchés.

Berechnungsmethoden — Randbedingungen — Veränderliche Biegesteifigkeit — Näherungsberechnungen.

Methods of calculation — Edge conditions — Varying flexural rigidity — Calculation by approximation.

IVc

Résistance et stabilité des parois et voiles minces et des toits plissés

Festigkeit und Stabilität der Scheiben, Schalen und Faltwerke

Strength and stability of discs and shells in curved or cord form in concrete

Théorie et méthodes de calcul — Stabilité — Influence du retrait et des variations de température — Calculs approchés — Mesures effectuées sur modèles et sur ouvrages terminés — Constructions remarquables réalisées récemment.

Theorie und Berechnungsmethoden — Stabilität — Einflüsse von Schwinden und Temperaturänderungen — Näherungsberechnungen — Messungen an Modellen und ausgeführten Bauwerken — Bemerkenswerte Ausführungen neueren Datums.

Theory and methods of calculation — Stability — Influences of contraction and changes of temperature — Calculations by approximation — Measuring on models and completed structures — Recent notable structures.

IVd

Théorie et exécution des barrages arqués

Theorie und Ausführung von Bogenstaumauern

Theory and construction of arched dams

Nouvelles méthodes de calcul — Influence des moments de torsion — Influence de la déformabilité de la roche — Influence de la température — Constructions remarquables réalisées récemment.

Neuere Berechnungsmethoden — Berücksichtigung der Drillungsmomente — Einfluss der Nachgiebigkeit des Baugrundes — Temperatureinflüsse — Bemerkenswerte Ausführungen neueren Datums.

Modern methods of calculation — Taking twisting moments into account — Influence of yielding of the foundations — Temperature influences — Recent notable structures.

IVa1

Calcul des dalles champignons

**Comparaison des valeurs théoriques
avec celles des moments spécifiées dans les formulaires**

Die Berechnung von Pilzdecken

**Vergleich der theoretischen Werte
mit den in den Bestimmungen angegebenen Momentenkoeffizienten.**

The calculation of flat slab floors

**Comparing theoretical values
with moment coefficients specified in flat slab codes**

Dr A. M. Haas

's-Gravenhage

Most countries now have a building code, in which rules are given for the calculation of flat slab floors. In these rules the moment coefficients always take an important place. They enable the designer without any theoretical analysis to construct these floors within certain limits. Mostly a numerical sum of positive and negative bending moments at in the codes defined critical sections shall be assumed as to be no less than a given amount. Furthermore the percentages of the bending moment at every section are defined for different cases; for example with and without the use of drop panels.

In the U. S. A. the flat slabs have and have had a large field of application. Apart from the regulations given by different cities, the American Concrete Institute issued her flat slab code in 1917 which was then considered as conservative. This code has frequently been revised and adapted to more modern practice; the regulations which are now in use are from the year 1947. In my opinion they are the best available set of flat slab regulations and superior to the ones formulated in other countries. In the comparison to be made they will be taken as the standard.

For the calculation of flat slabs there are many authors and consequently many methods of design. Almost all the authors derive their theory from the differential equation of a plate taking into account the boundary conditions. Thereby a plate of uniform thickness is assumed. The methods of Lewy, Navier, Lavoigne, Nadaï, Tölke and Hager employ

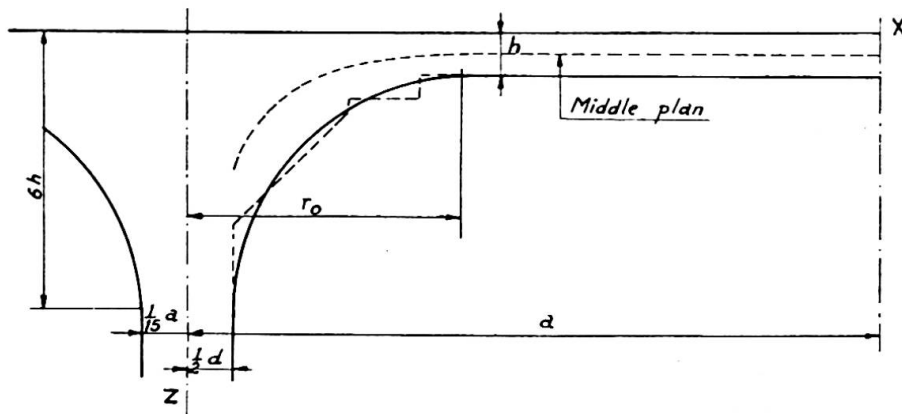


Fig. 1. Column head of hyperbolic shape.

a solution in the form of series. Grashoff and Eddy make use of an algebraic formula whereas Marcus replaces the differential equation of the plate by two equations of finite differences each of which has the form of the equation of a stretched membrane.

All these methods have the difficulty that afterwards the solution should be adjusted to the varying thickness of the column-head which has always been done rather roughly.

In the method of computation as developed by the author and published in 1948 ⁽¹⁾ the column-head has been introduced from the beginning. Thus the problem is divided into two parts : the column-head-section and the slab proper. For the computation of the column-head it has been replaced by a hyperboloid (fig. 1). The solution of the differential equation is given in the form of series of which a limited number of terms are used. When the theoretical value for the bending moment in the plate-centre is compared for the different theories little divergency is found. For varying size of the area of column-head reaction, Lewe finds 0.117 to $0.122 pa^2$, ($a = 1/2 l$), Tölke finds $0.114 pa^2$, the author comes to $0.102 pa^2$, if for the contraction-coefficient is taken

$$m = \frac{1}{6} = 6.$$

The small differences may be readily explained by the principle of de Venant. The assumption made in reference to the restraint in and the support by the column-head may vary greatly in the various theories, however they have little effect on bending moments and other stress functions in the plate-centre.

For the other bending moments and especially for the negative mo-

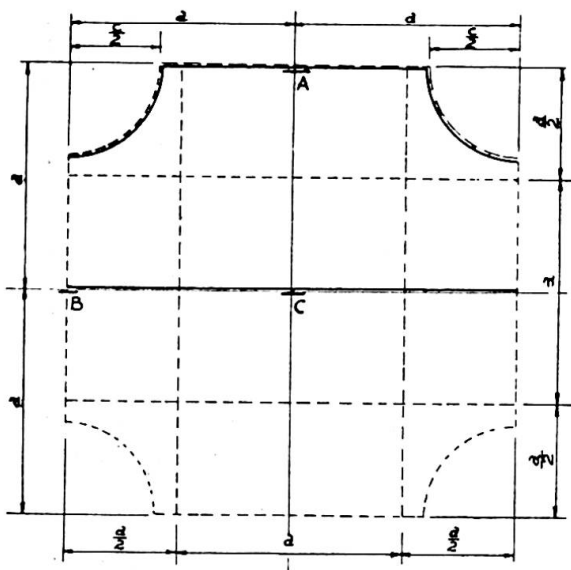


Fig. 2. Interior flat slab panel supported by columns arranged in a square.

⁽¹⁾ A. M. HAAS, *De berekening van paddestoelvloeren* (The calculation of flat slab floors), thesis 1948, Technical University of Delft, the Netherlands.

ment at the edge of or above the column-head there is little conformity. The different assumptions made in the theories are here of direct influence.

Large differences do not only exist as a result of the theoretical analysis; there are also important discrepancies between the theoretical values as a whole and the corresponding moment-coefficients given in the code. As a result there is little confidence in either the theories or the codes values. In 1934 the English Code of Practice for flat slab floors still speaks of "the absence of a satisfactory and easily applied theory" and largely follows the requirements given in the United States of America. As things stand now there are two ways of approach to the problem. One can even speak of two camps in which engineers who have to design flat slabs are divided. The ones using the code values do not look at the theory; on the other hand the engineers indulged in theoretical analysis do not as a rule bother themselves with the requirements stated in the regulations.

If the differences can be explained this is of ultimate importance for the promotion of flat slab floors especially outside of the United States of America. This paper is an earnest effort in that direction.

Comparison will be made for an interior flat slab panel supported by columns arranged in a square. The bending moments in the points marked A, B, C and at the edge of the column-head will be considered (fig. 2 and 3). The results are shown in tables I and II.

Positive bending moment at the slab centre (Point C)

From the very beginning of the use of flat slab floors testloading revealed that the bending moments in this centrepoint were very small. It was one of the outstanding facts which made these floors so popular. On the other hand, as explained in the introduction, the theoretical value of the bending moment in this point known. In the older (American) flat slab codes this bending moment amounts to about $0.06 pa^2$ ($a = 1/2 l$) whereas an average from the theoretical analysis (average in regard to the

	Theoretical value	Value from the A. C. I. 1947	Difference
Negative moment at column-head	$-0.56 qa^2$	$-0.52 qa^2$	-7%
Negative moment A.	$-0.065 qa^2$	$-0.078 qa^2$	$+20\%$
Positive moment B.	$+0.135 qa^2$	$+0.104 qa^2$	-23%
Positive moment C.	$+0.102 qa^2$	$+0.078 qa^2$	-24%

TABLE I. Bending moments in critical points of a flat slab floor.
Interior panel — Comparison between theory and code

various sizes of the columnhead) is 0.10 to 0.11 pa^2 . The explanation for this discrepancy is that the theoretical value is derived for a homogeneous material whereas the moments incorporated in the codes are based upon experimental investigations (mainly measuring elongations during test-loading). These measurements besides measuring the deflections at several points consisted chiefly in determining the elongations of the steel reinforcement. From the results found the bending moments were established.

It is obvious that if the total bending moment is composed of different parts and one part is furnished by the elongations ($=$ stresses) occurring in the reinforcing steel only a part of the total bending moment is found. This is the case here. The total bending moment is composed of two contributions viz. the moment due to the tensile stresses in the steel and that due to the tensile stresses in the concrete. In contradistinction to beams the relative contribution of the tensile stresses in concrete slabs is of importance.

For one who is familiar with the reinforced concrete theory and practice there arises the question whether the tensile stresses may be taken into account and if so, may be relied upon.

	Column-Head Negative moment		A. Negative moment	
	Formula used	Converted value	Formula used	Converted value
A. C. I. 1917	$-0.5 \times 0.09 \frac{WL}{\left(L - \frac{2}{3}c\right)^2}$	$-0.26 qa^2$	$-0.12 \times 0.09 \frac{WL}{\left(L - \frac{2}{3}c\right)^2}$	$-0.062 qa^2$
New York City regulations 1920	$-\frac{WL}{32}$	$-0.25 qa^2$	$\frac{WL}{133}$	$-0.061 qa^2$
A. C. I. 1947	$-0.5 \times 0.09 \frac{WL}{\left(1 - \frac{2c}{3L}\right)^2}$	$-0.26 qa^2$ (*)	$-0.15 \times 0.09 \frac{WL}{\left(1 - \frac{2c}{3L}\right)^2}$	$-0.078 qa^2$ (**)
English code 1938	$-0.046 \frac{WL}{\left(L - \frac{2}{3}D\right)^2}$	$-0.255 qa^2$	$-0.016 \frac{WL}{\left(L - \frac{2}{3}D\right)^2}$	$-0.089 qa^2$
Theoretical value $m = 6$		$-0.56 qa^2$		$-0.065 qa^2$
Lewe $m = 6$		$-0.3259 qa^2$		$-0.0734 qa^2$

(*) For the calculation of concrete in compression use $4/3 \times 3/2 \times 0.26 qa^2 = 0.52 qa^2$.

(**) For the calculation of concrete in compression use $4/3 \times 0.078 qa^2 = 0.102 qa^2$.

If the bending moment a slab can resist is determined by the conventional method of design the concrete in tension is supposed to be cracked. Thus only the reinforcement in tension is taken account of and a certain moment (M_3) will be found. If again this moment is established taking into account the tensile stresses in the steel (M_2) as well as in the concrete (M_1) a different amount will be found for the bending moment (fig. 4). For slabs with a low percentage of reinforcement the bending moment will be larger than when using the conventional method, even if the allowable tensile stress in the concrete is limited to a certain maximum. If for example the slab reinforcement is 0.4 %, $n =$ the ratio of the modulus of elasticity of steel to that of concrete in compression = 10; $m =$ the ratio of the modulus of elasticity of steel to that of concrete in tension = 40, the bending moment amounts to $5.09 bh^2$ using the conventional method.

If the allowable tensile stress in the concrete is put at 20 kg/cm^2 the slab can resist a moment of $6.20 bh^2$ per unit of width. Of this $6.20 bh^2$ 67 % or $4.18 bh^2$ is due to the concrete in tension. The tensile stress

B. Positive moment		C. Positive moment	
Formula used	Converted value	Formula used	Converted value
$\frac{0.18 \times 0.09 WL}{\left(L - \frac{2}{3} c\right)^2}$	$+ 0.094 qa^2$	$\frac{0.10 \times 0.09 WL}{\left(L - \frac{2}{3} c\right)^2}$	$+ 0.052 qa^2$
$+\frac{WL}{80}$	$+ 0.100 qa^2$	$\frac{WL}{133}$	$+ 0.061 qa^2$
$\frac{+ 0.20 \times 0.09 WL}{\left(1 - \frac{2c}{3L}\right)^2}$	$+ 0.104 qa^2$	$\frac{+ 0.15 \times 0.09 WL}{\left(1 - \frac{2c}{3L}\right)^2}$	$+ 0.078 qa^2$
$\frac{+ 0.022 WL}{\left(L - \frac{2}{3} D\right)^2}$	$+ 0.122 qa^2$	$\frac{+ 0.016 WL}{\left(L - \frac{2}{3} D\right)^2}$	$+ 0.089 qa^2$
	$+ 0.135 qa^2$		$+ 0.102 qa^2$
	$+ 0.1818 qa^2$		$+ 0.1176 qa^2$

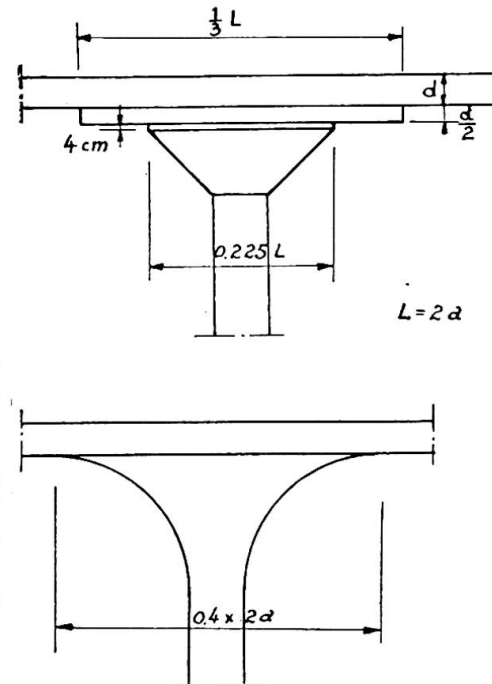


Fig. 3. Column heads used for the calculations of code-values (above) and for the theoretical values (right).

TABLE II. Bending moments in critical points of a flat slab floor — Interior panel

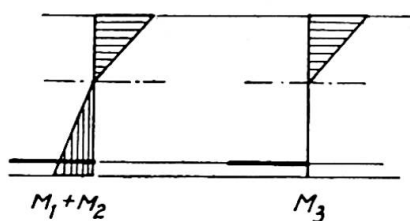


Fig. 4.

in the reinforcement corresponding to the 20 kg/cm² amounts to about 670 kg/cm².

If therefore the bending moment is established from elongation-measurements it will be derived from the value

$$6.20 bh^2 - 4.18 bh^2 = 2.02 bh^2,$$

whereas the moment that the slab can take according to the conventional method is $5.09 bh^2$ which is $2\frac{1}{2}$ as high. This shows clearly how small the apparent moment will be if the percentage of reinforcement is low. It also explains the large discrepancy between code and theory, which here in the centre-point amounts only to 24 % (see table I). For different ratio's of n and m , and for varying percentages of reinforcement one finds :

$$\sigma_c = 20 \text{ kg/cm}^2, \quad n = 10, \quad m = 40.$$

Percentage of reinforcement	x/h	M_1 Moment due to concrete in tension	M_2 Moment due to steel in tension	$M_1 + M_2$	$\frac{M_1}{M_1 + M_2}$	M_3 Moment according to conventional design
0.4	0.373	$4.18 bh^2$	$2.02 bh^2$	$6.20 bh^2$	0.67	$5.09 bh^2$
0.5	0.384	$4.11 bh^2$	$2.61 bh^2$	$6.72 bh^2$	0.61	$6.30 bh^2$
0.6	0.392	$4.06 bh^2$	$3.08 bh^2$	$7.14 bh^2$	0.57	$7.50 bh^2$

$$\sigma_c = 20 \text{ kg/cm}^2, \quad n = 10, \quad m = 10.$$

Percentage of reinforcement	x/h	M_1 Moment due to concrete in tension	M_2 Moment due to steel in tension	$M_1 + M_2$	$\frac{M_1}{M_1 + M_2}$	M_3 Moment according to conventional design
0.2	0.507	$3.29 bh^2$	$0.21 bh^2$	$3.50 bh^2$	0.94	$2.61 bh^2$
0.3	0.511	$3.26 bh^2$	$0.33 bh^2$	$3.59 bh^2$	0.91	$3.87 bh^2$
0.4	0.515	$3.25 bh^2$	$0.45 bh^2$	$3.88 bh^2$	0.88	$5.09 bh^2$

The next step is to find for which percentage of reinforcement the bending moments computed according to the conventional method equal the ones calculated when the concrete in tension is included.

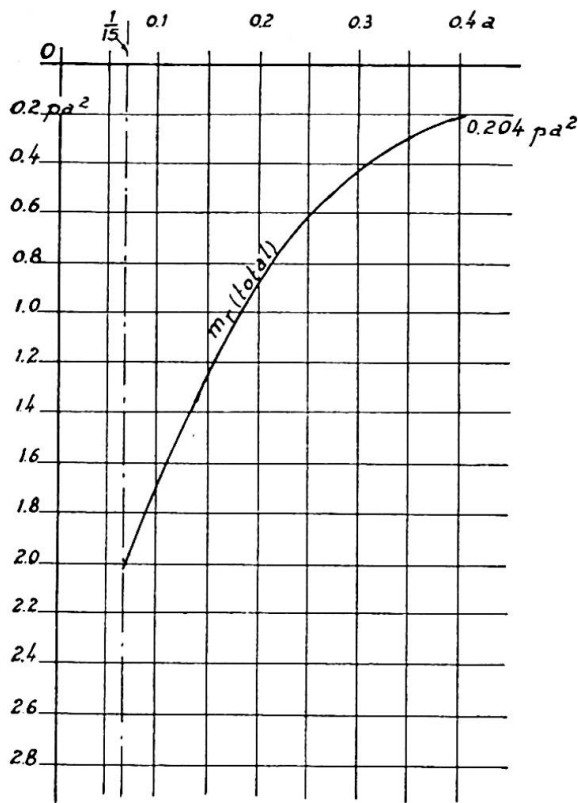


Fig. 5. Radial bending moment in hyperbolic column head.

For $\sigma_c = 15$ resp. 20 kg/cm^2 it is found for the relation

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} :$$

$\sigma_c = 15 \text{ kg/cm}^2$;	$n = 10$
$m = 10$	0.2 % reinforcement: 0.94
$= 20$	0.3 % reinforcement: 0.83
$= 40$	0.35 % reinforcement: 0.71
$\sigma_c = 20 \text{ kg/cm}^2$;	$n = 10$
$m = 10$	0.25 % reinforcement: 0.92
$= 20$	0.35 % reinforcement: 0.81
$= 40$	0.55 % reinforcement: 0.59

Above these percentages the bending moments calculated in the conventional way govern. These percentages will rank higher if the allowable maximum tensile stress in the concrete is taken higher. As a rule the

percentage of reinforcement in and around the slab centre runs from 0.25 to 0.35. These under-reinforced parts come in the region here described and are below the maxima here given.

To which extent this also can be applied to the larger bending moments in the normal reinforced parts (such as the column-bands) greatly depends on the quality of the concrete. If the quality is high so that high tensile stresses can be expected in the concrete the same that is mentioned for the slab centre holds true for these bending moments. However one can no longer rely upon it.

Concluding for the slab centre-(under-reinforced) parts the small moment-coefficients of the codes can be readily explained. To these small bending moments always comes a complementary moment due to the tensile stresses in the concrete. One may here speak of a symbiose. In slabs with low percentage of reinforcement this complementary moment even exceeds the original one. Therefore the difference of 24 % (see table I) will in general be exceeded depending on the quality of the concrete.

Negative bending moment at the edge of the column-head

As can readily be understood the bending moment at or near the edge of the column-head is one of the critical moments in flat slab design. When moving from the edge of the column-head to the column axis the increase of the radial bending moment is more rapid than the increase of the moment of resistance of the column-head the critical section will be at the edge. When however due to the form of the column-head the moment of resistance does not — in the beginning — increase as swiftly as the bending moment the critical section (that is the section where

the stresses are maximum) lies more inwardly. For a column-head without a drop-panel and with flares under 45 % the critical section is at the edge. For a column-head with a drop panel this section will be located somewhere between the edge of the column-head and the drop panel-edge depending on the thickness and the size of the drop.

In the building codes the bending moments are specified for bands which have mostly the width of half a panel. No distinction is made for bending moments differing over the width of the band. A clear comparison is therefore not possible. The best one can do is to compare the bending moment given in the code with the maximum bending moment resulting from the theory.

The theory of Lewy and others show its shortcomings when calculating the bending moments in this area. This is due to the assumption made, namely that a slab of uniform thickness extends above the column-head. Lewy finds $-0.326 pa^2$ at the column axis and $-0.067 pa^2$ at the edge. The theoretical analysis which takes into account a varying slab thickness finds larger bending moment viz. for

$$r = 0.4 a : m = -0.204 pa^2$$

and for

$$r = 1/3 a : m = -0.3324 pa^2; r = 0.225 a : m = -0.7 pa^2.$$

These bending moments have been computed replacing the column-head by a hyperboloid which approximates the actual form as closely as possible (fig. 5).

When the bending moment at the edge of the column-head is taken as the critical one and 20 % is deducted for various reasons (plastic flow, etc.) one arrives at the high figure of $0.56 pa^2$.

$$(0.8 \times 0.7 pa^2 = 0.56 pa^2)$$

In the rules given by the American Concrete Institute, for the first time in 1936, and also in the 1947-edition a clause has been introduced in which the calculation of the negative bending has been revised and made more severe. Instead of the whole width of the band only $3/4$ of it should be used in determining the compressive stress in the concrete. Thus a value is found which is $4/3$ higher than the one which follows when the whole section is introduced. The code even goes farther for drop panels which are often used. In that case the section to be introduced in the calculation should be restricted to $3/4$ of the width of the drop panel. With a drop panel width of $1/3$ of the panel this means that the compression in the concrete should be taken as $3/2 \times 4/3 = 2 \times$ the one which emanates from the calculation when the normal section is introduced. In the example the bending moment per unit of width will amount to $2 \times 0.26 pa^2 = 0.52 pa^2$. This comes very well in conformity with the theoretical value ($0.56 pa^2$).

The clause mentioned is restricted to the calculation of the compressive stresses in the concrete. In determining the amount of steel reinforcement no reduction of section is prescribed. This looks rather irrational but one should bear in mind that these excessive bending moments only occur in small areas. The steel is determined as a whole for a single band which has as a rule the width of half a panel. When excessive tensile stresses occur lateral distribution is very likely to take place as the quality of the concrete will be rather good in order to resist the high com-

pressive stresses in the concrete. Concrete of good quality also means high resistance to bond which is essential to lateral distribution. When rupture occurs the reinforcing bars will be loaded to the yieldpoint and all will take a maximum load (plasticity-behaviour).

Positive and negative bending moment halfway between the columns
(Points A and B)

These two moments are taken together as the phenomena by which they are influenced are partly the same. The difference is that the positive moment lies in an area of rather high percentage of reinforcement (columnbands) and the negative moment comes in an area of low percentage. Therefore only for the latter the tensile stresses in the concrete can be taken account of.

Already in 1925 a Hungarian civil engineer Dr. Nemenyi has drawn attention to the fact that a flat slab floor with its enlarged column-head bears in itself a possibility of acting as a dome. When this really is the case large compressive stresses will occur and consequently a reduction in the elongation of the steel will be experienced in comparison with the case when only bending is considered. On this assumption Dr Nemenyi has made his calculations which resulted in a remarkable reduction of the bending moments, especially of the plate centre.

This assumption however in general does not hold true as the construction cannot take the large horizontal thrust which is essential for dome- (or arch-) action. In the case of uniform loading the thrusts per panel neutralize each other in horizontal direction at every column support. In the end panel a similar neutralization will not be at hand and the columns are in general by no means strong enough to take the heavy thrusts. Thus the theory advanced by Nemenyi can in general not be applied.

There is however an internal arch-action which though less effective may account for the discrepancies in the bending moments here mentioned. First of all when the flat slab is loaded there come into existence compressive stresses due to the form of the column-head. As a result of the loading the deflection of the edge of the column-head will not strictly be vertical but also a little horizontal. For a normal case it has been calculated that the horizontal deviation is about $1/14$ of the vertical deflection. When two small bands of the slab are considered the compression in the plate can be determined when taking into account the horizontal deviation of the columnhead-edge. Thereby the assumption is made that the column-axis do not move and consequently the distances between the column-axis will not alter. When certain reasonable assumptions are made (slab thickness $= 1/17 a = 1/34 L$; stiffness of the columnhead against compression twice as large as that of the plate) it has been found by the author that the compression in the point halfway between the column amounts to 9 % of the compressive stress due to bending. For the plate centre there is a relation of 8 % (fig. 6).

A small amount of internal arch-action comes into existence as a result of the type of construction. If a part of the slab is considered in which the column band and the column head lie, no appreciable arch-action can take place because the columns at the end cannot take the thrust. If however these columns are more or less hindered in their horizontal movement an arch comes into shape. The horizontal deviation is hindered because there

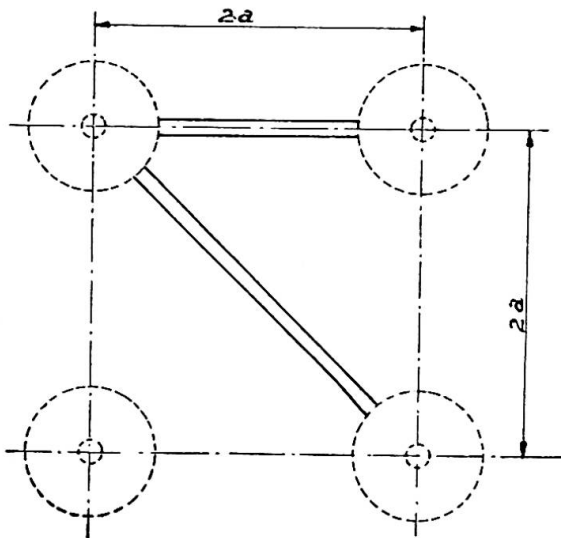


Fig. 6.

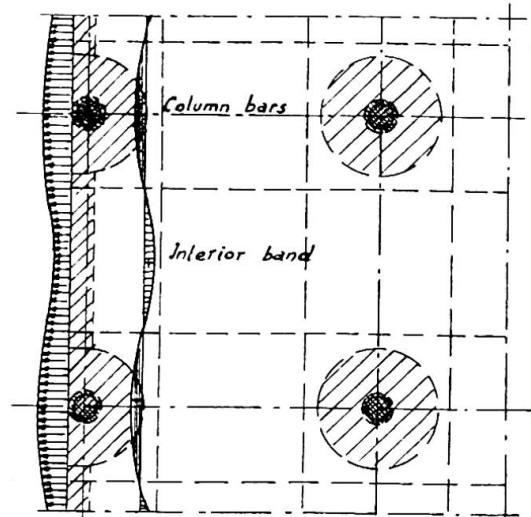


Fig. 7. Interior arch-action in an end panel.

is a continuous floor slab. On account of this, one part of the plate will experience compression (the column bands) and another part will be subject to tensile stresses (the bands running alongside of the columns). This being an internal action the sum of both the tension and compression must be zero. It is rather an intricate calculation to arrive to a reasonable distribution of these compressive and tensile stresses.

If a rough approximation is made and half of the panel-width is supposed to be in compression, the other half must be in tension. Thus the 8 to 9 % compression will correspond to 8 to 9 % tension. The assumed behaviour of an end panel is shown in figure 7.

When looking at the theoretical value for the positive bending moment this may be reduced with 9 % to be comparable with the moment-coefficient of the code : $0.91 \times 0.135 pa^2 = 0.123 pa^2$, whereas the code gives $0.104 pa^2$ (a difference of 18 %).

For the negative bending moment the 9 % should be added to the theoretical value. It then amounts to $-1.09 \times 0.065 pa^2 = -0.071 pa^2$, whereas the code gives $-0.078 pa^2$ (a difference of 10 %). Thereby it should be considered that calculations are made for homogeneous material and the values in the codes are based upon elongation-measurements.

Concluding there shows itself to a good concurrence between theory and code-coefficients if all factors concerned are taking into account and the theory has been adjusted to the form of the construction. Of course there cannot be expected equality as the code-values are a result of a compromise of a number of considerations.

Also it should be borne in mind that the comparison finds place between values of unequal weight as the theory gives the stress-functions at each point. Whereas in the regulations one value is given for a section which extends over the width of half a panel generally.

Résumé

Lors de la conception des dalles champignons il faut faire choix entre les prescriptions réglementaires et les résultats théoriques. Ce mémoire compare les deux éventualités, en se basant d'une part sur les derniers

règlements de l'American Concrete Institute datés de 1947, et d'autre part, sur les dernières théories faisant intervenir, dès le début, l'épaisseur variable de la tête de colonne. L'auteur attire l'attention sur la faible armature au centre de la dalle. Pour les parties faiblement armées, il faut ajouter un moment basé sur la traction dans le béton (béton tendu) au moment fléchissant correspondant aux armatures. D'autre part l'effet de voûte intérieur modifie les résultats obtenus par la théorie des plaques.

Une dernière ajoute au règlement américain, concernant les tensions de comparaison dans le domaine des moments fléchissants négatifs, donne des tensions de compression plus élevées en accord avec la théorie.

Ce mémoire compare les valeurs des moments fléchissants en quatre points critiques d'un cadre. Pour terminer l'auteur donne un exemple numérique.

Zusammenfassung

Beim Entwurf von Pilzdecken muss man sich entscheiden, ob man die Vorschriften anwenden oder die theoretischen Ergebnisse gebrauchen soll. In diesem Beitrag werden die beiden Möglichkeiten verglichen. Zu diesem Zweck werden die neuesten Vorschriften des American Concrete Institute vom Jahre 1947 als Grundlage angenommen. Sie wurden verglichen mit der neuesten Theorie, in der die veränderliche Dicke des Säulenkopfes schon zu Beginn in die Rechnung eingeführt wird. Es wird aufmerksam gemacht auf den kleinen Armierungsgehalt in der Plattenmitte. Für geringe Eisenprozent muss zu dem Biegemoment infolge der Armierung ein Biegemoment infolge der Betonzugspannungen gezählt werden. Ferner verändert eine innere Gewölbewirkung die Resultate der Plattentheorie.

Ein neuer Paragraph in den ACI-Vorschriften, der sich auf die Berechnung negativer Biegemomente bezieht, führt zu höheren Druckspannungen, was mit der Theorie übereinstimmt.

In vier kritischen Punkten, die in typischen Schnitten eines Innenfeldes liegen, werden die Werte der Biegemomente verglichen. Ein Beispiel ist beigelegt.

Summary

In designing flat slab floors a choice has to be made between two alternatives viz. following the regulations or using theoretical analysis. In this paper a comparison will be drawn between these two. For this purpose the latest regulations of the American Concrete Institute 1947 are taken as an example. They have been compared with the latest theory in which the varying thickness of the columnhead has been introduced from the beginning.

Attention is drawn to the low percentages of reinforcement in the slab center. For underreinforced parts of the slab a considerable bending moment due to tensile stresses in the concrete should be added to the bending moment due to the reinforcement. Furthermore an interior dome action modifies the results as given by the plate theory.

A comparatively new clause in the A. C. I. regulations in reference to the calculation of compression in the areas of negative bending leads to higher values of the compression stress which is in accordance with the theory.

In four critical points situated in typical sections of an interior panel the bending moment-values are compared. An example is given.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVa2

Dalles champignons

Pilzdecken

Mushroom slabs

CARLOS FERNANDEZ CASADO

Ingénieur-conseil à Madrid

Parmi les 24 ouvrages que nous avons projetés et construits depuis 1932 avec dalles champignon, citons notamment 3 ponts, 5 bâtiments pour habitation; les autres sont des bâtiments industriels de plusieurs classes.

Les avantages de ce type de construction qui nous ont décidé à l'adopter sont : capacité de résistance pour de fortes surcharges, minimum de hauteur perdue; simplicité constructive; réduction d'obstacles pour l'aménagement des tuyauteries, conduits d'air, câbles; facilité de nettoyage, etc.

Pour les trois ponts, il s'agit des palées d'accès aux travées principales, et pour lesquelles il allait réduire au minimum la hauteur perdue. Nous avons disposé deux, trois ou quatre rangées de colonnes en panneaux de $4,50 \times 4,50$ ou $5,00 \times 5,00$ selon le cas, avec des longueurs maxima sans joints de 40 mètres. La surcharge considérée est celle de l'*Instruction officielle des ponts routiers* c'est-à-dire, camions et rouleaux-compresseurs de 20 tonnes. L'épaisseur de la dalle est de 25 ou 30 cm avec bordures longitudinales renforcées par la surélévation du trottoir. Les extrémités de la dalle s'appuient bien sur les coulées de la travée principale ou bien finissent en dalle verticale que contient le remblai. Dans le pont de Puerta de Hierro (fig. 1a) la route était en pente et en courbe avec la pente transversale correspondante. Compte tenu de l'adaptation des planchers-champignons aux ponts, avec petite séparation des piliers, nous avons proposé au Ministère des Travaux publics des modèles normalisés pour deux, trois et quatre voies de circulation, modèles qui ont été approuvés officiellement.

