

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 3 (1948)

**Artikel:** Introduction d'une théorie générale pour l'étude des voûtes minces de translation

**Autor:** Broglio, L.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4119>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## IVb1

### **Introduction d'une théorie générale pour l'étude des voûtes minces de translation**

### **Eine neue allgemeine Theorie von Translationsflächen**

### **Introduction of a general theory of shells of translation**

L. BROGLIO

Rome

Si on déplace en translation une courbe  $\Gamma_\varphi$  contenue dans un plan vertical le long d'une autre courbe  $\Gamma_\theta$  contenue dans un plan vertical orthogonal au précédent, on obtient une surface dont la projection sur un plan horizontal est rectangulaire. Si on pose ladite surface sur le périmètre de sa projection au moyen de quatre tympans, on réalise le schéma géométrique d'une « voûte de translation » (fig. 1).

Pour l'étude d'un type de toiture si important dans les applications, dans l'hypothèse d'un régime statique à membrane, il existe un procédé connu, relaté par M. Flügge dans son traité classique <sup>(1)</sup>, duquel nous allons donner un bref résumé dans ce premier paragraphe.

En un point générique P (fig. 1) de la surface désignons par  $t_\varphi$  et  $t_\theta$  respectivement les tangentes aux courbes  $\Gamma_\varphi$  et  $\Gamma_\theta$  ; soient  $\varphi$  et  $\theta$  les angles que  $t_\varphi$  et  $t_\theta$  forment respectivement avec ses projections horizontales ; assumons comme repère en P le trièdre oblique  $t_\varphi, t_\theta, z$ , désignant par  $z$  la verticale dirigée vers le bas. Soient X, Y, Z les composantes de la charge extérieure par unité de surface, et soient encore  $N_\varphi, N_\theta, N_{\varphi\theta}$  les efforts intérieurs de la structure, à savoir la traction dans la direction  $t_\varphi$ , la traction dans la direction  $t_\theta$  et le cisaillement selon les deux directions obliques  $t_\varphi, t_\theta$ , qui se rencontrent sous l'angle  $\alpha = \arccos(\sin \varphi \cdot \sin \theta)$ . Désignons enfin par  $r_\varphi = r_\varphi(\varphi)$  et  $r_\theta = r_\theta(\theta)$  les rayons de courbure de  $\Gamma_\varphi$  et de  $\Gamma_\theta$ .

Le procédé que nous allons résumer consiste d'abord à exprimer mathématiquement les deux conditions suivantes : équilibre de toute portion élémentaire de voûte comprise entre deux  $\Gamma_\varphi$  et deux  $\Gamma_\theta$  infiniment voisines, et incapacité de chaque tympan (qu'on imagine infiniment rigide dans son plan) à soutenir des actions orthogonales à lui.

---

<sup>(1)</sup> W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*, Berlin, Springer, 1934, pp. 91-100.

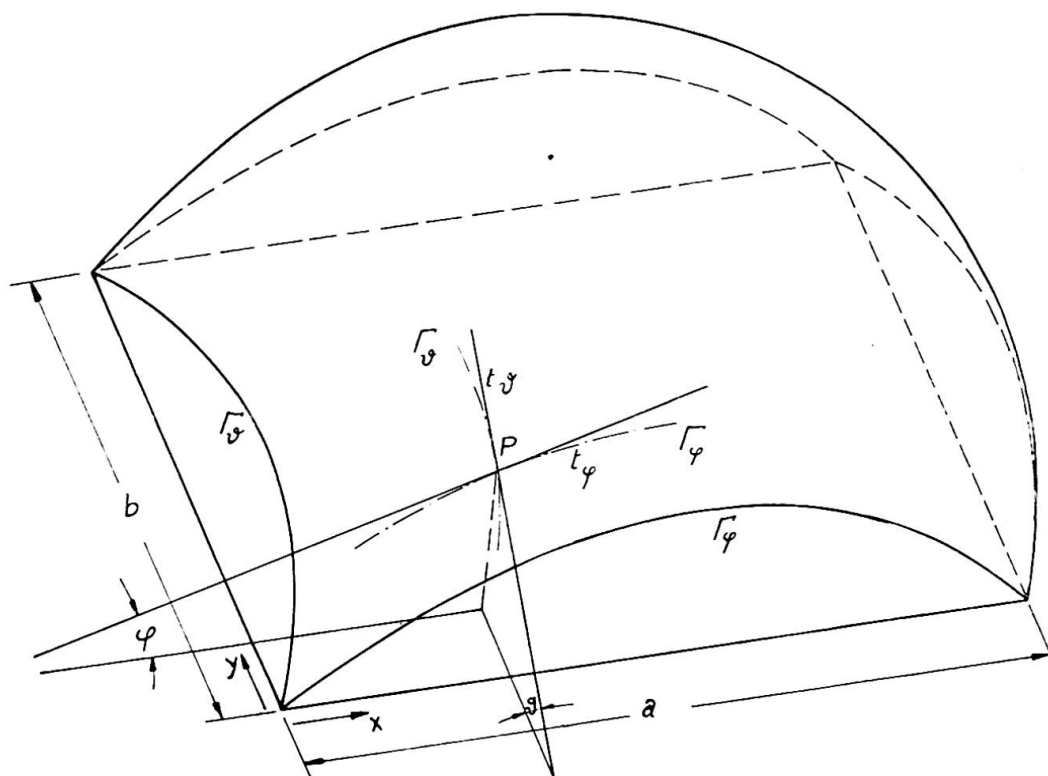


Fig. 1.

