

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 3 (1948)

**Artikel:** Der mit Versteifungsträger verbundene Bogen

**Autor:** Haviár, Viktor

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4116>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## IIIc2

### L'arc avec poutre raidisseuse

### Der mit Versteifungsträger verbundene Bogen

### The arch with connected stiffening girder

PROF. D<sup>r</sup> ING. VIKTOR HAVIÁR

Ministerialrat der Brückenbauabteilung des ungarischen Verkehrsministeriums, Budapest

Als Hauptträger für Eisen- und Eisenbetonbrücken mit unterer Fahrbahn werden neuerdings oft verwendet :

I. Der schlanke, in seiner Ebene ungenügend biegungssteife Bogen (eventuell Stabzug), welcher mit einem Balken von entsprechend gewählter Biegungssteifheit nach Abb. 1 verbunden wird, und

II. Der in sich biegungssteif ausgebildete Bogen, auf welchem die gleichfalls biegungssteif gebaute Fahrbahntafel nach Abb. 2 aufgehängt wird.

Beide Tragsysteme sind in statischer Hinsicht identisch, der Unterschied ist nur, dass in erstem Falle der Versteifungsträger, im zweiten Falle der Bogen die bedeutend grössere Biegungssteifheit besitzt.

I. Der schlanke Bogen und der Versteifungsträger werden an beiden Enden unmittelbar mit steifer Verbindung, in dazwischen vertikal übereinander liegenden Punkten mittels Hängestangen verbunden. Der Anschluss dieser Hängestangen kann in der Berechnung, infolge ihrer Schlankheit gelenkig angenommen werden. Wenn die Zahl der Hängestangen  $n$  beträgt, so ist das Tragsystem  $(n + 3)$  fach statisch unbestimmt. Da  $n$  in der Praxis zwischen 10 und 20 variiert, so ist die Bestimmung der Innenkräfte dieser hochgradig statisch unbestimmten Konstruktion nach den üblichen Methoden der statisch unbestimmten Systeme sehr umständlich. Zwecks Vereinfachung der Rechenarbeit pflegt man in der Praxis den Bogen mit einem gelenkigen Stabzug zu vergleichen (Langerscher Balken Abb. 3) und so, mit der Annahme  $J_B = 0$  eine einfach statisch unbestimmte Konstruktion zu berechnen. Wenn  $H$  die statisch überzählige horizontale Komponente der Stabzugkräfte ist, so ist das Moment des Ver-

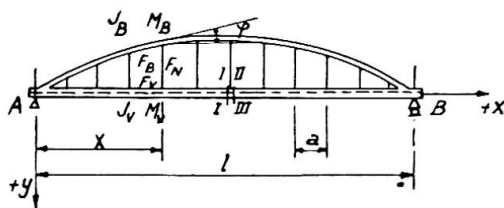


Abb. 1.

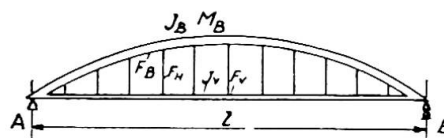


Abb. 2.

steifungsträgers  $M = M_0 - Hy$ , wo  $M_0$  das Moment des einfachen Balkens ist. Die Innenkraft der Hängestangen beträgt nach Abb. 3

$$S_L = H (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) = H \left[ \frac{\Delta y_2}{\Delta x} - \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \right] = Ha \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

wobei  $a = \Delta x$  ist. Im Falle einer parabolischen Bogenachse mit

$$y = -\frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x),$$

beträgt

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{8f}{l^2}$$

und so ist

$$S_L = \frac{8f}{l^2} aH = \beta H,$$

wo  $\beta = \frac{8f}{l^2} \cdot a$  eine Konstante bedeutet. Infolge dessen ist die Einflusslinie der Hängestangenkraft ähnlich der H-Linie Abb. 3.

Die Ausgangsbedingung  $J_B = 0$  befriedigende Gelenke werden aus wirtschaftlichen und ästhetischen Gründen vermieden. Die Ausbildung eines gedrückten Gelenkstabzuges ist nämlich schwieriger und teurer, die ästhetische Erscheinung ungünstiger wie die eines Bogens.