Pour les bâtiments d'habitation, l'utilisation des dalles-champignons a son intérêt particulier dans les planchers des sous-sols, qui peuvent avoir à supporter de fortes surcharges avec une hauteur disponible assez réduite. La distribution des piliers est fixée par l'ossature générale, ce qui donne lieu à des panneaux irréguliers avec dimensions inégales. Quand le nombre d'étages est élevé, la rigidité des piliers en sous-sol est importante, et son efficacité est grande pour l'absorption des flexions à la dalle-champignon. Le projet le plus important où nous avons adopté cette solution est le triple sous-sol de l'édifice central de l'Instituto Nacional de Prevision à Madrid (fig. 3 et 4). Les surcharges que nous avons considérées dans les



Fig. 1. Pont de Puerta de Hierro (Madrid). Travées d'approche de 120 mètres de longueur et de 17 mètres de largeur. Dalle de 30 cm d'épaisseur.

différents projets varient entre 800 et 1 200 kg/m² et les épaisseurs adoptées entre 15 et 20 cm.

Dans les bâtiments industriels le cas typique est celui du magasin devant supporter de grandes surcharges. Le distribution des piliers en carrés égaux et la liberté dans le dimensionnement des chapiteaux, permet d'obtenir tous les avantages de cette construction. Dans le port de Pasajes (San Sebastian) nous avons construit en 1935-1936 quatre grands magasins à deux étages pour des surcharges de 1 500 à 2 500 kg/m² avec des pan-

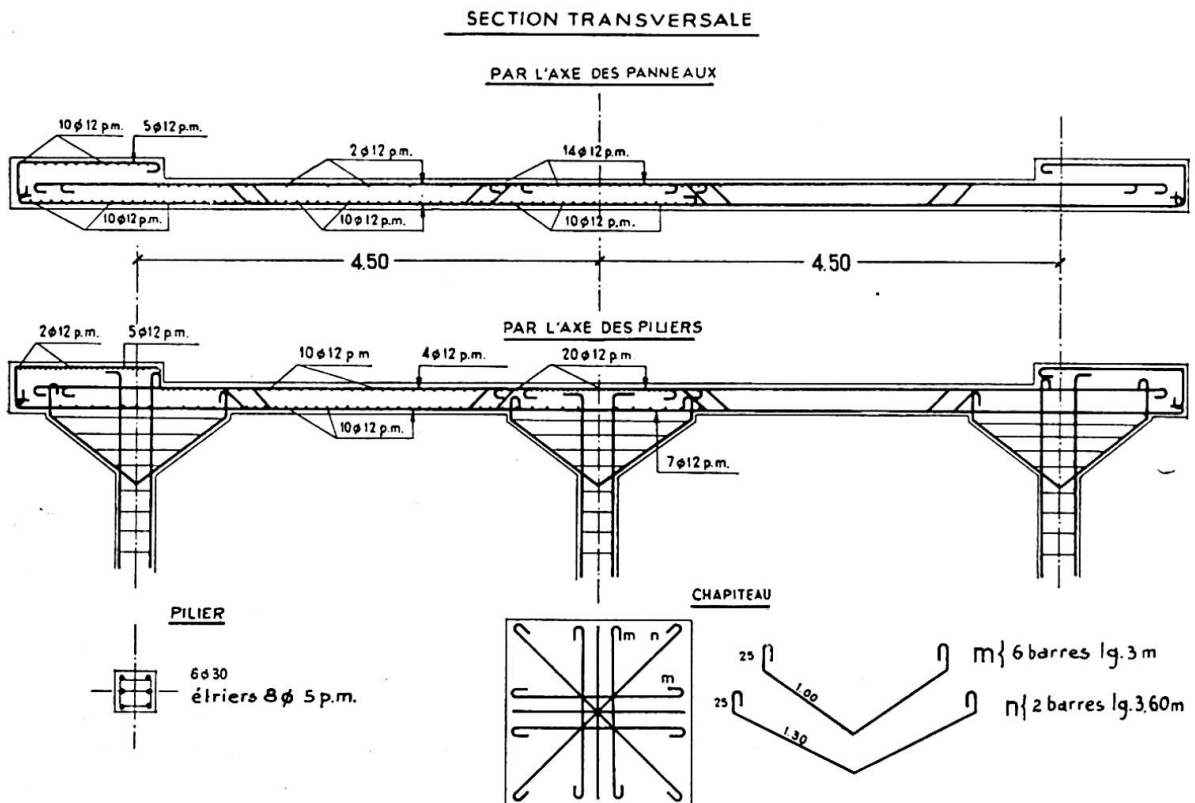


Fig. 2. Modèle normalisé de ponts en dalles-champignon pour trois files de véhicules.

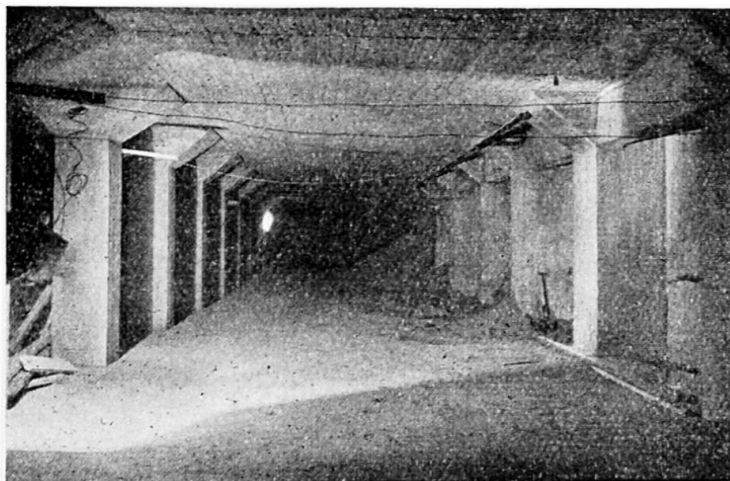


Fig. 3. Sous-sol du bâtiment central de l'Institut National de Prévision (Madrid) d'une surface utile de 3 600 m². La surcharge utile est de 900 kg/m².

neaux de $5,00 \times 5,00$ et $6,00 \times 6,00$ et des dalles de 22 et 26 cm d'épaisseur. Les façades ont été construites comme dalles verticales résistantes en béton armé (fig. 5 et 6).

Nous avons également adopté cette solution pour des planchers supportant des machines légères (fig. 7), pour des garages pour voitures de tourisme, plate-formes de service des grosses machines et dépôts d'eau enterrés ou non.

Dans tous les cas nous avons disposé l'armature en deux directions, avec dalles d'épaisseur constante. Les piliers et chapiteaux (sauf le cas du pont Puerta de Hierro) sont à sections carrées.

Pour tous les projets, la méthode de calcul utilisée a été celle des *portiques virtuels* préconisée par Marcus avec les portiques longitudinaux et transversaux que résultaient dans chaque cas particulier. Dans les ponts

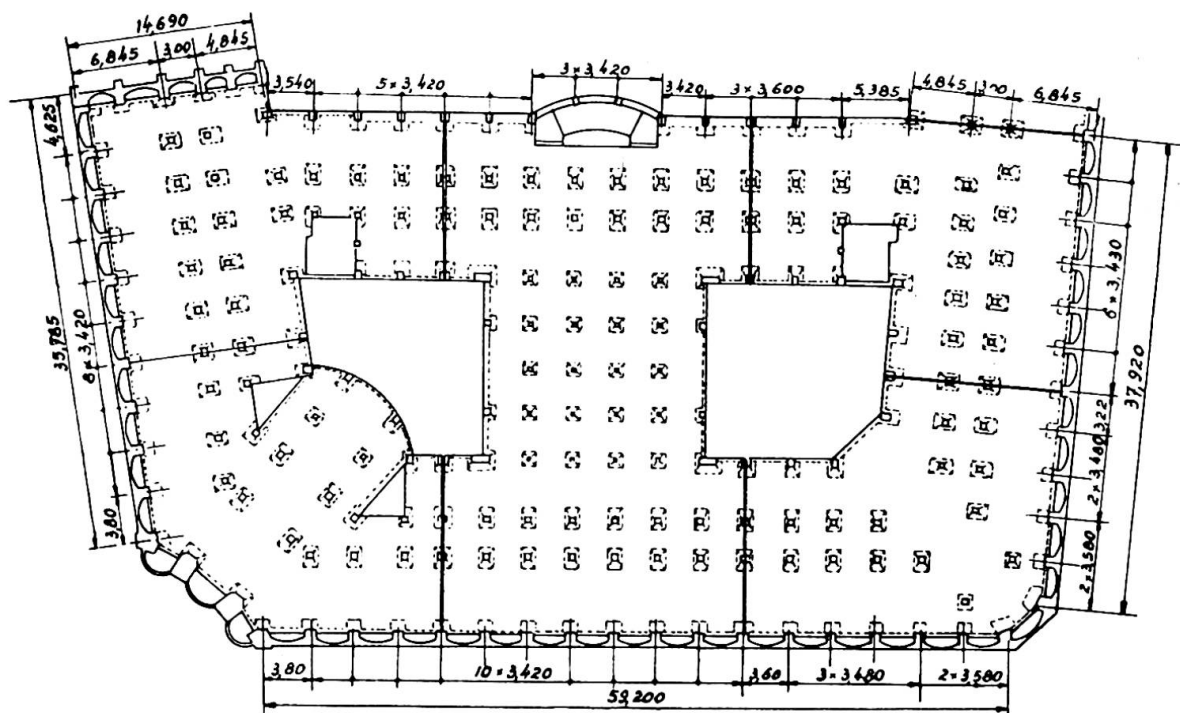


Fig. 4. Plan du sous-sol du bâtiment de l'Institut National de Prévision (Madrid).
(Voir fig. 3.)

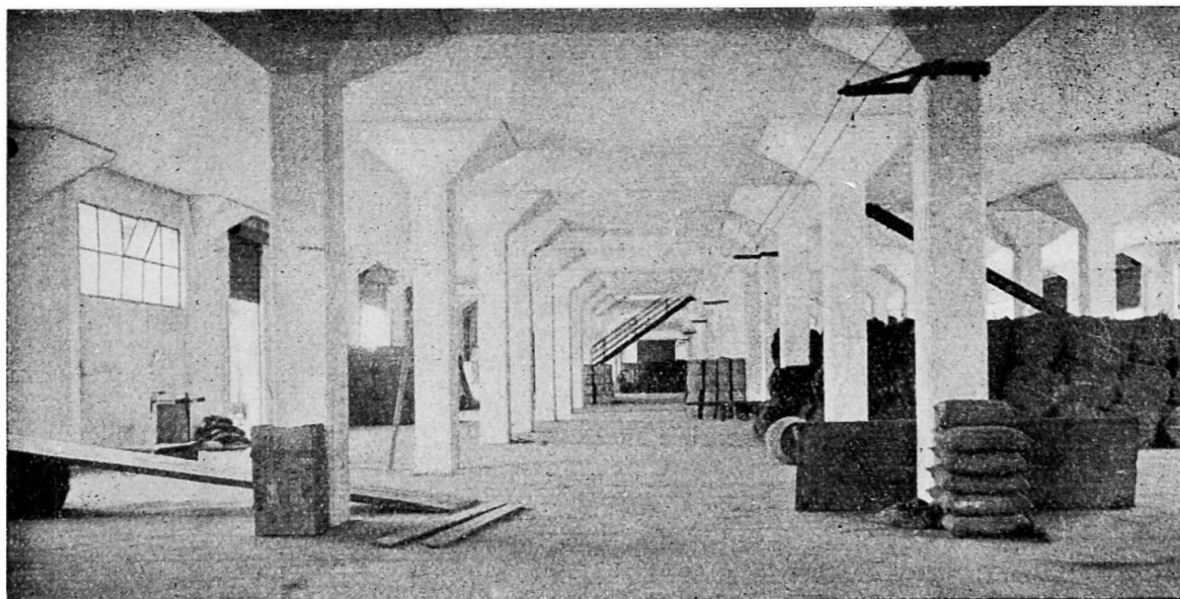


Fig. 5. Magasin à marchandises au port de Pasajes (San Sebastian) prévu pour des surcharges de 1 500 à 2 500 kg/m² et d'une superficie bâtie de 126 × 24 m.

et plates-formes indépendants il s'agit de portiques à un étage, mais dans les bâtiments on trouve toujours des portiques à plusieurs étages.

Pour l'analyse des portiques, nous avons employé la méthode de Cross de distribution des moments d'encastrement parfait. Dans les piliers nous avons considéré la variation du moment d'inertie qu'entraîne le chapiteau mais pour la dalle nous avons supposé la section constante. Nous n'avons pas considéré les effets de flexion pour les charges situées sur la longueur correspondante au chapiteau et nous avons admis que la réaction se distribue uniformément sur cette même longueur. Pour la détermination de cette longueur d'appui il faut mener des plans à 45° depuis la naissance du chapiteau. Dans ces conditions de distribution des charges les formules applicables dans les cas de surcharge continue sont respectivement (1) et (2) pour les moments d'encastrement parfait et maximum isostatique. Dans le calcul du portique virtuel nous tenons compte des hypothèses de distribution des surcharges les plus défavorables : total, alternés, etc., et nous avons pris en considération les déplacements transversaux quand il s'agissait de forces horizontales comme dans la poussée de terre ou la poussée de l'eau.

On obtient les moments unitaires pour le calcul de la dalle conformément avec la répartition indiquée par Marcus, en multipliant les moments

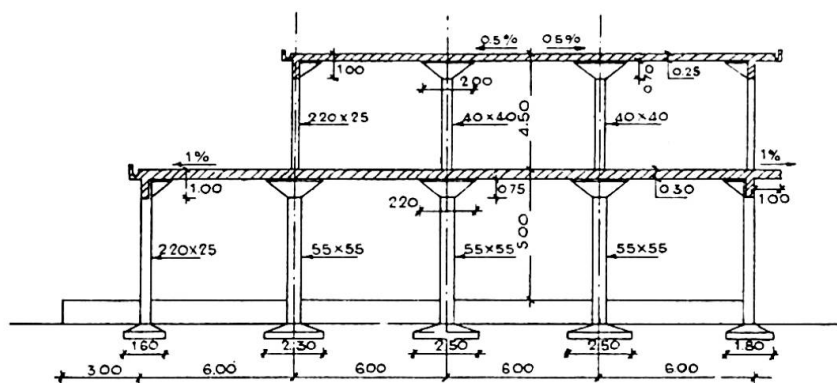


Fig. 6. Section transversale du Magasin visible à la figure 5.

Fig. 7. Sous-sol de l'Hôtel des Monnaies (Madrid) supportant des presses. Surface : 1 200 m². Surcharge : 1 000 kg/m².



fictifs obtenus dans les poutres du portique par les coefficients qui figurent dans le cadre II

Pour le calcul des piliers on utilise les moments obtenus lors de l'analyse du portique virtuel. Ils doivent résister également à la compression longitudinale correspondante.

Dans le projet des magasins de Pasajes avec des panneaux carrés égaux et régulièrement disposés dans les deux sens, nous avons fait une étude comparative des différentes méthodes de calcul utilisables : formules de Ross et Maillart d'origine expérimentale, diagrammes de Westergaard, méthodes des Marcus et Lëwe, méthodes préconisées par les règlements américains et danois et méthodes des portiques virtuels. Nous avons trouvé un excellent accord pour cette dernière méthode, exception faite, des valeurs correspondantes aux zones des chapiteaux, lesquels sont beaucoup plus élevés que tous les autres. Nous n'avons pas réussi à obtenir une comparaison expérimentale des résultats malgré la disposition, pendant la construction, de points de fixation pour des appareils de mesure. La mise en service prématuré ne nous a pas donné l'occasion.

Résumé

Nous jugeons que la méthode des *portiques virtuels* est très appropriée pour le calcul de ce type de construction et qu'elle est la seule utilisable

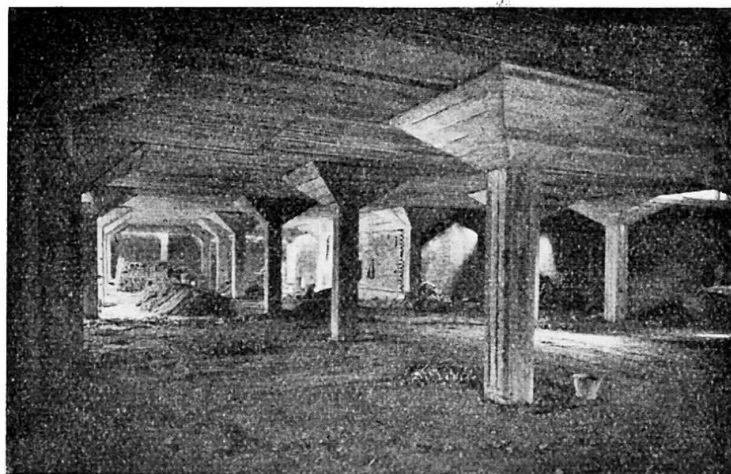


Fig. 8. Sous-sol de la minoterie Vallekermoso (Madrid). Surcharge : 1 500 kg/m² à distribution irrégulière.

pour des panneaux inégaux ou rectangulaires, ou lorsqu'il s'agit de surcharges isolées. L'analyse des portiques fictifs considérés se fait le plus facilement par la méthode de Cross, qui permet la résolution générale quelle que soit la distribution de panneaux et le nombre d'étages, sans avoir besoin de recourir à de nouvelles hypothèses de simplification.

Zusammenfassung

Wir glauben, dass die Methode des „stellvertretenden Rahmens“ für die Berechnung der Pilzdecken sehr geeignet und dass sie unersetzlich ist, wenn die Felder ungleich oder rechteckig sind oder auch, wenn es sich um Einzellasten handelt. Für die Analyse dieser Rahmen verwendet man am besten die Methode von Cross, da sie am schnellsten zum Ziele führt. Sie ermöglicht die Lösung für beliebige Felderteilung und beliebige Anzahl Stockwerke, ohne dass auf weitere vereinfachende Hypothesen zurückgegriffen werden muss.

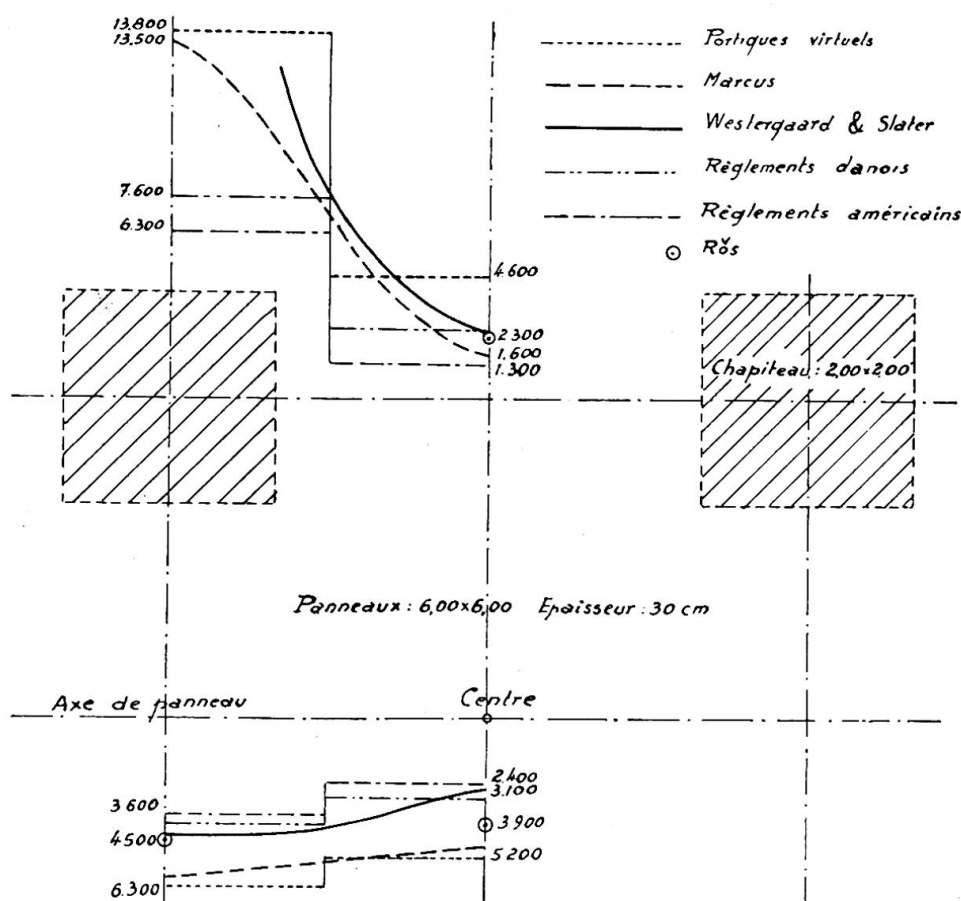


Fig. 9. Comparaison des résultats obtenus par diverses méthodes dans un panneau de la dalle de l'entrepôt de Pasajes.

Summary

We consider that the method of virtual frames is very appropriate for calculating this type of construction and that it is the only one for unequal or rectangular bays, or when it is a question of isolated loads. The analysis of the fictive gantries is best done by Cross's method which supplies the general solution, whatever the dispersal of the bays and the number of storeys, without having recourse to new simplification hypotheses.

IVb1

Introduction d'une théorie générale pour l'étude des voûtes minces de translation

Eine neue allgemeine Theorie von Translationsflächen

Introduction of a general theory of shells of translation

L. BROGLIO

Rome

Si on déplace en translation une courbe Γ_φ contenue dans un plan vertical le long d'une autre courbe Γ_θ contenue dans un plan vertical orthogonal au précédent, on obtient une surface dont la projection sur un plan horizontal est rectangulaire. Si on pose ladite surface sur le périmètre de sa projection au moyen de quatre tympans, on réalise le schéma géométrique d'une « voûte de translation » (fig. 1).

Pour l'étude d'un type de toiture si important dans les applications, dans l'hypothèse d'un régime statique à membrane, il existe un procédé connu, relaté par M. Flügge dans son traité classique ⁽¹⁾, duquel nous allons donner un bref résumé dans ce premier paragraphe.

En un point générique P (fig. 1) de la surface désignons par t_φ et t_θ respectivement les tangentes aux courbes Γ_φ et Γ_θ ; soient φ et θ les angles que t_φ et t_θ forment respectivement avec ses projections horizontales; assumons comme repère en P le trièdre oblique t_φ, t_θ, z , désignant par z la verticale dirigée vers le bas. Soient X, Y, Z les composantes de la charge extérieure par unité de surface, et soient encore $N_\varphi, N_\theta, N_{\varphi\theta}$ les efforts intérieurs de la structure, à savoir la traction dans la direction t_φ , la traction dans la direction t_θ et le cisaillement selon les deux directions obliques t_φ, t_θ , qui se rencontrent sous l'angle $\alpha = \arccos(\sin \varphi \cdot \sin \theta)$. Désignons enfin par $r_\varphi = r_\varphi(\varphi)$ et $r_\theta = r_\theta(\theta)$ les rayons de courbure de Γ_φ et de Γ_θ .

Le procédé que nous allons résumer consiste d'abord à exprimer mathématiquement les deux conditions suivantes: équilibre de toute portion élémentaire de voûte comprise entre deux Γ_φ et deux Γ_θ infiniment voisines, et incapacité de chaque tympan (qu'on imagine infiniment rigide dans son plan) à soutenir des actions orthogonales à lui.

⁽¹⁾ W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*, Berlin, Springer, 1934, pp. 91-100.

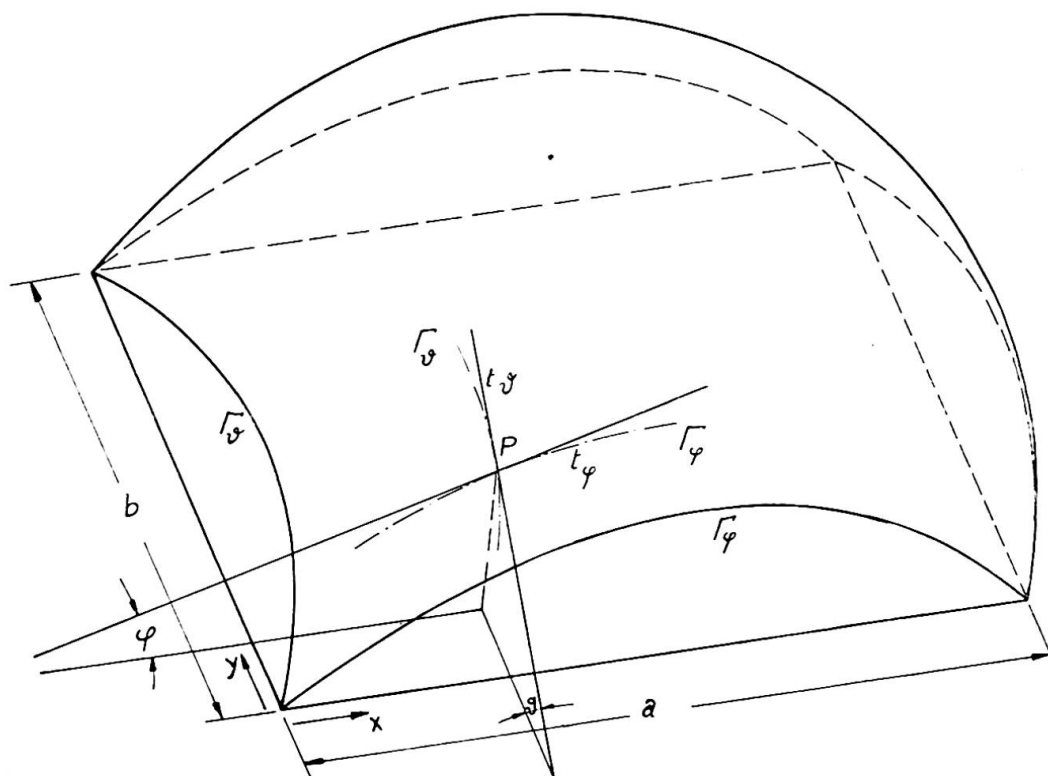


Fig. 1.

Les conditions d'équilibre selon t_φ , t_θ , z sont respectivement données par ⁽²⁾ (fig. 2) :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi \cos \varphi) + \frac{r_\varphi}{r_\theta} \frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \theta} \cos \varphi + X r_\varphi \cos \varphi \sin \alpha = 0 ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta \cos \theta) + \frac{r_\theta}{r_\varphi} \frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \varphi} \cos \theta + Y r_\theta \cos \theta \sin \alpha = 0 ; \quad (2)$$

$$(N_\varphi \cos \varphi) r_\theta \cos^2 \theta + (N_\theta \cos \theta) r_\varphi \cos^2 \varphi + Z r_\varphi r_\theta \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \alpha = 0 . \quad (3)$$

Les conditions sur les tympans sont respectivement ⁽³⁾ :

Le long des deux côtés $\varphi = \text{constante}$

$$N_\varphi = 0 ; \quad (4)$$

Le long des deux côtés $\theta = \text{constante}$

$$N_\theta = 0 . \quad (5)$$

Comme deuxième pas, le procédé en question réduit le système de (1), (2), (3), (4), (5) à contenir une seule inconnue $N_{\varphi, \theta}$. Dans ce but, il faut d'abord dériver (3) par rapport à φ et à θ , tenant compte des expressions que (1) et (2) donnent respectivement pour

$$r_\theta \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi \cos \varphi) \quad \text{et} \quad r_\varphi \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta \cos \theta) ,$$

⁽²⁾ Loc. cit., équations (54a, 54b), et (53c).

⁽³⁾ Loc. cit., p. 94.

de sorte qu'on arrive à l'équation (4)

$$\begin{aligned} r_{\varphi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos^2 \theta \frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \theta} \right) + r_{\theta} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos^2 \varphi \frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \varphi} \right) \\ = \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} (Z r_{\varphi} r_{\theta} \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \alpha) - r_{\varphi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} (X r_{\theta} \cos^2 \theta \sin \alpha) \\ - r_{\theta} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y r_{\varphi} \cos^2 \varphi \sin \alpha). \quad (6) \end{aligned}$$

En outre, si on dérive (3) par rapport à θ en tenant compte de (4) et qu'on substitue dans (2), ou si on dérive (3) par rapport à φ , en tenant compte de (5) et qu'on substitue dans (1), les conditions aux limites deviennent :

Pour $\varphi = \text{constante}$

$$\frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r_{\theta} \cos^2 \varphi \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (Z r_{\varphi} r_{\theta} \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \alpha) - Y r_{\varphi} \sin \alpha; \quad (4')$$

Pour $\theta = \text{constante}$

$$\frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \theta} = \frac{1}{r_{\varphi} \cos^2 \theta \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Z r_{\varphi} r_{\theta} \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \alpha) - X r_{\theta} \sin \alpha. \quad (5')$$

Comme troisième et dernier pas, il faut procéder à l'intégration de l'équation (6) avec les conditions aux limites (4') et (5'). Au point de vue mathématique ce problème présente des difficultés très considérables ; partant, les résultats obtenus par la méthode rappelée sont peu nombreux et se réfèrent⁽⁵⁾ surtout au cas des directrices Γ_{φ} , Γ_{θ} circulaires, et de la structure bissymétrique, chargée symétriquement uniquement par des forces verticales, variables selon la loi

$$Z \sin \alpha = \text{constante}.$$

Fonction des efforts pour la voûte de translation

Considérons le cas général d'une voûte de translation non-symétrique par rapport à n'importe quelle directrice et chargée de manière quelconque. La non-symétrie de la structure permet d'étudier une toiture posée sur des murs de hauteur inégale ; la faculté de choisir le type des directrices présente à son tour un intérêt parce qu'elle permet un choix plus large au point de vue économique et esthétique et parce qu'on peut ainsi satisfaire aux exigences de diverses natures, acoustique ou optique, éventuellement imposées pour la pièce à couvrir ; enfin, le cas de la charge répartie de n'importe quelle façon (en particulier, celui de la charge concentrée) a de l'importance pour une étude plus complète de la voûte ou pour l'examen des structures minces de translation pour des cas plus complexes que celui d'une simple toiture.

Désignons (fig. 1) par a et b les deux dimensions de la projection horizontale de la voûte. Assumons comme repère un trièdre cartésien, ayant l'origine à un des sommets du rectangle, et disposons les axes x , y selon

(4) *Loc. cit.*, éq. (55).

(5) *Loc. cit.*, p. 103.

les côtés a et b dudit rectangle : la direction z , comme on l'a dit au paragraphe précédent, est verticale, positive vers le bas. Les relations différentielles entre les coordonnées φ et θ du paragraphe précédent et les nouvelles coordonnées x, y sont naturellement les deux suivantes :

$$\frac{dx}{d\varphi} = r_{\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{dy}{d\theta} = r_{\theta} \cos \theta. \quad (7)$$

Les équations (1) et (2) du paragraphe précédent, qui expriment l'équilibre d'un élément de voûte dans le plan tangent deviennent alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} (N_{\varphi} \cos \varphi) + \frac{\partial (N_{\varphi, \theta}^{\infty})}{\partial y} \cos \theta + X \sin \alpha = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (N_{\theta} \cos \theta) + \frac{\partial (N_{\varphi, \theta})}{\partial x} \cos \varphi + Y \sin \alpha = 0. \quad (9)$$

Un ensemble de conditions nécessaires pour la résolution du problème examiné est donc constitué par (8), (9), (3), (4), (5). On constate que les équations (8) et (9) sont satisfaites si on introduit une fonction des efforts Φ telle que :

$$N_{\varphi} \cos \varphi = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{x}{a} \overline{\overline{X}}(y) - \overline{X}(x, y) \right) \cos \theta; \quad (10)$$

$$N_{\theta} \cos \theta = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{y}{b} \overline{\overline{Y}}(x) - \overline{Y}(x, y) \right) \cos \varphi; \quad (11)$$

$$N_{\varphi, \theta} = - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{a} \int_0^y \overline{\overline{X}}(y) dy + \frac{1}{b} \int_0^x \overline{\overline{Y}}(x) dx \right) + C \quad (12)$$

posant

$$\overline{X}(x, y) = \frac{1}{\cos \theta} \int_0^x (X \sin \alpha) dx; \quad \overline{Y}(x, y) = \frac{1}{\cos \varphi} \int_0^y (Y \sin \alpha) dy. \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{X}}(y) &= \frac{1}{\cos \theta} \int_0^a (X \sin \alpha) dx = \overline{X}(a, y); \\ \overline{\overline{Y}}(x) &= \frac{1}{\cos \varphi} \int_0^b (Y \sin \alpha) dy = \overline{Y}(y, b). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

et désignant par C , dans l'équation (12), une constante arbitraire.

Si on substitue les relations (10), (11), (12) dans les équations (3), (4), (5), on en tire l'équation :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_{\theta} \cos^3 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r_{\varphi} \cos^3 \varphi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \\ & = - \left[Z \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi \cos \theta} + \frac{1}{r_{\varphi} \cos^3 \varphi} \left(\frac{x}{a} \overline{\overline{X}} - \overline{X} \right) + \frac{1}{r_{\theta} \cos^3 \theta} \left(\frac{y}{b} \overline{\overline{Y}} - \overline{Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

avec les conditions de rive :

Pour $x = a$ et $x = 0$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \quad (16)$$

Pour $y = b$ et $y = 0$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (17)$$

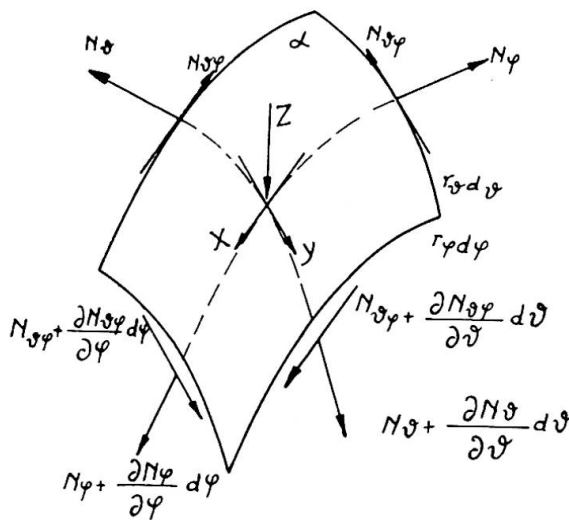


Fig. 2.