Les conditions d'équilibre selon  $t_\varphi$ ,  $t_\theta$ ,  $z$  sont respectivement données par <sup>(2)</sup> (fig. 2) :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi \cos \varphi) + \frac{r_\varphi}{r_\theta} \frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \theta} \cos \varphi + X r_\varphi \cos \varphi \sin \alpha = 0 ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta \cos \theta) + \frac{r_\theta}{r_\varphi} \frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \varphi} \cos \theta + Y r_\theta \cos \theta \sin \alpha = 0 ; \quad (2)$$

$$(N_\varphi \cos \varphi) r_\theta \cos^2 \theta + (N_\theta \cos \theta) r_\varphi \cos^2 \varphi + Z r_\varphi r_\theta \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \alpha = 0 . \quad (3)$$

Les conditions sur les tympans sont respectivement <sup>(3)</sup> :

Le long des deux côtés  $\varphi = \text{constante}$

$$N_\varphi = 0 ; \quad (4)$$

Le long des deux côtés  $\theta = \text{constante}$

$$N_\theta = 0 . \quad (5)$$

Comme deuxième pas, le procédé en question réduit le système de (1), (2), (3), (4), (5) à contenir une seule inconnue  $N_{\varphi, \theta}$ . Dans ce but, il faut d'abord dériver (3) par rapport à  $\varphi$  et à  $\theta$ , tenant compte des expressions que (1) et (2) donnent respectivement pour

$$r_\theta \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi \cos \varphi) \quad \text{et} \quad r_\varphi \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta \cos \theta) ,$$

<sup>(2)</sup> Loc. cit., équations (54a, 54b), et (53c).

<sup>(3)</sup> Loc. cit., p. 94.

de sorte qu'on arrive à l'équation (4)

$$\begin{aligned} r_{\varphi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos^2 \theta \frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \theta} \right) + r_{\theta} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos^2 \varphi \frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \varphi} \right) \\ = \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} (Z r_{\varphi} r_{\theta} \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \alpha) - r_{\varphi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} (X r_{\theta} \cos^2 \theta \sin \alpha) \\ - r_{\theta} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y r_{\varphi} \cos^2 \varphi \sin \alpha). \quad (6) \end{aligned}$$

En outre, si on dérive (3) par rapport à  $\theta$  en tenant compte de (4) et qu'on substitue dans (2), ou si on dérive (3) par rapport à  $\varphi$ , en tenant compte de (5) et qu'on substitue dans (1), les conditions aux limites deviennent :

Pour  $\varphi = \text{constante}$

$$\frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r_{\theta} \cos^2 \varphi \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (Z r_{\varphi} r_{\theta} \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \alpha) - Y r_{\varphi} \sin \alpha; \quad (4')$$

Pour  $\theta = \text{constante}$

$$\frac{\partial N_{\varphi, \theta}}{\partial \theta} = \frac{1}{r_{\varphi} \cos^2 \theta \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Z r_{\varphi} r_{\theta} \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \alpha) - X r_{\theta} \sin \alpha. \quad (5')$$

Comme troisième et dernier pas, il faut procéder à l'intégration de l'équation (6) avec les conditions aux limites (4') et (5'). Au point de vue mathématique ce problème présente des difficultés très considérables ; partant, les résultats obtenus par la méthode rappelée sont peu nombreux et se réfèrent<sup>(5)</sup> surtout au cas des directrices  $\Gamma_{\varphi}$ ,  $\Gamma_{\theta}$  circulaires, et de la structure bissymétrique, chargée symétriquement uniquement par des forces verticales, variables selon la loi

$$Z \sin \alpha = \text{constante}.$$

#### Fonction des efforts pour la voûte de translation

Considérons le cas général d'une voûte de translation non-symétrique par rapport à n'importe quelle directrice et chargée de manière quelconque. La non-symétrie de la structure permet d'étudier une toiture posée sur des murs de hauteur inégale ; la faculté de choisir le type des directrices présente à son tour un intérêt parce qu'elle permet un choix plus large au point de vue économique et esthétique et parce qu'on peut ainsi satisfaire aux exigences de diverses natures, acoustique ou optique, éventuellement imposées pour la pièce à couvrir ; enfin, le cas de la charge répartie de n'importe quelle façon (en particulier, celui de la charge concentrée) a de l'importance pour une étude plus complète de la voûte ou pour l'examen des structures minces de translation pour des cas plus complexes que celui d'une simple toiture.

Désignons (fig. 1) par  $a$  et  $b$  les deux dimensions de la projection horizontale de la voûte. Assumons comme repère un trièdre cartésien, ayant l'origine à un des sommets du rectangle, et disposons les axes  $x$ ,  $y$  selon

(4) *Loc. cit.*, éq. (55).