Eine schärfere Annäherung der Annahme  $J_B = 0$ , durch die Verwendung einer minimalen Bogensteifheit, ist ästhetisch ebenfalls zu bemängeln: eine zu kleine Bogenstärke in verhältnismässig grosser Höhe von der Fahrbahn gesehen wirkt ungünstig, da sie nicht das Gefühl der Sicherheit erweckt.

II. Der biegungsfeste Bogen (Abb. 2) nimmt die konzentrierte Belastung infolge der Uebertragung der Fahrbahntafel mehr oder weniger verteilt auf. Bei der Berechnung dieses Systems wird im allgemeinen der Biegungswiderstand der Fahrbahntafel vernachlässigt und durch die Einführung erdachter Gelenke (in Versteifungsträger d.h. in Fahrbahntafel [Abb. 4]), also mit der Annahme  $J_V = 0$  als Zweigelenkbogen mit Zugband gelöst. Dadurch erhalten wir auf dem Versteifungsträger keine Momente, dagegen sind die Momente auf beliebige Bogenquerschnitte:  $M_B = M_0 - Hy$ , wo  $H$  die statisch überzählige Zugbandkraft ist.

Die die angenommene Lastverteilung characterisierende Einflusslinie der Hängestangenkräfte gestaltet sich nach Abb. 4.

Die in der Praxis vorkommenden Trägersysteme I und II fallen zwischen die oben behandelten Grenzfälle  $J_B = 0$  und  $J_V = 0$ .

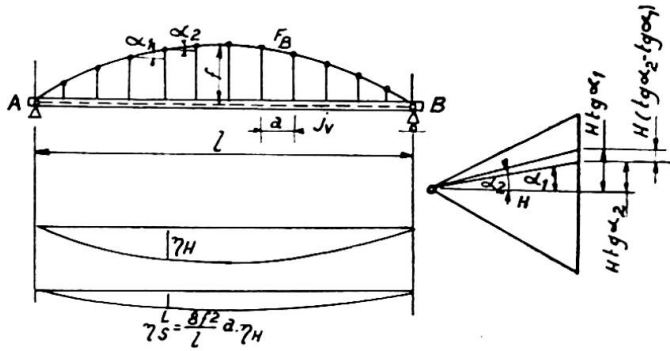


Abb. 3.

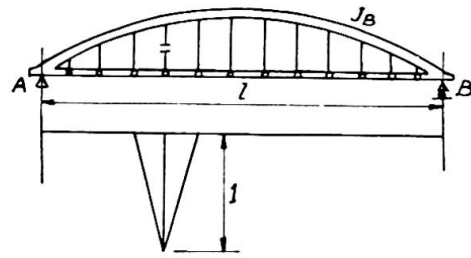


Abb. 4.

Nachstehend wird für die beiden Trägersysteme I und II eine einfache Berechnungsmethode angeführt, die für beliebige Verhältnisse der Bogen- und Versteifungsträgersteifigkeiten gültig ist.

Die Berechnungsmethode stützt sich auf eine Art der Momentenverteilung, welche auf verschiedenen Gebieten der Statik mit Erfolg verwendet wurde <sup>(1)</sup>. Die Momente und Querkräfte des gegebenen Bogens resp. Versteifungsträgers werden mittels eines Bogens ermittelt, dessen Achse geometrisch mit der Bogenachse des zu lösenden Tragsystems identisch ist, dessen Biegesteifigkeit aber grösser ist. Die Berechnungsmethode ermöglicht die Berücksichtigung der Wirkung der absoluten Kräfte und die Längenänderungen der Hängestangen.

Es werden dabei die in der Statik üblichen Annahmen bezüglich der relativen kleinen Formänderungen, des elastischen Bereiches und des grossen Bogen-Krümmungshalbmessers gemacht.

