IVb: Continuous slabs

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **3 (1948)**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

IVb1

Introduction d'une théorie générale pour l'étude des voûtes minces de translation

Eine neue allgemeine Theorie von Translationsflächen

Introduction of a general theory of shells of translation

L. BROGLIO
Rome

Si on déplace en translation une courbe Γ_φ contenue dans un plan vertical le long d'une autre courbe Γ_θ contenue dans un plan vertical orthogonal au précédent, on obtient une surface dont la projection sur un plan horizontal est rectangulaire. Si on pose ladite surface sur le périmètre de sa projection au moyen de quatre tympans, on réalise le schéma géométrique d'une « voûte de translation » (fig. 1).

Pour l'étude d'un type de toiture si important dans les applications, dans l'hypothèse d'un régime statique à membrane, il existe un procédé connu, relaté par M. Flügge dans son traité classique (1), duquel nous allons donner un bref résumé dans ce premier paragraphe.

En un point générique P (fig. 1) de la surface désignons par t_φ et t_θ respectivement les tangentes aux courbes Γ_φ et Γ_θ ; soient φ et θ les angles que t_φ et t_θ forment respectivement avec ses projections horizontales ; assumons comme repère en P le trièdre oblique t_φ, t_θ, z, désignant par z la verticale dirigée vers le bas. Soient X, Y, Z les composantes de la charge extérieure par unité de surface, et soient encore N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$ les efforts intérieurs de la structure, à savoir la traction dans la direction t_φ, la traction dans la direction t_θ et le cisaillement selon les deux directions obliques t_φ, t_θ, qui se rencontrent sous l'angle $\alpha = \arccos(\sin\varphi \cdot \sin\theta)$. Désignons enfin par $r_\varphi = r_\varphi(\varphi)$ et $r_\theta = r_\theta(\theta)$ les rayons de courbure de Γ_φ et de Γ_θ.

Le procédé que nous allons résumer consiste d'abord à exprimer mathématiquement les deux conditions suivantes : équilibre de toute portion élémentaire de voûte comprise entre deux Γ_φ et deux Γ_θ infiniment voisines, et incapacité de chaque tympan (qu'on imagine infiniment rigide dans son plan) à soutenir des actions orthogonales à lui.

---

(1) W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen*, Berlin, Springer, 1934, pp. 91-100.

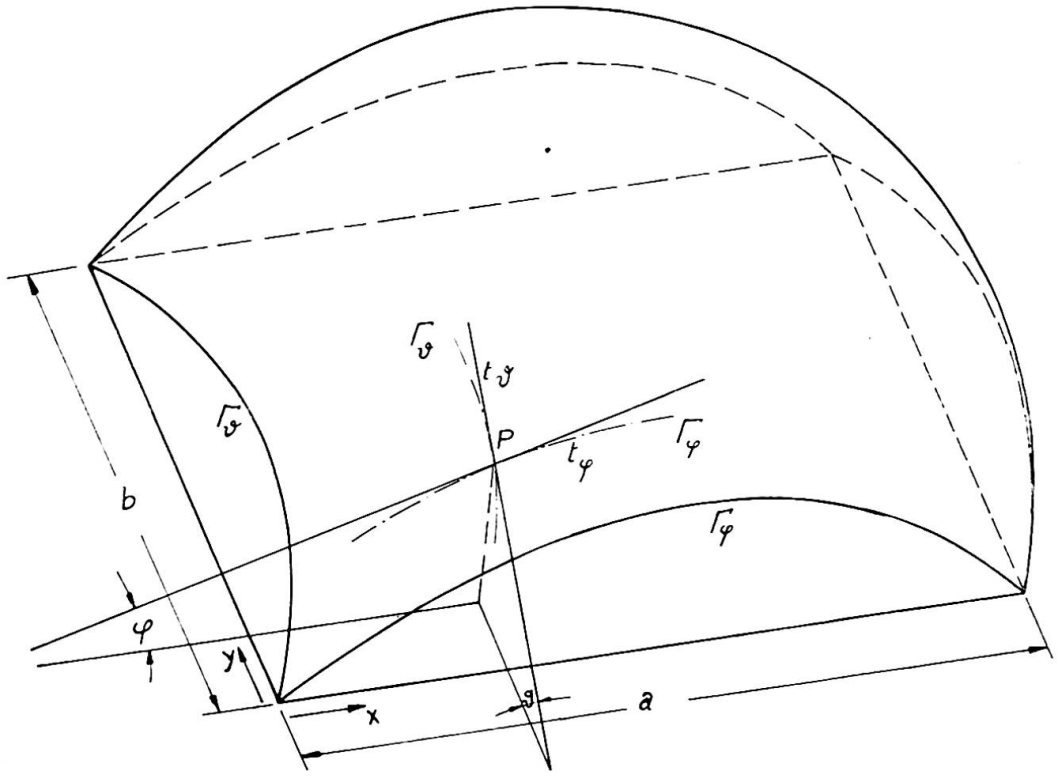

Fig. 1.

Les conditions d'équilibre selon t_φ, t_θ, z sont respectivement données par (2) (fig. 2):

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(N_\varphi \cos\varphi) + \frac{r_\varphi}{r_\theta}\frac{\partial N_{\varphi,\theta}}{\partial\theta}\cos\varphi + Xr_\varphi \cos\varphi \sin\alpha = 0\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(N_\theta \cos\theta) + \frac{r_\theta}{r_\varphi}\frac{\partial N_{\varphi,\theta}}{\partial\varphi}\cos\theta + Yr_\theta \cos\theta \sin\alpha = 0\,; \tag{2}$$

$$(N_\varphi \cos\varphi)\, r_\theta \cos^2\theta + (N_\theta \cos\theta)\, r_\varphi \cos^2\varphi + Zr_\varphi r_\theta \cos^2\varphi \cos^2\theta \sin\alpha = 0\,. \tag{3}$$

Les conditions sur les tympans sont respectivement (3):

Le long des deux côtés $\varphi =$ constante

$$N_\varphi = 0\,; \tag{4}$$

Le long des deux côtés $\theta =$ constante

$$N_\theta = 0\,. \tag{5}$$

Comme deuxième pas, le procédé en question réduit le système de (1), (2), (3), (4), (5) à contenir une seule inconnue $N_{\varphi,\theta}$. Dans ce but, il faut d'abord dériver (3) par rapport à φ et à θ, tenant compte des expressions que (1) et (2) donnent respectivement pour

$$r_\theta \cos^2\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}(N_\varphi \cos\varphi) \quad \text{et} \quad r_\varphi \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial\theta}(N_\theta \cos\theta)\,,$$

(2) *Loc. cit.*, équations (54*a*, 54*b*), et (53*c*).
(3) *Loc. cit.*, p. 94.

de sorte qu'on arrive à l'équation (4)

$$r_\varphi \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos^2\theta \frac{\partial N_{\varphi,\theta}}{\partial\theta}\right) + r_\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos^2\varphi \frac{\partial N_{\varphi,\theta}}{\partial\varphi}\right)$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\theta}(Z r_\varphi r_\theta \cos^2\varphi \cos^2\theta \sin\alpha) - r_\varphi \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta}(X r_\theta \cos^2\theta \sin\alpha)$$
$$- r_\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}(Y r_\varphi \cos^2\varphi \sin\alpha). \quad (6)$$

En outre, si on dérive (3) par rapport à θ en tenant compte de (4) et qu'on substitue dans (2), ou si on dérive (3) par rapport à φ, en tenant compte de (5) et qu'on substitue dans (1), les conditions aux limites deviennent :

Pour $\varphi =$ constante

$$\frac{\partial N_{\varphi,\theta}}{\partial\varphi} = \frac{1}{r_\theta \cos^2\varphi \cos\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(Z r_\varphi r_\theta \cos^2\varphi \cos^2\theta \sin\alpha) - Y r_\varphi \sin\alpha ; \quad (4')$$

Pour $\theta =$ constante

$$\frac{\partial N_{\varphi,\theta}}{\partial\theta} = \frac{1}{r_\varphi \cos^2\theta \cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi}(Z r_\varphi r_\theta \cos^2\varphi \cos^2\theta \sin\alpha) - X r_\theta \sin\alpha . \quad (5')$$