(5) *Loc. cit.*, p. 103.

les côtés  $a$  et  $b$  dudit rectangle : la direction  $z$ , comme on l'a dit au paragraphe précédent, est verticale, positive vers le bas. Les relations différentielles entre les coordonnées  $\varphi$  et  $\theta$  du paragraphe précédent et les nouvelles coordonnées  $x, y$  sont naturellement les deux suivantes :

$$\frac{dx}{d\varphi} = r_{\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{dy}{d\theta} = r_{\theta} \cos \theta. \quad (7)$$

Les équations (1) et (2) du paragraphe précédent, qui expriment l'équilibre d'un élément de voûte dans le plan tangent deviennent alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} (N_{\varphi} \cos \varphi) + \frac{\partial (N_{\varphi, \theta})}{\partial y} \cos \theta + X \sin \alpha = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (N_{\theta} \cos \theta) + \frac{\partial (N_{\varphi, \theta})}{\partial x} \cos \varphi + Y \sin \alpha = 0. \quad (9)$$

Un ensemble de conditions nécessaires pour la résolution du problème examiné est donc constitué par (8), (9), (3), (4), (5). On constate que les équations (8) et (9) sont satisfaites si on introduit une fonction des efforts  $\Phi$  telle que :

$$N_{\varphi} \cos \varphi = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{x}{a} \bar{\bar{X}}(y) - \bar{X}(x, y) \right) \cos \theta; \quad (10)$$

$$N_{\theta} \cos \theta = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{y}{b} \bar{\bar{Y}}(x) - \bar{Y}(x, y) \right) \cos \varphi; \quad (11)$$

$$N_{\varphi, \theta} = - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{a} \int_0^y \bar{\bar{X}}(y) dy + \frac{1}{b} \int_0^x \bar{\bar{Y}}(x) dx \right) + C \quad (12)$$

posant

$$\bar{X}(x, y) = \frac{1}{\cos \theta} \int_0^x (X \sin \alpha) dx; \quad \bar{Y}(x, y) = \frac{1}{\cos \varphi} \int_0^y (Y \sin \alpha) dy. \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{X}}(y) &= \frac{1}{\cos \theta} \int_0^a (X \sin \alpha) dx = \bar{X}(a, y); \\ \bar{\bar{Y}}(x) &= \frac{1}{\cos \varphi} \int_0^b (Y \sin \alpha) dy = \bar{Y}(x, b). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

et désignant par  $C$ , dans l'équation (12), une constante arbitraire.

Si on substitue les relations (10), (11), (12) dans les équations (3), (4), (5), on en tire l'équation :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_{\theta} \cos^3 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r_{\varphi} \cos^3 \varphi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \\ & = - \left[ Z \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi \cos \theta} + \frac{1}{r_{\varphi} \cos^3 \varphi} \left( \frac{x}{a} \bar{\bar{X}} - \bar{X} \right) + \frac{1}{r_{\theta} \cos^3 \theta} \left( \frac{y}{b} \bar{\bar{Y}} - \bar{Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

avec les conditions de rive :

Pour  $x = a$  et  $x = 0$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \quad (16)$$

Pour  $y = b$  et  $y = 0$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (17)$$

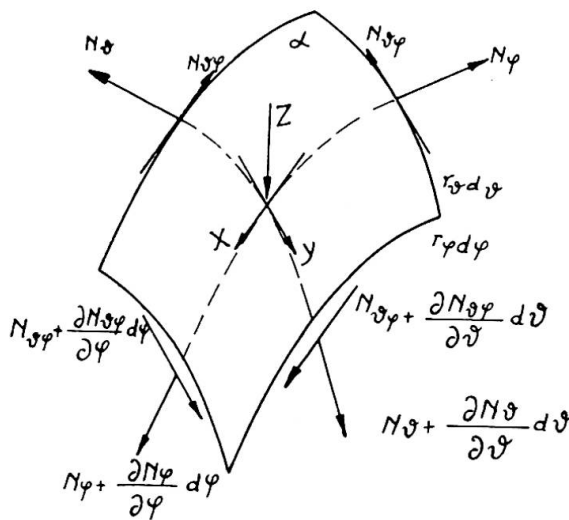


Fig. 2.

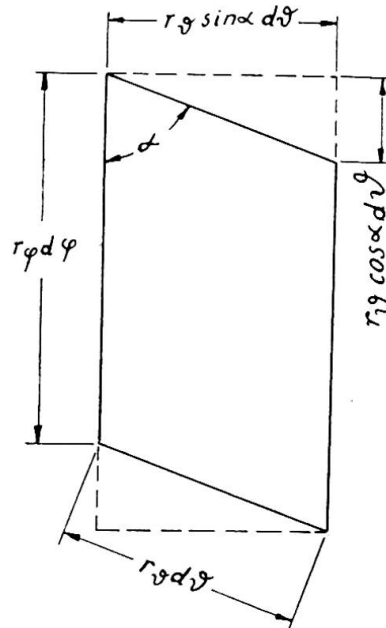


Fig. 3.