#### Grundlegende Zusammenhänge der Momente des Bogens und des Versteifungsträgers

Es werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

Im Abstände  $x$  von der linken Stütze bedeutet (Abb. 1):

$\delta_B$  die Senkung des Bogens, d.h. die lotrechte Komponente der Bogen-deformation;

$\delta_V$  die Senkung der Versteifungsträgers;

$\lambda$  im allgemeinen den Unterschied zwischen  $\delta_V$  und  $\delta_B$ , d.h.  $\lambda = \delta_V - \delta_B$ .

Der Umstand, dass  $\lambda$  in den Vertikalen der Hängestangen mit deren Längenänderung identisch ist, ermöglicht, dass wir Zusammenhänge zwischen den Momenten des Versteifungsträgers und des Bogens ableiten.

Für jede Vertikale gilt nämlich der Zusammenhang:

$$\delta_V = \delta_B + \lambda.$$

<sup>(1)</sup> HARDY CROSS, *Continuous Frames of Reinforced Concrete*, New York, 1932.

Dr. M. RIETTER, *Der eingespannte Bogen mit Versteifungsträgern* (I. V. B. II. Abhandlung, Bd. VI, S. 265-276).

Wenn die Hängestangen entsprechend dicht verteilt sind, was bei der üblichen Zahl  $n = 10 \sim 20$  der Hängestangen der Fall ist, so gilt auch für die zweiten Differentialquotienten mit guter Annäherung:

$$\frac{d^2 \delta_v}{dx^2} = \frac{d^2 \delta_B}{dx^2} + \frac{d^2 \lambda}{dx^2}.$$

In den äquidistant gelegenen Stellen der Hängestangen — infolge der mit der dichten Teilung erwähnten Bemerkung — wird statt des letzten Gliedes ein Differenzenquotient geschrieben, d.h.

$$\frac{d^2 \delta_v}{dx^2} = \frac{d^2 \delta_B}{dx^2} + \frac{\Delta^2 \lambda}{\Delta x^2}.$$

Da

$$\frac{d^2 \delta_v}{dx^2} = \frac{M_v}{EJ_v} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 \delta_B}{dx^2} = \frac{M_B}{EJ_B \cos \varphi}$$

ist, wo  $\varphi$  den Neigungswinkel der Tangente (Abb. 1) bedeutet, so ist

$$\frac{M_v}{EJ_v} = \frac{M_B}{EJ_B \cos \varphi} \quad \text{oder} \quad M_v = \frac{E \cdot J_v M_B}{EJ_B \cos \varphi} + EJ_v \frac{\Delta^2 \lambda}{\Delta x^2}.$$

Mit der Bezeichnung

$$k_v = \frac{EJ_v}{EJ_B \cos \varphi} \quad \text{und} \quad M_\lambda = EJ_v \frac{\Delta^2 \lambda}{\Delta x^2},$$

ist

$$M_v = kM_B + M_\lambda.$$

Die rechte Seite der Gleichung wird zweckmässig wie folgt mittels der leicht berechenbaren  $(M_v + M_B)$  Summe der Momente ausgedrückt. Deswegen soll zu der rechten Seite  $+ kM_v - kM_v$  addiert werden. Hiemit wird

$$M_v = k(M_v + M_B) - k \cdot M_v + M_\lambda$$

und so erhalten wir

$$M_v = \frac{k}{k+1} (M_v + M_B) + \frac{1}{k+1} M_\lambda \quad (1)$$

und ähnlich

$$M_B = \frac{1}{k+1} (M_v + M_B) - \frac{1}{k+1} M_\lambda. \quad (2)$$

Diese Grundgleichungen sind bei Verbindung von Bogen und Balken mit beliebig veränderlichen Trägheitsmomenten gültig, und geben den Zusammenhang zwischen den Querschnittsmomenten des Bogens und des Versteifungsträgers im selben Vertikalschnitt.