Comme troisième et dernier pas, il faut procéder à l'intégration de l'équation (6) avec les conditions aux limites (4') et (5'). Au point de vue mathématique ce problème présente des difficultés très considérables ; partant, les résultats obtenus par la méthode rappelée sont peu nombreux et se réfèrent (5) surtout au cas des directrices Γ_φ, Γ_θ circulaires, et de la structure bissymétrique, chargée symétriquement uniquement par des forces verticales, variables selon la loi

$$Z \sin\alpha = \text{constante} .$$

Fonction des efforts pour la voûte de translation

Considérons le cas général d'une voûte de translation non-symétrique par rapport à n'importe quelle directrice et chargée de manière quelconque. La non-symétrie de la structure permet d'étudier une toiture posée sur des murs de hauteur inégale ; la faculté de choisir le type des directrices présente à son tour un intérêt parce qu'elle permet un choix plus large au point de vue économique et esthétique et parce qu'on peut ainsi satisfaire aux exigences de diverses natures, acoustique ou optique, éventuellement imposées pour la pièce à couvrir ; enfin, le cas de la charge répartie de n'importe quelle façon (en particulier, celui de la charge concentrée) a de l'importance pour une étude plus complète de la voûte ou pour l'examen des structures minces de translation pour des cas plus complexes que celui d'une simple toiture.

Désignons (fig. 1) par a et b les deux dimensions de la projection horizontale de la voûte. Assumons comme repère un trièdre cartésien, ayant l'origine à un des sommets du rectangle, et disposons les axes x, y selon

(4) *Loc. cit.*, éq. (55).
(5) *Loc. cit.*, p. 103.

les côtés a et b dudit rectangle : la direction z, comme on l'a dit au paragraphe précédent, est verticale, positive vers le bas. Les relations différentielles entre les coordonnées φ et θ du paragraphe précédent et les nouvelles coordonnées x, y sont naturellement les deux suivantes :

$$\frac{dx}{d\varphi} = r_\varphi \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{d\theta} = r_\theta \cos\theta . \tag{7}$$

Les équations (1) et (2) du paragraphe précédent, qui expriment l'équilibre d'un élément de voûte dans le plan tangent deviennent alors :

$$\frac{\partial}{\partial x}(N_\varphi \cos\varphi) + \frac{\partial (N_{\varphi,\theta})}{\partial y}\cos\theta + X \sin\alpha = 0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(N_\theta \cos\theta) + \frac{\partial (N_{\varphi,\theta})}{\partial x}\cos\varphi + Y \sin\alpha = 0. \tag{9}$$

Un ensemble de conditions nécessaires pour la résolution du problème examiné est donc constitué par (8), (9), (3), (4), (5). On constate que les équations (8) et (9) sont satisfaites si on introduit une fonction des efforts Φ telle que :

$$N_\varphi \cos\varphi = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{x}{a}\overline{\overline{X}}(y) - \overline{X}(x, y)\right)\cos\theta ; \tag{10}$$

$$N_\theta \cos\theta = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{y}{b}\overline{\overline{Y}}(x) - \overline{Y}(x, y)\right)\cos\varphi ; \tag{11}$$

$$N_{\varphi,\theta} = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{a}\int_0^y \overline{\overline{X}}(y)\, dy + \frac{1}{b}\int_0^x \overline{\overline{Y}}(x)\, dx\right) + C \tag{12}$$

posant

$$\overline{X}(x, y) = \frac{1}{\cos\theta}\int_0^x (X \sin\alpha)\, dx ; \quad \overline{Y}(x, y) = \frac{1}{\cos\varphi}\int_0^y (Y \sin\alpha)\, dy . \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{X}}(y) &= \frac{1}{\cos\theta}\int_0^a (X \sin\alpha)\, dx = \overline{X}(a, y); \\ \overline{\overline{Y}}(x) &= \frac{1}{\cos\varphi}\int_0^b (Y \sin\alpha)\, dy = \overline{Y}(y, b) . \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

et désignant par C, dans l'équation (12), une constante arbitraire.

Si on substitue les relations (10), (11), (12) dans les équations (3), (4), (5), on en tire l'équation :

$$\frac{1}{r_\theta \cos^3\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r_\varphi \cos^3\varphi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} =$$

$$= -\left[Z\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi\cos\theta} + \frac{1}{r_\varphi \cos^3\varphi}\left(\frac{x}{a}\overline{\overline{X}} - \overline{X}\right) + \frac{1}{r_0 \cos^3\theta}\left(\frac{y}{b}\overline{\overline{Y}} - \overline{Y}\right)\right] \tag{15}$$

avec les conditions de rive :

Pour $x = a$ et $x = 0$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 ; \tag{16}$$

Pour $y = b$ et $y = 0$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 . \tag{17}$$

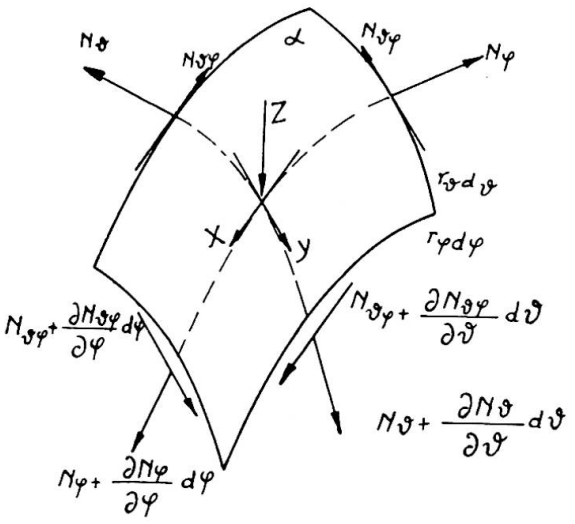

Fig. 2.

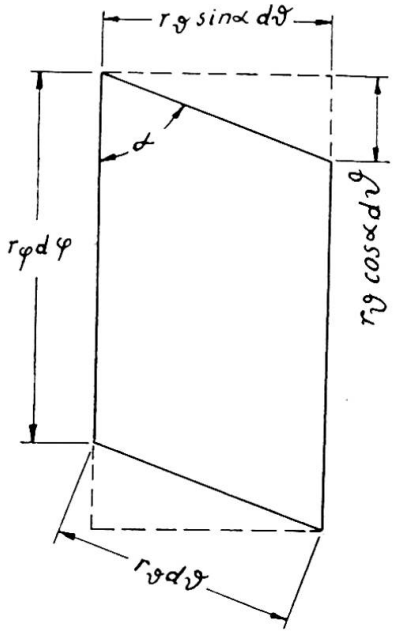

Fig. 3.

D'ailleurs il est bien évident que les relations (10), (11), (12) déterminent la fonction Φ à une fonction près :

$$\Psi(x, y) = k_1 + k_2 x + k_3 y + k_4 xy , \tag{18}$$

où k_1, k_2, k_3, k_4 sont des constantes arbitraires. En effet, si on ajoute la fonction Ψ à Φ pour un choix arbitraire de k_1, k_2, k_3, k_4, les équations (10), (11), (12) restent inchangées, rappelant que C est une constante arbitraire elle aussi. Alors il suffit de choisir k_1, k_2, k_3, k_4 d'une telle façon qu'elles annulent la fonction Φ dans les quatre sommets du rectangle de base, à savoir, dans les points $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b), $(0, b)$ pour que les conditions (16) et (17) puissent être écrites :

Le long de toute la limite

$$\Phi = 0 . \tag{19}$$

Si $z_\varphi = z_\varphi(x)$ *et* $z_\theta = z_\theta(y)$ sont respectivement les équations cartésiennes d'une quelconque Γ_φ dans un plan $y =$ constante, et d'une quelconque Γ_θ dans un plan $x =$ constante, on a naturellement, si on suppose partout $\varphi < \frac{\pi}{2}$, $\theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{1}{r_\varphi \cos^3 \varphi} = \left| \frac{d^2 z_\varphi}{dx^2} \right| = \mathrm{B}(x) ; \tag{20}$$

$$\frac{1}{r_\theta \cos^3 \theta} = \left| \frac{d^2 z_\theta}{dy^2} \right| = \mathrm{A}(y) . \tag{21}$$