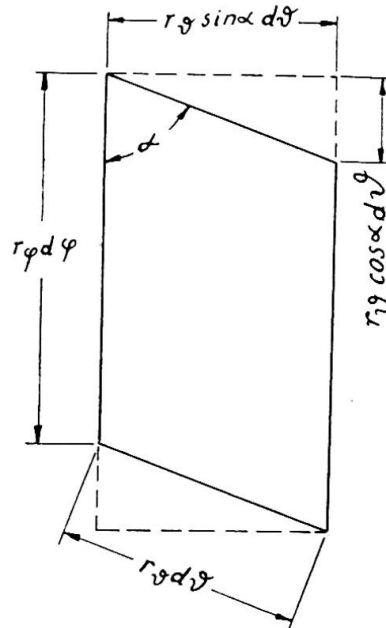


Fig. 3.

D'ailleurs il est bien évident que les relations (10), (11), (12) déterminent la fonction Φ à une fonction près :

$$\Psi(x, y) = k_1 + k_2 x + k_3 y + k_4 xy, \quad (18)$$

où k_1, k_2, k_3, k_4 sont des constantes arbitraires. En effet, si on ajoute la fonction Ψ à Φ pour un choix arbitraire de k_1, k_2, k_3, k_4 , les équations (10), (11), (12) restent inchangées, rappelant que C est une constante arbitraire elle aussi. Alors il suffit de choisir k_1, k_2, k_3, k_4 d'une telle façon qu'elles annulent la fonction Φ dans les quatre sommets du rectangle de base, à savoir, dans les points $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) , $(0, b)$ pour que les conditions (16) et (17) puissent être écrites :

Le long de toute la limite

$$\Phi = 0. \quad (19)$$

Si $z_\varphi = z_\varphi(x)$ et $z_\theta = z_\theta(y)$ sont respectivement les équations cartésiennes d'une quelconque Γ_φ dans un plan $y = \text{constante}$, et d'une quelconque Γ_θ dans un plan $x = \text{constante}$, on a naturellement, si on suppose partout $\varphi < \frac{\pi}{2}$, $\theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{1}{r_\varphi \cos^3 \varphi} = \left| \frac{d^2 z_\varphi}{dx^2} \right| = B(x); \quad (20)$$

$$\frac{1}{r_\theta \cos^3 \theta} = \left| \frac{d^2 z_\theta}{dy^2} \right| = A(y). \quad (21)$$

Rappelant en outre que :

$$Z^* = \frac{Z \sin \alpha}{\cos \varphi \cos \theta} \quad (22)$$

n'est que la composante verticale de la charge par unité de surface de la projection horizontale de la voûte, et posant

$$q(x, y) = Z^* + B(x) \left(\frac{x}{a} \bar{X} - \bar{X} \right) + A(y) \left(\frac{y}{b} \bar{Y} - \bar{Y} \right) \quad (23)$$

on tire de (15)

$$A(y) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (24)$$

Le problème relatif à la détermination de la fonction des efforts est ainsi complètement défini : il s'agit d'intégrer l'équation (24) avec la condition à la limite (19). On voit tout de suite qu'un tel problème équivaut à déterminer les déplacements verticaux d'une membrane rectangulaire, fixée le long de tout son contour, soumise à la charge $q(x, y)$ par unité de surface et tendue par une tension constante le long de chaque fil, c'est-à-dire, variable selon la loi $A(y)$ pour les fils parallèles à l'axe x , et selon la loi $B(x)$ pour les fils parallèles à l'axe y [il faut remarquer que $A(y)$ et $B(x)$, à cause de (20) et (21), sont essentiellement positives]. On a ainsi une précieuse analogie, par laquelle le calcul de la voûte de translation se transforme dans le calcul d'une simple membrane appuyée au contour. On peut tirer parti de cette analogie pour déterminer la fonction Φ par la voie expérimentale, comme on le dira ensuite. Avant d'étudier l'intégration de (24) avec la condition (19), il vaut mieux de compléter la mise en train générale du problème par une observation relative à l'effective détermination des efforts N_φ , N_θ , $N_{\varphi\theta}$ par la fonction Φ .

Les conditions de compatibilité pour les voûtes minces

Lorsqu'on a déterminé la fonction des efforts Φ au moyen de (24) et (19), on tire immédiatement de (10), (11) et (12) les efforts N_φ , N_θ et $N_{\varphi\theta}$. Mais ce dernier effort est en réalité déterminé par (12) à une constante arbitraire C près. Ce fait est tout logique, et dérive de la circonstance que les conditions d'équilibre (1), (2) et (3) et les conditions de rive (4) et (5) ne constituent pas en général un ensemble de conditions suffisantes pour la complète détermination des efforts N_φ , N_θ , $N_{\varphi\theta}$ dans la voûte. En fait on voit immédiatement que (1), (2), (3), (4), (5) sont vérifiés même après l'addition de n'importe quelle constante arbitraire à $N_{\varphi\theta}$. En un mot, la voûte de translation n'est pas, en général, un système isostatique, c'est-à-dire une structure où il est possible de déterminer les efforts au moyen des équations d'équilibre seulement, mais c'est un système hyperstatique, pour la résolution duquel il est nécessaire d'adjoindre des conditions de compatibilité aux conditions d'équilibre. Si les efforts intérieurs sont N_φ , N_θ , $N_{\varphi\theta}$ comme on l'a supposé, l'hyperstaticité de la voûte de translation se réduit à un seul paramètre, c'est-à-dire à une constante arbitraire à ajouter à $N_{\varphi\theta}$. Comme les équations (24) et (19) sont une traduction fidèle de (1), (2), (3) et de (4), (5), on conclut que nécessairement la connaissance de la fonction Φ doit rendre déterminés les efforts N_φ , N_θ , $N_{\varphi\theta}$ à une constante arbitraire près à ajouter à $N_{\varphi\theta}$. Pour compléter le calcul des efforts N_φ , N_θ , $N_{\varphi\theta}$, lorsqu'on a déterminé Φ par (24) et (19), il est suffisant de déterminer la valeur de la constante, qui paraît au deuxième membre de (12). Si la structure est symétrique et chargée symétriquement, pour des raisons de symétrie, $N_{\varphi\theta}$ doit s'annuler sur le

plan de symétrie, et la question est toute résolue : cela veut dire que la voûte symétrique, chargée symétriquement, devient isostatique par l'adjonction de la condition $N_{\varphi\theta} = 0$ aux conditions (4) et (5) en un point quelconque de la surface appartenant au plan de symétrie. Dans le cas général la constante C doit être déterminée, comme on a dit, par des conditions de compatibilité. A ce propos il faut observer que chaque tympan, qui a été supposé infiniment rigide dans son plan, et infiniment élastique dans la direction orthogonale, constitue pour les surfaces de translation une contrainte dont les réactions ne font pas de travail par effet des déformations dues à la charge : en effet les réactions qui appartiennent au plan du tympan ne font pas de travail car le déplacement des points d'application respectifs est nul, tandis que les réactions orthogonales audit plan ne font pas de travail parce que ce sont elles qui sont nulles par hypothèse. Par conséquent on peut appliquer aux voûtes de translation le théorème de Menabrea : bien mieux, lorsqu'on a satisfait toutes les conditions d'équilibre, le théorème de Menabrea résume toutes les conditions de compatibilité que la structure doit satisfaire ⁽⁶⁾. Remarquons que cette observation reste valable même si le régime statique de la voûte n'était pas à membrane, mais le plus général qu'il est possible. Comme les efforts N_φ , N_θ , $N_{\varphi\theta}$ calculés d'après les équations (10), (11), (12), satisfont déjà toutes les conditions d'équilibre, on peut déterminer le paramètre C qui paraît dans (12); si l'on pose

$$N'_{\varphi\theta} = - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{a} \int_0^y \bar{X}(y) dy + \frac{1}{b} \int_0^x \bar{Y}(x) dx \right), \quad (25)$$

en disant que C doit rendre *minimum* l'énergie de déformation de la voûte calculée en fonction de N_φ , N_θ , $N'_{\varphi\theta} + C$; N_φ , N_θ , $N'_{\varphi\theta}$ étant des fonctions désormais connues.

Pour calculer le travail élémentaire de déformation que les efforts N_φ , N_θ , $N_{\varphi\theta}$ produisent en une portion élémentaire $r_\varphi d\varphi$, $r_\theta d\theta$ de la voûte, le procédé que l'on va indiquer peut réussir avantageusement. Imaginons pour un moment que le parallélogramme $r_\varphi d\varphi$, $r_\theta d\theta$ fait partie d'un rectangle dont les côtés soient $r_\varphi d\varphi + r_\theta \cos \alpha d\theta$ et $r_\theta \sin \alpha d\theta$ (fig. 3). Supposons que ce rectangle soit soumis : a) à une traction simple, d'intensité unitaire σ_1 , dans la direction de t_φ ; b) à une traction simple, d'intensité unitaire σ_2 , dans la direction orthogonale; c) à un cisaillement simple, d'intensité unitaire τ , selon les deux directions orthogonales représentées par les côtés du rectangle. Le travail de déformation de la partie de rectangle qui correspond au parallélogramme de côtés $r_\varphi d\varphi$, $r_\theta d\theta$ est alors :

$$dL = \frac{1}{2} d\Omega \left(\frac{\sigma_1^2 h}{E} + \frac{\sigma_2^2 h}{E} + \frac{\tau^2 h}{G} \right) \quad \boxed{d\Omega = (r_\varphi r_\theta \sin \alpha) d\varphi d\theta} \quad (26)$$

où E et G sont les modules d'élasticité à la traction et au cisaillement, h l'épaisseur variable de la voûte, $d\Omega = r_\varphi r_\theta \sin \alpha d\varphi d\theta$ la surface du parallélogramme, ayant supposé nul le coefficient de contraction latérale (voûte en béton armé). Les trois types de tensions a , b , c ont été

⁽⁶⁾ Cf. par exemple L. BROGLIO, *Introduzione d'un metodo in doppio per il calcolo delle strutture elastiche* (Atti di Guidonia, 1941).

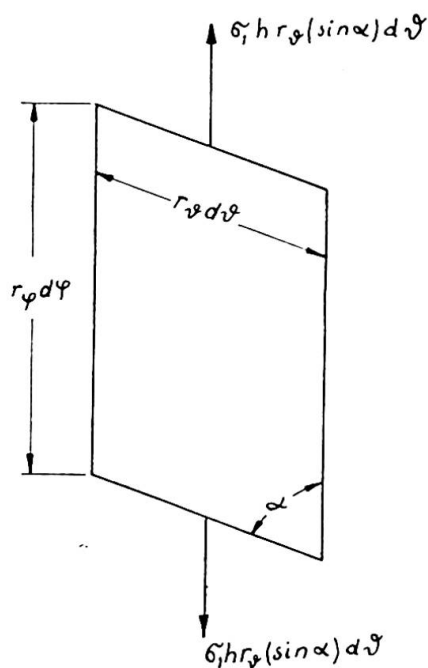


Fig. 3a.

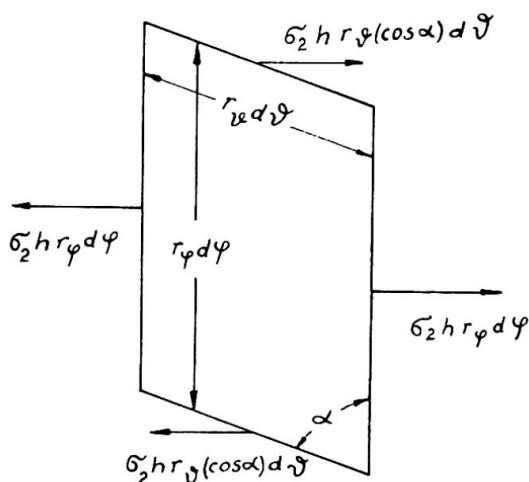


Fig. 3b.

représentés dans les figures 3a, 3b, 3c. On voit ainsi qu'il suffit de poser :

$$\sigma_2 h = N_\theta \sin \alpha ;$$

$$\tau h = N_{\varphi\theta} + N_\theta \cos \alpha ;$$

$$\sigma_1 h = \frac{N_\varphi}{\sin \alpha} + \frac{2 N_{\varphi\theta}}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{N_\theta \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} ;$$

pour que la superposition des trois cas a, b, c conduise au vrai état de tension de l'élément de voûte. Le travail de déformation global est alors :

$$L = \frac{1}{2} \iint \left[\frac{1}{Eh} \left(\frac{N_\varphi}{\sin \alpha} + \frac{2 N_{\varphi\theta}}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{N_\theta \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 + \frac{1}{Eh} (N_\theta \sin \alpha)^2 + \frac{1}{Gh} (N_{\varphi\theta} + N_\theta \cos \alpha)^2 \right] r_\varphi r_\theta \sin \alpha d\varphi d\theta \quad (27)$$

où l'intégrale est étendue à toute la voûte. Naturellement il suffit de rappeler les équations (7) pour que l'intégrale ait comme variables d'intégration x et y au lieu de φ et θ . Comme $G = \frac{1}{2} E$, en rappelant que $\cos \alpha = \sin \varphi \sin \theta$:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{N_\varphi^2 + N_\theta^2}{\sin^2 \alpha} + 2 \left(1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) N_{\varphi\theta}^2 + 2 \frac{N_\varphi N_\theta}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 4 \frac{(N_\varphi + N_\theta) N_{\varphi\theta}}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} \right] \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \theta} \frac{dx dy}{Eh} . \quad (28)$$

Dans l'équation (28) les fonctions

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz_\varphi}{dx} ; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{dz_\theta}{dy} \quad (29)$$

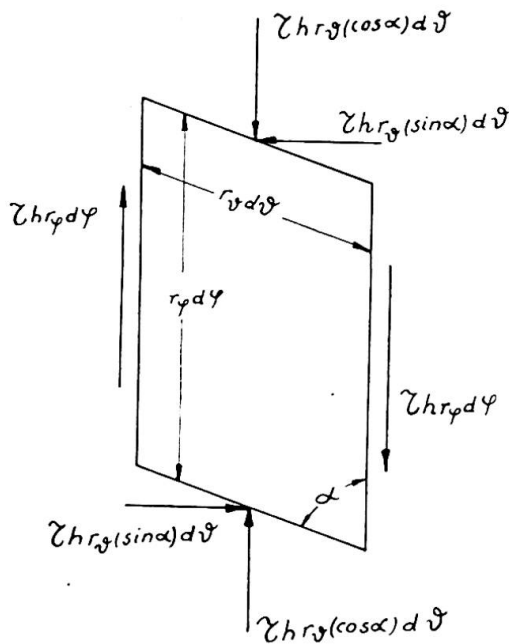


Fig. 3c.

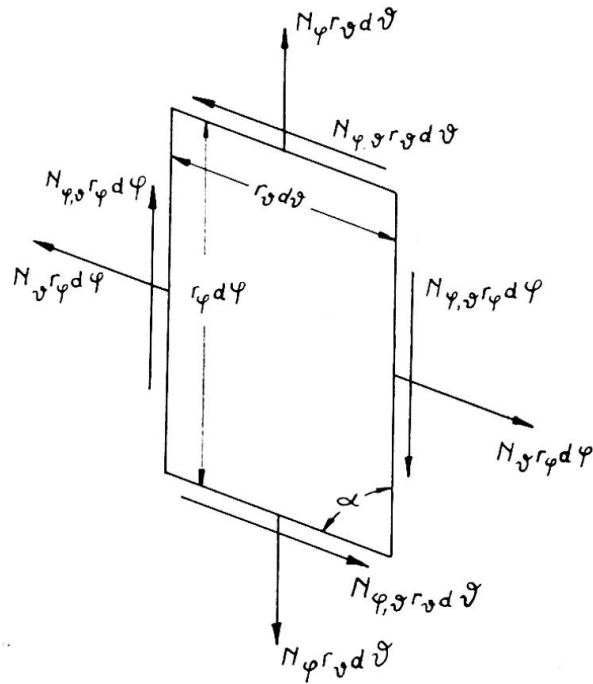


Fig. 4.

sont des fonctions connues ne dépendant que des équations cartésiennes $z_h = z_\varphi(x)$ et $z_\theta = z_\theta(y)$ des deux directrices Γ_φ et Γ_θ . Remarquons que dans l'intégrale (28) N_φ et N_θ sont traitées symétriquement, exactement comme il doit être, étant donné que dans la génération géométrique de la voûte le rôle de Γ_φ et Γ_θ peut être échangé. Si l'on pose alors, d'après (25),

$$N_{\varphi\theta} = N'_{\varphi\theta} + C \quad (30)$$

pour que C rende minimum l'intégrale (28), il faut que

$$-C = \frac{\int_0^a \int_0^b \left[\left(1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) N'_{\varphi\theta} + \frac{N_\varphi + N_\theta}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} \right] \sqrt{1 + \left(\frac{dz_\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz_\theta}{dy} \right)^2} dx dy}{\int_0^a \int_0^b \left(1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{dz_\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz_\theta}{dy} \right)^2} dx dy} \cdot \quad (31)$$

Le problème de la détermination des efforts dans la voûte est ainsi complètement résolu. Naturellement si la voûte est symétrique et chargée symétriquement il faut que $C=0$, comme on le voit de (31), rappelant que dans ce cas $N'_{\varphi\theta}$ ainsi que $\frac{N_\varphi + N_\theta}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \left(\frac{N_\varphi + N_\theta}{\sin^2 \alpha} \right) \cos \alpha$ sont antisymétriques.

Solution du problème au moyen de l'analogie de la membrane

Comme on l'a déjà observé, par l'équation (24) avec les conditions aux limites (19), l'étude d'une voûte mince de translation dans les conditions géométriques et de charge les plus générales est réduit à un problème qu'on peut dire élémentaire, c'est-à-dire, à l'étude d'une membrane

rectangulaire fixée au contour et tendue uniformément le long de chaque fil. Ce problème peut, en l'occurrence, être étudié par voie expérimentale. En effet, il suffit de substituer à la membrane un réseau de fils suffisamment serré, produire par des poids une tension constante $A(y)$ le long de chaque fil parallèle à l'axe x et une tension constante $B(x)$ le long de chaque fil parallèle à l'axe y , et enfin appliquer à la membrane la charge $q(x, y)$, pour avoir dans les déplacements verticaux Φ dudit réseau la solution de (24). L'auteur a déjà obtenu par cette voie un nombre remarquable de résultats, se servant d'une méthode de mesure des déplacements verticaux qui permet d'obtenir, avec une grande facilité et rapidité, une précision supérieure à une fraction de micron. L'analogie de la membrane se présente particulièrement utile pour l'étude des charges concentrées.

Solution du problème par la méthode de l'équivalence

La solution de l'équation (24) avec les conditions (19) peut être facilement conduite par voie analytique aussi, par des procédés d'approximations successives. Outre les méthodes de ce type déjà connues, l'auteur a étudié une application particulière à ce problème de la méthode d'équivalence⁽⁷⁾. Faute de place, nous renvoyons à un autre mémoire pour l'exposition du résultat obtenu par cette voie.

Cas remarquables

Le cas des actions extérieures uniquement verticales est particulièrement important. Dans ce cas le problème est réduit à intégrer l'équation

$$A(y) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -Z^* \quad (32)$$

Z^* étant la charge par unité de surface de la projection verticale de la voûte. Les conditions à la frontière sont à l'ordinaire $\Phi = 0$ le long de tout le contour. Quand on a déterminé Φ , il vient :

$$N_\varphi \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} ;$$

$$N_\theta \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} ;$$

$$N_{\varphi\theta} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + C ; \quad N'_{\varphi\theta} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} .$$

La constante C est donnée par l'équation (31).

Le cas où les directrices sont deux paraboles est très intéressant aussi. Alors $A(y)$ et $B(x)$ sont constantes. L'équation (32) devient immédiatement l'équation d'une membrane rectangulaire à tension constante, char-

⁽⁷⁾ L. BROGLIO, *A method of equivalence applied to the solution of problems of elasticity and of Mathematical Physics* (VII. Int. Cong. App. Mech., 1948).

gée de n'importe quelle façon. Supposant que les équations des directrices paraboliques donnent

$$\left| \frac{d^2 z_\varphi}{dx^2} \right| = \frac{1}{h^2} ; \quad \left| \frac{d^2 z_\theta}{dy^2} \right| = \frac{1}{k^2}$$

il est suffisant de poser

$$kx = \frac{\xi}{T} ; \quad hy = \frac{\eta}{T}$$

et $T = \text{constante}$, pour que (32) devienne

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = - \frac{Z^*}{T} .$$

équation dont la solution est bien connue. Pour $Z^* = \text{constante}$ on a en particulier ⁽⁸⁾ :

$$\Phi = \frac{4 Z^* a^2}{T \pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} . \quad (33)$$

en prenant l'origine au centre du rectangle qui est la projection verticale de la voûte.

Remarque

Dans le cas qu'on vient de considérer (directrices paraboliques et charge verticale uniforme selon la projection horizontale), l'ancienne théorie, à savoir les équations (6) avec les conditions (4') et (8') donnent $N_{\xi\theta} = \text{constante}$. Si on suppose la structure symétrique, on a $N_{\xi\theta} = 0$. Substituant dans (1) et (2) et rappelant (4) et (5) on a $N_\xi = N_\theta = 0$. En un mot, l'équation (6) avec les conditions (4') et (5') porte, dans le cas considéré, à une solution où les efforts sont nuls dans toute la voûte. Cette solution n'est pas identique à celle qu'on obtient dans l'équation (33) et, d'ailleurs, ne satisfait pas l'équation d'équilibre (3). Cette discordance provient du fait que l'équation (6) avec les conditions (4') et (5') n'a pas été déduite des relations (1), (2), (3), (4), (5), mais de (1), (2), (4), (5) et par des relations dérivées de (3). Cela veut dire que (6) avec (4') et (5') ne tiennent pas compte de la vraie équation d'équilibre, mais seulement de dérivées de cette équation.

Résumé

Dans ce mémoire on introduit une théorie générale des voûtes minces de translation, qui permet une solution complète du problème. Au moyen d'un changement de variables et grâce à l'introduction d'une fonction des efforts, on réduit le problème à l'étude de la membrane rectangulaire

⁽⁸⁾ S. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity*, New York, 1934, p. 246.

tendue et fixée le long de son contour. La méthode permet, sans difficultés particulières, l'étude des voûtes non symétriques et chargées non symétriquement, pour lesquelles on démontre la nécessité d'adjoindre aux conditions d'équilibre (qui sont les seules usitées) une condition de compatibilité exprimée par le théorème de Menabrea.

Cette méthode permet la résolution, dans le cas des charges concentrées aussi. La solution de la voûte aux directrices paraboliques soumise à une charge quelconque répartie selon la projection horizontale, dans la méthode proposée, est réduite à celle bien connue d'une membrane rectangulaire fixée le long de son contour, uniformément tendue et chargée par la même charge.

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird eine allgemeine Theorie der Translationsflächen entwickelt, die die vollständige Lösung dieses Problems ermöglicht. Mittels einer Variabelntransformation und der Einführung einer Spannungsfunktion kann das Problem auf dasjenige der an den Rändern gehaltenen, gespannten Membran zurückgeführt werden. Die Methode erlaubt ohne besondere Schwierigkeiten die Behandlung von unsymmetrischen und unsymmetrisch belasteten Schalen. Es wird gezeigt, dass für die letzteren den Gleichgewichtsbedingungen (welche in den bisherigen Veröffentlichungen allein betrachtet wurden) eine Verträglichkeitsbedingung hinzugefügt werden muss, die mit dem Theorem van Menabrea hergeleitet werden kann.

Diese Methode ermöglicht die Lösung auch im Falle von konzentrierten Lasten. Die Lösung der Schale mit parabolischen Leitkurven und mit einer über die Horizontalprojektion gleichmässig verteilten Belastung, wie sie in der vorgeschlagenen Methode angegeben ist, wird zurückgeführt auf die wohlbekannte Methode der an den Rändern gehaltenen, gleichmässig gespannten und gleichmässig belasteten, rechteckigen Membran.

Summary

In this paper one is introduced to a general theory of shells of translation, which provides a complete solution of the problem. By means of a change of variable quantities and thanks to the introduction of a stress function, the problem is reduced to the study of the rectangular membrane, stretched and fixed along its boundary. Without any particular difficulty, the method enables to study shells, that are non-symmetrical and non-symmetrically loaded, for which the author stresses the necessity of adjoining to the equilibrium conditions (which are the only ones used) a condition of compatibility expressed by Menabrea's theorem.

This method provides a solution, in the case of concentrated loads too. The solution of a shell with parabolic directrices, subjected to a load evenly distributed on the horizontal projection in the proposed method, is reduced to the well known one of a rectangular membrane fixed along its boundary, uniformly stretched and evenly loaded.

IVb2

La charge de rupture de dalles en béton armé

Die Bruchlast von Eisenbetonplatten

The ultimate strength of reinforced concrete slabs

K. W. JOHANSEN

Dr techn. Copenhagen

It is evident that in the determination of the ultimate load the theory of elasticity is inapplicable. Already after the development of cracks and, more particularly, after yielding of the reinforcement has begun, the state is not elastic any longer. As the working load has to be fixed in proportion to the ultimate load, a theory of the yielding or plastic state of reinforced concrete slabs is desirable. An outline of the « theory of lines of fracture » will therefore be given in the following.

Let us consider a slab with uniform reinforcement in two directions at right angles to each other. When the reinforcement is evenly distributed, the yield value will be the same in all sections of the slab. The yielding will begin where the values will have maximum magnitude, and proceed along the lines of fracture. At the ultimate load the yielding has reached the edges, and along the lines of fracture the bending moment m per unit length is constant and equals the yield value corresponding to the reinforcement. This moment m is a maximum value in relation to the moments in all sections in the proximity of the lines of fracture. The lines of fracture divide the slab into several parts, and if now we assume the elastic deformations of these slab parts to be insignificant in comparison with the plastic deformations along the lines of fracture, the slab parts may be considered as plane. It then follows that the lines of fracture are straight lines. On the said assumption the deformation may be considered as angular rotations of the plane slab parts about the supports, and consequently the line of fracture between two slab parts must pass through the point of intersection of the axes of rotation of the two slab parts. Figure 1 shows some typical figures of fracture of slabs supported on four, three, and two sides, as well as on two sides and by one column, and on one side and by two columns, respectively. The axes of rotation lie in the supported sides and pass through the columns. The final determination of the figure of fracture and the breaking moment m is achieved with the conditions

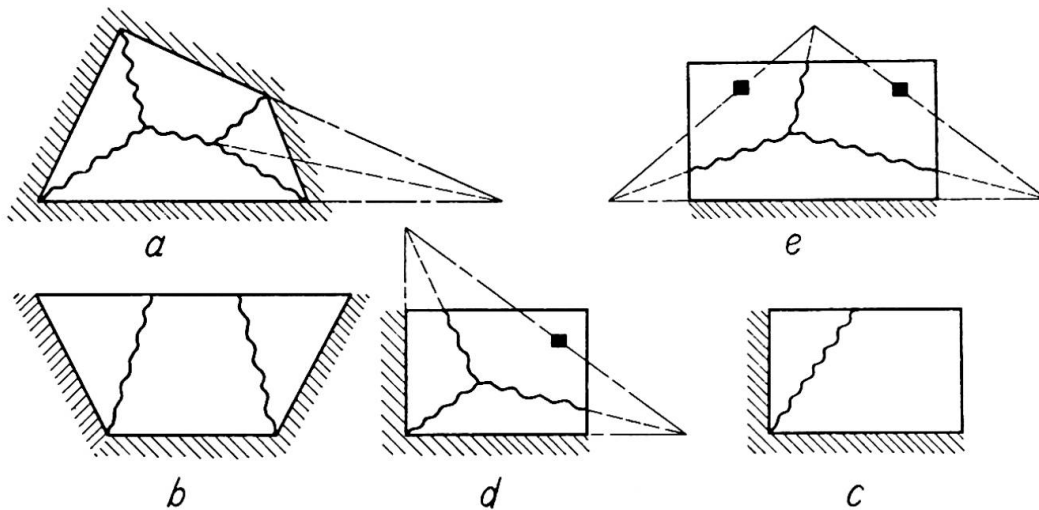


Fig. 1.

of equilibrium for the individual parts of the slab. For recording these conditions it is necessary to know the shearing forces along the lines of fracture. m being a maximum value in relation to the moments in sections in other directions through the same point, it is one of the principal moments, that is to say, the twisting moment is zero along the lines of fracture. We then find — as is also the case with a beam — that the shearing force is zero because m is maximum in relation to the moments in sections parallel to the section of fracture through adjacent points. Thus, only the bending moment m acts in the section of fracture, and the total moment may be represented by a vector equal to the line of fracture. The resulting moment for a part of the slab is found by vector addition.

Example 1. — A triangular slab with evenly distributed load is simply supported along its sides. According to the above, the figure of fracture will be as shown in figure 2. Let us consider the slab part at a . In the line of fracture OB acts the moment $m \cdot BO$, and in the line of fracture OC the moment $m \cdot CO$. On the whole slab part acts $m (BO + OC) = m \cdot BC = m \cdot a$. The moment about a gives the condition of equilibrium $m \cdot a = 1/6 wa \cdot h_a^2$, or $m = 1/6 wh_a^2$. Correspondingly, we get for the other slab parts $m = 1/6 wh_b^2$ and $m = 1/6 wh_c^2$, i.e., $h_a = h_b = h_c = r$, where r is the radius of the inscribed circle. The breaking moment is $m = 1/6 wr^2$, where w is the ultimate load.

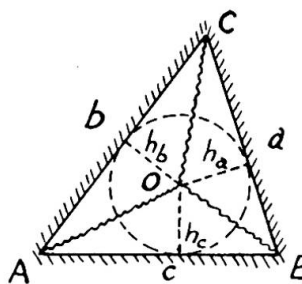


Fig. 2.

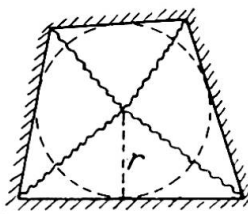


Fig. 3.

For all polygons circumscribed the circle with the radius r (fig. 3), it will be seen directly that also here we have $m = 1/6 wr^2$; for the square having the side a , specially $m = 1/24 wa^2$. (For rectangle see INGERSLEV, *Institution of Structural Engineers' Journal*, 1923.)

The ultimate load being n times the working load, and the breaking moment n times the working moment, where n is the coefficient of safety, we can also let m and w mean the permissible values.

With a free or simply supported edge, both the bending moment and the twisting moment should strictly speaking be zero. This involves that the lines of fracture should be at right angles to the edge. This is really

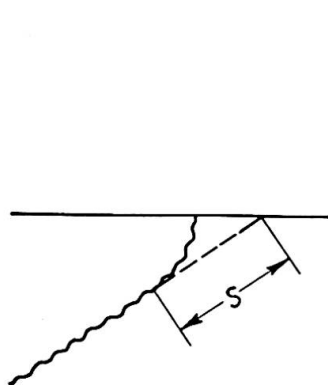


Fig. 4.

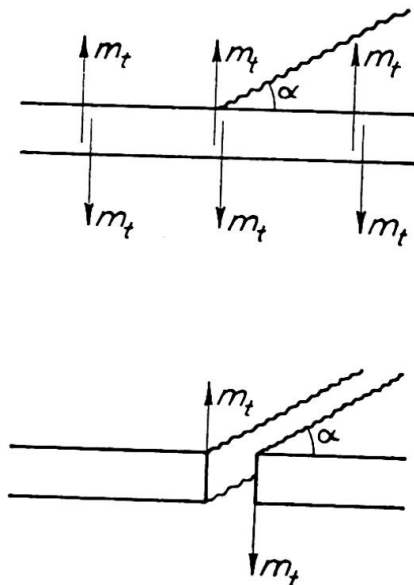


Fig. 5.

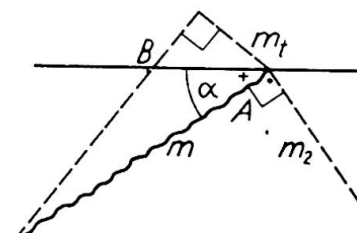


Fig. 6.

the case (fig. 4), but only quite close to the edge do the cracks suddenly turn so as to be at right angles to it.