Vorläufig nehmen wir an, dass die Querschnittsflächen der Hängestangen sehr gross sind, d.h. dass die Längenänderungen derselben vernachlässigbar sind. Mit  $\lambda = 0$  ist

$$M_\lambda = \frac{\Delta^2 \lambda}{\Delta x^2} \cdot EJ_v = 0$$

und die obigen Grundgleichungen gestalten sich:

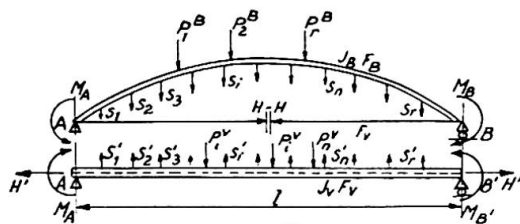


Abb. 5 a und b.

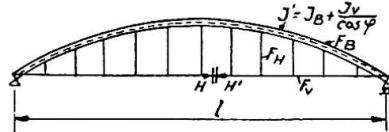


Abb. 6.

$$M_v = \frac{k}{k+1} (M_v + M_B) \quad (3)$$

und

$$M_B = \frac{1}{k+1} (M_v + M_B) \quad (4)$$

d.h. die Summe der auf eine Vertikale bezogene Bogen- und Balkenmomente verteilen sich zwischen Bogen und Balken im Verhältnisse

$$\frac{k}{k+1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{k+1}.$$

Zwecks Berechnung der Grösse  $(M_v + M_B)$  erzeugen wir die unbekannten Momente  $M_v$  und  $M_B$  auf den Trägern Abb. 5a resp. Abb. 5b. Der Träger Abb. 5a unterscheidet sich von dem zu lösenden dadurch, dass die Hängestangen durchgeschnitten und der Versteifungsträger (Zugband), gelenkig mit dem Bogen verbunden ist. Der Bogen ist mit den Hängestangenkräfte  $S_1, \dots, S_r$  und mit den auf den Bogen direkt wirkenden Kräfte  $P_1^B, \dots, P_r^B$  belastet. Der Träger Abb. 5a stellt bloss den Versteifungsträger als einfachen Balken dar, welcher mit den Hängestangenkräften  $S'_1, \dots, S'_n, \dots, S'_r$  und mit den auf den Versteifungsträger direkt wirkenden  $P_1^V, \dots, P_n^V$  belastet ist.

Das Schnittmoment  $M_B$  im Versteifungsträger an der Stelle  $x$  beträgt:

$$M_v = M_{0v} + M_{A'} \frac{x}{l} + M_{B'} \frac{l-x}{l} + M_{S'} \quad (5)$$

und das entsprechende Schnittmoment im Bogen ist

$$M_B = M_{0B} + M_A \frac{x}{l} + M_B \frac{l-x}{l} + M_S - H \cdot y \quad (6)$$

$M_{0v}$  und  $M_{S'}$  bedeuten die Momente, welche auf dem den Versteifungsträger ersetzenden einfachen Balken Abb. 5b infolge der Belastung  $P_v$  und  $S'$  entstehen, ferner bedeuten  $M_{0B}$  und  $M_S$  die Momente infolge der Belastung  $P_B$ , respektive  $S$  am einfachen Balken mit gekrümmter Bogenachse Abb. 5a, durch welchen der Bogenträger ersetzt wurde.

Durch Addition von 5 und 6 erhalten wir:

$$(M_v + M_B) = M_{0B} + M_{0v} - Hy = M_0 - Hy$$

$M_0$  ist das gesammte Moment eines einfachen Balkens von der Stützweite  $l$  infolge der Gesamtbelastung  $P_B + P_v$ .

Zur Bestimmung der Summe  $(M_v + M_B)$  ist also nur die einzige statisch unbestimmte Grösse  $H$  zu berechnen.