Rappelant en outre que :

$$\mathrm{Z}^* = \frac{\mathrm{Z} \sin \alpha}{\cos \varphi \cos \theta} \tag{22}$$

n'est que la composante verticale de la charge par unité de surface de la projection horizontale de la voûte, et posant

$$q(x, y) = Z^* + B(x)\left(\frac{x}{a}\overline{\overline{X}} - \overline{X}\right) + A(y)\left(\frac{y}{b}\overline{\overline{Y}} - \overline{Y}\right) \tag{23}$$

on tire de (15)

$$A(y)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -q(x, y) \tag{24}$$

Le problème relatif à la détermination de la fonction des efforts est ainsi complètement défini : il s'agit d'intégrer l'équation (24) avec la condition à la limite (19). On voit tout de suite qu'un tel problème équivaut à déterminer les déplacements verticaux d'une membrane rectangulaire, fixée le long de tout son contour, soumise à la charge $q(x, y)$ par unité de surface et tendue par une tension constante le long de chaque fil, c'est-à-dire, variable selon la loi $A(y)$ pour les fils parallèles à l'axe x, et selon la loi $B(x)$ pour les fils parallèles à l'axe y [il faut remarquer que $A(y)$ et $B(x)$, à cause de (20) et (21), sont essentiellement positives]. On a ainsi une précieuse analogie, par laquelle le calcul de la voûte de translation se transforme dans le calcul d'une simple membrane appuyée au contour. On peut tirer parti de cette analogie pour déterminer la fonction Φ par la voie expérimentale, comme on le dira ensuite. Avant d'étudier l'intégration de (24) avec la condition (19), il vaut mieux de compléter la mise en train générale du problème par une observation relative à l'effective détermination des efforts N_φ, N_θ, $N_{\theta\varphi}$ par la fonction Φ.

Les conditions de compatibilité pour les voûtes minces

Lorsqu'on a déterminé la fonction des efforts Φ au moyen de (24) et (19), on tire immédiatement de (10), (11) et (12) les efforts N_φ N_θ et $N_{\varphi\theta}$. Mais ce dernier effort est en réalité déterminé par (12) à une constante arbitraire C près. Ce fait est tout logique, et dérive de la circonstance que les conditions d'équilibre (1), (2) et (3) et les conditions de rive (4) et (5) ne constituent pas en général un ensemble de conditions suffisantes pour la complète détermination des efforts N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$ dans la voûte. En fait on voit immédiatement que (1), (2), (3), (4), (5) sont vérifiés même après l'addition de n'importe quelle constante arbitraire à $N_{\varphi\theta}$. En un mot, la voûte de translation n'est pas, en général, un système isostatique, c'est-à-dire une structure où il est possible de déterminer les efforts au moyen des équations d'équilibre seulement, mais c'est un système hyperstatique, pour la résolution duquel il est nécessaire d'adjoindre des conditions de compatibilité aux conditions d'équilibre. Si les efforts intérieurs sont N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$ comme on l'a supposé, l'hyperstaticité de la voûte de translation se réduit à un seul paramètre, c'est-à-dire à une constante arbitraire à ajouter à $N_{\varphi\theta}$. Comme les équations (24) et (19) sont une traduction fidèle de (1), (2), (3) et de (4), (5), on conclut que nécessairement la connaissance de la fonction Φ doit rendre déterminés les efforts N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$ à une constante arbitraire près à ajouter à $N_{\varphi\theta}$. Pour compléter le calcul des efforts N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$, lorsqu'on a déterminé Φ par (24) et (19), il est suffisant de déterminer la valeur de la constante, qui paraît au deuxième membre de (12). Si la structure est symétrique et chargée symétriquement, pour des raisons de symétrie, $N_{\varphi\theta}$ doit s'annuler sur le

plan de symétrie, et la question est toute résolue : cela veut dire que la voûte symétrique, chargée symétriquement, devient isostatique par l'adjonction de la condition $N_{\varphi\theta} = 0$ aux conditions (4) et (5) en un point quelconque de la surface appartenant au plan de symétrie. Dans le cas général la constante C doit être déterminée, comme on a dit, par des conditions de compatibilité. A ce propos il faut observer que chaque tympan, qui a été supposé infiniment rigide dans son plan, et infiniment élastique dans la direction orthogonale, constitue pour les surfaces de translation une contrainte dont les réactions ne font pas de travail par effet des déformations dues à la charge : en effet les réactions qui appartiennent au plan du tympan ne font pas de travail car le déplacement des points d'application respectifs est nul, tandis que les réactions orthogonales audit plan ne font pas de travail parce que ce sont elles qui sont nulles par hypothèse. Par conséquent on peut appliquer aux voûtes de translation le théorème de Menabrea : bien mieux, lorsqu'on a satisfait toutes les conditions d'équilibre, le théorème de Menabrea résume toutes les conditions de compatibilité que la structure doit satisfaire (6). Remarquons que cette observation reste valable même si le régime statique de la voûte n'était pas à membrane, mais le plus général qu'il est possible. Comme les efforts N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$ calculés d'après les équations (10), (11), (12), satisfont déjà toutes les conditions d'équilibre, on peut déterminer le paramètre C qui paraît dans (12) ; si l'on pose

$$N'_{\varphi\theta} = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} + \frac{1}{a}\int_0^y \bar{\bar{X}}(y)\, dy + \frac{1}{b}\int_0^x \bar{\bar{Y}}(x)\, dx\right), \qquad (25)$$

en disant que C doit rendre *minimum* l'énergie de déformation de la voûte calculée en fonction de N_φ, N_θ, $N'_{\varphi\theta} + C$; N_φ, N_θ, $N'_{\varphi\theta}$ étant des fonctions désormais connues.

Pour calculer le travail élémentaire de déformation que les efforts N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$ produisent en une portion élémentaire $r_\varphi\, d\varphi$, $r_\theta\, d\theta$ de la voûte, le procédé que l'on va indiquer peut réussir avantageusement. Imaginons pour un moment que le parallélogramme $r_\varphi d\varphi\, r_\theta d\theta$ fait partie d'un rectangle dont les côtés soient $r_\varphi\, d\varphi + r_\theta \cos\alpha\, d\theta$ et $r_\theta \sin\alpha\, d\theta$ (fig. 3). Supposons que ce rectangle soit soumis : *a*) à une traction simple, d'intensité unitaire σ_1, dans la direction de t_φ ; *b*) à une traction simple, d'intensité unitaire σ_2, dans la direction orthogonale; *c*) à un cisaillement simple, d'intensité unitaire τ, selon les deux directions orthogonales représentées par les côtés du rectangle. Le travail de déformation de la partie de rectangle qui correspond au parallélogramme de côtés $r_\varphi d\varphi$, $r_\theta d\theta$ est alors :

$$dL = \frac{1}{2}\, d\Omega \left(\frac{\sigma_1^2 h}{E} + \frac{\sigma_2^2 h}{E} + \frac{\tau^2 h}{G}\right) \qquad \boxed{d\Omega = (r_\varphi\, r_\theta \sin\alpha)\, d\varphi\, d\theta} \qquad (26)$$

où E et G sont les modules d'élasticité à la traction et au cisaillement, h l'épaisseur variable de la voûte, $d\Omega = r_\varphi r_\theta \sin\alpha\, d\varphi\, d\theta$ la surface du parallélogramme, ayant supposé nul le coefficient de contraction latérale (voûte en béton armé). Les trois types de tensions *a*, *b*, *c* ont été

(6) Cf. par exemple L. Broglio, *Introduzione d'un metodo in doppio per il calcolo delle strutture elastiche* (*Atti di Guidonia*, 1941).