As is known from the theory of elasticity for thin slabs, there are also here difficulties with the twisting moment at the edge. These difficulties are overcome by transforming the twisting moment into shear forces, as shown in figure 5 and first indicated by Kelvin and Tait. While the two single forces m_t neutralize each other when the slab is considered as a whole, they must be considered as acting each on its slab part when the equations of equilibrium for the individual slab parts are to be developed. The principal moments being m and m_2 (fig. 6), the bending moment along the edge will according to the above be

$$m \cos^2 \alpha + m_2 \sin^2 \alpha = 0$$

and the twisting moment

$$m_t = (m - m_2) \cos \alpha \sin \alpha = m \cot \alpha, \text{ as } m_2 = -m \cot^2 \alpha.$$

If we make the same transformation for plastic slabs, this will correspond to a rectilinear extension of the line of fracture to the edge (fig. 4). The single force $m \cot \alpha$ is then a static equivalent of the twisting moments and the shearing forces on the stretch s . Incidentally, this force the edge force, can also easily be deduced directly from the equation of equilibrium for the infinitesimal triangle AOB shown in figure 6. As m is a maximum value, the adjacent section OB has the same m , and as the bending moment is zero along $AB = ds$, the resultant for the whole triangle

$$m (\overline{AO} + \overline{OB}) = m \cdot \overline{AB} = m \cdot ds.$$

The moment about BO gives then, when magnitudes of a higher order are ignored,

$$m \cdot ds \cdot \cos \alpha = m_t \cdot ds \cdot \sin \alpha; \quad m_t = m \cot \alpha.$$

Example 2. — A rectangular slab with evenly distributed load is simply supported on two adjacent sides and free on the two others (fig. 7). The figure of fracture shown gives the edge force $m \cdot \frac{x}{a}$. The moment about a for the slab part A gives

$$ma = \frac{1}{6} w a x^2 + m \cdot \frac{x}{a} \cdot x,$$

and the moment about b for the slab part B gives

$$m \cdot x + m \frac{x}{a} \cdot a = \frac{1}{2} w b a - \frac{1}{3} w a^2 x.$$

From these two equations of equilibrium are found :

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{3b} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{3b}\right)^2};$$

$$m = \frac{3}{4} \cdot \frac{w b^2}{1 + \sqrt{1 + 9 \frac{b^2}{a^2}}} \quad b \geq a.$$

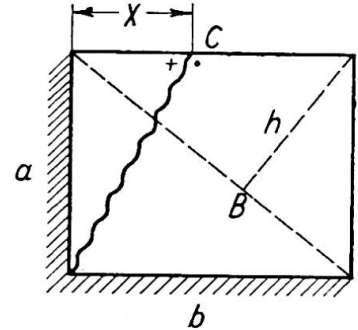


Fig. 7.

In the diagonal section shown is found the negative moment

$$m' = \frac{1}{6} w h^2 = \frac{1}{6} w \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

It can be proved quite simply that the number of equations is always equal to the number of unknowns (*IABSE, Publications I*, 1932, p. 283). The equations are not linear, so that superposition cannot be applied, but it can be proved that it is safe to superpose loads acting jointly (that is, do not counteract each other).

Should the solution of the equations be too cumbersome, the following method can always be used in practice : By the principle of virtual work, m can be determined directly for an arbitrarily chosen figure of fracture (*loc. cit.*, p. 284). The real value of m being a maximum value, the proper figure of fracture will be the one making the corresponding m the maximum. As the variations in the proximity of a maximum are very small, a fair approximation for m can be obtained by estimating the figure of fracture. By the equations of equilibrium for the individual slab parts the estimated figure of fracture may be improved and a better approximation be attained. With a little experience it is possible to estimate immediately the figure of fracture so well that the corresponding m will differ only a few percent from the real value.

In the development of the equation of work advantage is taken of the fact that the work of the moment vector M in the rotation θ , which is likewise a vector, is the scalar product $(M\theta) = M\theta \cos (M\theta)$. If the vec-

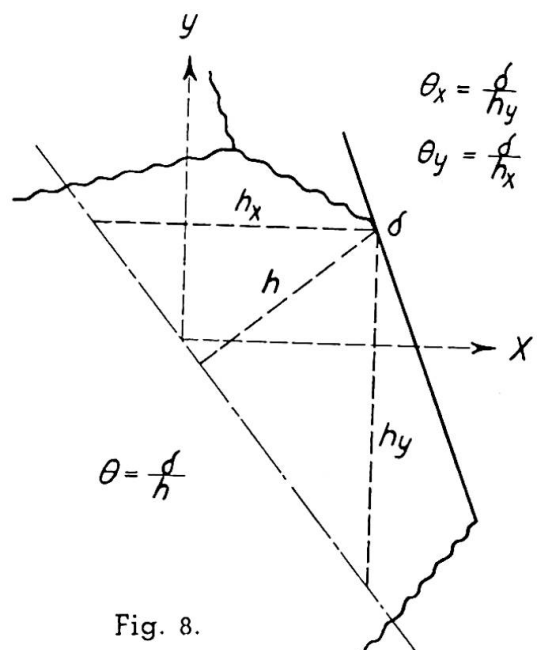


Fig. 8.

tors are resolved into components along two axes which are at right angles to each other, we get the expression $(M\theta) = M_x\theta_x + M_y\theta_y$. The rotation is determined, for instance, by the sinkings as shown in figure 8.

Example 3. — We will apply the equation of work to the preceding example. We lower $C\delta$; thereby the slab part A will get the rotation $\theta_A = \delta \div x$; and the slab part B, $\theta_B = \delta \div a$, about the supports. The virtual work will be made $M_A\theta_A + M_B\theta_B = 0$, i.e.,

$$\left(ma - \frac{1}{6} wux^2\right) \frac{\delta}{x} + \left(m \cdot x - \frac{1}{2} wba^2 + \frac{1}{3} wa^2x^2\right) \frac{\delta}{a} = 0,$$

which gives :

$$m = \frac{1}{6} wab \frac{3 - \frac{x}{b}}{\frac{a}{x} + \frac{x}{a}}.$$

The shearing forces do not contribute, since the two slab parts do not move vertically in relation to each other. The real figure of fracture is now found by the condition $dm \div dx = 0$, which gives the result previously found

If we use as approximation $x = a$, we get $m = 1/12 wab \left(3 - \frac{a}{b}\right)$. For $b = a$ we then have $m = wab : 6$, exactly $wab : 5.55$. For $b = 2a$ we get $m = wab : 4.8$, exactly $wab : 4.72$. The error is 7.5 and 1.6 percent, respectively, which is of no practical consequence.

Example 4. — A square slab, simply supported on two adjacent sides and by one column in the opposite corner, is loaded with a single force P in the centre.

The figure of fracture will be as in figure 9. When the force P is lowered $\delta = l$, the slab parts A get the rotations $1 : \frac{a}{2} = 2 : a$, while the rotation for the slab part B has the components $1 : a$, as $h_x = h_y = a$ (fig. 8) and the moment has the components $\frac{2}{3} ma$. Hence is obtained the equation of work :

$$\begin{aligned} P \cdot l &= 2 \cdot ma \cdot \frac{2}{a} + 2 \cdot \frac{2}{3} ma \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{16}{3} m; \\ m &= \frac{3}{16} P. \end{aligned}$$

For fixed-end slabs and slabs which are continuous over supports are assumed lines of fracture over the supports with negative moments corresponding to the upper reinforcement of the slab.

When the reinforcement is uniform, but not equal in the two orthogonal directions, so that the corresponding yield values are m and μm , m is the same as in a slab with equal yield values m , and affines to the given slab in the proportion $1 : \sqrt{\mu}$ and with the same load per unit of area.

The theory is very well verified by the tests, both as regards the figures of fracture and the ultimate loads.

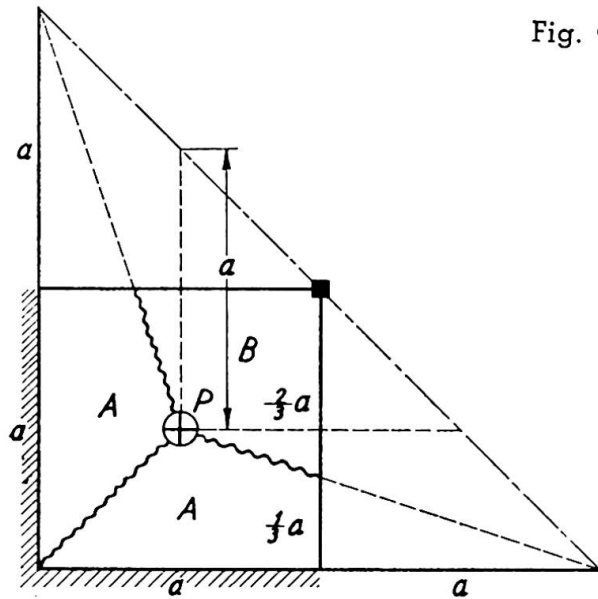


Fig. 9.

Résumé

Ce mémoire donne une description de la théorie des lignes de rupture de dalle en béton armé. On peut déterminer ces lignes de rupture géométriquement grâce au fait que les déformations élastiques sont faibles comparées aux déformations plastiques. Le moment fléchissant atteint sa valeur maximum le long de ces lignes, ce qui permet de déterminer les efforts transversaux et de torsion. Ils sont nuls sauf au bord libre. On en déduit les conditions d'équilibre pour les surfaces partielles limitées par les lignes de rupture connaissant ces lignes de rupture et le moment de rupture. Une méthode approchée peut être déduite du principe du travail virtuel. Cette méthode est illustrée par des exemples.

Zusammenfassung

Eine Beschreibung der Bruchlinientheorie für Eisenbetonplatten wird gegeben. Mittels geometrischer Bedingungen, welche aus der Tatsache folgen, dass die elastischen Deformationen unbedeutend sind gegenüber den plastischen, kann die Form der Bruchfigur bestimmt werden. Da das Biegemoment längs der Bruchlinien einen Grösstwert hat, können die Querkräfte und die Drillungsmomente bestimmt werden. Sie sind null, ausgenommen an einem freien Rand. Hierauf können die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden für die Teilflächen, in die die Platte durch die Bruchlinien geteilt wird, wobei die Bruchfigur und das Bruchmoment bekannt sind. Eine einfache Näherungsmethode kann durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit entwickelt werden. Die Theorie wird durch Beispiele illustriert.

Summary

An outline of the theory of lines of fracture of reinforced concrete slabs is given. Through the geometric conditions which are a consequence of the fact that the elastic deformations are insignificant as compared with the plastic ones the character of the figure of fracture can be determined (fig. 1). The moment in the lines of fracture being a maximum value, the transversal force and the twisting moment can be determined. They become zero, except at a free edge. The equations of equilibrium for the individual parts into which the lines of fracture divide the slab can then be set up, whereby the figure of fracture and the breaking moment are determined. A simple method of approximation can be indicated by application of the principle of virtual work. The method is illustrated by examples.

IVb3

Dalles continues

Durchlaufende Platten

Continuous slabs

CARLOS FERNANDEZ CASADO

Ingénieur-conseil à Madrid

La dalle continue est un type de construction utilisé constamment dans les bâtiments et dans les ponts.

Nous avons construit 15 ponts en travées droites en dalles continues du type pur, en ponts portiques ou en ponts cantilever. L'ouverture maximum que nous avons construite est de 16 mètres alors que les trois types des modèles standards que nous avons projetés et qui ont été adoptés officiellement par le Ministère des Travaux publics sont pour ouvertures de 5 à 12 mètres.

Le calcul d'une dalle continue indépendante, ou solidaire des appuis qui ne cèdent pas, est très simple, exception faite de la détermination de la largeur efficace pour les charges concentrées. Mais, compte tenu de l'importance normale des ouvertures dans les dalles continues, quelle que soit la formule appliquée, la largeur efficace qui en résulte permet de considérer toute la dalle comme résistante à la flexion. La largeur efficace à l'effort tranchant constitue une question secondaire. Pour l'analyse des moments fléchissants nous utilisons toujours la méthode de Cross considérant la variation du moment d'inertie dans la dalle et le déplacement transversal dans le cas du portique multiple. La détermination des valeurs maximum doit se faire par intermédiaire des lignes d'influence.

Dans les tabliers des ponts, soit en travées droites ou en arcs, nous trouvons de nouveau la dalle continue, dont la continuité peut s'étendre dans un ou dans les deux sens. Une autre différence avec le cas antérieur est que les appuis de la dalle sont des poutres qui fléchissent sous l'action des charges. Quand la continuité correspond à la direction transversale au trafic, le dénivellement des poutres contiguës peut être important et il faut le considérer dans le calcul. Pour la continuité dans la direction du trafic, la différence de hauteur des poutrelles n'a pas d'influence sur la flexion de la dalle. L'analyse de la dalle se réduit à celle d'une poutre continue avec les mêmes travées que la dalle et une largeur arbitraire dans le

cas de surcharges continues ou égales à la largeur efficace à flexion pour les surcharges concentrées. Quand la flexibilité des poutres est importante, cas des poutrelles, on peut recourir à la méthode de calcul exposée par Newmark dans le bulletin n° 304 de la Engineering Exp. Station de l'Université d'Illinois.

Quand il y a continuité dans les deux sens, la méthode la plus appropriée pour les charges concentrées et continues est celle préconisée par Marcus dans son livre *Vereinfachte Berechnung Biegsamer Platten* qui prend en considération le travail par torsion et qui calcule les moments de flexion et de torsion dans les différentes régions de la dalle. Ces derniers sont supposés distribués dans quatre pyramides non symétriques.

Dans les bâtiments le cas le plus fréquent est constitué par une dalle continue dans un seul sens. Les surcharges à considérer sont toujours uniformément distribuées et on peut se ramener au cas d'une poutre continue de largeur unité. Le seul doute important c'est la manière de prendre en considération la rigidité des poutres et des piliers. On peut recourir à la méthode de Newmark déjà citée, mais dans la plupart des cas on peut se contenter en distribuant uniformément la rigidité du pilier sur la longueur de la poutre, et prendre une partie de cette valeur (50 % ou 75 %) pour constituer le portique avec les poutres de largeur unité substitues des dalles.

Quand l'équidistance entre les fermes est considérable, il peut être intéressant, dans les planchers des bâtiments, de recourir à la solution de continuité dans les deux sens, en utilisant comme grillage d'appui la ferme et les poutres longitudinales. On peut obtenir de cette façon des dalles d'épaisseur constante plus économiques que des dalles nervurées. La méthode de calcul que nous utilisons est celle de Marcus citée pour les tabliers des ponts, et qui présente dans ce cas de surcharges continues une application plus simple.

En résumé, nous jugeons que dans le cas d'une dalle avec continuité dans une seule direction, on doit considérer une poutre virtuelle, avec les mêmes travées, de largeur unité pour des surcharges continues et de largeur efficace correspondant pour les surcharges concentrées. Comme hypothèses simplificatrices il faut uniquement négliger l'aide due à la torsion des poutres et flexion des piliers dans le cas des planchers de bâtiments. Pour les dalles avec continuité dans les deux sens nous préconisons la méthode approximative de Marcus, tant pour les surcharges continues comme pour les surcharges isolées.

Résumé

Schéma de la méthode

1. Analyse de deux tranches perpendiculaires avec les axes des différents panneaux de la dalle se prolongeant jusqu'aux bordures de celle-ci. La largeur des tranches est l'unité pour les surcharges continues et celle qui permet l'inclusion des charges isolées dans ce dernier cas.
2. Répartition de charges entre les deux tranches, en fixant la condition d'égalité des flèches dans le centre du panneau.
3. Détermination des moments fléchissants dans la zone centrale et dans les deux extrémités d'appui des tranches. Pour le moment au centre

on doit appliquer la réduction correspondante au coefficient de torsion. Dans les moments aux appuis on peut obtenir la réduction due à la largeur d'appui sur les poutres.

4. Détermination des moments de torsion.

5. Calcul des armatures pour résister à la combinaison des moments fléchissants et de torsion.

Zusammenfassung

Berechnungsschema

1. Untersuchung von zwei auf den Achsen der verschiedenen Felder senkrecht stehenden Streifen, die bis zu den Rändern durchgehen. Als Breite der Streifen nimmt man die Einheit bei verteilter Belastung. Für Einzel-lasten wählt man eine solche, die sich der Querverteilung anpasst.

2. Verteilung der Lasten auf die zwei Streifen mit der Bedingung, dass die Durchbiegungen der zwei Streifen an den Kreuzungspunkten gleich werden.

3. Bestimmung der Biegemomente in der Mittelzone und an den Auflagern. Die Momente der Mittelzone können gemäss dem Drillungs-koeffizienten abgemindert werden. Bei den Stützenmomenten ergibt sich eine Abminderung infolge der vorhandenen Auflagerbreite.

4. Bestimmung der Drillungsmomente.

5. Bestimmung der Armierung für die Maximalwerte der Biege- und Drillungsmomente.

Summary

Outline of the method

1. Analysis of the two perpendicular sections with the axes of the various panels of the slab prolonged to the edge of the latter. The width of the sections is the unit for the continuous overloads and that which permits inclusion of isolated loads in the latter case.

2. Division of loads between the two sections by fixing the condition of equality of deflection in the middle panel.

3. Determination of bending moments in the central zone and in the two supporting extremities of the sections. For the central moment, apply the reduction corresponding to the coefficient of torsion. In the moments at the supports one can obtain the reduction due to the width of the bearing on the beams.

4. Determination of torsion moments.

5. Calculation of the reinforcements to resist the combined bending and torsion moments.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVc1

Rapport sur les voiles minces construits en Espagne

Bericht über die in Spanien ausgeführten Schalenbauten

Report on thin slabs constructed in Spain

PROF. E. TORROJA

Directeur du Laboratoire central de Ensayo de Materiales de Construcción, Madrid

Malgré les réalisations parfaitement réussies déjà conçues, on peut dire que l'avenir des constructions en voile mince reste toujours à faire et, en réalité, ce procédé est encore peu exploité.

Les difficultés que présente son calcul d'une part, et la nécessité d'établir des cintres et coffrages coûteux d'autre part, limitent assez leurs possibilités d'application.

Mais il faut espérer que la perspective changera dans peu d'années puisque pour la résolution des problèmes de ces voiles, aucune solution n'offre actuellement, du point de vue technique, de possibilités plus grandes, ni meilleures.

A part les voiles polyédriques, très intéressants, les surfaces continues (non seulement cylindriques mais de double courbure positive ou négative) présentent des avantages inestimables et des solutions adéquates à chaque problème qui se présente en pratique.

Malheureusement, les conditions de bord ne s'accomplissent en général pas dans un équilibre de voile sans flexion, et l'oubli de cette condition (hypothèse simplificatrice très attrayante) a été la cause de beaucoup plus de désastres que ceux commentés dans les publications techniques.

Le problème des voiles, en considérant la rigidité à la flexion, nécessaire pour établir l'équilibre est, en général, difficile à résoudre; on est tenté de les abandonner fréquemment, sauf pour les cas bien connus des voiles cylindriques ou de révolution et de ne pas profiter des avantages constructifs des surfaces réglées.

D'autre part, les grandes réalisations en voiles cylindriques, torales et de révolution, et leur bon comportement, constituent un indice des énormes portées qu'on peut atteindre. L'utilité du précontraint ou d'autres systèmes qui permettent l'introduction pratique des dislocations analogues à celles de Volterra ou de Somigliana, et aussi des dislocations continues dans toute la surface, ouvre un grand champ pratiquement inexploré, quoiqu'on en ait déjà réalisé des exemples de voiles précontraints dans toute

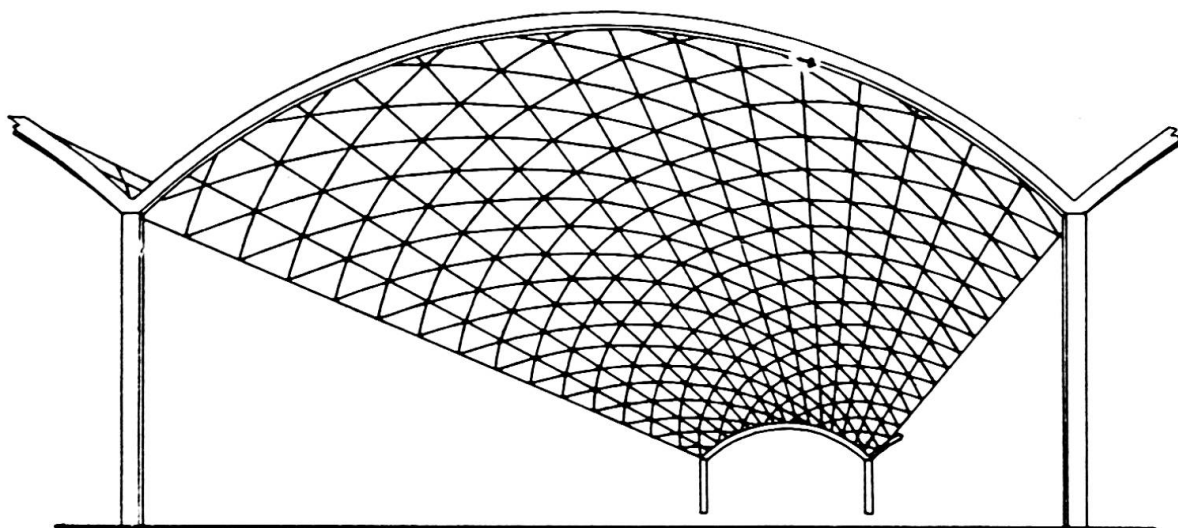


Fig. 1. Grande couverture métallique constituée par un voile continu en treillis métallique.

leur surface qui assurent des avantages importants comme celui de l'imperméabilité des parois de dépôts.

On peut étudier, du moins théoriquement, la possibilité de rabaisser les flexions ou de les altérer de telle façon qu'elles puissent accomplir les conditions de bord correspondantes aux voiles avec la simplification du calcul conséquente.

Une indication importante c'est que, malgré la légèreté de ces voiles qui arrivent à des sveltesse de $\frac{1}{600}$ (quotient de l'épaisseur à la portée) c'est le poids mort qui détermine le prix; ce poids ne peut guère être réduit, même avec des matériaux de meilleure qualité et un choix plus heureux de la forme de la surface, car il existe le danger d'un manque de stabilité ou de flambage qui limite la sveltesse; ce danger augmente par la présence des déformations lentes ou plastiques que souffre le béton sous l'action des compressions permanentes comme celles produites par le poids mort; nous donnerons plus loin un exemple d'un tel cas, quoiqu'il s'agit de fortes déformations produites par des causes imprévues qui donnèrent lieu à ce phénomène.

Il s'agit donc d'alléger le poids de ces constructions sans diminuer excessivement la rigidité du voile. Une bonne solution consiste à établir des anneaux de rigidité plus ou moins rapprochés. Mais ceux-ci présentent des inconvénients par suite de la difficulté inhérente aux coffrages et dispositifs d'imperméabilisation.

On peut également substituer le voile continu par un treillis métallique (fig. 1). Les grandes couvertures métalliques projetées normalement avec des éléments superposés en formant des constructions calculables par les simples méthodes de la résistance des matériaux, peuvent être substituées par d'autres où le treillis est disposé selon la surface.

A mon avis et, par tout ce que j'ai pu calculer et tâtonner, cette solution peut offrir des grands avantages et permettre la réalisation de couvertures économiques très élégantes d'aspect et faciles à réaliser.

Si la maille est suffisamment petite il semble parfaitement acceptable

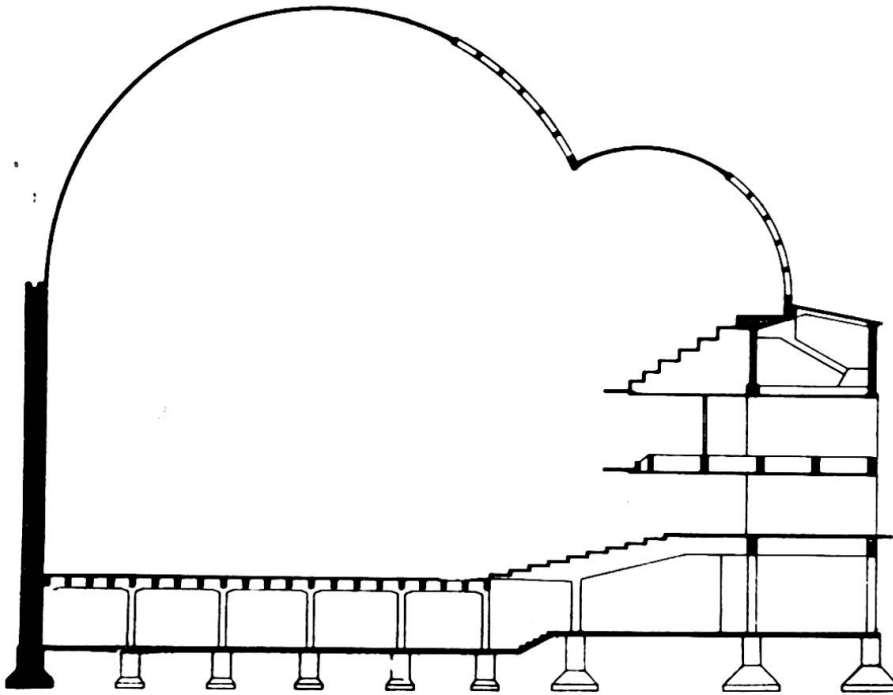


Fig. 2. Elévation du Recoletos construit en Espagne en 1936.

d'appliquer le calcul de voile continu pour déterminer après, et avec ses résultats, les efforts résultant à chaque barre de la triangulation.

Les études que j'ai pu faire dans ce sens indiquent clairement que ce type de construction peut être très économique par suite de la diminution du poids par rapport au béton, et aussi par la suppression des coffrages et échafaudage; on a déjà fait quelques projets en Espagne dans ce sens, pas encore réalisés, mais desquels on peut beaucoup espérer.

En dehors du problème théorique de calcul, il sera nécessaire de développer des investigations expérimentales dans les laboratoires, pour mieux connaître le comportement de ce type de construction et savoir si les efforts principaux dans les barres correspondent avec la théorie, et si les efforts secondaires, tels ceux de torsion dans les barres, sont négligeables ou non.

Une solution pratique est de disposer des profils droits selon les génératrices du cylindre et selon les diagonales nécessaires pour former avec les génératrices un treillis triangulaire; dans ce cas, les contraintes selon les directrices se traduisent par des compressions et selon les diagonales par des tractions produites isostatiquement dans les génératrices. Au contraire, l'effort selon la génératrice donne lieu à des compressions et déformations transversales très petites. Peut-être devrait-on étudier la lame anisotrope, mais ce problème nécessite une étude minutieuse théorique et expérimentale. On peut admettre les flexions, en première approximation, décomposées vectoriellement sur les diagonales, quoique ceci donne lieu à des efforts de torsion et aussi à des anomalies difficiles à étudier. J'espère pouvoir réaliser une étude expérimentale qui promet d'être intéressante du point de vue technique.

Je termine cette communication en complétant l'information que j'ai donné au Congrès de 1936 sur un voile cylindrique qui est entré dans l'histoire pendant la guerre espagnole. Un mémoire détaillé de ce voile a été

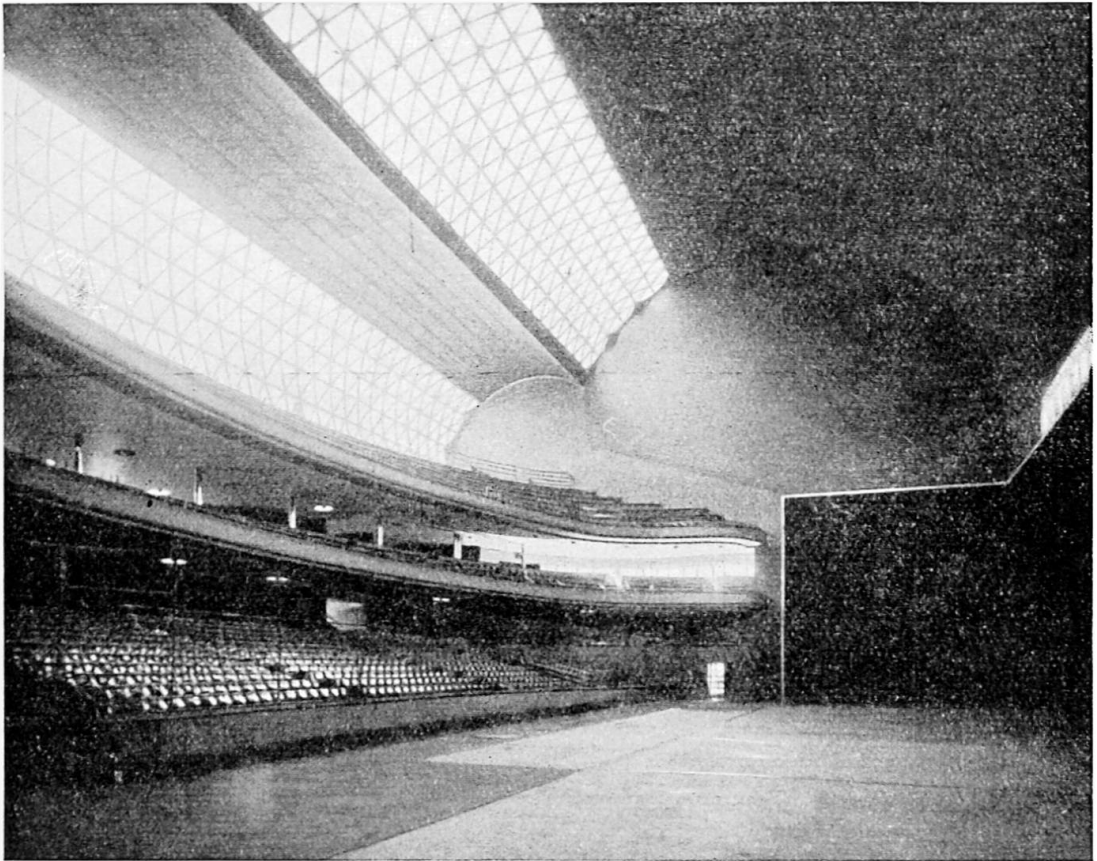


Fig. 3. Vue intérieure de la salle du Recoletos.

publié dans les annales de l'Académie des Sciences de Madrid que je mets à la disposition de ceux qui s'intéressent à ce thème. Notons d'abord quelques raisons sur les phénomènes observés avant son écroulement, dû aux bombardements; ces phénomènes confirment les points que je viens d'indiquer.

On a exécuté en Espagne différents exemples de constructions en voiles minces, dont quelques-unes sont déjà connues par les publications faites dans différentes revues techniques, notamment celle du Fronton Recoletos, qui constitua l'objet d'une courte note que je présentai au Congrès de 1936. J'en dirai quelques mots sur son écroulement, à la suite des bombardements au cours de la guerre espagnole.

La toiture (fig. 2) peut être définie comme un voile cylindrique de génératrices horizontales, en béton armé, dont la directrice est formée par deux arcs de cercle inégaux lesquels, en partant des tangentes verticales aux bords, se rejoignent orthogonalement. Le voile a une épaisseur de 8 cm et est substitué sur une partie de sa surface par des treillis triangulaires du même matériau. La longueur des génératrices est de 55 mètres et la longueur entre les bords ou génératrices extrêmes de 32^m50. La figure 3 donne l'aspect intérieur de la salle.

La figure 4 donne le réseau des isostatiques ou lignes de tension principales obtenues par le calcul. La figure 5 représente un détail des armatures du voile, dont l'épaisseur de 8 cm augmente dans la zone immédiate à la mouette jusqu'à 17 cm. On peut aussi remarquer la disposition du tirant

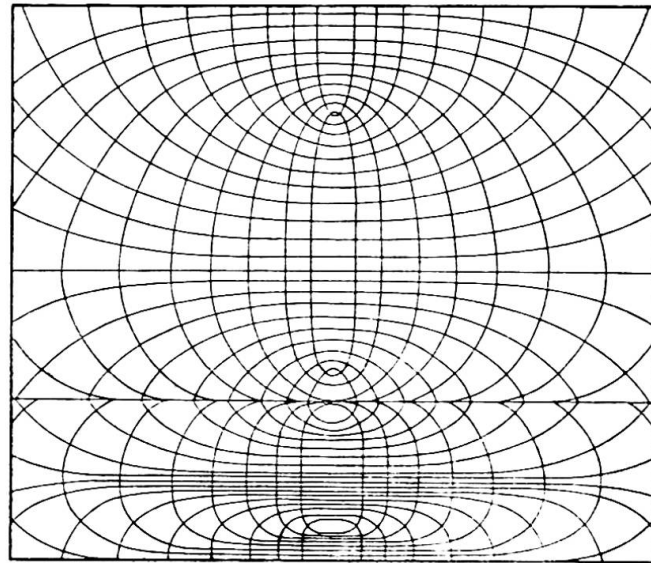


Fig. 4. Réseau des isostatiques obtenues par le calcul.

formé de 16 carrés de 50 mm, soudés bout à bout au moyen de soudure à l'arc avec électrodes enrobées.

L'importance de l'ouvrage justifia des essais sur modèle réduit (fig. 6) à échelle de 1/10, sur lequel on pourrait non seulement vérifier la résistance à la rupture, avec une surcharge supérieure à celle du calcul, mais aussi vérifier la correspondance entre les résultats du calcul et la réalité. On vérifia aussi cette correspondance par des mesures très minutieuses sur l'ouvrage même.