Die Formänderungsgleichung des Bogenträgers kann folgenderweise aufgestellt werden :

$$\int_A^B \frac{M_B ds}{EJ_B} y + \int_A^B H \frac{ds}{EF_B} \cos \varphi = \int_A^B \frac{ds}{EF_v} \quad (7)$$

d.h. der Summe der horizontalen Verschiebung infolge der Momente und absoluten Kräfte im Punkte B ist der Verlängerung des Versteifungsträgers (als Zugbandes) gleich. Die Momente des Versteifungsträgers verursachen in dem in Abb. 1 angegebenen Falle keine horizontale Verschiebung. Mit  $\frac{M_B}{EJ_B} = \frac{M_0 - Hy}{(k+1)EJ_B}$  wird

$$\int_A^B \frac{(M_0 - Hy) ds}{(k+1)EJ_B} \cdot y + H \int_A^B \frac{ds}{EF_B} \cos \varphi = H \int_A^B \frac{ds}{EF_v} \quad (8)$$

Da  $(k+1)J_B = J_B + \frac{J_c}{\cos \varphi}$  ist, so kann der Sinn der obigen Gleichung derart gedeutet werden, dass anstatt der ursprünglichen Biegesteifigkeit, der Bogen mit der angegebenen Achse, aber mit den vergrößerten und im allgemeinen veränderlichen  $J' = J_B + \frac{J_v}{\cos \varphi}$  Trägheitsmomenten zu berechnen ist (Abb. 6).

Nachher kann die statisch überzählige Zugbandkraft H nach der üblichen Methode einfach bestimmt werden, auch mit Rücksicht auf die absoluten Deformationen, und so können mittels  $M_0 - Hy$  die gesuchten Versteifungsträger- und Bogenmomente  $M_v$  und  $M_B$  bestimmt werden.

#### Die Innenkräfte der steifen Hängestangen

Die Grösse der Querkraft am Querschnitte des Versteifungsträgers im Abstände  $x$  vom linken Auflager beträgt  $R = \frac{dM_v}{dx}$ .

Der Unterschied zwischen den zwei Querkraften, welche sich auf die unendlich nahe rechts und links vom obigen Querschnitte angenommen Querschnitte beziehen, bestimmt die konzentrierte Kraft P, welche über dem Querschnitt wirkt, und zwar

$$\left[ \frac{dM_v}{dx} \right]_{\text{rechts}} - \left[ \frac{dM_v}{dx} \right]_{\text{links}} = -P = Q.$$

Die Innenkraft S der steifen Hängestange kann somit mit Hilfe des Momentes  $M_v$  durch die Gleichgewichtsgleichung des Anschlusspunktes der Hängestange berechnet werden. Wenn in der Vertikale einer Hängestange die Belastung  $P = 1^t$  wirkt, so ist Gleichgewichtsgleichung

$$\left[ \frac{dM_v}{dx} \right]_{\text{rechts}} - \left[ \frac{dM_v}{dx} \right]_{\text{links}} - S + P = 0.$$

Mit  $M_v = \frac{k}{k+1} (M_0 - Hy)$  und mit der Annahme dass  $k$  in der

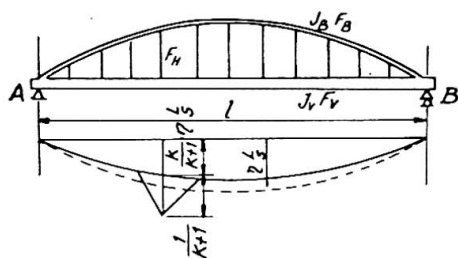


Abb. 7.

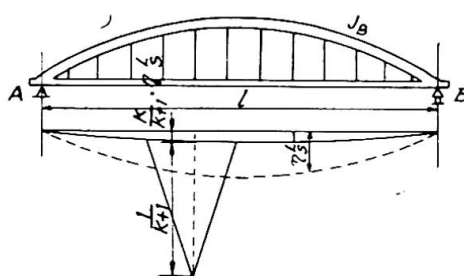


Abb. 8.

unmittelbaren Umgebung der betreffenden Hängestange konstant ist, folgt unter Berücksichtigung von

$$\frac{dM_c}{dx} = \frac{dM_0}{dx} - H \frac{dy}{dx} :$$

$$-S + P + \frac{k}{k+1} \left\{ \left[ \frac{dM_0}{dx} \right]_{\text{rechts}} - \left[ \frac{dM_0}{dx} \right]_{\text{links}} - H \left( \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{\text{rechts}} - \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{\text{links}} \right) \right\} = 0 .$$