D'ailleurs il est bien évident que les relations (10), (11), (12) déterminent la fonction  $\Phi$  à une fonction près :

$$\Psi(x, y) = k_1 + k_2 x + k_3 y + k_4 xy, \quad (18)$$

où  $k_1, k_2, k_3, k_4$  sont des constantes arbitraires. En effet, si on ajoute la fonction  $\Psi$  à  $\Phi$  pour un choix arbitraire de  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , les équations (10), (11), (12) restent inchangées, rappelant que  $C$  est une constante arbitraire elle aussi. Alors il suffit de choisir  $k_1, k_2, k_3, k_4$  d'une telle façon qu'elles annulent la fonction  $\Phi$  dans les quatre sommets du rectangle de base, à savoir, dans les points  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(a, b)$ ,  $(0, b)$  pour que les conditions (16) et (17) puissent être écrites :

Le long de toute la limite

$$\Phi = 0. \quad (19)$$

Si  $z_\varphi = z_\varphi(x)$  et  $z_\vartheta = z_\vartheta(y)$  sont respectivement les équations cartésiennes d'une quelconque  $\Gamma_\varphi$  dans un plan  $y = \text{constante}$ , et d'une quelconque  $\Gamma_\vartheta$  dans un plan  $x = \text{constante}$ , on a naturellement, si on suppose partout  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ ,  $\vartheta < \frac{\pi}{2}$  :

$$\frac{1}{r_\varphi \cos^3 \varphi} = \left| \frac{d^2 z_\varphi}{dx^2} \right| = B(x); \quad (20)$$

$$\frac{1}{r_\vartheta \cos^3 \vartheta} = \left| \frac{d^2 z_\vartheta}{dy^2} \right| = A(y). \quad (21)$$

Rappelant en outre que :

$$Z^* = \frac{Z \sin \alpha}{\cos \varphi \cos \vartheta} \quad (22)$$

n'est que la composante verticale de la charge par unité de surface de la projection horizontale de la voûte, et posant

$$q(x, y) = Z^* + B(x) \left( \frac{x}{a} \bar{X} - \bar{X} \right) + A(y) \left( \frac{y}{b} \bar{Y} - \bar{Y} \right) \quad (23)$$

on tire de (15)

$$A(y) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (24)$$

Le problème relatif à la détermination de la fonction des efforts est ainsi complètement défini : il s'agit d'intégrer l'équation (24) avec la condition à la limite (19). On voit tout de suite qu'un tel problème équivaut à déterminer les déplacements verticaux d'une membrane rectangulaire, fixée le long de tout son contour, soumise à la charge  $q(x, y)$  par unité de surface et tendue par une tension constante le long de chaque fil, c'est-à-dire, variable selon la loi  $A(y)$  pour les fils parallèles à l'axe  $x$ , et selon la loi  $B(x)$  pour les fils parallèles à l'axe  $y$  [il faut remarquer que  $A(y)$  et  $B(x)$ , à cause de (20) et (21), sont essentiellement positives]. On a ainsi une précieuse analogie, par laquelle le calcul de la voûte de translation se transforme dans le calcul d'une simple membrane appuyée au contour. On peut tirer parti de cette analogie pour déterminer la fonction  $\Phi$  par la voie expérimentale, comme on le dira ensuite. Avant d'étudier l'intégration de (24) avec la condition (19), il vaut mieux de compléter la mise en train générale du problème par une observation relative à l'effective détermination des efforts  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{\varphi\theta}$  par la fonction  $\Phi$ .

#### Les conditions de compatibilité pour les voûtes minces

Lorsqu'on a déterminé la fonction des efforts  $\Phi$  au moyen de (24) et (19), on tire immédiatement de (10), (11) et (12) les efforts  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$  et  $N_{\varphi\theta}$ . Mais ce dernier effort est en réalité déterminé par (12) à une constante arbitraire  $C$  près. Ce fait est tout logique, et dérive de la circonstance que les conditions d'équilibre (1), (2) et (3) et les conditions de rive (4) et (5) ne constituent pas en général un ensemble de conditions suffisantes pour la complète détermination des efforts  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{\varphi\theta}$  dans la voûte. En fait on voit immédiatement que (1), (2), (3), (4), (5) sont vérifiés même après l'addition de n'importe quelle constante arbitraire à  $N_{\varphi\theta}$ . En un mot, la voûte de translation n'est pas, en général, un système isostatique, c'est-à-dire une structure où il est possible de déterminer les efforts au moyen des équations d'équilibre seulement, mais c'est un système hyperstatique, pour la résolution duquel il est nécessaire d'adjoindre des conditions de compatibilité aux conditions d'équilibre. Si les efforts intérieurs sont  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{\varphi\theta}$  comme on l'a supposé, l'hyperstaticité de la voûte de translation se réduit à un seul paramètre, c'est-à-dire à une constante arbitraire à ajouter à  $N_{\varphi\theta}$ . Comme les équations (24) et (19) sont une traduction fidèle de (1), (2), (3) et de (4), (5), on conclut que nécessairement la connaissance de la fonction  $\Phi$  doit rendre déterminés les efforts  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{\varphi\theta}$  à une constante arbitraire près à ajouter à  $N_{\varphi\theta}$ . Pour compléter le calcul des efforts  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{\varphi\theta}$ , lorsqu'on a déterminé  $\Phi$  par (24) et (19), il est suffisant de déterminer la valeur de la constante, qui paraît au deuxième membre de (12). Si la structure est symétrique et chargée symétriquement, pour des raisons de symétrie,  $N_{\varphi\theta}$  doit s'annuler sur le