L'ouvrage se comporta parfaitement pendant trois années; avant la fin de la guerre, un bombardement d'aviation produisit plusieurs trous très importants tel que celui visible sur la figure 7 et un autre beaucoup plus grand, de 15 à 20 mètres, qui ne put être photographié. Jusqu'après

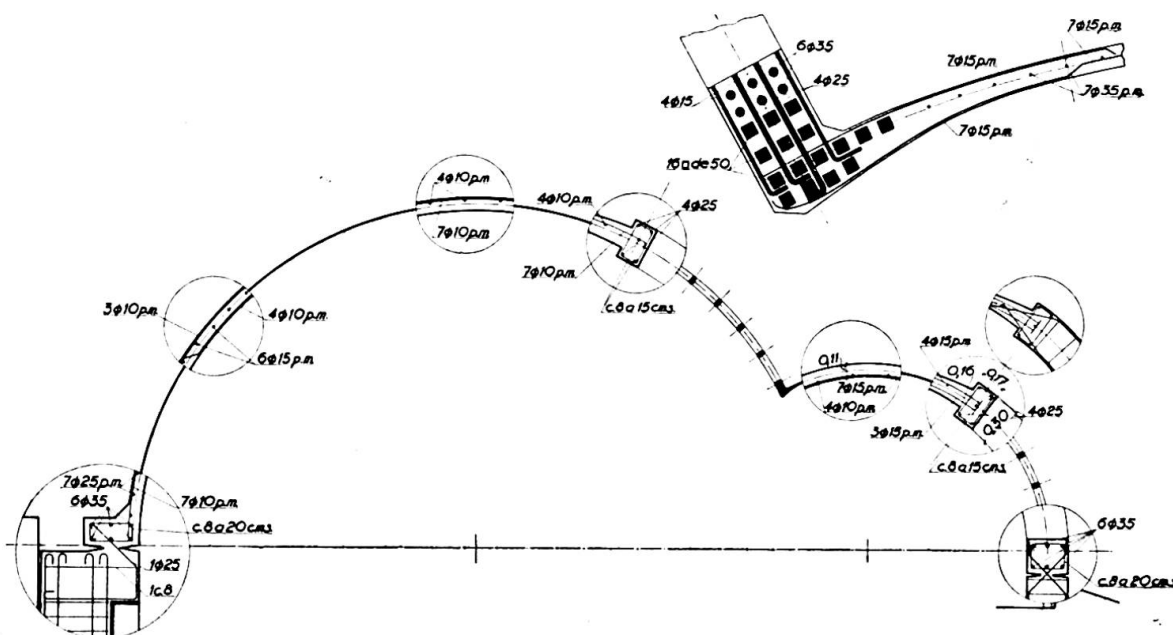


Fig. 5. Section transversale et détails constructifs du Fronton Recoletos.

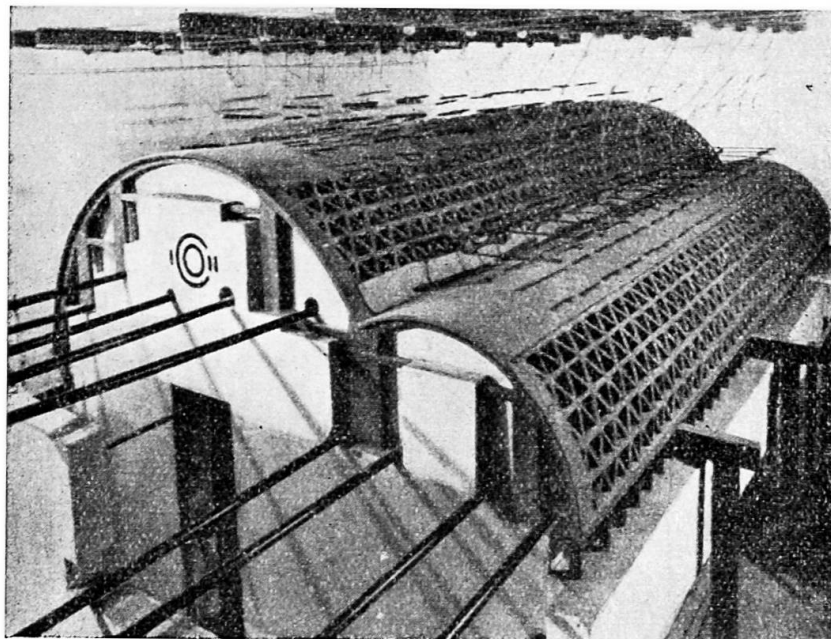


Fig. 6. Modèle réduit du Recoletos utilisé lors des essais de laboratoire.

la fin de la guerre, on ne put faire aucune inspection de l'ouvrage ni commencer les travaux de réparation qui ne purent avoir lieu par suite de l'écroulement qui survint entretemps.

Une fois la guerre terminée et la vie normale rétablie à Madrid, on découvrit le voile pour entreprendre sa réparation; on observa des fissures de deux millimètres dans les diagonales tendues de la lucarne, une descente ou enfoncement général de la lucarne, qui dans les directrices centrales dépassait 60 centimètres et déformait violemment la directrice dans la clef, avec des ouvertures de fissures qui atteignaient plusieurs millimètres et il était possible qu'il y eut encore d'autres défauts qu'on ne put déceler.

Tout paraissait indiquer que ce n'était pas l'impact même (auquel

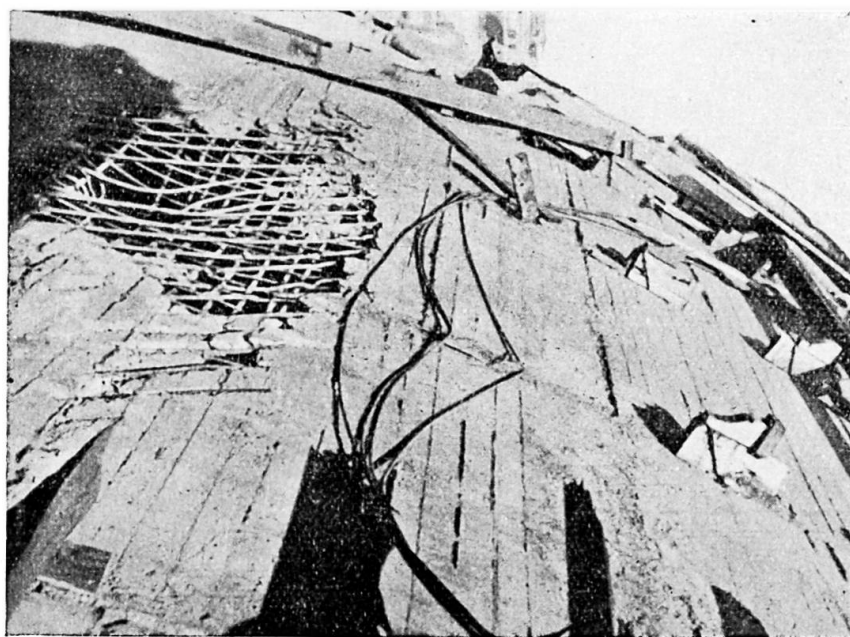
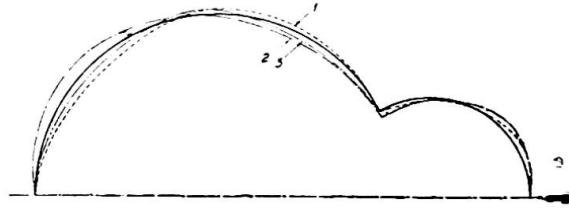


Fig. 7. Etat de la toiture après son bombardement au cours de la guerre civile.

Fig. 8. Déformations consécutives à l'onde explosive :

1. Effet instantané de l'onde positive. — 2. Effet instantané de l'onde négative. — 3. Stabilisation de la forme de la toiture après l'explosion.



l'ouvrage aurait résisté dans de bonnes conditions) mais l'onde explosive produite par les bombes qui fut la cause de toutes les anomalies observées.

En considérant le phénomène au moment de l'onde positive, c'est-à-dire de pression centripète sur l'arc, celui-ci dut éprouver un déplacement radial très grand vers l'intérieur (courbe 1, fig. 8); la dalle put résister sans dépasser sa limite élastique grâce à sa grande élasticité; la lucarne avait tendance à se lever; mais, non seulement sa plus grande rigidité, mais la courbure même du voile donnèrent lieu à un déplacement radial produisant une flexion beaucoup plus forte de la directrice vers la clef et, par conséquent, il s'y produisit une déformation plastique de l'armature, avec une dislocation complète du voile. Dans le moment de l'onde négative (courbe 2, 8) le phénomène fut contraire et la lucarne descendit. Des déplacements horizontaux durent se produire également dans la clef, et en particulier la composante de l'onde de succion poussa la clef vers la gauche et ouvrit les fissures par traction.

Une fois la résistance à la flexion nulle dans ce point, la lucarne dut descendre, en perdant sa courbure, et la clef s'éleva.

Il est intéressant d'indiquer qu'une fois qu'un déplacement important des génératrices hautes de la lucarne vers l'intérieur avait été produit, ces génératrices qui travaillent en compression, ont une forte tendance au flambage.

La génératrice comprimée, courbée vers l'intérieur tend naturellement à augmenter cette déformation par flambage. Les déformations plastiques du béton dans ces nouvelles conditions de travail, bien que petites à cause de l'âge du béton peuvent produire, vu le grand élançement de la pièce (c'est-à-dire les génératrices), des déplacements radiaux relativement grands dans une période de temps suffisamment longue. C'est pour cette raison que je conseillai la mise en place d'appareils de mesure pour observer si la déformation continuait ou non. On constata qu'elle continuait très lentement.

En envisageant le problème sur ces données et possibilités, on étudia l'avant-projet d'une réparation du voile (fig. 9) consistant à bétonner des anneaux ou nerfs armés selon les directrices sur le grand lobule jusqu'à la lucarne, fortement ancrés à la génératrice de celle-ci (la lucarne) d'un côté et dans la partie verticale du lobule de l'autre, et en les dotant de tenseurs dans l'armature longitudinale extérieure et des étriers d'ancrage à la dalle, unis aussi par des tenseurs à la face extérieure des anneaux.

Pour effectuer les opérations que je viens d'indiquer on commença à monter un échafaudage et à découvrir la voûte en enlevant le revêtement de fibro-ciment de la partie supérieure et les verres des lucarnes, afin de faire aussi une révision plus détaillée de l'ouvrage.

Dans ces conditions, dans l'après-midi du 15 août 1939, lors d'un orage assez violent et d'une augmentation du degré hygrométrique, les

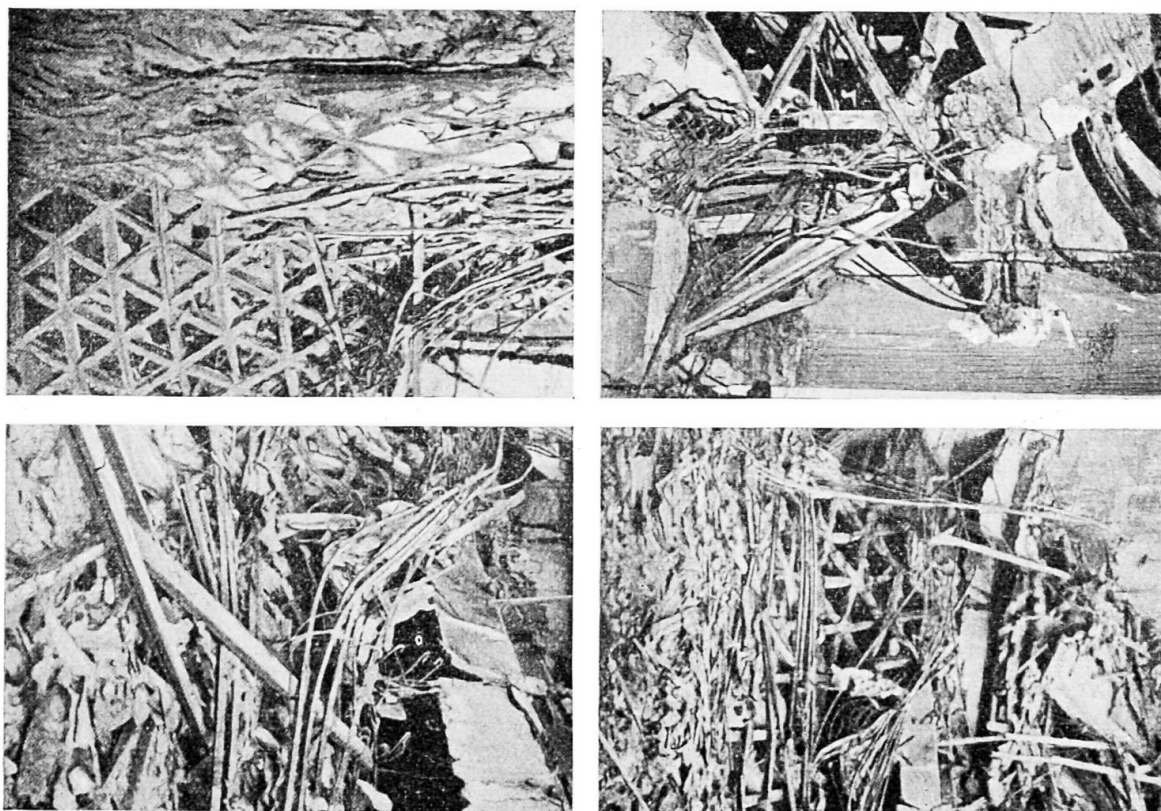


Fig. 11. Divers aspects de la désagrégation du béton.

augmentation de la poussée horizontale dans la clef, laquelle poussa le grand lobe, en tombant une partie de celui-ci dans la zone latérale, en dehors du mur.

Etant donné la grande hauteur du bâtiment (25 m) le béton se désagrégea complètement (fig. 11). Comme je l'ai déjà dit auparavant la résistance de la poutre en mouette fut beaucoup plus grande que prévue, puisque les zones extrêmes de la lucarne qui supporte les efforts tranchants minima, restèrent intactes en grande partie. Les armatures du tirant formées de 16 carrés de 50 mm soudées électriquement bout à bout et recouvertes d'une section de béton relativement petite, furent arrachées du béton mais sans se rompre, pas même dans leur section soudée, malgré les efforts énormes qu'elles durent éprouver aux derniers moments:

Abstraction faite des détails et hypothèses des causes immédiates de l'effondrement, il est important de noter, du point de vue technique, que l'écroulement fut produit indubitablement, pas par un défaut dans les travaux que nous pourrions considérer comme principaux de la construction, mais exclusivement par un manque de rigidité transversale des directrices centrales de l'arc dans le grand lobe, causé par la rupture et déformation brusque de ces directrices, sous l'action de l'onde explosive.

On voit aussi la grande importance que peut avoir le flambement causé par la déformation lente ou plastique du béton; c'est un des points sur lesquels il est intéressant d'investiguer, puisque dans la plupart des cas, c'est précisément le danger du flambage plastique qui détermine les limites de sveltesse qu'on peut atteindre dans ce genre de constructions en béton armé.

Résumé

On expose les observations effectuées pendant l'écroutement d'un voile cylindrique de lobules inégaux, produit par suite des bombardements, qui introduisirent des fortes ruptures et déformations plastiques suivies d'un flambage des génératrices comprimées.

L'auteur signale aussi l'intérêt que peut avoir la substitution des voiles continus en béton par des treillis métalliques inscrits dans la surface.

Zusammenfassung

Der Verfasser beschreibt das Verhalten eines aus zwei Zylinderschalen mit ungleichen Radien zusammengesetzten Bauwerks nach dessen Bombardierung. Diese verursachte grosse plastische Deformationen, die zum Knicken der gedrückten Erzeugenden führten, sodass die Tragkonstruktion zusammenbrach. Die aus den Beobachtungen sich ergebenden Schlüsse werden gezogen.

Der Verfasser erwähnt auch die Möglichkeit, die vollen Betonschalen durch metallische Fachwerke zu ersetzen, die nach der Oberfläche geformt sind.

Summary

The author explains the observations carried out during the collapse of a cylindrical slab of unequal lobules, caused as a result of bombardments and which produced serious ruptures and plastic deformations followed by a buckling of the compressed generators.

He also points out the advantage that may lie in substituting for continuous reinforced concrete slabs, metal latticework implanted in the surface.

IVc2

Réalisation récente d'une construction voûtée

Beispiel eines Schalenbauwerkes neueren Datums

Example of a recent shell structure

H. SCHERER

Dipl. Ing. ETH, Luzern

Unter den Zylinderschalen haben in den letzten Jahren die Shedkonstruktionen aus Eisenbeton für grosse Fabrikationshallen wachsende Bedeutung erlangt. Sie können den Wettbewerb mit anderen Bauweisen im allgemeinen erfolgreich bestehen, da sie den Anforderungen, die an solche Objekte gestellt werden müssen, weitgehend gerecht werden: sie ermöglichen eine gute und gleichmässige Belichtung, lassen einen verhältnismässig grossen Stützenabstand zu und sind auch in wirtschaftlicher Hinsicht konkurrenzfähig.

Für die vorliegende Fabrikationshalle, 132 m lang und 42 m breit, war eine gute und gleichmässige Belichtung erwünscht, der Raum sollte von möglichst wenigen Stützen unterbrochen sein und mit Kranen von 5 t Nutzlast bestrichen werden können. Beim gezeigten Bau (Abb. 1, Modell) handelt es sich um einen ersten Ausbau. In jeder der 21 m breiten Hallen fährt ein Laufkran. Im Anbau im Vordergrund sind Kesselhaus und Wohlfahrtseinrichtungen untergebracht, in der Halle des Kopfbaus vorne rechts fährt ein Kran quer über die Längskrane der Shedhallen.

Bei den aus Zylindersektor und Randträger zusammengesetzten Shed-schalen beträgt die grösste bis jetzt erreichte Breite (in Richtung des Gewölbes, senkrecht zur Erzeugenden gemessen) ca. 10 m. Werden grössere Stützenabstände verlangt, so können die in einer Ebene liegenden Endscheiben zu Fachwerkträgern zusammengefasst werden. Am bequemsten sind die als rautenförmige Fachwerkträger ausgebildeten einfachen Balken, da sich bei diesen gewisse Schwierigkeiten in der Ausbildung der Knotenpunkte und Stösse vermeiden lassen.

Im vorliegenden Fall (Abb. 2, Grundriss u. Schnitte) beträgt die Stützweite des Fachwerkträgers, bei zwei hintereinanderliegenden Schalen von je 10,5 m Breite, 21 m. Die Schalen selbst haben eine Spannweite von 24 m. Sowohl die Baugrundverhältnisse als auch das Interesse an einer mehrmaligen Verwendung der Schalung führten dazu, die Schale als einfachen Balken auszubilden. Die dadurch bei den Endscheiben entstehenden Doppelträger sind wohl etwas komplizierter, aber dennoch vorteilhaft. Das Prinzip der rautenförmigen Träger kam schon bei der bekannten Halle der Textilfabrik « Grafa » in Buenos Aires zur Anwendung; dort entfiel jedoch auf eine Stütze eine Grundfläche von 120 m², hier sind es 504 m².

Für die statische Berechnung wurden im Hallenquerschnitt bei Stützen und Fachwerkträgern die Einspannverhältnisse berücksichtigt. Bei der Schale bestand anfänglich die Absicht, zur Berechnung der Schnittkräfte eine Näherungslösung anzuwenden. Der Umstand jedoch, dass zwischen

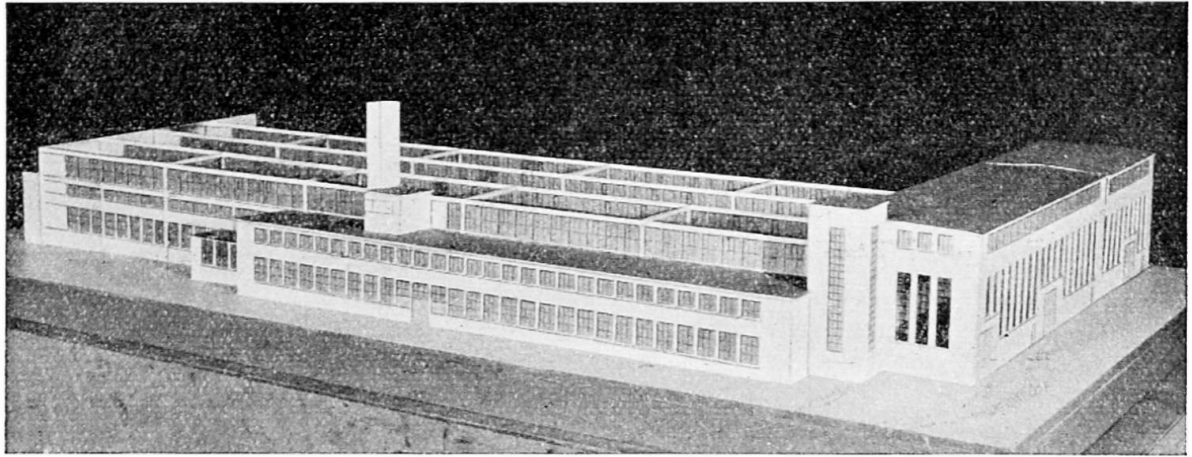


Abb. 1. Modell der ersten Ausbautetappe.

den Näherungslösungen, welche Finsterwalder, bezw. Jakobsen angegeben haben, für die Momente Differenzen bis zu 33 % für Schalen mit ähnlichen Kennziffern auftreten, liessen eine Lösung nach der genauen Theorie angezeigt erscheinen, dies umsomehr, als der untere Randträger wegen der Aufhängung der Kranbahn relativ steif ausgebildet werden musste. Der obere Randträger ist so nachgiebig, dass dort M_{φ}'' und $N_{\varphi}'' = 0$ angenommen werden durften. Die am oberen Rande der Shedschale entstehenden Zugspannungen lassen sich beim Ausrüsten gut beobachten. Man sieht, dass die Schale nicht nur in der Lotrechten durchgebogen wird, sondern dass auch eine wagerechte Verschiebung eintritt. Die Randstörungen beim Anschluss an den Fachwerkträger und die Torsionsbeanspruchungen des Randträgers müssen berücksichtigt werden.

Die Aufhängung der Kranbahnen am unteren Randträger der mittleren Stützenreihe erforderte besondere Beachtung. Dieser Randträger musste

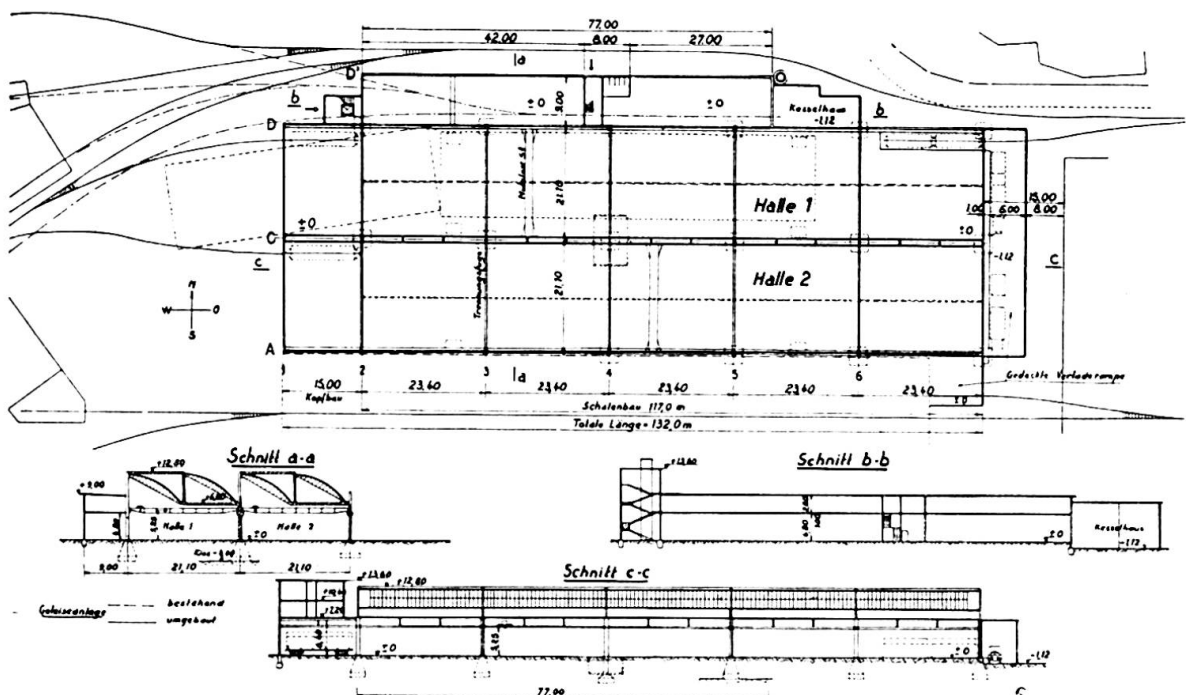


Abb. 2. Grundriss und Schnitte.

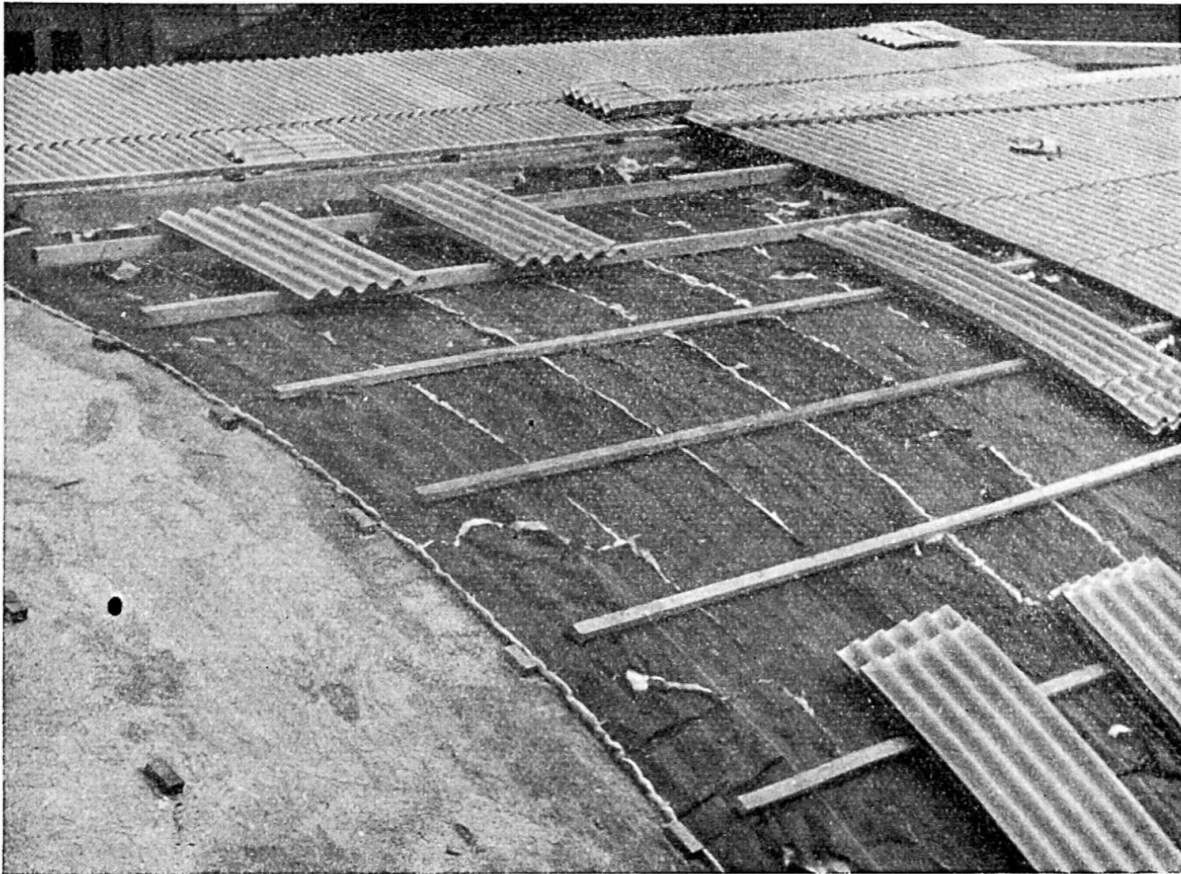


Abb. 3. Isolation und Eindeckung der Schalen.

kräftig ausgebildet werden, um eine gute Verteilung der Einzellasten auf die Schale zu ermöglichen. Es widerspricht dies allerdings etwas dem allgemeinen Prinzip, den Randträger möglichst schwach zu dimensionieren, und die Schale selbst zur Uebertragung ihres Schubes heranzuziehen. Durch die Kranlasten werden die Spannungen infolge Eigengewicht und Schnee an der ungünstigsten Stelle um ungefähr 25 % erhöht.

Durch die Fensterpfosten sind die beiden übereinanderliegenden Randträger zweier benachbarter Scheiben gelenkig miteinander verbunden, sodass vom oberen Randträger nur vertikale Verschiebungen auf den unteren übertragen werden.

Für die Arbeitsplätze in der Halle wurden die bestmöglichen Belichtungsverhältnisse verlangt. Nun erfordern zwar senkrecht angeordnete Fensterpfosten gegenüber solchen mit einer Neigung von 60° etwas mehr Dachfläche samt deren Isolation und Eindeckung. Durch Versuche der A. E. G. Zürich ⁽¹⁾ wurde jedoch nachgewiesen, dass bei lotrechten Shedfenstern im Zusammenhang mit der Reflexion der Schale eine gleichmässigerer Raumbelichtung möglich ist, als bei geneigten Fenstern. (Wird das so reflektierte Licht in eine vertikale, eine linke und eine rechte horizontale Komponente zerlegt, so weichen die Grössen der beiden horizontalen Komponenten am wenigsten von der Grösse der vertikalen Komponente ab.) Ein weiterer Grund, die Shedfenster vertikal anzuordnen, bestand darin, dass statt dem teureren Drahtglas gewöhnliches, lichtdurchlässigeres

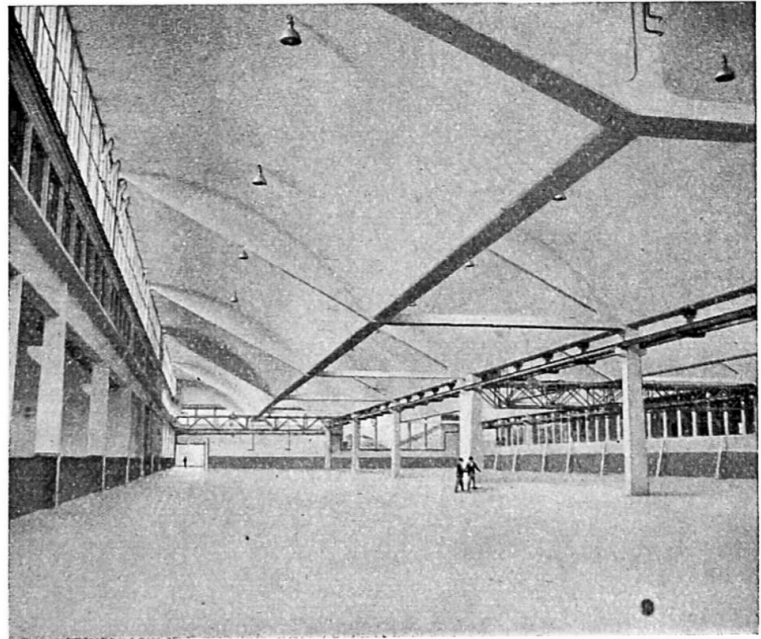
⁽¹⁾ A. STAUB, *Das Schalensheddach aus Eisenbeton der Schweiz. Bindfadenfabrik Schaffhausen* (SBZ, B. 115 v. 6-1-40).

Abb. 4. Innenansicht der Halle.

Fensterglas eingesetzt werden konnte. Dieses wird, da senkrecht, in der stark von Russ und Staub durchsetzten Luft, weniger verschmutzt, und ist zudem von den Rinnen aus leichter zu reinigen.

Zur Isolation der 7 cm starken Schale wurden Glaswollmatten verwendet. In gewissen Abständen wurden zuerst Holzklötzchen für die Auflagerung der Pfetten mit einem auch auf die Dauer als geeignet befundenen Leim auf die Schale versetzt. Alsdann erfolgte das Verlegen der Glaswollmatten, wobei die Auflagerstellen der Pfetten sorgfältig ausgeschnitten und abgedichtet wurden, um Kältebrücken zu vermeiden (Abb. 3). Hierauf wurden die Pfetten und schliesslich die Welleternitplatten verlegt. Diese wurden für den unteren Teil der Schale im Herstellungswerk gebogen. Die Glaswolle wird also durch die Eindeckung nicht zusammengedrückt und bildet eine hochwertige Wärmeisolierung.

Das Dachwasser aus der ersten und dritten Rinne (siehe Abb. 2, Schnitt *a-a*) wird längs dem Fachwerkuntergurtstab zur nächsten Stütze geleitet. Von dort aus können auch die Lüftungsflügel der Shedfenster durch ein Gestänge serienweise bedient werden. Abbildung 4 zeigt eine Innenansicht der Halle, aus welcher die sehr gleichmässige Belichtung ersichtlich ist.



Résumé

Ce mémoire donne la description, pour une construction voûtée récente, des principes de base, des calculs statiques, des détails d'exécution ainsi que des conditions d'isolation et d'éclairage.

Zusammenfassung

An einem Schalenbau neueren Datums werden die baulichen Grundlagen, die statischen Verhältnisse, konstruktive Einzelheiten, sowie Isolation und Belichtungsverhältnisse beschrieben.

Summary

A description is given of the structural rudiments, statical conditions, constructive details, as well as isolation and lighting conditions, of a shell structure recently built.

IVc3

**La résistance des murs minces en béton chargés axialement
sous une charge répartie**

**Die Festigkeit von dünnen, axial gedrückten Betonwänden
unter verteilter Belastung**

**The strength of thin concrete walls in axial compression
under distributed loading**

A. E. SEDDON

M. Sc., A. M. I. Struct. E.

Introduction

The tests described in this paper are part of a research programme in progress at the Building Research Station, of the Department of Scientific and Industrial Research, to investigate, in the first instance, the strength and performance of thin concrete walls. That programme has been outlined elsewhere ⁽¹⁾. Its purpose is to obtain experimental data on which design recommendations may be based for a more economic use of load-bearing reinforced concrete walls in multi-storey buildings.

Outline of the tests

Fourteen concrete test walls, 9 ft 0 in high and 4 in thick, were subjected to distributed axial compression in short-period tests to destruction.