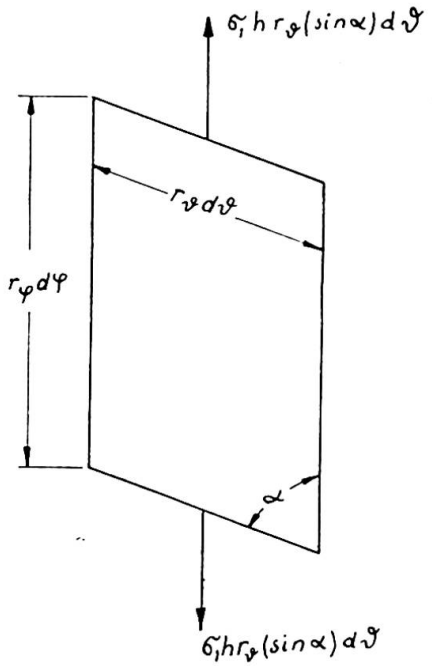

Fig. 3a.

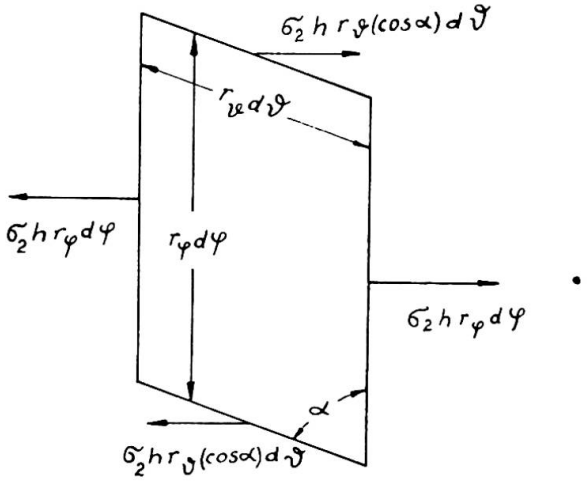

Fig. 3b.

représentés dans les figures 3*a*, 3*b*, 3*c*. On voit ainsi qu'il suffit de poser :

$$\sigma_2 h = N_\theta \sin\alpha\,;$$

$$\tau h = N_{\varphi\theta} + N_\theta \cos\alpha\,;$$

$$\sigma_1 h = \frac{N_\varphi}{\sin\alpha} + \frac{2\,N_{\varphi\theta}}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{N_\theta \cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\,;$$

pour que la superposition des trois cas *a*, *b*, *c* conduise au vrai état de tension de l'élément de voûte. Le travail de déformation global est alors :

$$L = \frac{1}{2}\int\int \left[\frac{1}{Eh}\left(\frac{N_\varphi}{\sin\alpha} + \frac{2\,N_{\varphi\theta}}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{N_\theta\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 + \frac{1}{Eh}(N_\theta\sin\alpha)^2 + \frac{1}{Gh}(N_{\varphi\theta} + N_\theta\cos\alpha)^2\right] r_\varphi\, r_\theta \sin\alpha\, d\varphi\, d\theta \qquad (27)$$

où l'intégrale est étendue à toute la voûte. Naturellement il suffit de rappeler les équations (7) pour que l'intégrale ait comme variables d'intégration x et y au lieu de φ et θ. Comme $G = \frac{1}{2}E$, en rappelant que $\cos\alpha = \sin\varphi\sin\theta$:

$$L = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left[\frac{N_\varphi^2 + N_\theta^2}{\sin^2\alpha} + 2\left(1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right)N_{\varphi\theta}^2 + 2\,\frac{N_\varphi N_\theta}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 4\,\frac{(N_\varphi + N_\theta)\,N_{\varphi\theta}}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}\right]\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\theta}\,\frac{dx\,dy}{Eh}\,. \qquad (28)$$

Dans l'équation (28) les fonctions

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dz_\varphi}{dx}\,; \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{dz_\theta}{dy} \qquad (29)$$

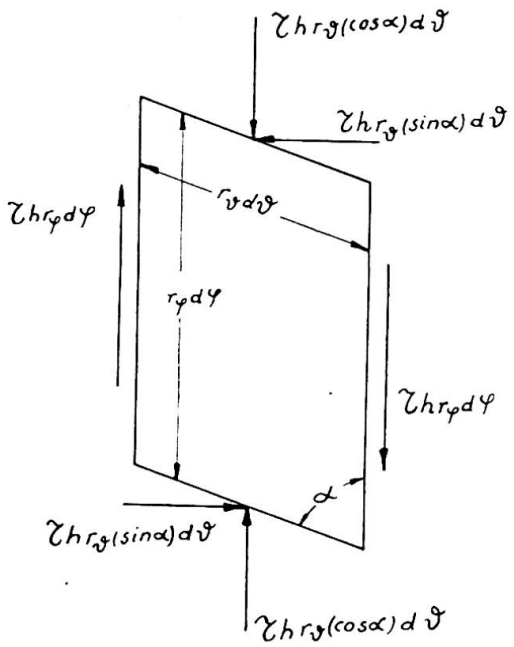

Fig. 3c.

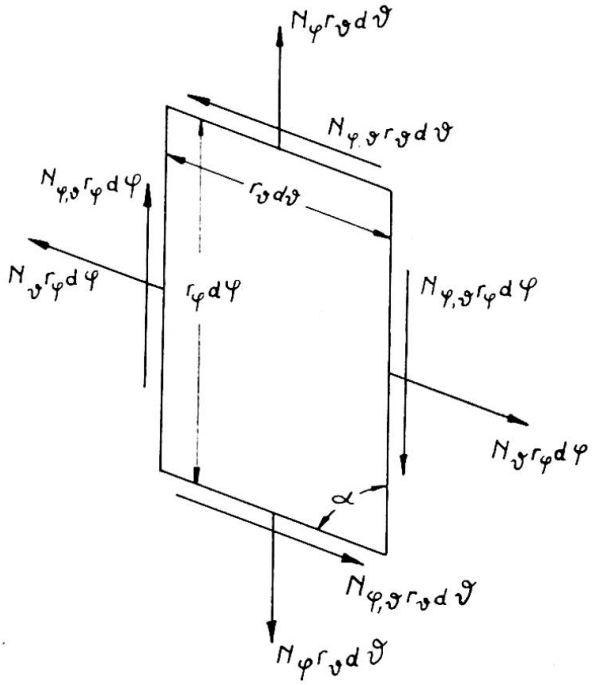

Fig. 4.

sont des fonctions connues ne dépendant que des équations cartésiennes $z_\phi = z_\varphi(x)$ et $z_\theta = z_\theta(y)$ des deux directrices Γ_φ et Γ_θ. Remarquons que dans l'intégrale (28) N_φ et N_θ sont traitées symétriquement, exactement comme il doit être, étant donné que dans la génération géométrique de la voûte le rôle de Γ_φ et Γ_θ peut être échangé. Si l'on pose alors, d'après (25),

$$N_{\varphi\theta} = N'_{\varphi\theta} + C \tag{30}$$

pour que C rende minimum l'intégrale (28), il faut que

$$-C = \frac{\int_0^a \int_0^b \left[\left(1+\frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right) N'_{\varphi\theta} + \frac{N_\varphi + N_\theta}{\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha}\right] \sqrt{1+\left(\frac{dz_\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz_\theta}{dy}\right)^2}\,\frac{dx\,dy}{Eh}}{\int_0^a \int_0^b \left(1+\frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right) \sqrt{1+\left(\frac{dz_\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz_\theta}{dy}\right)^2}\,\frac{dx\,dy}{Eh}} . \tag{31}$$

Le problème de la détermination des efforts dans la voûte est ainsi complètement résolu. Naturellement si la voûte est symétrique et chargée symétriquement il faut que $C = 0$, comme on le voit de (31), rappelant que dans ce cas $N'_{\varphi\theta}$ ainsi que $\dfrac{N_\varphi + N_\theta}{\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha} = \left(\dfrac{N_\varphi + N_\theta}{\sin^2\alpha}\right)\cos\alpha$ sont antisymétriques.