plan de symétrie, et la question est toute résolue : cela veut dire que la voûte symétrique, chargée symétriquement, devient isostatique par l'adjonction de la condition  $N_{\varphi\theta} = 0$  aux conditions (4) et (5) en un point quelconque de la surface appartenant au plan de symétrie. Dans le cas général la constante  $C$  doit être déterminée, comme on a dit, par des conditions de compatibilité. A ce propos il faut observer que chaque tympan, qui a été supposé infiniment rigide dans son plan, et infiniment élastique dans la direction orthogonale, constitue pour les surfaces de translation une contrainte dont les réactions ne font pas de travail par effet des déformations dues à la charge : en effet les réactions qui appartiennent au plan du tympan ne font pas de travail car le déplacement des points d'application respectifs est nul, tandis que les réactions orthogonales audit plan ne font pas de travail parce que ce sont elles qui sont nulles par hypothèse. Par conséquent on peut appliquer aux voûtes de translation le théorème de Menabrea : bien mieux, lorsqu'on a satisfait toutes les conditions d'équilibre, le théorème de Menabrea résume toutes les conditions de compatibilité que la structure doit satisfaire <sup>(6)</sup>. Remarquons que cette observation reste valable même si le régime statique de la voûte n'était pas à membrane, mais le plus général qu'il est possible. Comme les efforts  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{\varphi\theta}$  calculés d'après les équations (10), (11), (12), satisfont déjà toutes les conditions d'équilibre, on peut déterminer le paramètre  $C$  qui paraît dans (12); si l'on pose

$$N'_{\varphi\theta} = - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{a} \int_0^y \bar{X}(y) dy + \frac{1}{b} \int_0^x \bar{Y}(x) dx \right), \quad (25)$$

en disant que  $C$  doit rendre *minimum* l'énergie de déformation de la voûte calculée en fonction de  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$ ,  $N'_{\varphi\theta} + C$ ;  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$ ,  $N'_{\varphi\theta}$  étant des fonctions désormais connues.

Pour calculer le travail élémentaire de déformation que les efforts  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{\varphi\theta}$  produisent en une portion élémentaire  $r_\varphi d\varphi$ ,  $r_\theta d\theta$  de la voûte, le procédé que l'on va indiquer peut réussir avantageusement. Imaginons pour un moment que le parallélogramme  $r_\varphi d\varphi$ ,  $r_\theta d\theta$  fait partie d'un rectangle dont les côtés soient  $r_\varphi d\varphi + r_\theta \cos \alpha d\theta$  et  $r_\theta \sin \alpha d\theta$  (fig. 3). Supposons que ce rectangle soit soumis : a) à une traction simple, d'intensité unitaire  $\sigma_1$ , dans la direction de  $t_\varphi$ ; b) à une traction simple, d'intensité unitaire  $\sigma_2$ , dans la direction orthogonale; c) à un cisaillement simple, d'intensité unitaire  $\tau$ , selon les deux directions orthogonales représentées par les côtés du rectangle. Le travail de déformation de la partie de rectangle qui correspond au parallélogramme de côtés  $r_\varphi d\varphi$ ,  $r_\theta d\theta$  est alors :

$$dL = \frac{1}{2} d\Omega \left( \frac{\sigma_1^2 h}{E} + \frac{\sigma_2^2 h}{E} + \frac{\tau^2 h}{G} \right) \quad \boxed{d\Omega = (r_\varphi r_\theta \sin \alpha) d\varphi d\theta} \quad (26)$$

où  $E$  et  $G$  sont les modules d'élasticité à la traction et au cisaillement,  $h$  l'épaisseur variable de la voûte,  $d\Omega = r_\varphi r_\theta \sin \alpha d\varphi d\theta$  la surface du parallélogramme, ayant supposé nul le coefficient de contraction latérale (voûte en béton armé). Les trois types de tensions  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ont été

<sup>(6)</sup> Cf. par exemple L. BROGLIO, *Introduzione d'un metodo in doppio per il calcolo delle strutture elastiche* (Atti di Guidonia, 1941).