An ordinary Portland cement and washed, uncrushed, natural river sand and gravel were used for the concretes, and these materials and the water were proportioned by weight to an accuracy of 0.1 %. The cement was obtained commercially and a quantity sufficient for all the tests was mixed in successive batches in a mechanical mixer in such a manner as to produce as uniform a material as possible. Representative samples were tested in the manner prescribed in B. S. S. No. 12 ⁽²⁾ and the cement was found to comply with the requirements of that British Standard. The aggre-

⁽¹⁾ F. G. THOMAS, *Structural Engineering Research at the Building Research Station (The Structural Engineer*, Vol. 26, No. 2, pp. 81-103. Institution of Structural Engineers, London, February, 1948).

⁽²⁾ B. S. S., No. 12. *Ordinary Portland and Rapid-Hardening Portland Cements*, British Standards Institution, London, 1947.

Reference No.	Length (ft in)	Mean storage conditions		Age at test (days)	Load at fracture (tons)	Mean crushing strength (lb/in ²)
		Mean temperature (° F)	Mean relative humidity (%)			
1A	1	70	54	22	395	3 070
	2	69	51	15	351	2 730
	3	70	53	14	308	2 390
1B	1	65	51	15	296	2 300
	2	63	54	14	> 500	> 3 890
	3	60	41		> 461	> 3 580
	4	58	50		350	2 720
1C	1	63	58	14	272	2 820
	4	58	50		240	2 490
	5	59	40		287	2 980
	2	62	59		165	2 570
	6	61	44		152	2 360
	3	60	54		76.8	2 390
	7	64	44		80.0	2 490

TABLE 1. — Wall Test Data : Walls 9 ft 0 in high, 4 in thick.

gates were known to be of good quality, were dried before use and were well-graded with a maximum size of 3/4 in.

The concretes were prepared in an open-pan, paddle-type mixer in a laboratory in which the temperature and relative humidity were controlled at 64° F and 65 %. From each batch of concrete a sample was drawn to cast control specimens concurrently with a portion of the wall. These specimens consisted of 4 in cubes, 6 in $\times$ 12 in cylinders and 4 in $\times$ 4 in $\times$ 16 in beams, and the number of each type varied as the wall series proceeded but was in no case less than six for any one condition of storage. The cubes and beams were moulded in accordance with the British Standard Code of Practice ⁽³⁾, and the cylinders in a manner similar to that specified by the American Society for Testing Materials ⁽⁴⁾ with the exception that they were not capped. The walls were cast in the laboratory housing the com-

⁽³⁾ British Standard Code of Practice *The Structural Use of Normal Reinforced Concrete in Buildings*, British Standards Institution, London, 1948.

⁽⁴⁾ A. S. T. M. Designation C31-44 : *Making and Curing Concrete Compression and Flexure Test Specimens in the Field*, American Society for Testing Materials, Philadelphia, 1944.

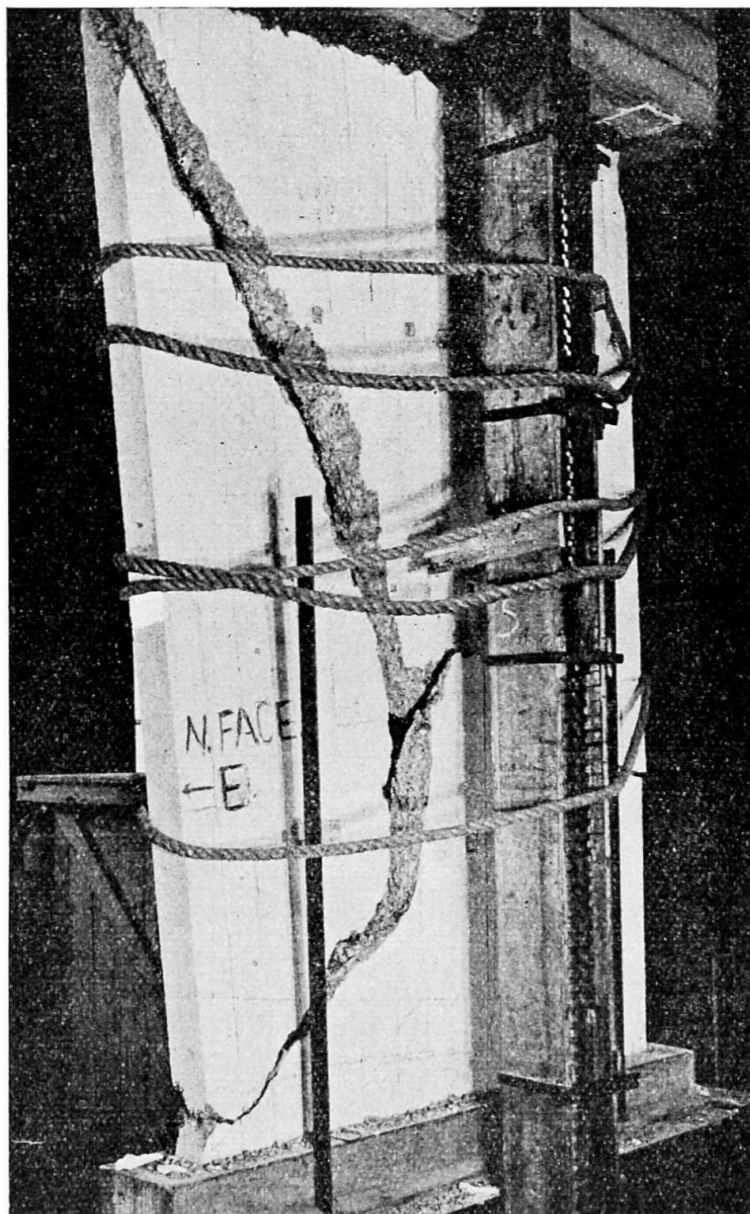


fig. 1. View of wall 1B4 after failure.

pression machine used in the wall tests, in one lift and on reinforced concrete pallets. The temperature and relative humidity of this testing laboratory were not controlled, but they were continuously recorded.

After casting the wall and its control specimens, damp sacking was spread over them until the wall forms were stripped or the specimens demoulded. The respective curing periods were three and two days. The walls were stored in the testing laboratory with certain of the control specimens, whilst the other specimens were stored in air at 64° F and a relative humidity of 65 %.

The walls were loaded axially in a hydraulic compression machine of 500 tons capacity. The machine was of the twin-screw type, in which the walls were compressed by a hydraulic ram against a crosshead located by the screws. The load on the ram was recorded by a pendulum-type dynamometer, and this load was distributed along the full length of the wall by two stout loading beams located between the wall and the bearing plates

Reference No.		Age at test (days)	4 in cubes				6 in $\times$ 12 in cylinders			
			Controlled storage 64° F., 65 % R. H.		Storage with wall		Controlled storage 64° F., 65 % R. H.		Storage with wall	
			N°	Crushing strength (lb/in ²)	N°	Crushing strength (lb/in ²)	N°	Crushing strength (lb/in ²)	N°	Crushing strength (lb/in ²)
1A	1	22	6	3 720			6	2 890		
	2	15	6	3 440			6	2 500		
	3	14	6	3 340			6	2 220		
1B	1	15	6	2 860			6	2 110		
	2	14	6	5 260			6	3 680		
	3		6	4 540	12	4 570			12	3 280
	4		6	4 020	12	3 190			12	2 340
1C	1	14	6	3 480			6	2 610		
	4		6	3 470	6	3 600			6	2 680
	5		6	3 610	12	3 720			12	2 790
	2		6	3 780	6	3 730			6	2 920
	6		12	3 460	12	3 280	8	3 100	8	2 760
	3		6	3 250	6	2 860			6	2 290
	7		12	3 940	12	3 460	8	2 990	8	2 770

of the machine. The top of the wall and the pallet were bedded between these loading beams using a cement mortar. In loading the wall the procedure consisted of two test runs, a preliminary run and the test run proper.

During the test run proper the overall loading rate to failure of the wall ranged from about 15 to 20 lb/in²/min through the test series. The wall test data is given in Table 1 and a view of one of the walls after failure can be seen in Figure 1.

The control specimens were weighed before they were tested at the same age as that at which the corresponding wall was tested. The cubes and beams were tested in accordance with the above-mentioned B. S. Code of Practice, but the cylinders were crushed between two sheets of 3/16 in hard plywood inserted between the cylinders and the steel platens of the testing machine. The test data obtained from the control specimens is given in Table 2.

The strengths developed by the walls and those of the cubes and cylinders are compared in Table 3.

TABLE 2. — *Control Specimens : Test Data.*

4 in × 4 in × 16 in beams				Mean density (lb/cu. ft)	
Controlled storage 64° F., 65 % R. H.		Storage with wall		Controlled storage 64° F. 65 % R. H.	Storage with wall
N°	Modulus of rupture (lb/in ²)	N°	Modulus of rupture (lb/in ²)		
6	530			143.5	
6	530			143.2	
6	425			143.0	
6	415			143.3	
6	500			147.2	
		6	455	144.0	142.4
		6	365	144.8	142.5
6	435			144.4	
		6	410	144.6	144.0
		6	490	143.2	142.2
		6	395	142.8	142.5
6	475	6	405	143.7	141.5
		6	360	144.4	143.0
6	430	6	395	143.2	142.6

Conclusions

The following conclusions were drawn from the tests :

(i) For 4 in walls stored under laboratory conditions of moderate temperature and humidity and of lengths not less than 4 ft 6 in, a fair average value of the wall strength (defined as the ultimate mean compressive stress) was 75 % of the mean crushing strength of 4 in cubes cast in the same concrete and stored in air at 64° F and a relative humidity of 65 % (the controlled-stored cube strength).

(ii) For walls similar in size and materials, the values of the ratio wall strength : controlled-stored cube strength did not differ from their average by more than $\pm 7 \frac{1}{2}$ %

(iii) For shorter 4 in walls from 3 ft 0 in to 1 ft 6 in long there was a small reduction in the average value of the ratio wall strength : controlled-stored cube strength to a value not less than 65 %. The average value for walls of these lengths tended to approach the lower limit of the values for the longer walls.

Reference No.		Ratio $\frac{\text{wall strength}}{4 \text{ in cube strength}}$ (%)		Ratio $\frac{\text{wall strength}}{6 \text{ in } \times 12 \text{ in cylinder strength}}$ (%)	
		Controlled storage of cubes 64° F., 65 % R. H.	Same storage	Controlled storage of cylinders 64° F., 65 % R. H.	Same storage
1A	1	82.5		106.0	
	2	79.5		109.0	
	3	71.5		107.5	
1B	1	80.5		109.0	
	2	> 74.0		> 105.5	
	3	> 79.0	> 78.5		> 109.0
	4	67.5	85.0		116.0
1C	1	81.0		108.0	
	4	72.0	69.0		93.0
	5	82.5	80.0		107.0
	2	68.0	69.0		88.0
	6	68.0	72.0	76.0	85.5
	3	73.5	83.5		104.5
	7	63.0	72.0	83.5	90.0

(iv) The wall strengths were related to the crushing strengths of 6 in $\times$ 12 in cylinders stored in air at 64° F and a relative humidity of 65 %, and tested between plywood packings, in a manner consistent with a fair average value of the ratio cylinder strength : cube strength of 75 %. Thus, the walls not less than 4 ft 6 in long had strengths which compared favourably with those of controlled-stored 6 in $\times$ 12 in cylinders.

(v) For 4 in walls which were similar in other respects, no significant decrease in the ratio wall strength : cube strength was evident over a range of controlled-stored cube strengths from about 2 500 to 5 000 lb/in².

(vi) In no test was instability the criterion of failure of the wall. The walls crushed without appreciable bending.

Acknowledgment

The work described above has been carried out as part of the research programme of the Building Research Board of the Department of Scientific and Industrial Research, and this paper is published by permission of the Director of Building Research.

Ratio $\frac{6 \text{ in } \times 12 \text{ in cylinder strength}}{4 \text{ in cube strength}}$ (%)
Same storage
77.5
72.5
66.5
74.0
70.0
71.5
73.0
75.0
74.5
75.0
78.0
{ 89.5
{ 84.0
80.0
{ 76.0
{ 80.0

TABLE 3. — *Walls and Control Specimens : Proportional Strengths.*

(Ratios quoted to ± 0.25 %)

Résumé

Les résultats d'essai obtenus sur des murs en béton de 10 cm d'épaisseur chargés axialement montrent qu'en réduisant la longueur du mur de 1,80 m à 0,45 m, le rapport de sa charge de rupture moyenne par rapport à celle du cube d'essai de 10 cm de côté exécuté dans le même béton s'abaisse de 0,75 à 0,65. On n'a pas pu déterminer si ce rapport est influencé par la résistance du cube pour des tensions de 175 à 350 kg/cm². Les essais donnent une valeur moyenne constante de 0,75 pour le rapport de la charge de rupture de cylindres de 15 cm $\times$ 30 cm (essayés entre plaques de multiplex) à celle des cubes d'essai de 10 cm de côté, dans le cas où cylindres et cubes ont été conservés dans l'air ambiant. Pour tous les essais, la rupture du mur fut causée par dépassement de la tension de compression du béton. Aucune valeur sensible pour la flèche ou voilement n'est à signaler.

Zusammenfassung

Die Ergebnisse von Versuchen an 10 cm dicken, einstöckigen, axial gedrückten Betonwänden zeigen, dass bei Verkleinerung der Wandlänge von 1,50 m auf 0,45 m das Verhältnis der höchsten mittleren Druckspannung in der Wand zur mittleren Druckfestigkeit von 10 cm Würfeln aus gleichem Beton von ungefähr 0,75 auf höchstens 0,65 sinkt. Es konnte nicht festgestellt werden, dass dieses Verhältnis durch die Änderung der Würfeldruckfestigkeit innerhalb eines Bereichs von 175 bis 350 kg/cm² beeinflusst wurde. Die Ergebnisse zeigten einen gleichbleibenden Durchschnittswert von 0,75 für das Verhältnis der Druckfestigkeit von 15 × 30 cm Zylindern (geprüft zwischen harten Sperrholzfassungen) zu derjenigen von 10 cm Würfeln, wenn die Zylinder und die Würfel zusammen an der Luft gelagert wurden. Bei allen Versuchen versagte die Wand durch Ueberwindung der Druckfestigkeit des Betons. Weder nennenswerte Biegung noch Knicken trat auf.

Summary

Data obtained from tests on 4 in concrete walls of single-storey height under distributed axial compression suggests that as the wall length is reduced from 6 ft 0 in to 1 ft 6 in the ratio between the ultimate mean compressive stress in the wall and the mean crushing strength of 4 in cubes of the concrete used is reduced from about 0.75 to not less than 0.65. There was no evidence to suggest that the ratio is affected by the cube strength within a range of cube strengths from about 2 500 to 5 000 lb/in². The data was consistent with a fair average value of 0.75 of the ratio between the crushing strengths of 6 in × 12 in cylinders (tested between hard plywood packings) and 4 in cubes, when the cylinders and cubes were stored together in air. In all the tests the wall failed by crushing of the concrete, and neither appreciable bending nor buckling occurred.

IVc4

Contribution à l'intégration de l'équation différentielle pour voiles minces non fléchis

Ueber die Integration der Differentialgleichung für dünne Schalen ohne Biegung

On integration of the differential equation for thin shells without bending

K. W. JOHANSEN

Dr techn. Copenhagen

For thin shells without bending it is known ⁽¹⁾ that the horizontal components of the membrane forces may be given by a stress function :

$$N_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \int X dx; \quad N_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \int Y dy; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y};$$

which is determined by the differential equation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = Z - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial z}{\partial x} \int X dx \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial z}{\partial y} \int Y dy \right]$$

X and Y are the horizontal components of the load, Z the vertical, and z the ordinate of the middle surface of the shell. In well-known notation it may be written :

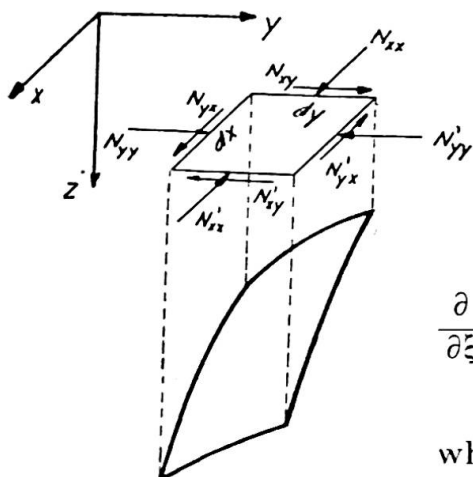
$$t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = G. \quad (1)$$

We now use Laplace's method for transformation of linear equations by changing the independent variables x and y to ξ and η , where ξ and η are the solutions of

$$t dy^2 + 2s dy dx + r dx^2 = 0 \quad (2)$$

⁽¹⁾ L. BESCHINE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 201, p. 935, 1935.

B. LAFFAILLE, *Mémoire sur l'étude générale des surfaces gauches minces* (Publications IABSE, vol. 3, p. 295, 1935).



or

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}. \quad (3)$$

We then get

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{s^2 - rt} \frac{\partial F}{\partial \tau_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\sqrt{s^2 - rt} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) = GD \quad (4)$$

where D is the functional determinant.

Substituting $H = \sqrt{s^2 - rt}$ and $u = HF$, we get

$$2H \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau_1} - 2u \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \tau_1} = G \cdot D. \quad (6)$$

This equation may be integrated at once, when $\frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \tau_1} = 0$, and that is the case when

$$H^4 = s^2 - rt = a^2 = \text{constant}. \quad (7)$$

The solution of this differential equation is obtained by eliminating q from

$$\left. \begin{aligned} z &= qy + \Phi \left(q - \frac{x}{a} \right) + \Psi \left(q + \frac{x}{a} \right) \\ 0 &= y + \Phi' \left(q - \frac{x}{a} \right) + \Psi' \left(q + \frac{x}{a} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

where Φ or Ψ are arbitrary functions.

We now have

$$\xi = q - \frac{x}{a}; \quad \eta = q + \frac{x}{a} \quad (9)$$

and

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{2} (\eta - \xi); & y &= -\Phi'(\xi) - \Psi'(\eta); \\ z &= \Phi(\xi) + \Psi(\eta) - \frac{1}{2} (\xi + \eta) [\Phi'(\xi) + \Psi'(\eta)]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

The differential equation (1) then becomes

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \tau_1} = \frac{a^2}{4} [\Phi''(\xi) + \Psi''(\eta)] G. \quad (11)$$

which is solved by two quadratures.

When a is real, the shell surface has hyperbolic curvature. When a is imaginary, $a = ib$, the shell surface has elliptic curvature. The equation is more convenient put into real form, and we get the equation of the potential

$$b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = GD \quad (12)$$

where ξ and η are the real and imaginary parts, respectively, of the solution $\zeta = \xi + i\eta$ to (2) or (3).

Finally, when $rt = s^2$, the shell surface is developable. Then $\xi = x$ and η is the solution of $\frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t}$. The equation is transformed into

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{t}{\eta_y} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) = \frac{G}{\eta_y}; \quad \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (13)$$

This equation is solved by two quadratures.

$H = \text{constant}$ is a very special solution of the equation $\frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Transforming $\frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ into the original variables x and y and putting $\frac{1}{H} = h$, we get the more general differential equation

$$r \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - 2s \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + t \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0; \quad h = (s^2 - rt)^{-\frac{1}{4}} = H^{-1}. \quad (14)$$

It is of the 4th order, and the general solution may be difficult to find, but special solutions are

$$\frac{z}{c} = \frac{x}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{b},$$

$$\frac{z}{c} = \frac{x}{a} \operatorname{th}^{-1} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \operatorname{th}^{-1} \frac{y}{b},$$

$$\frac{z}{c} = \frac{x}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \operatorname{th}^{-1} \frac{y}{b},$$

$$\frac{z}{c} = \frac{a^2}{x^2} \pm \frac{b^2}{y^2},$$

$$\frac{z}{c} = \log \frac{y}{x},$$

$$\Phi(z) = x + Aye^{az}.$$

By the mathematical methods it may be somewhat difficult to satisfy the boundary conditions. I should therefore like to call attention to a very simple practical method. In most cases the shell is designed for one load only, dead load and snow, as the wind-pressure has little influence. We may now reverse the problem, choose the stress function, and determine the shell surface. Usually it will not be difficult to choose a stress function satisfying the boundary conditions. For the shell surface there are generally no boundary conditions at all, or only very limited ones.

This circumstance facilitates the solution of the differential equation, which may be solved by the methods of finite differences in the simplest form. In other applications of finite differences one may solve a great number of linear equations and the solution must finally be differentiated once or twice to get the stresses. This process involves much work and

great accuracy. But in our case the ordinate z gives the final solution at once, and the lack of boundary conditions makes it possible to choose some ordinates arbitrarily and thus in most cases compute the rest successively. One may also start with a rough net, and then interpolate to intermediate points. In this connection it should be noted that the net need not fit the contour, when there are no boundary conditions.

Résumé

Grâce à la transformation de Laplace, on peut obtenir une forme simple (6) pour l'équation différentielle des tensions (1). Pour le type de voûte défini par l'équation (8), cette équation peut encore se simplifier pour prendre la forme (11) qui peut être résolue par deux intégrations. Pour les voûtes à courbure elliptique on obtient l'équation différentielle (12). Cette même forme simple est également obtenue par les voûtes du type (14).

L'auteur montre en outre qu'il est possible de choisir d'abord la forme de l'équation des tensions et d'en déduire la forme de la voûte, et cela d'une manière très simple par le calcul différentiel.

Zusammenfassung

Mit Hilfe der Transformation von Laplace kann die Differentialgleichung (1) der Spannungsfunktion in die einfache Form (6) gebracht werden. Für den Schalentyp, der durch (8) beschrieben wird, kann die Gleichung weiter vereinfacht werden auf (11), welche durch zwei Integrationen gelöst werden kann. Für Schalen mit elliptischer Krümmung erhält man die Potentialgleichung (12). Die gleiche einfache Form wird auch erhalten für Schalen vom Typus (14).

Ferner wird gezeigt, dass in vielen Fällen die Spannungsfunktion gewählt und die Schalenform danach bestimmt werden kann. Dies kann z.B. ganz einfach mittels Differenzenrechnung durchgeführt werden.

Summary

By Laplace's transformation the differential equation (1) for the stress function can be converted into the simple form (6). For the shell type represented by (8) the equation is further reduced to (11), which is solved by two integrations. For surfaces with elliptic curvature, the potential equation (12) is obtained. The same simple forms are also obtained for shell types which satisfy (14).

Furthermore, it is pointed out that in many cases the stress function can be chosen and the shell surface determined thereafter. This determination can, for instance, be made quite simply by the method of finite differences.

IVc5

Considérations concernant le calcul et le projet des voûtes cylindriques

Kritische Betrachtungen zur Berechnung und zum Entwurf von Zylinderschalen

Critical notes on the calculation and design of cylindrical shells

K. W. JOHANSEN

Dr techn. Copenhagen

The forces and bending moments in cylindrical shells are usually determined by a differential equation of the 8th order. The mathematical work is very complicated, especially the determination of the arbitrary constants at the boundary conditions. The numerical computations must be worked out to six decimals, when the final results are required to have three. The forces and moments thus obtained determine the dimensions and reinforcement of the shell. How this is done is never mentioned in the literature, and, I think, with good reason. The fact is that it is done in a very irrational manner. The tensile stresses are summed up into a tensile force, and the area of reinforcement is determined by dividing this tensile force by the working stress, ignoring the fact that the deformation and the working stress do not correspond, as they are not constant over the entire region of tension. With this serious discrepancy between stress and strain the basis of all the fine mathematical work and all the complicated computations is gone, the basis being the theory of elasticity, where stress and strain correspond. We may put it this way : First we calculate the forces and moments according to the theory of elasticity, and then we design according to assumptions contrary to the same theory. Being very sensitive to the distribution of the shear forces, the transversal bending moments may be multiplied when cracks develop and the bars yield, and we must therefore calculate the shell in a state of rupture at the ultimate load, the more so as the working load must be fixed according to the ultimate load.

For long shells the theory of rupture is very simple. The shell may be considered as a reinforced concrete beam, and the tension of the concrete in the tension zone is not taken into account. The neutral axis is determined

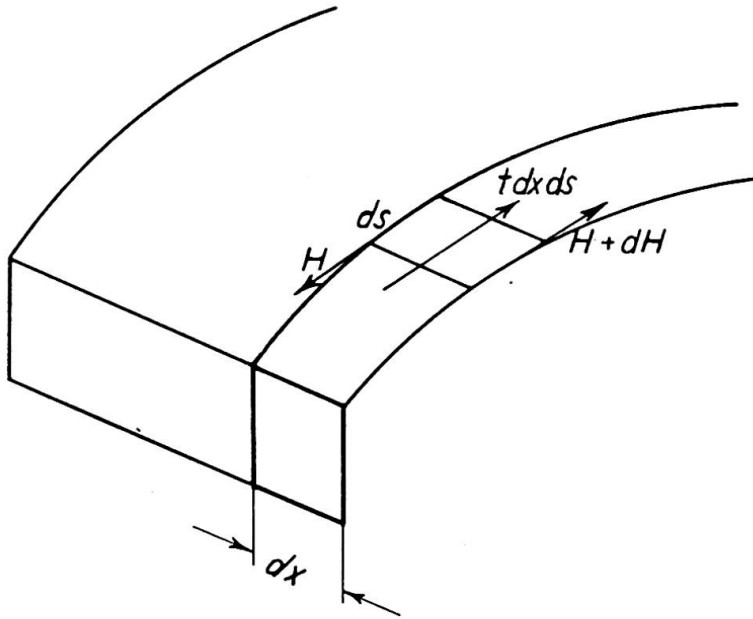


Fig. 1.

as corresponding to the stresses in the concrete and the reinforcement. Then also the moment arm h_i is determined, whereby the tensile force T , equal to the compressive force C , can be calculated, as $M = T \cdot h_i$. On a strip of the shell act the shear forces $-H$ and $H + dH$, calculated according to the elementary theory for reinforced concrete beams. The resultant of $-H$ and $H + dH$ acts as a tangential force $t dx$ on the shell. The forces $t = \frac{dH}{dx}$ and the load p then determine the transverse moments m in the shell. Between the reinforcement and the neutral axis, H , and consequently also t , are constant. For the sake of simplicity the compressive stress is assumed constant, as in the modern methods for calculation of reinforced concrete beams. H will then vary in the compression zone proportionally to the arc length of the normal section.

When calculating the transverse moment m , the normal force n , and

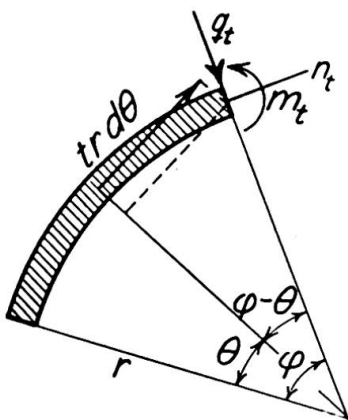


Fig. 2.

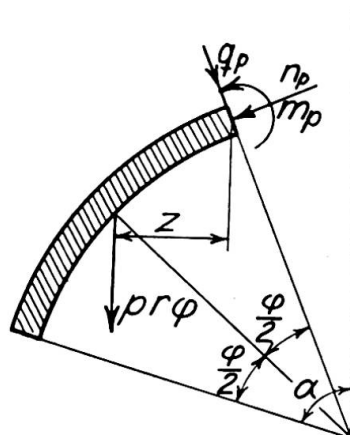


Fig. 3.

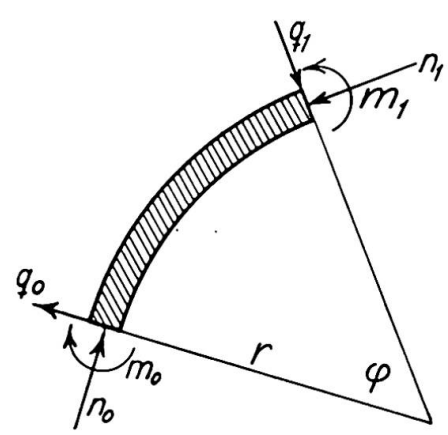


Fig. 4.

the transverse force q we have the following formulae for circular shells

$$\left. \begin{aligned} m_t &= \int_0^\varphi r^2 t [1 - \cos(\varphi - \theta)] d\theta; & n_t &= \int_0^\varphi r t \cos(\varphi - \theta) d\theta; \\ q_t &= \int_0^\varphi r t \sin(\varphi - \theta) d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

For $t = \text{constant}$ are obtained

$$m_t = tr^2(\varphi - \sin \varphi); \quad n_t = tr \sin \varphi; \quad q_t = tr(1 - \cos \varphi). \quad (2)$$

For $t = k \cdot \theta$, i.e. proportional to the arc length, are obtained

$$\left. \begin{aligned} m_t &= kr^2 \left(\frac{\varphi^2}{2} - 1 + \cos \varphi \right) - \frac{kr^2 \varphi^4}{24}; & n_t &= kr(1 - \cos \varphi); \\ q_t &= kr(\varphi - \sin \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

From constant vertical load we get

$$\left. \begin{aligned} m_p &= -pr^2 \left(\frac{\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi)}{\varphi} + \varphi \sin(\alpha - \varphi) \right); & n_p &= -pr \varphi \sin(\alpha - \varphi); \\ q_p &= -pr \varphi \cos(\alpha - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Finally, from support, or from the adjacent part, we obtain

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m_0 + n_0 r (1 - \cos \varphi) + q_0 r \sin \varphi; & n_1 &= n_0 \cos \varphi - q_0 \sin \varphi; \\ q_1 &= q_0 \cos \varphi + M_0 \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

The calculation can be made by means of a combination of these formulae. Some of the expressions are not suitable for practical calculations, but can be developed in series as shown, or tables of these expressions may be calculated once and for all.

With a skew load, or unsymmetrical cross-section, the influence of the twisting may become so great that two compression zones may be required. This will complicate the calculations somewhat, but they remain elementary all the same. It is, however, best — and frequently also feasible — to design the shell and the supports in such a way that this case does not occur. As an example, let us consider the well-known saw-tooth roof. The resultant P of the load acts here at a distance a from the resultant — P of the shear forces by mere bending. We then have at twisting moment $P \cdot d$ per unit length of the shell. The best way of getting rid of this is to design the top-lights so that they can transfer a force $F = \frac{Pd}{l}$ per unit length from shell to shell. In a thesis for the doctorate, now in the press, H. Lundgren has offered a further contribution on this point — also as far as short shells are concerned.

The stresses being proportional to the load, it is possible to divide by the coefficient of safety, whereby the permissible stresses and the permissible loads will be included in the calculation instead of the rupture values.

Example. — A circular shell of the cross-section shown in the figure is calculated for symmetrical loading. Its length is 30.0 m, and the load is :

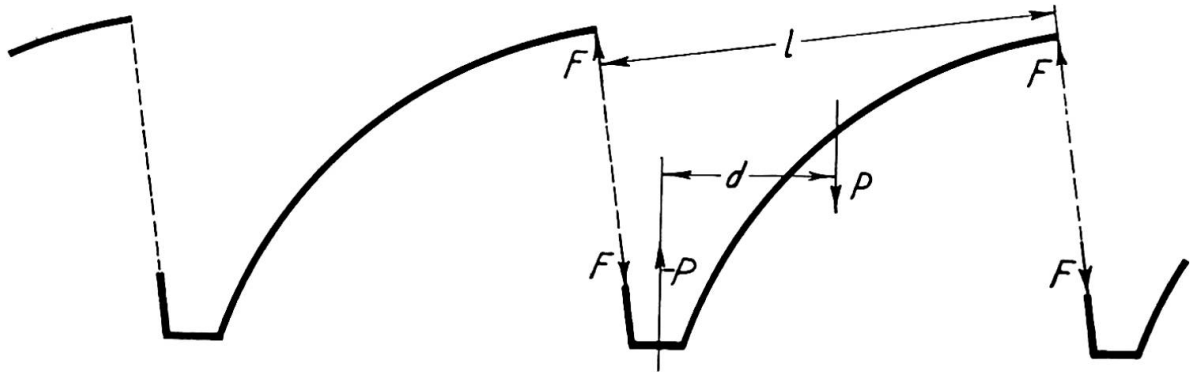


Fig. 5.