Solution du problème au moyen de l'analogie de la membrane

Comme on l'a déjà observé, par l'équation (24) avec les conditions aux limites (19), l'étude d'une voûte mince de translation dans les conditions géométriques et de charge les plus générales est réduit à un problème qu'on peut dire élémentaire, c'est-à-dire, à l'étude d'une membrane

rectangulaire fixée au contour et tendue uniformément le long de chaque fil. Ce problème peut, en l'occurrence, être étudié par voie expérimentale. En effet, il suffit de substituer à la membrane un réseau de fils suffisamment serré, produire par des poids une tension constante $A(y)$ le long de chaque fil parallèle à l'axe x et une tension constante $B(x)$ le long de chaque fil parallèle à l'axe y, et enfin appliquer à la membrane la charge $q(x, y)$, pour avoir dans les déplacements verticaux Φ dudit réseau la solution de (24). L'auteur a déjà obtenu par cette voie un nombre remarquable de résultats, se servant d'une méthode de mesure des déplacements verticaux qui permet d'obtenir, avec une grande facilité et rapidité, une précision supérieure à une fraction de micron. L'analogie de la membrane se présente particulièrement utile pour l'étude des charges concentrées.

Solution du problème par la méthode de l'équivalence

La solution de l'équation (24) avec les conditions (19) peut être facilement conduite par voie analytique aussi, par des procédés d'approximations successives. Outre les méthodes de ce type déjà connues, l'auteur a étudié une application particulière à ce problème de la méthode d'équivalence (7). Faute de place, nous renvoyons à un autre mémoire pour l'exposition du résultat obtenu par cette voie.

Cas remarquables

Le cas des actions extérieures uniquement verticales est particulièrement important. Dans ce cas le problème est réduit à intégrer l'équation

$$A(y)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -Z^* \qquad (32)$$

Z^* étant la charge par unité de surface de la projection verticale de la voûte. Les conditions à la frontière sont à l'ordinaire $\Phi = 0$ le long de tout le contour. Quand on a déterminé Φ, il vient :

$$N_\varphi \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} ;$$

$$N_\theta \frac{\cos\theta}{\cos\varphi} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} ;$$

$$N_{\varphi\theta} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + C ; \qquad N'_{\varphi\theta} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} .$$

La constante C est donnée par l'équation (31).

Le cas où les directrices sont deux paraboles est très intéressant aussi. Alors $A(y)$ et $B(x)$ sont constantes. L'équation (32) devient immédiatement l'équation d'une membrane rectangulaire à tension constante, char-

(7) L. BROGLIO, *A method of equivalence applied to the solution of problems of elasticity and of Mathematical Physics* (VII. *Int. Cong. App. Mech.*, 1948).

gée de n'importe quelle façon. Supposant que les équations des directrices paraboliques donnent

$$\left|\frac{d^2 z_\varphi}{dx^2}\right| = \frac{1}{h^2} \; ; \qquad \left|\frac{d^2 z_\theta}{dy^2}\right| = \frac{1}{k^2}$$

il est suffisant de poser

$$kx = \frac{\xi}{T} \; ; \qquad hy = \frac{\eta}{T}$$

et T = constante, pour que (32) devienne

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = -\frac{Z^*}{T} \; .$$

équation dont la solution est bien connue. Pour $Z^* =$ constante on a en particulier (8) :

$$\Phi = \frac{4 Z^* a^2}{T\pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} \; . \qquad (33)$$

en prenant l'origine au centre du rectangle qui est la projection verticale de la voûte.

Remarque

Dans le cas qu'on vient de considérer (directrices paraboliques et charge verticale uniforme selon la projection horizontale), l'ancienne théorie, à savoir les équations (6) avec les conditions (4′) et (8′) donnent $N_{\varphi\theta} =$ constante. Si on suppose la structure symétrique, on a $N_{\varphi\theta} = 0$. Substituant dans (1) et (2) et rappelant (4) et (5) on a $N_\varphi = N_\theta = 0$. En un mot, l'équation (6) avec les conditions (4′) et (5′) porte, dans le cas considéré, à une solution où les efforts sont nuls dans toute la voûte. Cette solution n'est pas identique à celle qu'on obtient dans l'équation (33) et, d'ailleurs, ne satisfait pas l'équation d'équilibre (3). Cette discordance provient du fait que l'équation (6) avec les conditions (4′) et (5′) n'a pas été déduite des relations (1), (2), (3), (4), (5), mais de (1), (2), (4), (5) et par des relations dérivées de (3). Cela veut dire que (6) avec (4′) et (5′) ne tiennent pas compte de la vraie équation d'équilibre, mais seulement de dérivées de cette équation.

Résumé

Dans ce mémoire on introduit une théorie générale des voûtes minces de translation, qui permet une solution complète du problème. Au moyen d'un changement de variables et grâce à l'introduction d'une fonction des efforts, on réduit le problème à l'étude de la membrane rectangulaire

(8) S. Timoshenko, *Theory of Elasticity*, New York, 1934, p. 246.

tendue et fixée le long de son contour. La méthode permet, sans difficultés particulières, l'étude des voûtes non symétriques et chargées non symétriquement, pour lesquelles on démontre la nécessité d'adjoindre aux conditions d'équilibre (qui sont les seules usitées) une condition de compatibilité exprimée par le théorème de Menabrea.

Cette méthode permet la résolution, dans le cas des charges concentrées aussi. La solution de la voûte aux directrices paraboliques soumise à une charge quelconque répartie selon la projection horizontale, dans la méthode proposée, est réduite à celle bien connue d'une membrane rectangulaire fixée le long de son contour, uniformément tendue et chargée par la même charge.

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird eine allgemeine Theorie der Translationsflächen entwickelt, die die vollständige Lösung dieses Problems ermöglicht. Mittels einer Variabelntransformation und der Einführung einer Spannungsfunktion kann das Problem auf dasjenige der an den Rändern gehaltenen, gespannten Membran zurückgeführt werden. Die Methode erlaubt ohne besondere Schwierigkeiten die Behandlung von unsymmetrischen und unsymmetrisch belasteten Schalen. Es wird gezeigt, dass für die letzteren den Gleichgewichtsbedingungen (welche in den bisherigen Veröffentlichungen allein betrachtet wurden) eine Verträglichkeitsbedingung hinzugefügt werden muss, die mit dem Theorem van Menabrea hergeleitet werden kann.

Diese Methode ermöglicht die Lösung auch im Falle von konzentrierten Lasten. Die Lösung der Schale mit parabolischen Leitkurven und mit einer über die Horizontalprojektion gleichmässig verteilten Belastung, wie sie in der vorgeschlagenen Methode angegeben ist, wird zurückgeführt auf die wohlbekannte Methode der an den Rändern gehaltenen, gleichmässig gespannten und gleichmässig belasteten, rechteckigen Membran.

Summary

In this paper one is introduced to a general theory of shells of translation, which provides a complete solution of the problem. By means of a change of variable quantities and thanks to the introduction of a stress function, the problem is reduced to the study of the rectangular membrane, stretched and fixed along its boundary. Without any particular difficulty, the method enables to study shells, that are non-symmetrical and non-symmetrically loaded, for which the author stresses the necessity of adjoining to the equilibrium conditions (which are the only ones used) a condition of compatibility expressed by Menabrea's theorem.

This method provides a solution, in the case of concentrated loads too. The solution of a shell with parabolic directrices, subjected to a load evenly distributed on the horizontal projection in the proposed method, is reduced to the well known one of a rectangular membrane fixed along its boundary, uniformly stretched and evenly loaded.

IVb2

La charge de rupture de dalles en béton armé

Die Bruchlast von Eisenbetonplatten

The ultimate strength of reinforced concrete slabs

K. W. JOHANSEN
Dr techn. Copenhague

It is evident that in the determination of the ultimate load the theory of elasticity is inapplicable. Already after the development of cracks and, more particularly, after yielding of the reinforcement has begun, the state is not elastic any longer. As the working load has to be fixed in proportion to the ultimate load, a theory of the yielding or plastic state of reinforced concrete slabs is desirable. An outline of the « theory of lines of fracture » will therefore be given in the following.