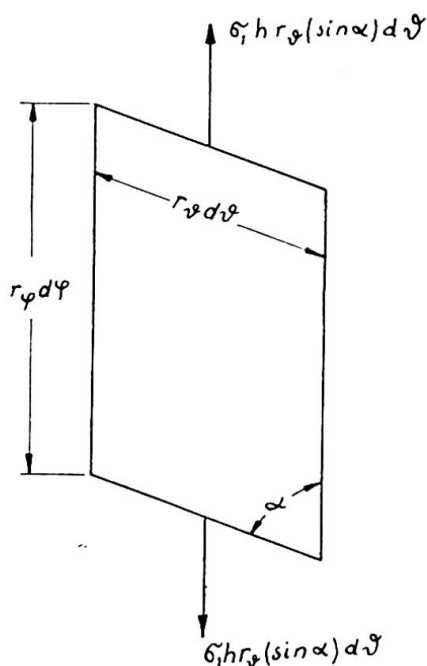


Fig. 3a.

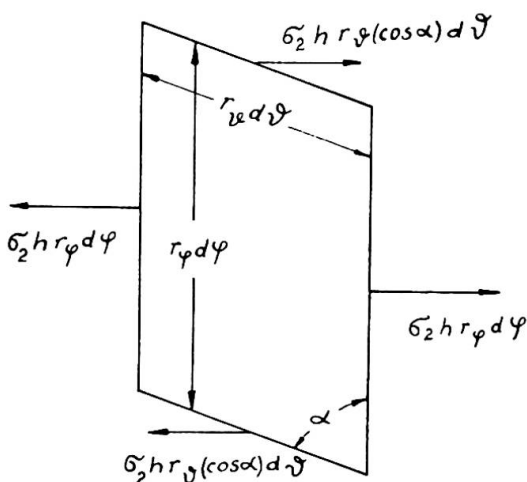


Fig. 3b.

représentés dans les figures 3a, 3b, 3c. On voit ainsi qu'il suffit de poser :

$$\sigma_2 h = N_\theta \sin \alpha ;$$

$$\tau h = N_{\varphi\theta} + N_\theta \cos \alpha ;$$

$$\sigma_1 h = \frac{N_\varphi}{\sin \alpha} + \frac{2 N_{\varphi\theta}}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{N_\theta \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} ;$$

pour que la superposition des trois cas a, b, c conduise au vrai état de tension de l'élément de voûte. Le travail de déformation global est alors :

$$L = \frac{1}{2} \iint \left[ \frac{1}{Eh} \left( \frac{N_\varphi}{\sin \alpha} + \frac{2 N_{\varphi\theta}}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{N_\theta \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 + \frac{1}{Eh} (N_\theta \sin \alpha)^2 + \frac{1}{Gh} (N_{\varphi\theta} + N_\theta \cos \alpha)^2 \right] r_\varphi r_\theta \sin \alpha d\varphi d\theta \quad (27)$$

où l'intégrale est étendue à toute la voûte. Naturellement il suffit de rappeler les équations (7) pour que l'intégrale ait comme variables d'intégration  $x$  et  $y$  au lieu de  $\varphi$  et  $\theta$ . Comme  $G = \frac{1}{2} E$ , en rappelant que  $\cos \alpha = \sin \varphi \sin \theta$  :

$$L = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \frac{N_\varphi^2 + N_\theta^2}{\sin^2 \alpha} + 2 \left( 1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) N_{\varphi\theta}^2 + 2 \frac{N_\varphi N_\theta}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 4 \frac{(N_\varphi + N_\theta) N_{\varphi\theta}}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} \right] \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \theta} \frac{dx dy}{Eh} . \quad (28)$$

Dans l'équation (28) les fonctions

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz_\varphi}{dx} ; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{dz_\theta}{dy} \quad (29)$$

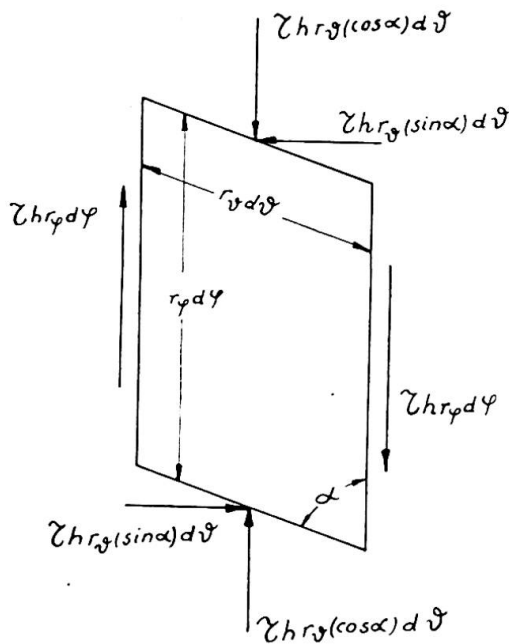


Fig. 3c.