Circular Part :

Self-weight	$0.08 \cdot 2\,400 = 192$	kg/sq.m
Insulation, etc.	53	"
Snow	75	"
In total	<u>320</u>	kg/sq.m

For the whole arc
 $2 \cdot 0.6 \cdot 8.85 \cdot 320 = 3\,400$ kg/m

Vertical Part :

Reinforced concrete	$0.15 \cdot 2\,400 = 360$	kg/sq.m
Insulation, etc.	40	"
In total	<u>400</u>	kg/sq.m

For the whole edge girder
 $2 \cdot 0.9 \cdot 400 = 720$ kg/m

For the whole cross-section $P = 4\,120$ kg/m. $M = 1/8 \cdot 4\,120 \cdot 30^2 = 464\,000$ kg/m. The neutral axis is assumed to correspond to $\beta = 0.3$, i.e. 0.40 m under the top. The

centre of pressure is then $8.85 \left(1 - \frac{\sin \beta}{\beta}\right) - \frac{1}{6} \cdot 8.85 \cdot \beta^2 = 0.13$ m

under the top, so that the moment arm h_t is $2.30 - 0.13 = 2.17$ m. The tensile force and the compressive force will then be $464\,000 : 2.17 = 214\,000$ kg. The concrete stress will be

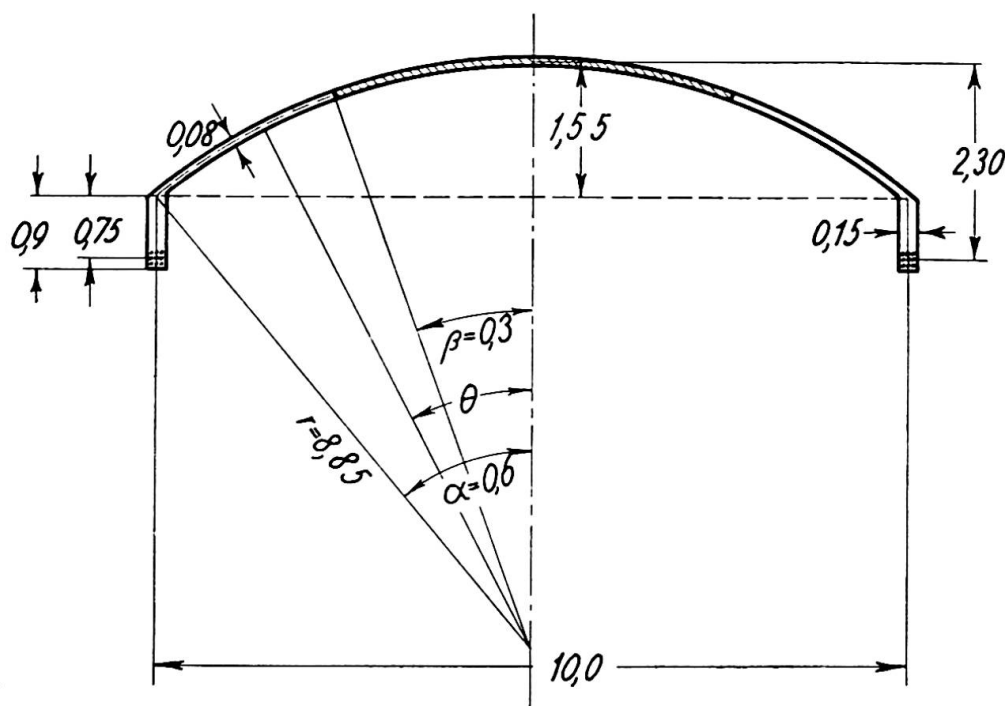
$$\sigma_b = \frac{214\,000}{2 \cdot 0.3 \cdot 8.85 \cdot 8} = 50.5 \text{ kg/sq. cm.}$$

With the reinforcement rod tension $= 1\,800$ kg/sq.cm, $\frac{214\,000}{2 \cdot 1\,800} = 59.4$ sq.cm be required for each edge girder, for instance 19 reinforcement rods of 20 mm dia.

Owing to the symmetry, $H = \frac{Q}{2 \cdot h_t}$, where Q is the transverse force in the shell considered as beam with 30 m span. We then have $t = \frac{1}{2 \cdot h_t} \cdot \frac{dQ}{dx} = \frac{P}{2 \cdot h_t}$, where P is the load per unit length, i.e. $t = \frac{4\,120}{2 \cdot 2.17} = 950$ kg/sq.m between the reinforcement and the neutral axis. From the latter to the top it decreases to zero proportionally to θ . The factor of proportionality k is $950 : 0.3 = 3\,170$ kg/m. In the edge girder we get no moment, and the resultant of t and the load is $R = 950 \cdot 0.75 - 400 \cdot 0.9 = 353$ kg/m. The following transverse moment is then found

$$m = R (5.00 - 8.85 \sin \theta) + m_p + m_t,$$

where m_p is calculated from formula (4), m_t from (2), which, for points over the neutral axis, is corrected by means of formula (3). n and q are calculated correspondingly. As a check serves that $q = 0$ at the top, i.e. $q_t = 1/2 \cdot 4\,120 - 0.75 \cdot 950 = 1\,345$ kg/m $= tr (1 - \cos \alpha) - \frac{tr}{3} (\beta - \sin \beta) = 950 \cdot 8.85 \cdot 0.16$, which tallies. tr^2 being $= 950 \cdot 8.85^2 = 74\,400$ kg, $1/24 \cdot kr^2 = 103\,000$ kg, and $pr^2 = 320 \cdot 8.85^2 = 25\,100$ kg, we get in kg



θ	0.60	0.55	0.50	0.45	0.40	0.35	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0
m_R	0	131	266	405	547	691	840	991	1145	1290	1450	1610	1765
m_P	0	-28	-107	-246	-448	-712	-1036	-1430	-1888	-2411	-3006	-3662	-4386
m_t	0	2	13	42	99	193	332	528	785	1120	1525	2030	2620
corr.	0	—	—	—	—	—	—	0	-1	-5	-16	-40	-83
m	0	105	172	201	198	172	136	89	41	-6	-47	-62	-84

It will be seen that the location of the neutral axis can have little influence on m , the correction terms in the compression zone being rather small.

Résumé

On calcule en général les voûtes cylindriques en se basant sur la théorie d'élasticité, mais les dimensions choisies ne sont pas en accord avec cette théorie. C'est contraire à la logique. Comme la charge de rupture est à la base de la détermination de la charge utile, l'auteur indique une méthode de calcul se basant sur l'état de rupture. Il l'applique à un exemple numérique.

Zusammenfassung

Zylinderschalen werden gewöhnlich nach der Elastizitätstheorie berechnet, aber unter Annahmen dimensioniert, die mit dieser Theorie nicht übereinstimmen. Dies ist nicht logisch. Da die Bruchlast als Grundlage für die Bestimmung der Tragkraft genommen werden muss, wird gezeigt, wie eine einfache Berechnungsmethode, die vom Bruchstadium ausgeht, entwickelt werden kann. Sie wird angewendet auf ein Beispiel.

Summary

Cylindrical reinforced concrete shells are usually calculated on the theory of elasticity, but are dimensioned under assumptions at variance with this theory. This is irrational. As the ultimate load must be the starting point for the estimation of the carrying capacity, it is shown how a simple calculation-method based on the rupture stage can be developed. It is illustrated by an example.

IVc6

Application de l'équation du travail virtuel au calcul des poutres-parois

Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit auf die Berechnung der wandartigen Träger

The application of the virtual work equation for calculating walls-beams

PROF. D^r JERZY MANDES

1. Definition of Wall-Beam

A wall-beam is a flat element, having its height greater than its span and a small thickness. We assume, that there does not exist any danger of buckling. They are used for building of : silos, shelters, coal-storages, etc. Walls-beams could be of single span, continuous, with brackets, having rigid or elastic support and constant or variable thickness.

2. The Methods of Calculation for Walls-Beams

The methods of calculation for walls-beams are based, until now, on the works of Bay, Bortsch, Cramer, Dischinger, L'Hermite, Hager and Hobel. All those methods could be brought to three fundamental types such as : general equilibrium equations, Airy's functions and differential equations. Since in this case the ordinary theory of bending is not applicable and previous ones have a number of faults like : limited adaptation, boundary or deformation conditions not fulfilled, disability to choose the right function of stresses etc., there was applied, therefore, Ritz-Timoshenko's method of virtual work. This method has following advantages : easy choice of stresses function, simple equations for stresses, generalizes the results for variable height, seizes the problem of buckling, applies to all kinds of loading by using continuous functions. An element supported continuously, at two points and a bracket were calculated by this method.

3. Base of Virtual Work in Application to Walls-Beams

The fundamental equation for a two-dimensional problem with the omission of the volumetric forces is :

$$\delta \int \int V \, dx \, dy = \int (\delta X_v u + \delta Y_v v) \, dx \, (dy) . \quad (1)$$

Strain energy per unit volume

$$V = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} \sigma_x^2 + \frac{1}{2} \sigma_y^2 - \mu \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y + (1 + \mu) \tau^2 \right] . \quad (2)$$

Surface forces

$$X_v = \sigma_x \cos (xv) + \tau \cos (yv) \quad Y_v = \tau \cos (xv) + \sigma_y \cos (yv) \quad (3)$$

Constituent transfers

$$u = \frac{1}{E} \int (\sigma_x - \mu \sigma_y) \, dx \quad v = \frac{1}{E} \int (\sigma_y - \mu \sigma_x) \, dy . \quad (4)$$

The angles of the normal to the edge of an element with axis x and y : xv , yv .

Let the function of stresses be of a type

$$F(x, y) = k_1 f_1(x, y) + k_2 f_2(x, y) + \dots + k_n f_n(x, y) \quad (5)$$

with unknown parameters $k_1, k_2 \dots k_n$, which are obtained from the equations

$$\frac{\partial}{\partial n} \int \int V \, dx \, dy = \int \left(\frac{\partial X_v}{\partial n} u + \frac{\partial Y_v}{\partial n} v \right) \, dx \, (dy) . \quad (6)$$

Functions f_i must fulfil the boundary conditions. The stresses are determined from following equations :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} . \quad (7)$$

4. Calculation of a Single Element Supported at Two Points

Let the stresses function be :

$$F = p \left[-\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2 h^5} (a^2 - x^2) \cdot (-5.5 h^2 y^4 + 5 h y^5 - 0.5 y^6) + \frac{k}{a^2 h^4} \cdot (a^2 - x^2)^2 \cdot (h^2 y^2 - 2 h y^3 + y^4) \right] . \quad (8)$$

By means of equation (8) we obtain : stresses (7), strain energy (2), surface forces (3), constituent transfers (4). By substituting the obtained values from this expression into equation (6) we shall get the unknown parameter k :

$$k = - \left(2.73 \frac{h^2}{l^2} - 0.89 \right) : \left(\frac{l^2}{h^2} + 0.57 + \frac{h^2}{l^2} \right) . \quad (9)$$

expressed in the function of slenderness ratio $\frac{h}{l}$. Substituting now value of k , obtained from equation (9), into equation (7), we shall get three constituent stresses in a variable function x and y and also in the slenderness ratio $\frac{h}{l}$, having $\frac{h}{l} = 1$, $k = -0.72$ hence

$$\sigma_x = p \left[\frac{1}{2h^6} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right) \cdot (-66h^2y^2 + 100hy^3 - 15y^4) - \frac{2.88}{h^6} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right)^2 \cdot (2h^2 - 12hy + 12y^2) \right]; \quad (10)$$

$$\sigma_y = p \left[-1 - \frac{1}{h^6} \cdot (-5.5h^2y^4 + 5hy^5 - 0.5y^6) + \frac{11.52}{h^6} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - 3x^2 \right) \cdot (h^2y^2 - 2hy^3 + y^4) \right]; \quad (11)$$

$$\tau = p \left[\frac{1}{h^6} \cdot x \cdot (-22h^2y^3 + 25hy^4 - 3y^5) - \frac{11.52}{h^6} \cdot x \cdot \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right) \cdot (2h^2y - 6hy^2 + 4y^3) \right]. \quad (12)$$

The distribution of stresses is shown in figure 1.

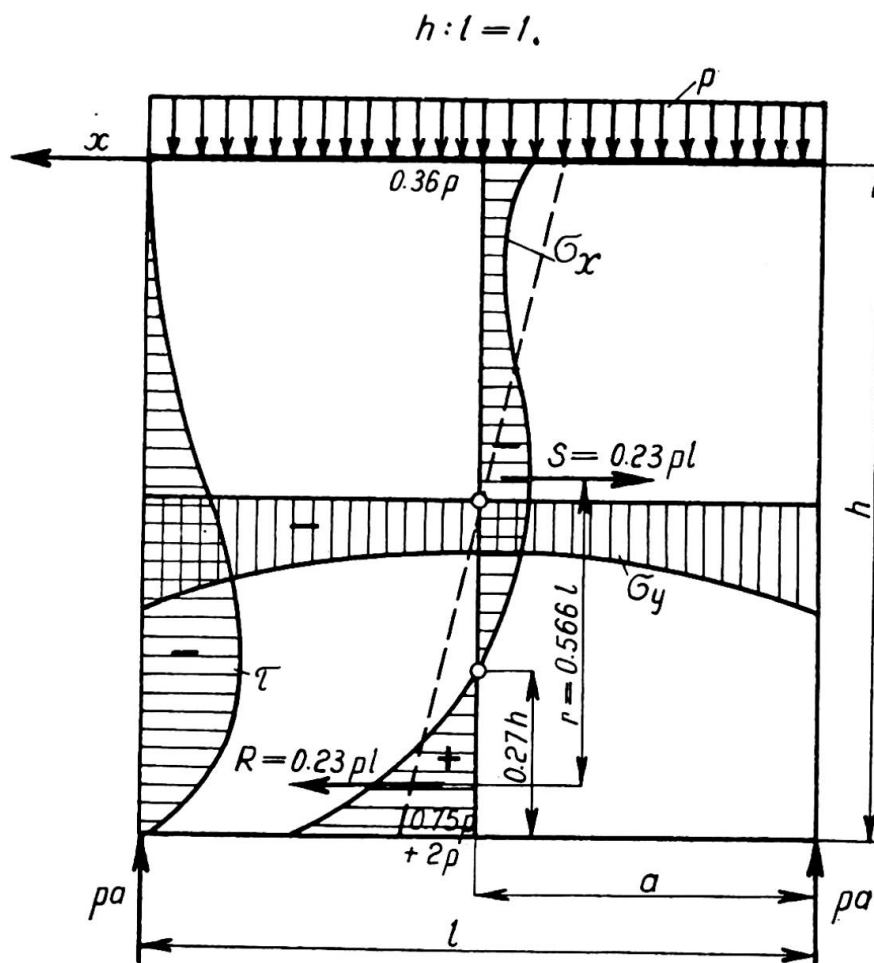


Fig. 1. Distribution of stresses.

The Curve σ_x introduces the normal horizontal stresses in the centre of the span of a beam. For comparison it is also given a curve of stresses obtained by means of Navier's theorem — dotted line. The numerical value, in the centre of the top edge of the beam, calculated by means of the equation for virtual work and also by Navier's theorem is $-0.36 p$ and $-0.75 p$. In the centre of the bottom edge the values of above stresses are $+2.0 p$ and $+0.75 p$.

The Curve τ introduces the tangential stresses in the section over the support but it is not a parabola as it happens in ordinary theory of bending. The greatest value of the tangential stresses on the neutral axis, with consideration of equation (12) is for $\frac{h}{l} = 1$ and $k = -0.72$, $y = 0.73 h$

$$\max \tau = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{h} p - 2 \frac{x^3}{h^3} p .$$

With ordinary theory of bending

$$\max \tau = -\frac{3}{2} \frac{x}{h} p$$

hence by the theory of wall-beams, the maximum tangential stress gets a greater value.

The Curve σ_y introduces the normal vertical stresses in the middle of the height of a beam. Those stresses are usually neglected in the ordinary theory of bending. It is interesting to compare in both the methods the positions of the neutral axis, the values of compressive and tensile forces and also the arms of internal moments.

Assuming in equation (10) $\sigma_x = 0$ and $x = 0$ we shall get the position of the neutral axis at the centre of the span equal to $0.73 h$. The value for the linear distribution of stresses is $0.5 h$; hence the position of the neutral axis is much lower in walls-beams than in ordinary beams.

The values of the compressive and tensile forces are obtained by integrating the negative and positive areas enclosed by curve σ_x when $x = 0$,

$$\frac{h}{l} = 1 \text{ i.e. } S = \int_0^{0.73 h} \sigma_x dy = - \int_{0.73 h}^h \sigma_x dy = -R = -0.23 pl .$$

By Navier's theorem we get a value

$$S_N = 0.5 \cdot \sigma_x \cdot 0.5 h = -0.1875 pl < S .$$

The arms of the internal moments, however, are respectively $m = 0.566 l$ and $m_N = 0.667 l$.

A simple account shows, that the moment of the internal forces is practically equal to the moment of external forces, e.g.

$$M_w = R \cdot m = 0.23 pl \cdot 0.566 l = 0.129 pl^2 ;$$

$$M_z = \frac{1}{8} pl^2 = 0.125 pl^2 .$$

The difference about 3 %.

The relationship between the stresses and the values of slenderness ratio

The investigation was done for the stresses in the centre of the top and bottom surface i.e.

$$(\sigma_x)_{x=0} = 0.5 p \frac{l^2}{h^2} k \quad (\sigma_x)_{x=0} = 0.5 p \frac{l^2}{h^2} (4.75 + k)$$

for the stresses σ_y in the section over the supports i.e.

$$(\sigma_y)_{x=\pm a} = p \left[-1 - \frac{1}{h^6} (-5.5 h^2 y^4 + 5 h y^5 - 0.5 y^6) + \frac{8 k}{h^4} (h^2 y^2 - 2 h y^3 + y^4) \right]$$

for tangential stresses τ , with $x = \frac{l}{3}$ i.e.

$$(\tau)_{x=\frac{l}{3}} = \frac{1}{3} p \frac{l}{h} \left[\frac{1}{h^5} (-22 h^2 y^3 + 25 h y^4 - 3 y^5) + \frac{20 k}{9 h^3} (2 h^2 y - 6 h y^2 + 4 y^3) \right]$$

and for tensile force in the centre of the span of a beam i.e. $x = 0$

$$R = - \int_0^{0.73 h} \sigma_x dy = (0.26 + 0.0455 k) p \frac{l^2}{h} .$$

Those stresses expressed by means of Navier's theorem will give :

$$(\sigma_x)_{x=0} = -0.75 \cdot p \frac{l^2}{h^2} \quad (\sigma_x)_{x=0} = +0.75 \cdot p \frac{l^2}{h^2}$$

$$(\tau)_{x=\frac{l}{3}} = -2 \frac{pl}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad R_N = 0.1875 p \frac{l^2}{h} .$$

Having done the analysis of the given groups of the corresponding equation we come to the following conclusions : as the ratio $\frac{h}{l}$ grows bigger, the stresses σ_x are coming to zero, and by $\frac{h}{l} < 0.5$ the stresses are quickly increasing. The compressive stresses calculated by use of virtual work with respect to Navier's theorem are greater for $\frac{h}{l} < 0.65$ and smaller for $\frac{h}{l} > 0.65$. The tensile stresses are getting always greater values using the accurate method.

The stresses σ_y show that they are constant at $\frac{h}{l} > 1.5$. The stresses σ_x show nearly the same limits of stability. It means, that high beams are working like columns. This fact is also confirmed by the tangential stresses.

Further investigations show that for slenderness ratio $\frac{l}{h} \leq 0.5$, the values of stresses calculated by means of both methods come very fast closer to each other and the positions of the neutral axis are practically identical.

Conclusion

The beams having short height i.e. $\frac{h}{l} \leq 0.5$ gets the numerical values of stresses very close to that from Navier's theorem, and they are closer as the height of the beam is shorter. The beams with a big height i.e. $\frac{h}{l} > 0.5$ cannot be calculated by means of Navier's theorem because of big divergences and they are bigger as the beam gets higher. Those results are confirmed by the investigations of the deformations of beams. The solutions received by means of virtual work were checked by differential equations getting practically the same answers.

Résumé

Une poutre-paroi est constituée par un élément plat dont la hauteur est supérieure à sa portée et à sa petite épaisseur. On admet que le cas de flambage n'a pas lieu. Application : pour la construction des silos, blindages, abris, magasins à charbon, etc.

Les poutres-parois peuvent être à une travée, continues, à consoles, à un appui rigide ou élastique, à épaisseur constante ou variable.

Le principe de calcul est basé sur l'application de l'équation du travail virtuel dans la forme de Ritz-Timoshenko.

Cette méthode présente les avantages suivants : facilité du choix de la fonction des tensions; généralisation des résultats pour la hauteur variable et accomplissement du problème des déformations; enfin, elle est applicable à tous les cas de chargement en employant des fonctions continues.

On a calculé à l'aide de cette méthode : 1° un élément appuyé sur toute sa longueur; 2° un élément sur deux appuis; 3° un élément-console.

L'ordre du calcul est le suivant : 1° on écrit l'équation du travail virtuel; 2° on calcule le travail élastique, les forces superficielles et les composantes des déplacements; 3° on substitue ces valeurs dans l'équation fondamentale; 4° on détermine les tensions comme les dérivées partielles de la fonction des tensions.

Zusammenfassung

Ein wandartiger Träger ist ein scheibenförmiges Element, dessen Höhe grösser als seine Spannweite und dessen Dicke gering ist. Man setzt voraus, dass Beulgefahr nicht existiert. Solche Träger werden für Silos, Luftschutzhäuser, Kohlenbunker, etc., angewendet.

Wandartige Träger werden einfeldrig, durchlaufend, mit Konsolen, auf festen oder senkbaren Stützen und mit konstanter oder veränderlicher Stärke ausgeführt.

Die Berechnung beruht auf der Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit in der von Ritz-Timoshenko vorgeschlagenen Form. Diese Methode bietet folgende Vorteile : Erleichterung in der Wahl der Spannungsfunktion und einfache Gleichungen für die Spannungsberechnung. Ferner können die Ergebnisse auf veränderliche Höhe verallgemeinert werden, das Beulproblem mit einbezogen und alle Arten von Belastungen durch Einführung stetiger Funktionen erfasst werden.

Die Berechnung geschieht wie folgt : Aufstellung der Gleichung für die virtuelle Arbeit als Funktion der Formänderungsenergie, der Oberflächenkräfte und der Verschiebungskomponenten. Die Spannungen werden aus den partiellen Ableitungen der Spannungsfunktion bestimmt.

Summary

A wall-beam is a flat element, having its height greater than its span and a small thickness. We assume, that there does not exist any danger of buckling. They are used for building of : silos, shelters, coal-storages, etc. Walls-beams could be of single-span, continuous, with brackets, having rigid or elastic support and constant or variable thickness.

The principles of calculation are based on the application of the virtual work equation in form of Ritz-Timoshenko. This method has following advantages : easy choice of stresses function, simple equations for stresses, generalizes the results for variable height, seizes the problem of buckling, applies to all kinds of loading by using continuous functions. An element supported continuously, at two points and a bracket were calculated by this method.

The order of calculation consists on : establishment of the equation of virtual work, expressed by the elastic energy, surface forces and displacement components. The stresses are determined as partial derivatives of stress function.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVc7

Le calcul des toits plissés par le procédé des limites de charge

Die Berechnung der Faltwerke nach dem Traglastverfahren

The limit design of shells

Dr TECHN. G. DE KAZINCZY

Stockholm

Die Stahlbeton-Tragwerke werden unter der Annahme berechnet, dass der Beton keine Zugspannungen überträgt. Dagegen werden Probleme der Schalen und Faltwerke in der Literatur in solcher Weise gelöst, als ob Stahlbeton ein homogener Stoff sei. Ich möchte zeigen, dass man auch diese berechnen kann, wie die üblichen gut bewährten Stahlbetonkonstruktionen und dass die Lösung sogar einfacher ist.

Ich behandle hier nur weitgespannte Dächer aus viereckigen Scheiben mit horizontalen Falten, die an deren Enden auf Querscheiben oder Rahmen frei oder durchlaufend gelagert sind. Ich nenne ein Glied Scheibe, wenn es in seiner Ebene und Platte, wenn es normal zu seiner Ebene belastet wird. Ich nehme weiter an, dass der Leser die Theorie der Faltwerke für homogene Stoffe kennt, d.h. die Lösung mit den Dreimomentengleichungen. Ich behandle daher nur die Berechnung nach dem Traglastverfahren.

Die Berechnung beginnt mit einem Plattenstreifen, der rechtwinklig zu den Falten ist. Er wird berechnet als gerade, durchlaufende Platte, die an den Falten gestützt ist. Die Platten werden dementsprechend armiert. Als Belastung ist immer die zur Platte normale Komponente derselben in Rechnung zu stellen.

Der zweite Schritt besteht darin, die Auflagerkräfte der Platten an den an Stelle der Falten gedachten Stützen zu bestimmen. Für diesen Zweck werden für die ganze Last (nicht nur deren Komponente) in ihrer ursprünglichen Richtung die Auflagerkräfte der miteinander gelenkig verbundenen Platten bestimmt und nachher die auf die Platten normal wirkenden Kräfte, die von den Stützenmomenten stammen.

Bei der Berechnung der Momente besteht eine gewisse Freiheit. Ist nur eine ständige Last vorhanden, dann können die Momente an den Falten beliebig angenommen und die Feldmomente entsprechend berechnet werden. Die Bedingung ist, dass die Armierung dieser Annahme entspricht.

Wir können diese Möglichkeit für verschiedene Zwecke ausnützen: um z.B. die kleinste Plattendicke zu erreichen, wählen wir die $+$ und $-$ Momente gleich gross. Ein anderer Fall: Es gibt Faltwerke, wie die sogenannten „Nordlicht-Dächer“, wo diejenigen Scheiben, in welchen die Fenster sind, aus praktischen Gründen so klein wie möglich sein sollten. Es ist also wünschenswert, dass ihre Belastung möglichst klein sei. Durch entsprechende Wahl der Eckmomente kann das sehr gut erreicht werden.

Bei asymmetrischen oder asymmetrisch belasteten Faltwerken ist die Formänderung der Falten verschieden. Dadurch ändern sich die Momente an den Falten beträchtlich. Die Momente können aber nicht grösser sein, als es der verwendeten Menge der Armierung entspricht (Gelenke mit konstanten Momenten). Werden gleich am Anfang diese maximalen Momente in Rechnung gestellt, so muss wegen der durch die veränderte Höhenlage veränderten Faltenmomente die ganze Rechnung nicht wiederholt oder die Aufgabe mit komplizierten Differentialgleichungen gelöst werden. Ist die Belastung veränderlich, so muss zuerst die Maximalmomentenlinie bestimmt werden und die Freiheit besteht nur in der Verschiebung der Schlusslinie.

Die an den Falten wirkenden 4 Kräfte werden nun in je 2 zu den Scheiben parallele Komponenten zerlegt. Die Scheiben werden nun als frei aufgelagerte, bzw. durchlaufende Balken aufgefasst und die grössten Momente bestimmt. Da die Scheiben miteinander verbunden sind, müssen die Längsspannungen an den Berührungspunkten einander gleich sein. Hier müssen also Schubkräfte wirken und zwar so, dass die Spannungen gleich gross werden, wie unter Annahme eines homogenen Stoffes, d.h. wie sie sich aus den Dreimomentengleichungen ergeben. Ist aber die nötige Armierung in der Falte konzentriert und wird deren Menge so bestimmt, dass die gesamte Zugkraft und die Betondruckkräfte mit den äusseren Kräften im Gleichgewicht stehen und die Stahleinlagen bis zur zulässigen Grenze beansprucht werden, dann wirken hier keine T-Kräfte, da die durch die Stahlspannung bedingte Dehnung die gleiche ist. So kann an denjenigen Falten, wo an beiden Seiten Zugkräfte angreifen, die ermittelte Menge der Armierung einfach addiert werden.

Berühren sich zwei Scheiben an ihren auf Druck beanspruchten Kanten und sind die anderen Seiten gezogen, so wirken gewisse T-Schubkräfte, die die Spannungen ausgleichen. Die Randspannungen ändern sich aber nicht linear mit den Momenten. Da eine Lösung auf numerischem Wege zeitraubend wäre, wenden wir eine graphische Methode an, die sehr einfach und rasch ist.

Wir zeichnen die $\sigma_b = f(M_0)$ -Linie ein für allemal auf. (Unter Pauspapier gelegt kann sie wiederholt verwendet werden.) Das geschieht am einfachsten mit Hilfe einer gewöhnlichen Bemessungstabelle. Wir tragen als Ordinaten die Betonspannungen und als Abszissen die dazu gehörigen, reduzierten Momente auf. $M_0 = \frac{M}{bh^2} = \frac{1}{r^2}$, worin r der Koeffizient in der

bekannten Formel $h = r \sqrt{M/b}$ ist. Der Masstab der Abszisse ist kg/cm^2 . So bekommen wir die Kurve, Abb. 1, die aber für verschiedene $\sigma_{e \text{ zul}}$ verschieden ist. Bedeuten M_2 und M_1 die grössten Feldmomente der beiden Scheiben 2 und 4 im Grundsystem, so sind die reduzierten Momente

$M_{02} = \frac{M_2^2}{b_2 h_2^2}$ und $M_{04} = \frac{M_4}{b_4 h_4^2}$. Wir markieren beide an der Abszissen-

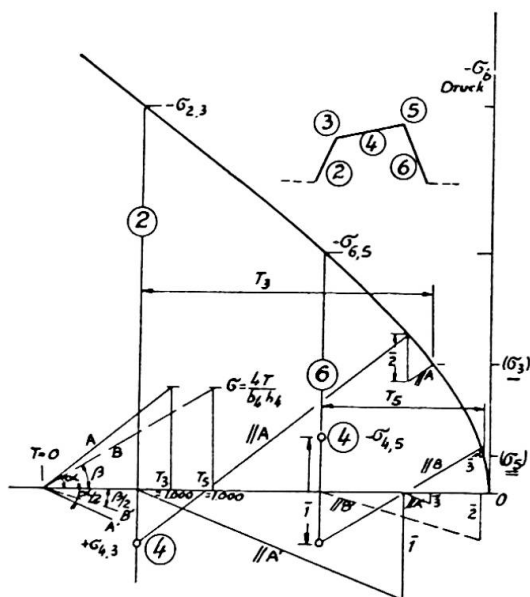


Abb. 2. Ermittlung der Längsdruckspannung in drei zusammenhängende Scheiben.

rechneten Spannungen an der Kurve bezeichnet, doch wird keine Gegenkurve mit verschiedenem Masstab konstruiert. T_3 und T_5 haben aber einen verschiedenen Masstab: für $T_3 = M_0 b_2 h_2$ und für $T_5 = M_0 b_6 h_6$.

Die Scheibe 4 wird wie eine homogene behandelt; deren $\sigma = f(T)$ — Diagramm ist eine Gerade. Die Randspannung im Grundsystem $\frac{M_4}{W_4}$, ($W = bh^2/6$) wird auf den Vertikalen 2 und 6 abgetragen, von wo die Geraden ausgehen mit den Neigungen α bzw. $\beta = 4/bh$. Beide sind im Masstab von T_3 bzw. T_5 zu messen, da diese verschieden sind, wie auch α verschieden von β ist. Spannungsausgleich ist vorhanden beim Schnittpunkt der Linie //A mit der Kurve. Dadurch wird die andere Spannung an der anderen Seite um die Hälfte (Strecke 1) geändert. Die Linie //B wird also um diesen Betrag tiefer gezogen bis zur Kurve. Das erzeugt wieder eine Spannungsänderung 2, von wo wieder eine Gerade bis zur Kurve unter die Neigung α //A zu ziehen ist, usw. Es genügen gewöhnlich 2-3 Wiederholungen. So erhalten wir die resultierenden Spannungen und die Faltenschubkräfte T_3 und T_5 .

Sind zwei oder mehr schwach beanspruchte Scheiben zwischen zwei stark auf Druck beanspruchten, sodass die übertragenen Spannungen die ersteren zu rein gedrückten Scheiben verwandeln, so ist das Verfahren dasselbe wie vorher; nur bestimmen wir die Randspannungen im Grundsystem der dazwischen liegenden Scheiben mit Hilfe der Dreimomentengleichungen, als ob sie unabhängig wären. Die Neigungen der Geraden sind

$$\alpha = f_4 \left(4 - \frac{f_4}{f_4 + f_6} \right) \text{ und } \beta = f_6 \frac{f_4}{f_4 + f_6}$$

$$\left(\frac{1}{f} = F = \text{Querschnittsfläche} \right).$$

Dies sind die am häufigsten vorkommenden Fälle. Spezialfälle können wir wegen Platzmangel hier nicht behandeln.

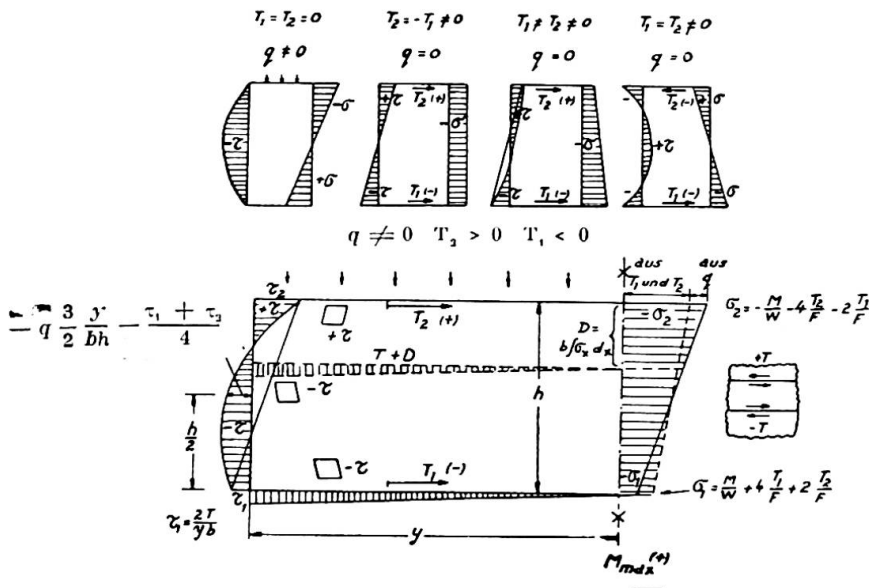


Abb. 3. Schubspannungen in der Scheibe.

Es scheint auf den ersten Blick, als ob man die Spannungen und die nötige Armierung über der Stütze bei durchlaufenden Fallwerken berechnen könnte, wie im Felde. Es besteht aber ein wesentlicher Unterschied. In der Mitte sind keine τ -Spannungen vorhanden und die Druckspannungen verteilen sich ziemlich gleichmässig auf die ganze Scheibe. Dagegen entstehen in der Nähe der Stützen grosse Schubspannungen und daher können auch die Druckspannungen nicht gleichmässig verteilt sein. Es ist also gerechtfertigt, gemäss den Bestimmungen nur die „mitwirkende“ Plattenbreite zu berücksichtigen.