Let us consider a slab with uniform reinforcement in two directions at right angles to each other. When the reinforcement is evenly distributed, the yield value will be the same in all sections of the slab. The yielding will begin where the values will have maximum magnitude, and proceed along the lines of fracture. At the ultimate load the yielding has reached the edges, and along the lines of fracture the bending moment m per unit length is constant and equals the yield value corresponding to the reinforcement. This moment m is a maximum value in relation to the moments in all sections in the proximity of the lines of fracture. The lines of fracture divide the slab into several parts, and if now we assume the elastic deformations of these slab parts to be insignificant in comparison with the plastic deformations along the lines of fracture, the slab parts may be considered as plane. It then follows that the lines of fracture are straight lines. On the said assumption the deformation may be considered as angular rotations of the plane slab parts about the supports, and consequently the line of fracture between two slab parts must pass through the point of intersection of the axes of rotation of the two slab parts. Figure 1 shows some typical figures of fracture of slabs supported on four, three, and two sides, as well as on two sides and by one column, and on one side and by two columns, respectively. The axes of rotation lie in the supported sides and pass through the columns. The final determination of the figure of fracture and the breaking moment m is achieved with the conditions

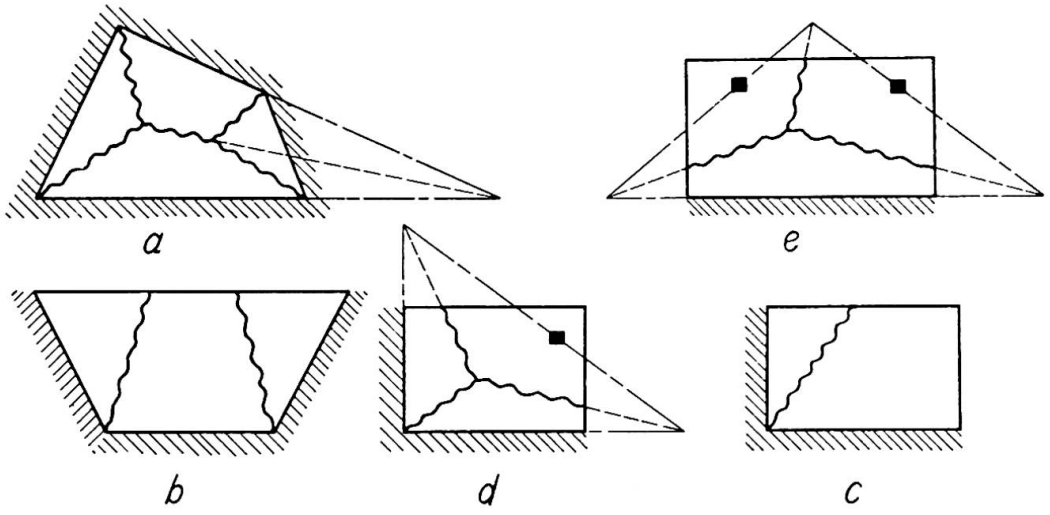

Fig. 1.

of equilibrium for the individual parts of the slab. For recording these conditions it is necessary to know the shearing forces along the lines of fracture. m being a maximum value in relation to the moments in sections in other directions through the same point, it is one of the principal moments, that is to say, the twisting moment is zero along the lines of fracture. We then find — as is also the case with a beam — that the shearing force is zero because m is maximum in relation to the moments in sections parallel to the section of fracture through adjacent points. Thus, only the bending moment m acts in the section of fracture, and the total moment may be represented by a vector equal to the line of fracture. The resulting moment for a part of the slab is found by vector addition.

Example 1. — A triangular slab with evenly distributed load is simply supported along its sides. According to the above, the figure of fracture will be as shown in figure 2. Let us consider the slab part at a. In the line of fracture OB acts the moment $m \cdot \overline{BO}$, and in the line of fracture OC the moment $m \cdot CO$. On the whole slab part acts $m\ (BO + \overline{OC}) = m \cdot BC = m \cdot a$. The moment about a gives the condition of equilibrium $m \cdot a = 1/6\ wa \cdot h^2_a$, or $m = 1/6\ wh^2_a$. Correspondingly, we get for the other slab parts $m = 1/6\ wh^2_b$ and $m = 1/6\ wh^2_c$, i.e., $h_a = h_b = h_c = r$, where r is the radius of the inscribed circle. The breaking moment is $m = 1/6\ wr^2$, where w is the ultimate load.

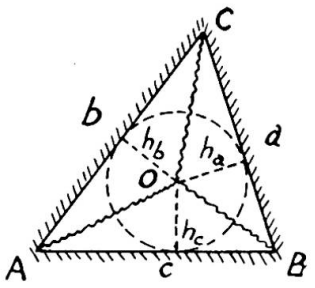

Fig. 2.

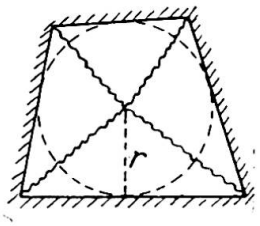

Fig. 3.

For all polygons circumscribed the circle with the radius r (fig. 3), it will be seen directly that also here we have $m = 1/6\ wr^2$; for the square having the side a, specially $m = 1/24\ wa^2$. (For rectangle see INGERSLEV, *Institution of Structural Engineers' Journal*, 1923.)

The ultimate load being n times the working load, and the breaking moment n times the working moment, where n is the coefficient of safety, we can also let m and w mean the permissible values.

With a free or simply supported edge, both the bending moment and the twisting moment should strictly speaking be zero. This involves that the lines of fracture should be at right angles to the edge. This is really

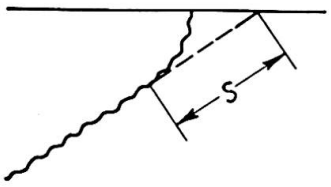

Fig. 4.

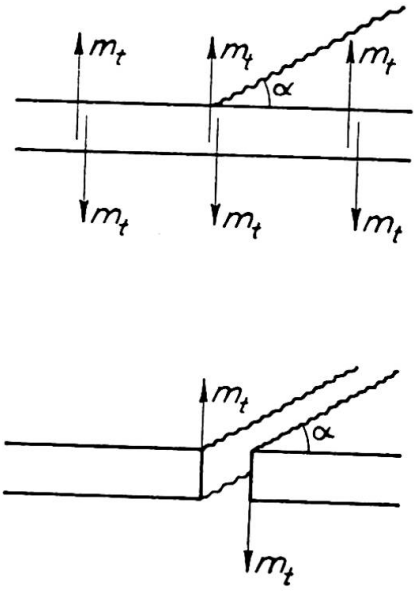

Fig. 5.

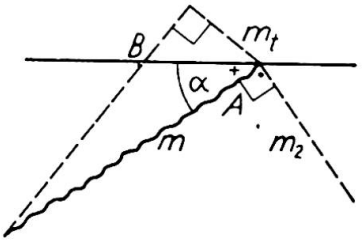

Fig. 6.

the case (fig. 4), but only quite close to the edge do the cracks suddenly turn so as to be at right angles to it.

As is known from the theory of elasticity for thin slabs, there are also here difficulties with the twisting moment at the edge. These difficulties are overcome by transforming the twisting moment into shear forces, as shown in figure 5 and first indicated by Kelvin and Tait. While the two single forces m_t neutralize each other when the slab is considered as a whole, they must be considered as acting each on its slab part when the equations of equilibrium for the individual slab parts are to be developed. The principal moments being m and m_2 (fig. 6), the bending moment along the edge will according to the above be

$$m \cos^2 \alpha + m_2 \sin^2 \alpha = 0$$

and the twisting moment

$$m_t = (m - m_2) \cos \alpha \sin \alpha = m \cot \alpha, \text{ as } m_2 = - m \cot^2 \alpha .$$

If we make the same transformation for plastic slabs, this will correspond to a rectilinear extension of the line of fracture to the edge (fig. 4). The single force $m \cot \alpha$ is then a static equivalent of the twisting moments and the shearing forces on the stretch s. Incidentally, this force the edge force, can also easily be deduced directly from the equation of equilibrium for the infinitesimal triangle AOB shown in figure 6. As m is a maximum value, the adjacent section OB has the same m, and as the bending moment is zero along AB $= ds$, the resultant for the whole triangle

$$m \, (\overline{AO} + \overline{OB}) = m \cdot \overline{AB} = m \cdot ds .$$

The moment about BO gives then, when magnitudes of a higher order are ignored,

$$m \cdot ds \cdot \cos \alpha = m_t \cdot ds \cdot \sin \alpha ; \qquad m_t = m \cot \alpha .$$