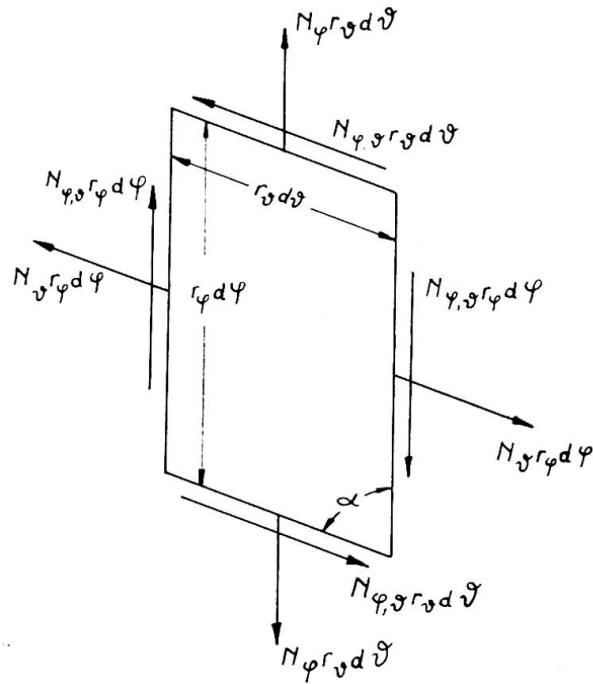


Fig. 4.

sont des fonctions connues ne dépendant que des équations cartésiennes  $z_h = z_\varphi(x)$  et  $z_\theta = z_\theta(y)$  des deux directrices  $\Gamma_\varphi$  et  $\Gamma_\theta$ . Remarquons que dans l'intégrale (28)  $N_\varphi$  et  $N_\theta$  sont traitées symétriquement, exactement comme il doit être, étant donné que dans la génération géométrique de la voûte le rôle de  $\Gamma_\varphi$  et  $\Gamma_\theta$  peut être échangé. Si l'on pose alors, d'après (25),

$$N_{\varphi\theta} = N'_{\varphi\theta} + C \quad (30)$$

pour que  $C$  rende minimum l'intégrale (28), il faut que

$$-C = \frac{\int_0^a \int_0^b \left[ \left( 1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) N'_{\varphi\theta} + \frac{N_\varphi + N_\theta}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} \right] \sqrt{1 + \left( \frac{dz_\varphi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz_\theta}{dy} \right)^2} dx dy}{\int_0^a \int_0^b \left( 1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{dz_\varphi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz_\theta}{dy} \right)^2} dx dy} \cdot \quad (31)$$

Le problème de la détermination des efforts dans la voûte est ainsi complètement résolu. Naturellement si la voûte est symétrique et chargée symétriquement il faut que  $C=0$ , comme on le voit de (31), rappelant que dans ce cas  $N'_{\varphi\theta}$  ainsi que  $\frac{N_\varphi + N_\theta}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \left( \frac{N_\varphi + N_\theta}{\sin^2 \alpha} \right) \cos \alpha$  sont antisymétriques.

#### Solution du problème au moyen de l'analogie de la membrane

Comme on l'a déjà observé, par l'équation (24) avec les conditions aux limites (19), l'étude d'une voûte mince de translation dans les conditions géométriques et de charge les plus générales est réduit à un problème qu'on peut dire élémentaire, c'est-à-dire, à l'étude d'une membrane

rectangulaire fixée au contour et tendue uniformément le long de chaque fil. Ce problème peut, en l'occurrence, être étudié par voie expérimentale. En effet, il suffit de substituer à la membrane un réseau de fils suffisamment serré, produire par des poids une tension constante  $A(y)$  le long de chaque fil parallèle à l'axe  $x$  et une tension constante  $B(x)$  le long de chaque fil parallèle à l'axe  $y$ , et enfin appliquer à la membrane la charge  $q(x, y)$ , pour avoir dans les déplacements verticaux  $\Phi$  dudit réseau la solution de (24). L'auteur a déjà obtenu par cette voie un nombre remarquable de résultats, se servant d'une méthode de mesure des déplacements verticaux qui permet d'obtenir, avec une grande facilité et rapidité, une précision supérieure à une fraction de micron. L'analogie de la membrane se présente particulièrement utile pour l'étude des charges concentrées.

#### Solution du problème par la méthode de l'équivalence

La solution de l'équation (24) avec les conditions (19) peut être facilement conduite par voie analytique aussi, par des procédés d'approximations successives. Outre les méthodes de ce type déjà connues, l'auteur a étudié une application particulière à ce problème de la méthode d'équivalence<sup>(7)</sup>. Faute de place, nous renvoyons à un autre mémoire pour l'exposition du résultat obtenu par cette voie.

#### Cas remarquables

Le cas des actions extérieures uniquement verticales est particulièrement important. Dans ce cas le problème est réduit à intégrer l'équation

$$A(y) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -Z^* \quad (32)$$

$Z^*$  étant la charge par unité de surface de la projection verticale de la voûte. Les conditions à la frontière sont à l'ordinaire  $\Phi = 0$  le long de tout le contour. Quand on a déterminé  $\Phi$ , il vient :

$$N_\varphi \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} ;$$

$$N_\theta \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} ;$$

$$N_{\varphi\theta} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + C ; \quad N'_{\varphi\theta} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} .$$

La constante  $C$  est donnée par l'équation (31).