Die Schubspannungen und die Schubarmierung

Diejenigen Scheiben, deren ganzer Querschnitt auf Druck beansprucht ist, werden so berechnet, als ob sie aus homogenem Material wären. Die Schubspannungen am Ort von $+M_{\max}$ sind Null und wachsen von hier aus in der Längsrichtung proportional mit der Entfernung. Ueber einen Querschnitt werden sie parabelförmig angenommen mit dem Maximalwert $\tau = \frac{3}{2} \frac{qy}{bh}$ in der Mitte des Querschnittes. Wirkt an der Kante (Falte) aber auch eine Längsschubkraft T , so wird durch T nur die Form der Verteilungskurve geändert. Das Integral der τ -Spannungen in einem Querschnitt ($y = \text{const.}$) ist von T unabhängig, hängt allein von q ab und hat den Wert

$$R_y = b \int_0^h \tau_x dx = \frac{qy}{2}.$$

Die Linie ist immer eine Parabel, die aus 3 gegebenen Punkten konstruiert werden kann. Zwei der Punkte sind die Falten-Randspannungen. Die Schubspannung in der Mitte ist (kein max.)

$$\tau_m = \frac{3}{2} q \frac{y}{bh} - \frac{\tau_1 + \tau_2}{4}.$$

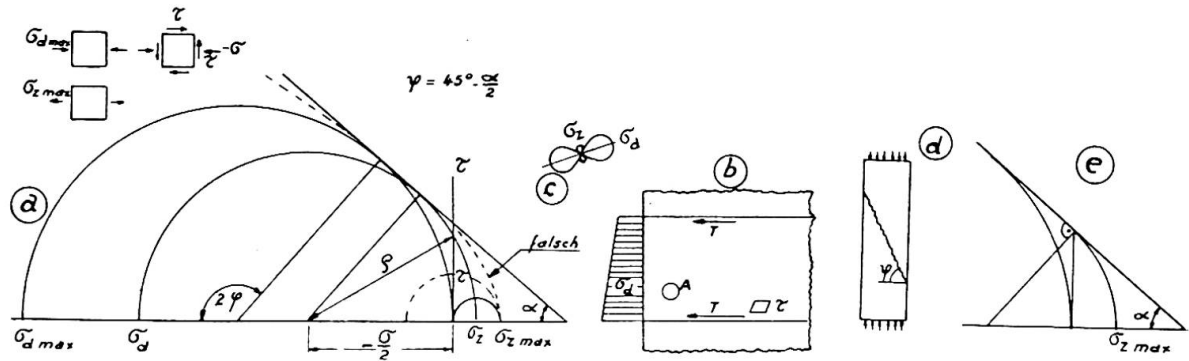


Abb. 4. Anstrengung des Betons bei gleichseitiger Schub- und Druckbeanspruchung.

Es ist zu beachten, dass das Vorzeichen von τ_2 entgegengesetzt demjenigen von τ_1 ist, wenn die beiden T die Scheibe auf Druck beanspruchen. In der Abb. 3 sind einige Fälle gezeigt. Aus der von den T-Kräften unabhängigen Grösse des Integrals der τ -Spannungen (Querkräfte) folgt, dass die auf die Endscheiben (oder Rahmen) wirkenden Auflagerkräfte nur von den q -Kräften abhängen und nicht von den T-Kräften.

In einer gedrückten Scheibe haben die Schubspannungen eine andere Bedeutung als in einem auf Biegung beanspruchten Balken. Da die Armierung nicht für die Schubspannungen, sondern für die Hauptzugspannungen eingelegt wird, müssen diese bestimmt werden. Dazu ist die Mohr'sche Darstellungsweise besonders geeignet. Die Mohr'sche „Grenzkurve“ wird oft gemäss der punktierten Linie gezeichnet (Abb. 4); das ist aber vollkommen falsch, da der Zugwiderstand von anderen Bedingungen abhängt, als der Schubwiderstand. Die Grenzlinie (die beinahe eine Gerade ist) kennzeichnet ausschliesslich den Schiebungsbruch. Die Ueberwindung der Kohäsion ist durch einen einzigen Punkt an der Abszissenachse charakterisiert (wenn dies überhaupt von der grössten Spannung und nicht von der grössten Dehnung abhängt)⁽¹⁾. Ist der ebene Spannungszustand an einer Stelle eines Flächentragwerkes mit der Normalspannung — σ (Druck) und auf dieselbe Ebene wirkende τ charakterisiert, und wirkt auf die dazu rechtwinklig stehende Ebene keine Normalkraft, dann soll

$$-\sigma \leq -\sigma_{d\max} \left[0,4 + \sqrt{0,36 - 7 \left(\frac{\tau}{\sigma_{d\max}} \right)^2} \right]$$

sein. Wo — $\sigma_{d\max}$ die auf einaxigen Druck zulässige Spannung bedeutet. (Bei dieser Formel ist $\alpha = 41^\circ$ angenommen. Einfach von Abb. 4 abgeleitet.)

Die zulässige Druckspannung wird also durch die zusätzliche Schubbeanspruchung beträchtlich, sogar bis zur Hälfte herabgesetzt und dies soll berücksichtigt werden.

In Scheiben, die an einer Seite auf Zug, an der anderen auf Druck

⁽¹⁾ Es scheint, dass die Zugfestigkeit bei Beton mit der Druckfestigkeit in solcher Weise zusammenhängt, wie das die Abb. 4 e zeigt.

$$\sigma_z = \frac{\sigma_d}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 \psi} + t^2 q \psi - 1 \right) \text{ wo } \psi = 90 - \varphi.$$

beansprucht sind, werden die Schubspannungen so berechnet, wie im Steg eines Plattenbalkens. Doch die bekannte Formel $\tau = \frac{R}{b l} = \frac{2 b z}{q l}$ ist dazu nicht geeignet, da ausser der Querkraft auch eine Längskraft wirkt. Dagegen gibt die folgende, auch für Plattenbalken gültige Formel richtige Resultate: $\tau = \frac{4 F_c \sigma_c}{b l}$ und die gesamte Schubkraft ist $t = F_c \sigma_c$. Bei durchlaufenden Scheiben und Balken sind die maximalen Feld- und Stützenarmierungen zu addieren:

$$\tau = \frac{b l}{(F_{c+} + F_{c-}) \sigma_c}$$

und $t = (F_{c+} + F_{c-}) \sigma_c$. Von t ist nur jener Teil durch die Schubarmierung aufzunehmen wo $\tau > \tau_{zul}$ ist, also nur

$$t' = t \left(1 + \frac{\tau_{zul}^2}{\tau^2} \right).$$

Unter F_c ist nicht der volle in der Falle vorhandene Stahlquerschnitt zu verstehen, sondern nur jener Teil, der zu der untersuchten Scheibe gehört. Diejenigen Scheiben oder Scheibenteile, die ganz auf Zug beansprucht sind, sind auf Schub Sicherheit nicht zu untersuchen. Sie sind sowieso überbeansprucht und durch die Hauptzugarmierung genügend bewehrt.

Résumé

L'auteur décrit une méthode pour le calcul d'un voile prismatique qui tient compte du fait que tous les efforts de traction sont supportés par l'armature du béton armé.

Zusammenfassung

Es wird eine Methode zur Berechnung der prismatischen Faltwerke beschrieben, die berücksichtigt, dass der Beton keine Zugkräfte überträgt, sondern nur die Armierung.

Summary

The Author describes a method of designing prismatic thin-slab structures based on the assumption that all tensile stresses are taken by the reinforcement.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVdl

Contribution au calcul des barrages arqués

Ueber die Berechnung von Bogenstaumauern

Contribution to the design of arched dams

Dr P. LARDY

Professeur à l'Ecole Polytechnique fédérale à Zurich

Peu avant sa mort, le professeur Ritter avait entrepris une étude sur les barrages arqués. Nous voudrions rendre hommage à la mémoire de cet ingénieur si distingué, qui fut pendant de longues années Secrétaire général de l'AIPC, en développant brièvement et en complétant sur quelques points les idées qu'il a émises.

Ce sujet est lié à ceux du Thème IV du fait qu'un barrage arqué représente géométriquement un voile qui en vertu de son épaisseur, ne mérite plus exactement le qualificatif de mince. On peut distinguer trois étapes principales dans l'évolution de la théorie :

1. Le calcul des barrages arqués comme système de voûtes horizontales indépendantes;

2. Le calcul par la méthode dite des poutres croisées, les deux systèmes de poutres étant définis par les voûtes horizontales et les consoles verticales. Dans l'application de cette méthode, il n'a pas été tenu compte jusqu'ici des moments de torsion.

3. Citons enfin les essais d'adaptation de la théorie des voiles minces, rendu extrêmement difficile, sinon impossible par la complexité des conditions aux limites, dictées par la topographie des lieux, par la forme du barrage et par le fait que l'épaisseur et le rayon de courbure sont variables.

Les travaux du professeur Ritter se rattachent à la méthode des poutres croisées, qui permet de ramener le calcul du voile à un problème de statique appliquée concernant les systèmes de poutres. Nous évoquerons deux aspects de la question, le premier d'ordre général, le second traitant un point particulier et important.

Tout d'abord, nous voudrions insister sur la forme élégante et systématique des méthodes de calcul, adaptées tout spécialement aux besoins de l'élaboration numérique. Les équations d'élasticité contiennent pour

les deux systèmes de poutres soit les inconnues de la répartition de la surcharge hydrostatique, soit les moments fléchissants des consoles verticales, ces dernières étant considérées comme poutres sur appuis élastiques, formés par les voûtes horizontales. Dans une thèse qui va paraître prochainement, ces deux méthodes ont été développées par un de ses élèves. En vertu de la propagation des erreurs dans la résolution des systèmes d'équations linéaires, il résulte que chacune des deux méthodes a son domaine d'application bien défini, dépendant du rapport de la hauteur à la largeur des barrages.

Par suite du développement que le professeur Ritter, tout au long de sa carrière, a su donner à la théorie de l'arc encastré élastiquement, il n'y a plus actuellement de difficultés de prendre en compte l'influence de certaines grandeurs, en partie négligées jadis. Nous pensons particulièrement à celle de l'effort tranchant qui ne peut être omise, aux effets de la température, du retrait du béton et à ceux de la sous-pression. Mais il y a plus ! Le professeur Ritter a mis en évidence et introduit systématiquement la déformation de la roche dans les calculs des barrages arqués. C'est là le second point que nous désirons mettre en lumière dans ce court aperçu.

En 1921, le professeur Vogt de Trondheim avait publié un mémoire sur le calcul des déformations des fondations, en utilisant les formules de Boussinesq et de Cerrutti. Le mérite d'avoir développé et avant tout adapté ces formules de manière simple et claire au calcul des barrages arqués en revient au professeur Ritter, qui a démontré la grande importance de la déformation de la roche sur la répartition des contraintes et le comportement général de ces barrages.

Deux facteurs mettent en évidence ces nouvelles considérations.

On sait aujourd'hui que la roche prise sur une certaine étendue, est loin d'être une masse rigide. De nombreuses mesures ont montré que son module d'élasticité est plus petit que celui d'un béton de qualité ordinaire. Le rapport des modules d'élasticité du béton à celui de la roche peut varier de 3 pour le granit jusqu'à 20 pour certaines variétés de molasse. Même si ces chiffres ne sont pas toujours très sûrs, leur prise en compte dans les calculs est certainement plus proche de la réalité que l'hypothèse d'une roche indéformable.

D'autre part, si on peut admettre qu'un arc est totalement encastré dans la théorie des ponts, il n'en est plus de même pour les barrages, vu les dimensions des arcs par rapport à leur flèche. Une déformation de la roche, même petite, a une grande influence sur leur comportement, c'est-à-dire sur la répartition des contraintes et sur leur sécurité.

En transposant ces considérations au système croisé des arcs horizontaux et des consoles verticales, on constate immédiatement que la déformation de la roche a pour effet de réduire les moments d'encastrement des arcs ainsi que l'influence de la température. Mais, et c'est ici que toute l'importance de la question apparaît, la déformation de la roche change essentiellement la répartition de la charge hydrostatique sur les deux systèmes croisés. L'encastrement des consoles à la base devenant plus faible et leur déformation par conséquent plus grande, celles-ci se trouveront allégées par rapport aux arcs, surtout dans les parties supérieures ! On risque donc, sous l'hypothèse d'une roche rigide, de sous-estimer les sollicitations du système arqué, ce qui peut entraîner de sérieux déboires. C'est là, nous semble-t-il, la conclusion la plus importante à tirer de cette nouvelle conception.

Grâce à la théorie de l'arc encastré élastiquement, il est aisé d'effectuer les calculs complétés par l'introduction de ces nouvelles déformations. La théorie du demi-espace élastique, en particulier les formules de Bousinesq et de Cerrutti, permet de déterminer les déformations spécifiques des appuis dans des conditions très générales. Remarquons que les poutres croisées ne sont plus indépendantes les unes des autres dans le système fondamental, mais se trouvent en connexion aux appuis. Ceci entraîne la dépendance réciproque des grandeurs hyperstatiques des arcs et risque de compliquer la résolution des équations d'élasticité. Grâce à l'amortissement rapide de l'effet des sollicitations locales du demi-espace, il est possible d'appliquer une méthode d'itération qui conduit à la résolution du système d'équation.

Ces brèves remarques suffisent à démontrer la nécessité d'introduire dans le calcul des barrages arqués la déformation de la roche. Le fait de pouvoir, dans les calculs, tenir compte de façon relativement simple de ce phénomène, représente sans aucun doute un des progrès les plus intéressants dans ce domaine.

Résumé

L'importance de la prise en compte de la déformation de la roche pour le calcul des barrages arqués est mise en évidence. Une méthode de calcul, due au professeur Ritter, qui tient compte de ce fait très important, est sommairement décrite.

Zusammenfassung

Die Bedeutung der Berücksichtigung der Felsdeformation für die Berechnung der Bogenstaumauern wird hervorgehoben. Eine Methode, die von Prof. Ritter stammt und diese wichtige Tatsache vollauf berücksichtigt, wird kurz beschrieben.

Summary

The importance of taking into account the rock deformation for the design of arched dams is outlined by the author. A method of design, due to Professor Ritter, considering this fact is briefly described.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVd2

Recherches élastostatiques des barrages arqués

Elastostatische Modellversuche an Gewölbestaumauern

Elastostatic tests on models of arched dams

PROF. DR. TECHN. H. BEER & PROF. DR. TECHN. E. TSCHSCH

Graz

Im Anschluss an die Ausführungen von Herrn Prof. Dr. Lardy über die Methode von Ritter für die Berechnung von Gewölbestaumauern soll hier kurz über die Ergebnisse von elastostatischen Modellversuchen berichtet werden, welche die Verfasser im Auftrage der Steirischen Wasserkraft- und Elektrizitäts A. G. (Steweag) an der Technischen Hochschule Graz ausführen. Es handelt sich hierbei um eine Gewölbestaumauer in Obersteiermark (Salzasperre) von 120 m Kronenlänge und 55 m Höhe im Talsohlenschnitt (Abb. 1) und eine stark unsymmetrische Mauer in Weststeiermark (Hierzmannsperre) von 180 m Kronenlänge und 65 m Höhe (Abb. 2). Beide Mauern sind vom Gleichwinkeltyp.

Das „Salzmodell“ wurde im Masstab 1 : 50 aus einer Mischung von Gips, Kieselgur und Wasser hergestellt. Der Elastizitätsmodul dieses Modellbaustoffes in der entsprechenden Mischung beträgt nur etwa 24 000 kg/cm², sodass mit mehr als den zehnfachen Durchbiegungen gegenüber dem Baustoff Beton zu rechnen ist. Die Versuchsanordnung ist aus Abb. 3 zu ersehen. Für die Belastung des Modells wurde ein neues Element entwickelt, bestehend aus einer Spiralfeder mit Druckstempel und Druckplatte, die mit Schrauben angespannt werden konnte (Abb. 4). Es war so möglich mit der schwersten Belastungsfeder einen Druck von 900 kg auszuüben. Der Federweg — der ja dem ausgeübten Druck proportional ist — wurde mit einer Messuhr gemessen, wobei eine sorgfältige Eichung der Belastungselemente unerlässlich war. Der maximale Federweg betrug etwa 10 mm. Die Federn wurden auf Gegenkonsolen abgestützt (Abb. 5). Die Vorteile der Verwendung dieser Belastungselemente gegenüber der Aufbringung eines kontinuierlichen Flüssigkeitsdruckes (Quecksilber) liegen vor allem in der Möglichkeit der stufenweisen Laststeigerung bis zum Bruch und der Kontrolle des elastischen Verhaltens der Modellmauer bei der für die Messungen gewählten Laststufe. Ein weiterer Vorteil der diskontinuierlichen Belastung bestand in der Möglichkeit, auch an einzelnen Punkten der wasserseitigen Maueroberfläche Messungen vornehmen zu können.

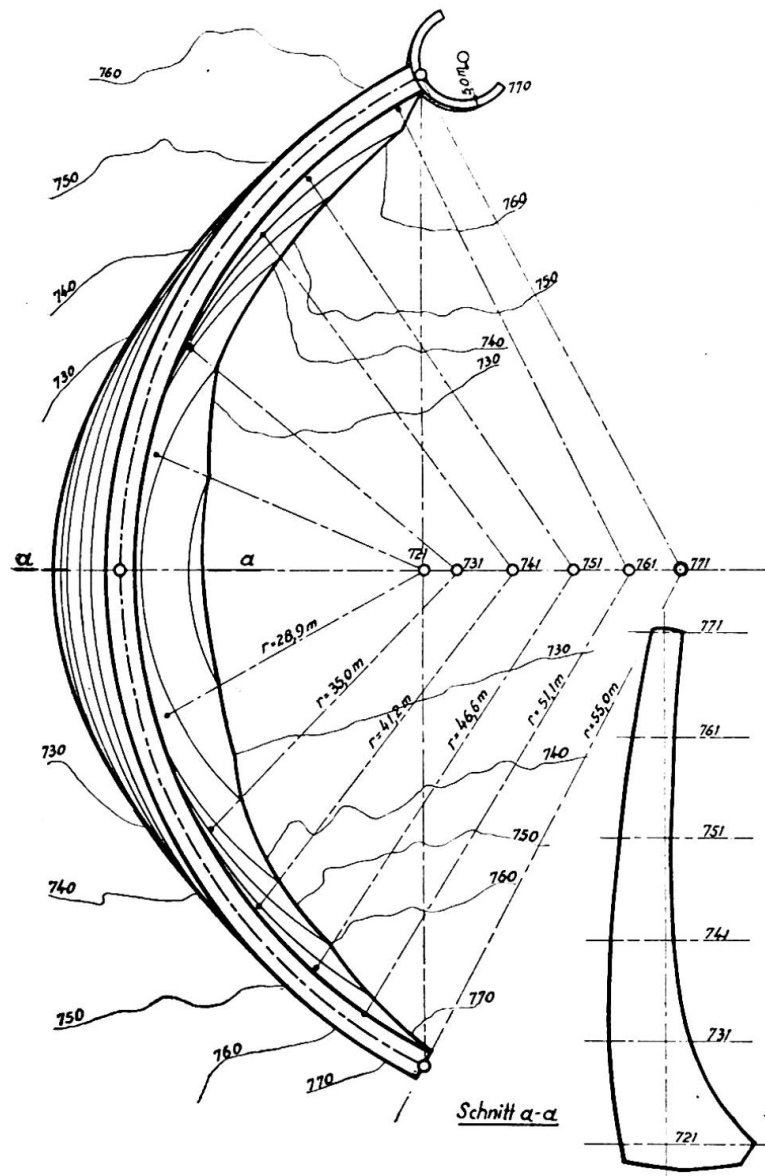


Abb. 1. Salzasperre. Lageplan mit Talsohlenquerschnitt.

Die Mauer selbst war in einem zylindrischen Aufbau aus Stahlbeton gebettet. Die elastische Nachgiebigkeit des Felsens, auf dem sich die Stau-mauer abstützt, wurde sorgfältig studiert und im Modell durch einen vouten-förmigen Ansatz (Mauerverlängerung) — entsprechend den Untersuchungen von Boussinesq und Vogt für den elastisch-isotropen Halbraum — berücksichtigt. Bei dem im Bau befindlichen Modell der Hierzmannsperre wird das nachgiebige Felswiderlager durch eine dicke Schicht aus einem Baustoff dargestellt, welcher ebenfalls aus Gips, Kieselgur und Wasser besteht. Durch Variation des Zusatzes an Kieselgur und Wasser gelingt es, den Elastizitätsmodul zu beeinflussen und man ist so in der Lage, einen von der Mauer abweichenden Modul des Felsens modellmässig darzustellen. Für das Modell der Hierzmannsperre wurde der Elastizitätsmodul des Felsens — zufolge der geologischen Beobachtungen und Messungen an der Bau-stelle — nur halb so gross, wie jener der Mauer angenommen.

Abb. 6 zeigt die Ergebnisse der Messungen der radialen Durchbiegun-gen (voll ausgezogen) im Vergleich zu den Rechnungswerten (strichliert)

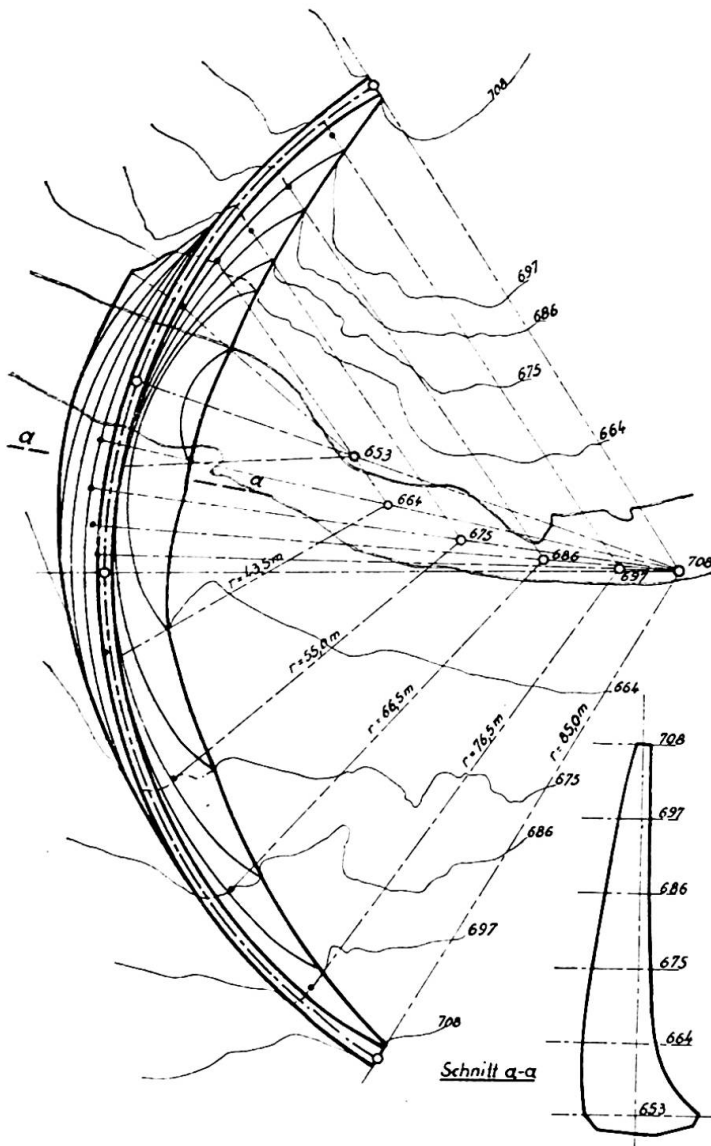


Abb. 2. Hierzmannsperre. Lageplan mit Talsohlenquerschnitt.

Die Berechnung wurde von der „Steweag“ nach der Methode von Ritter durchgeführt, wobei die in Fig. 6 angegebenen Bogen- und Kragträgerschnitte zugrunde gelegt wurden. Es wurden hierbei nur die radialen Durchbiegungen entsprechender Bogen- und Kragträgerpunkte in Uebereinstimmung gebracht, ein Vorgang, dem etwa bei der „trial load method“ der erste Versuchsgang entspricht. Wie Fig. 6 zeigt, ist die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch eine durchaus gute. Es zeigt sich, dass der Kronenbogen der Mauer etwas steifer ist, als dies nach der vereinfachten Rechnung zu erwarten war, während die Durchbiegungen im unteren Drittel gegenüber der Rechnung etwas grösser sind. Das Ergebnis der Dehnungsmessungen an der Maueroberfläche und die daraus errechneten Spannungen zeigten in ihrem Verlauf ebenfalls eine gute Uebereinstimmung mit der statischen Berechnung, wenngleich die Abweichungen an einzelnen Stellen grösser sind als bei den Durchbiegungen. Zweifellos macht sich hier der Einfluss der tangentialen Schubspannungen und im unteren Teil auch der Drillungsmomente bemerkbar, die ja in der Berechnung nach der Methode von Ritter keine Berücksichtigung finden.

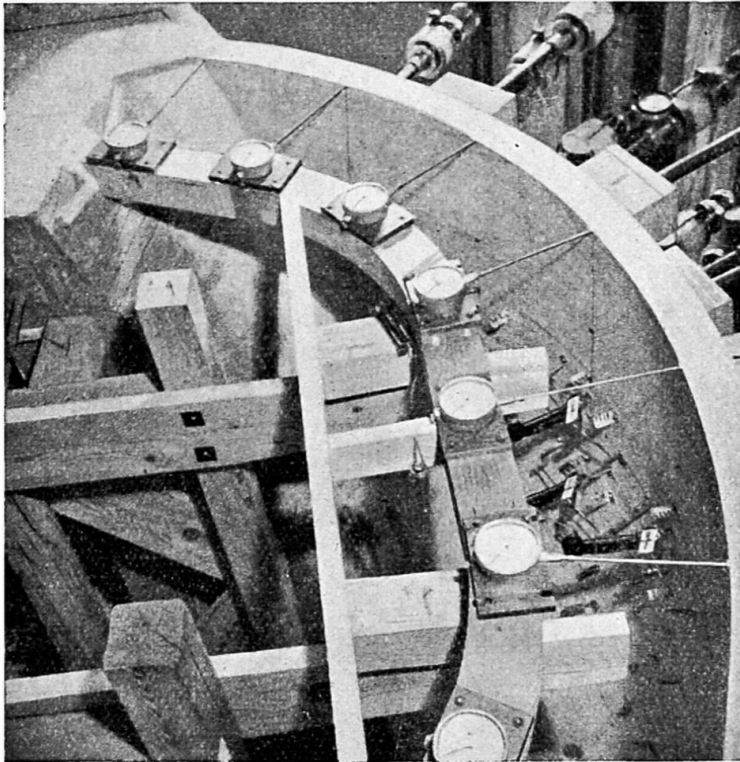


Abb. 3. Versuchsmodell. Anordnung der Messuhren am Kronenbogen.

Die Ergebnisse der Untersuchungen zeigen, dass für die untersuchte symmetrische Mauer, mit einem Verhältnis von Kronenlänge zur Höhe, das kleiner ist als 2,5, und bei der vorhandenen regelmässigen Talform, das statische Verhalten der Mauer durch das gewählte Berechnungsverfahren durchaus befriedigend wiedergegeben wird. Die Zahl der Schnitte braucht dabei nicht gross gehalten zu werden, da schon die einschnittige Berechnung (mittlerer Kragträgerschnitt) zu einem brauchbaren Bild der Lastverteilung auf Bogen und Kragträger führt. Die „Steweag“ wird sowohl über die Ergebnisse der Modellversuche der Salzasperre, als auch der stark unsymmetrischen Hierzmansperre eine eigene Broschüre herausgeben. Dort werden für beide Sperren ausführliche Daten zu finden sein.

Résumé

On réalise actuellement à l'école polytechnique de Graz des essais élastostatiques sur modèle de barrages arqués. L'auteur décrit brièvement

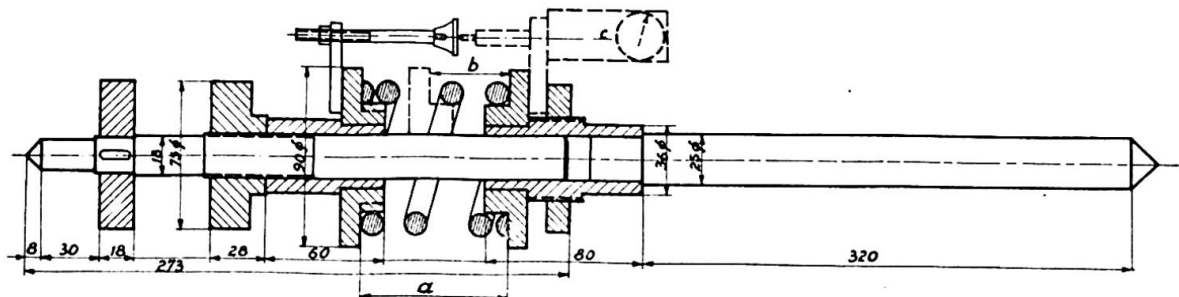


Abb. 4. Belastungsfeder :
a : längster Federweg, b : kürzester Federweg, c : Messuhr.

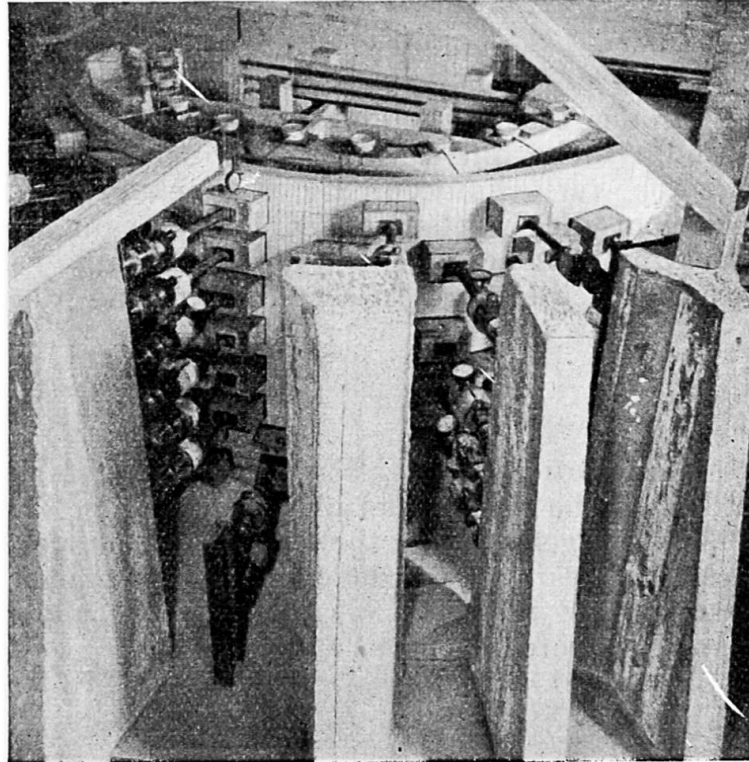


Abb. 5. Versuchsmodell.
Abstützung der Belastungsfedern.

l'installation d'essais avec les nouveaux dispositifs de chargement et compare les résultats d'essais des mesures de flexion sur un modèle de barrage symétrique avec les résultats des calculs suivant la méthode de Ritter. Cette comparaison donne une correspondance satisfaisante.

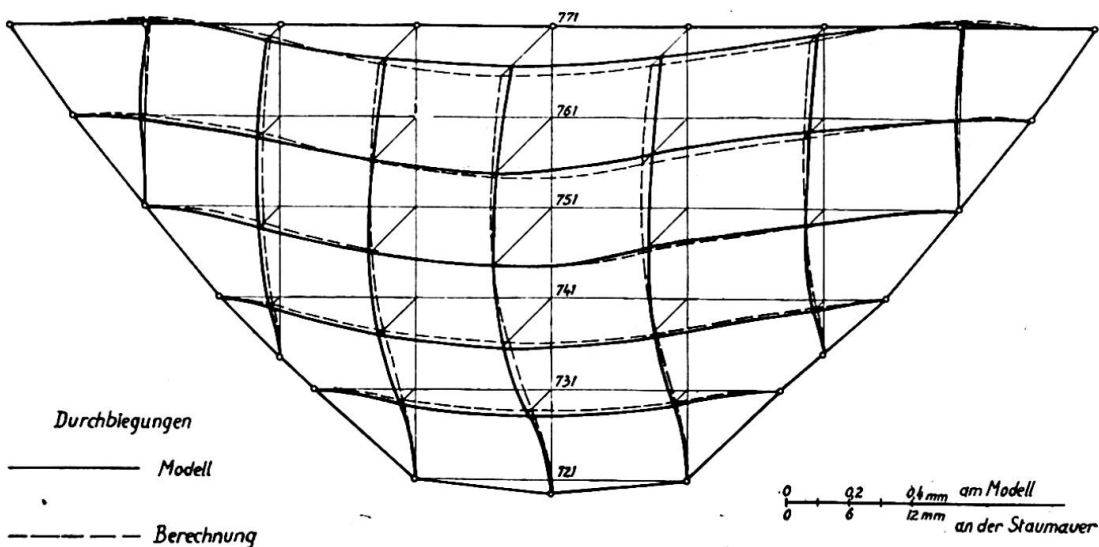


Abb. 6. Ergebnisse der Durchbiegungsmessungen
am Modell im Vergleich zur Berechnung.

Zusammenfassung

An der Technischen Hochschule Graz sind gegenwärtig elastostatische Modellversuche mit Gewölbestaumauern im Gange. Der Bericht schildert kurz die Versuchsanordnung mit neuartiger Belastungseinrichtung und vergleicht die Ergebnisse der Durchbiegungsmessungen am Modell für eine symmetrische Mauer mit der Berechnung nach der Methode von Ritter. Es ergibt sich eine gute Uebereinstimmung im Durchbiegungsbild.

Summary

Elastostatic investigation on models of arched dams are now proceeding at the Technical University at Graz. The report gives a brief view of the arrangements for the tests with a modern load-apparatus and compares the results of the deflection measurements on the model for a symmetrical wall with the calculation made after the Ritter method. There is good concordance as to deflection.