Example 2. — A rectangular slab with evenly distributed load is simply supported on two adjacent sides and free on the two others (fig. 7). The figure of fracture shown gives the edge force $m \cdot \frac{x}{a}$. The moment about a for the slab part A gives

$$ma = \frac{1}{6} wax^2 + m \cdot \frac{x}{a} \cdot x ,$$

and the moment about b for the slab part B gives

$$m \cdot x + m \frac{x}{a} \cdot a = \frac{1}{2} wba - \frac{1}{3} wa^2 x \cdot$$

From these two equations of equilibrium are found :

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{3b} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{3b}\right)^2} ;$$

$$m = \frac{3}{4} \cdot \frac{wb^2}{1 + \sqrt{1 + 9\frac{b^2}{a^2}}} \qquad b \geqslant a .$$

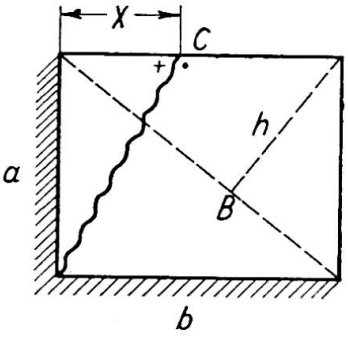

Fig. 7.

In the diagonal section shown is found the negative moment

$$m' = \frac{1}{6} wh^2 = \frac{1}{6} w \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} .$$

It can be proved quite simply that the number of equations is always equal to the number of unknowns (*IABSE, Publications I*, 1932, p. 283). The equations are not linear, so that superposition cannot be applied, but it can be proved that it is safe to superpose loads acting jointly (that is, do not counteract each other).

Should the solution of the equations be too cumbersome, the following method can always be used in practice : By the principle of virtual work, m can be determined directly for an arbitrarily chosen figure of fracture (*loc. cit.*, p. 284). The real value of m being a maximum value, the proper figure of fracture will be the one making the corresponding m the maximum. As the variations in the proximity of a maximum are very small, a fair approximation for m can be obtained by estimating the figure of fracture. By the equations of equilibrium for the individual slab parts the estimated figure of fracture may be improved and a better approximation be attained. With a little experience it is possible to estimate immediately the figure of fracture so well that the corresponding m will differ only a few percent from the real value.

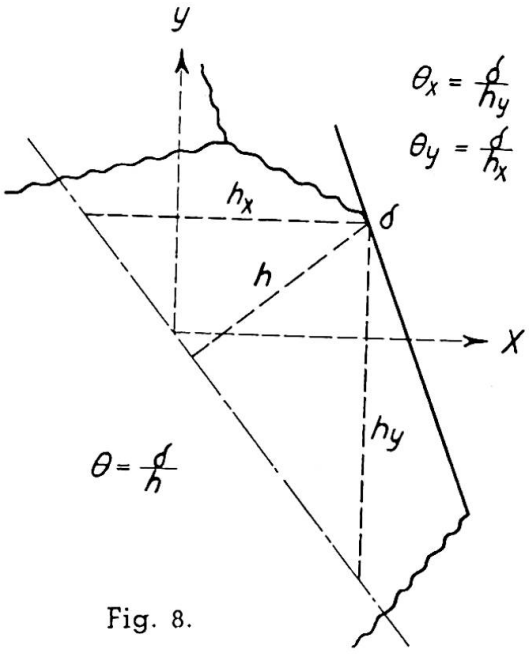

Fig. 8.

In the development of the equation of work advantage is taken of the fact that the work of the moment vector M in the rotation 0, which is likewise a vector, is the scalar product $(M\theta) = M\theta \cos (M\theta)$. If the vec-

tors are resolved into components along two axes which are at right angles to each other, we get the expression $(M\theta) = M_x\theta_x + M_y\theta_y$. The rotation is determined, for instance, by the sinkings as shown in figure 8.

Example 3. — We will apply the equation of work to the preceding example. We lower C δ; thereby the slab part A will get the rotation $\theta_A = \delta \div x$; and the slab part B, $\theta_B = \delta \div a$, about the supports. The virtual work will be made $M_A\theta_A + M_B\theta_B = 0$, i.e.,

$$\left(ma - \frac{1}{6} wax^2\right)\frac{\delta}{x} + \left(m \cdot x - \frac{1}{2} wba^2 + \frac{1}{3} wa^2x^2\right)\frac{\delta}{a} = 0 ,$$

which gives :

$$m = \frac{1}{6} wab \frac{3 - \frac{x}{b}}{\frac{a}{x} + \frac{x}{a}} .$$

The shearing forces do not contribute, since the two slab parts do not move vertically in relation to each other. The real figure of fracture is now found by the condition $dm \div dx = 0$, which gives the result previously found

If we use as approximation $x = a$, we get $m = 1/12\ wab\left(3 - \frac{a}{b}\right)$. For $b = a$ we then have $m = wab : 6$, exactly $wab : 5.55$. For $b = 2a$ we get $m = wab : 4.8$, exactly $wab : 4.72$. The error is 7.5 and 1.6 percent, respectively, which is of no practical consequence.

Example 4. — A square slab, simply supported on two adjacent sides and by one column in the opposite corner, is loaded with a single force P in the centre.

The figure of fracture will be as in figure 9. When the force P is lowered $\delta = 1$, the slab parts A get the rotations $1 : \frac{a}{2} = 2 : a$, while the rotation for the slab part B has the components $1 : a$, as $h_x = h_y = a$ (fig. 8) and the moment has the components $\frac{2}{3} ma$. Hence is obtained the equation of work :

$$P \cdot l = 2 \cdot ma \cdot \frac{2}{a} + 2 \cdot \frac{2}{3} ma \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \frac{16}{3} m ;$$

$$m = \frac{3}{16} P .$$

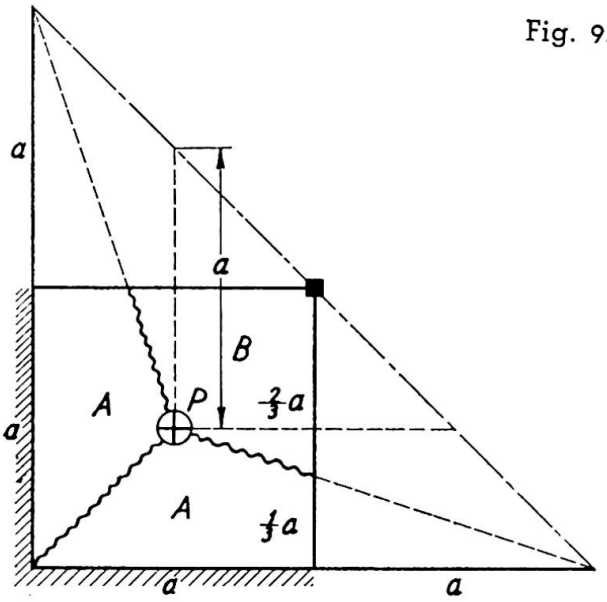

Fig. 9.

For fixed-end slabs and slabs which are continuous over supports are assumed lines of fracture over the supports with negative moments corresponding to the upper reinforcement of the slab.

When the reinforcement is uniform, but not equal in the two orthogonal directions, so that the corresponding yield values are m and μm, m is the same as in a slab with equal yield values m, and affines to the given slab in the proportion $1 : \sqrt{\mu}$ and with the same load per unit of area.

The theory is very well verified by the tests, both as regards the figures of fracture and the ultimate loads.

Résumé

Ce mémoire donne une description de la théorie des lignes de rupture de dalle en béton armé. On peut déterminer ces lignes de rupture géométriquement grâce au fait que les déformations élastiques sont faibles comparées aux déformations plastiques. Le moment fléchissant atteint sa valeur maximum le long de ces lignes, ce qui permet de déterminer les efforts transversaux et de torsion. Ils sont nuls sauf au bord libre. On en déduit les conditions d'équilibre pour les surfaces partielles limitées par les lignes de rupture connaissant ces lignes de rupture et le moment de rupture. Une méthode approchée peut être déduite du principe du travail virtuel. Cette méthode est illustrée par des exemples.