Le cas où les directrices sont deux paraboles est très intéressant aussi. Alors  $A(y)$  et  $B(x)$  sont constantes. L'équation (32) devient immédiatement l'équation d'une membrane rectangulaire à tension constante, char-

<sup>(7)</sup> L. BROGLIO, *A method of equivalence applied to the solution of problems of elasticity and of Mathematical Physics* (VII. Int. Cong. App. Mech., 1948).

gée de n'importe quelle façon. Supposant que les équations des directrices paraboliques donnent

$$\left| \frac{d^2 z_\varphi}{dx^2} \right| = \frac{1}{h^2} ; \quad \left| \frac{d^2 z_\theta}{dy^2} \right| = \frac{1}{k^2}$$

il est suffisant de poser

$$kx = \frac{\xi}{T} ; \quad hy = \frac{\eta}{T}$$

et  $T = \text{constante}$ , pour que (32) devienne

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = - \frac{Z^*}{T} .$$

équation dont la solution est bien connue. Pour  $Z^* = \text{constante}$  on a en particulier <sup>(8)</sup> :

$$\Phi = \frac{4 Z^* a^2}{T \pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} . \quad (33)$$

en prenant l'origine au centre du rectangle qui est la projection verticale de la voûte.

#### Remarque

Dans le cas qu'on vient de considérer (directrices paraboliques et charge verticale uniforme selon la projection horizontale), l'ancienne théorie, à savoir les équations (6) avec les conditions (4') et (8') donnent  $N_{\xi\theta} = \text{constante}$ . Si on suppose la structure symétrique, on a  $N_{\xi\theta} = 0$ . Substituant dans (1) et (2) et rappelant (4) et (5) on a  $N_\xi = N_\theta = 0$ . En un mot, l'équation (6) avec les conditions (4') et (5') porte, dans le cas considéré, à une solution où les efforts sont nuls dans toute la voûte. Cette solution n'est pas identique à celle qu'on obtient dans l'équation (33) et, d'ailleurs, ne satisfait pas l'équation d'équilibre (3). Cette discordance provient du fait que l'équation (6) avec les conditions (4') et (5') n'a pas été déduite des relations (1), (2), (3), (4), (5), mais de (1), (2), (4), (5) et par des relations dérivées de (3). Cela veut dire que (6) avec (4') et (5') ne tiennent pas compte de la vraie équation d'équilibre, mais seulement de dérivées de cette équation.

#### Résumé

Dans ce mémoire on introduit une théorie générale des voûtes minces de translation, qui permet une solution complète du problème. Au moyen d'un changement de variables et grâce à l'introduction d'une fonction des efforts, on réduit le problème à l'étude de la membrane rectangulaire

<sup>(8)</sup> S. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity*, New York, 1934, p. 246.

tendue et fixée le long de son contour. La méthode permet, sans difficultés particulières, l'étude des voûtes non symétriques et chargées non symétriquement, pour lesquelles on démontre la nécessité d'adjoindre aux conditions d'équilibre (qui sont les seules usitées) une condition de compatibilité exprimée par le théorème de Menabrea.

Cette méthode permet la résolution, dans le cas des charges concentrées aussi. La solution de la voûte aux directrices paraboliques soumise à une charge quelconque répartie selon la projection horizontale, dans la méthode proposée, est réduite à celle bien connue d'une membrane rectangulaire fixée le long de son contour, uniformément tendue et chargée par la même charge.

### **Zusammenfassung**

In diesem Beitrag wird eine allgemeine Theorie der Translationsflächen entwickelt, die die vollständige Lösung dieses Problems ermöglicht. Mittels einer Variabelntransformation und der Einführung einer Spannungsfunktion kann das Problem auf dasjenige der an den Rändern gehaltenen, gespannten Membran zurückgeführt werden. Die Methode erlaubt ohne besondere Schwierigkeiten die Behandlung von unsymmetrischen und unsymmetrisch belasteten Schalen. Es wird gezeigt, dass für die letzteren den Gleichgewichtsbedingungen (welche in den bisherigen Veröffentlichungen allein betrachtet wurden) eine Verträglichkeitsbedingung hinzugefügt werden muss, die mit dem Theorem van Menabrea hergeleitet werden kann.

Diese Methode ermöglicht die Lösung auch im Falle von konzentrierten Lasten. Die Lösung der Schale mit parabolischen Leitkurven und mit einer über die Horizontalprojektion gleichmässig verteilten Belastung, wie sie in der vorgeschlagenen Methode angegeben ist, wird zurückgeführt auf die wohlbekannte Methode der an den Rändern gehaltenen, gleichmässig gespannten und gleichmässig belasteten, rechteckigen Membran.

### **Summary**

In this paper one is introduced to a general theory of shells of translation, which provides a complete solution of the problem. By means of a change of variable quantities and thanks to the introduction of a stress function, the problem is reduced to the study of the rectangular membrane, stretched and fixed along its boundary. Without any particular difficulty, the method enables to study shells, that are non-symmetrical and non-symmetrically loaded, for which the author stresses the necessity of adjoining to the equilibrium conditions (which are the only ones used) a condition of compatibility expressed by Menabrea's theorem.

This method provides a solution, in the case of concentrated loads too. The solution of a shell with parabolic directrices, subjected to a load evenly distributed on the horizontal projection in the proposed method, is reduced to the well known one of a rectangular membrane fixed along its boundary, uniformly stretched and evenly loaded.