Zusammenfassung

Eine Beschreibung der Bruchlinientheorie für Eisenbetonplatten wird gegeben. Mittels geometrischer Bedingungen, welche aus der Tatsache folgen, dass die elastischen Deformationen unbedeutend sind gegenüber den plastischen, kann die Form der Bruchfigur bestimmt werden. Da das Biegungsmoment längs der Bruchlinien einen Grösstwert hat, können die Querkräfte und die Drillungsmomente bestimmt werden. Sie sind null, ausgenommen an einem freien Rand. Hierauf können die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden für die Teilflächen, in die die Platte durch die Bruchlinien geteilt wird, wobei die Bruchfigur und das Bruchmoment bekannt sind. Eine einfache Näherungsmethode kann durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit entwickelt werden. Die Theorie wird durch Beispiele illustriert.

Summary

An outline of the theory of lines of fracture of reinforced concrete slabs is given. Through the geometric conditions which are a consequence of the fact that the elastic deformations are insignificant as compared with the plastic ones the character of the figure of fracture can be determined (fig. 1). The moment in the lines of fracture being a maximum value, the transversal force and the twisting moment can be determined. They become zero, except at a free edge. The equations of equilibrium for the individual parts into which the lines of fracture divide the slab can then be set up, whereby the figure of fracture and the breaking moment are determined. A simple method of approximation can be indicated by application of the principle of virtual work. The method is illustrated by examples.

IVb3

Dalles continues

Durchlaufende Platten

Continuous slabs

CARLOS FERNANDEZ CASADO
Ingénieur-conseil à Madrid

La dalle continue est un type de construction utilisé constamment dans les bâtiments et dans les ponts.

Nous avons construit 15 ponts en travées droites en dalles continues du type pur, en ponts portiques ou en ponts cantilever. L'ouverture maximum que nous avons construite est de 16 mètres alors que les trois types des modèles standards que nous avons projetés et qui ont été adoptés officiellement par le Ministère des Travaux publics sont pour ouvertures de 5 à 12 mètres.

Le calcul d'une dalle continue indépendante, ou solidaire des appuis qui ne cèdent pas, est très simple, exception faite de la détermination de la largeur efficace pour les charges concentrées. Mais, compte tenu de l'importance normale des ouvertures dans les dalles continues, quelle que soit la formule appliquée, la largeur efficace qui en résulte permet de considérer toute la dalle comme résistante à la flexion. La largeur efficace à l'effort tranchant constitue une question secondaire. Pour l'analyse des moments fléchissants nous utilisons toujours la méthode de Cross considérant la variation du moment d'inertie dans la dalle et le déplacement transversal dans le cas du portique multiple. La détermination des valeurs maximum doit se faire par intermédiaire des lignes d'influence.

Dans les tabliers des ponts, soit en travées droites ou en arcs, nous trouvons de nouveau la dalle continue, dont la continuité peut s'étendre dans un ou dans les deux sens. Une autre différence avec le cas antérieur est que les appuis de la dalle sont des poutres qui fléchissent sous l'action des charges. Quand la continuité correspond à la direction transversale au trafic, le dénivellement des poutres contiguës peut être important et il faut le considérer dans le calcul. Pour la continuité dans la direction du trafic, la différence de hauteur des poutrelles n'a pas d'influence sur la flexion de la dalle. L'analyse de la dalle se réduit à celle d'une poutre continue avec les mêmes travées que la dalle et une largeur arbitraire dans le

cas de surcharges continues ou égales à la largeur efficace à flexion pour les surcharges concentrées. Quand la flexibilité des poutres est importante, cas des poutrelles, on peut recourir à la méthode de calcul exposée par Newmark dans le bulletin n° 304 de la Engineering Exp. Station de l'Université d'Illinois.

Quand il y a continuité dans les deux sens, la méthode la plus appropriée pour les charges concentrées et continues est celle préconisée par Marcus dans son livre *Vereinfachte Berechnung Biegsamer Platten* qui prend en considération le travail par torsion et qui calcule les moments de flexion et de torsion dans les différentes régions de la dalle. Ces derniers sont supposés distribués dans quatre pyramides non symétriques.

Dans les bâtiments le cas le plus fréquent est constitué par une dalle continue dans un seul sens. Les surcharges à considérer sont toujours uniformément distribuées et on peut se ramener au cas d'une poutre continue de largeur unité. Le seul doute important c'est la manière de prendre en considération la rigidité des poutres et des piliers. On peut recourir à la méthode de Newmark déjà citée, mais dans la plupart des cas on peut se contenter en distribuant uniformément la rigidité du pilier sur la longueur de la poutre, et prendre une partie de cette valeur (50 % ou 75 %) pour constituer le portique avec les poutres de largeur unité substitutes des dalles.

Quand l'équidistance entre les fermes est considérable, il peut être intéressant, dans les planchers des bâtiments, de recourir à la solution de continuité dans les deux sens, en utilisant comme grillage d'appui la ferme et les poutres longitudinales. On peut obtenir de cette façon des dalles d'épaisseur constante plus économiques que des dalles nervurées. La méthode de calcul que nous utilisons est celle de Marcus citée pour les tabliers des ponts, et qui présente dans ce cas de surcharges continues une application plus simple.

En résumé, nous jugeons que dans le cas d'une dalle avec continuité dans une seule direction, on doit considérer une poutre virtuelle, avec les mêmes travées, de largeur unité pour des surcharges continues et de largeur efficace correspondant pour les surcharges concentrées. Comme hypothèses simplificatrices il faut uniquement négliger l'aide due à la torsion des poutres et flexion des piliers dans le cas des planchers de bâtiments. Pour les dalles avec continuité dans les deux sens nous préconisons la méthode approximative de Marcus, tant pour les surcharges continues comme pour les surcharges isolées.

Résumé

Schéma de la méthode

1. Analyse de deux tranches perpendiculaires avec les axes des différents panneaux de la dalle se prolongeant jusqu'aux bordures de celle-ci. La largeur des tranches est l'unité pour les surcharges continues et celle qui permet l'inclusion des charges isolées dans ce dernier cas.

2. Répartition de charges entre les deux tranches, en fixant la condition d'égalité des flèches dans le centre du panneau.

3. Détermination des moments fléchissants dans la zone centrale et dans les deux extrémités d'appui des tranches. Pour le moment au centre

on doit appliquer la réduction correspondante au coefficient de torsion. Dans les moments aux appuis on peut obtenir la réduction due à la largeur d'appui sur les poutres.

4. Détermination des moments de torsion.

5. Calcul des armatures pour résister à la combination des moments fléchissants et de torsion.

Zusammenfassung

Berechnungsschema

1. Untersuchung von zwei auf den Achsen der verschiedenen Felder senkrecht stehenden Streifen, die bis zu den Rändern durchgehen. Als Breite der Streifen nimmt man die Einheit bei verteilter Belastung. Für Einzellasten wählt man eine solche, die sich der Querverteilung anpasst.

2. Verteilung der Lasten auf die zwei Streifen mit der Bedingung, dass die Durchbiegungen der zwei Streifen an den Kreuzungspunkten gleich werden.

3. Bestimmung der Biegemomente in der Mittelzone und an den Auflagern. Die Momente der Mittelzone können gemäss dem Drillungskoeffizienten abgemindert werden. Bei den Stützenmomenten ergibt sich eine Abminderung infolge der vorhandenen Auflagerbreite.

4. Bestimmung der Drillungsmomente.

5. Bestimmung der Armierung für die Maximalwerte der Biegungs- und Drillungsmomente.

Summary

Outline of the method

1. Analysis of the two perpendicular sections with the axes of the various panels of the slab prolonged to the edge of the latter. The width of the sections is the unit for the continuous overloads and that which permits inclusion of isolated loads in the latter case.

2. Division of loads between the two sections by fixing the condition of equality of deflection in the middle panel.

3. Determination of bending moments in the central zone and in the two supporting extremities of the sections. For the central moment, apply the reduction corresponding to the coefficient of torsion. In the moments at the supports one can obtain the reduction due to the width of the bearing on the beams.

4. Determination of torsion moments.

5. Calculation of the reinforcements to resist the combined bending and torsion moments.

Leere Seite
Blank page
Page vide