Da

$$\left[ \frac{d}{dx} M_0 \right]_{\text{rechts}} - \left[ \frac{d}{dx} M_0 \right]_{\text{links}} = Q = -P$$

und

$$H \left\{ \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{\text{rechts}} - \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{\text{links}} \right\} = -S_L$$

ist, bekommen wir, dass die gesuchte Hängestangekraft

$$S = \frac{k}{k+1} S_L + \frac{1}{k+1} P \text{ ist.}$$

Im Falle, dass  $k$  in der Nähe der geprüften Hängestange veränderlich ist, muss zu dem Ausdrucke des Differentialquotienten  $\frac{k}{k+1} \cdot (M_c - Hy)$  noch das Glied  $(M_0 - Hy) \frac{d}{dx} \cdot \frac{k}{k+1}$  addiert werden.

Die Einflusslinie der Hängestangenkraft kann auf Grund des obigen Ausdruckes einfach bestimmt werden: Im allgemeinen sind die Ordinaten der Einflusslinie des Langerschen Balkens mit  $\frac{k}{k+1}$  zu multiplizieren. In der Vertikalen der geprüften Hängestange muss dazu noch die Ordinate  $\frac{1}{k+1}$  gegeben werden, so dass die Einflusslinie sich nach Abb. 7 und 8 gestaltet. Die Einflusslinien der oben behandelten extremen Fälle I und II können nach diesen Erwägungen einfach abgeleitet werden.

Im Falle I ist nämlich bei  $J_B = 0$ ,  $k = \infty$ ,  $\frac{k}{k+1} = 1$  und  $\frac{1}{k+1} = 0$ , so dass hier die Ordinaten des Langerschen Trägers in ihrer ganzen Grösse zur Wirkung kommen.



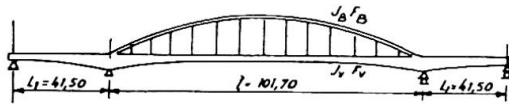


Abb. 9.

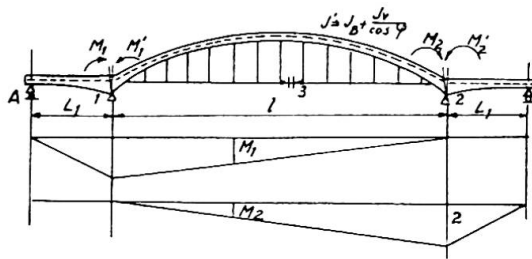


Abb. 10.

Im Falle II bei  $J_v = 0$  ist  $k = 0$ ,  $\frac{k}{k+1} = 0$  und  $\frac{1}{k+1} = 1$ , so dass hier die Ordinaten des Langerschen Trägers gleich Null sind, dagegen muss die ganze Wirkung  $\frac{1}{k+1}$  in der Vertikale der Hängestange mit der Grösse „Eins“ in Rücksicht genommen werden.

Diesen, auf steife Hängestangen bezogenen einfachen Fall hat Dr. Ing. J. Wanke auf anderem Wege abgeleitet und in Bezug auf die Hauptformeln die gleichen Ergebnisse erhalten <sup>(1)</sup>.

Das Verfahren ist auch dann verwendbar, wenn die versteifte Bogenkonstruktion ein Teil eines eventuell mehrfach statisch unbestimmten Systems ist. Ein solcher Fall ist in Abb. 9 dargestellt, bei welchem der Versteifungsträger ein kontinuierlicher Balken über drei Oeffnungen ist.

In Abb. 10 ist die Grundfigur des Ersatzsystems dargestellt, und auch die Momentenlinien infolge der Belastung  $H = 1$ ,  $M_1 = 1$  und  $M_2 = 1$ .

#### Die Berücksichtigung der Längenänderungen der Hängestangen

##### a) Die Momente

Im Vorigen haben wir für die in derselben Vertikalen liegenden Querschnitte des Versteifungsträgers, resp. Bogens die Zusammenhänge

$$M_v = \frac{k}{k+1} (M_v + M_B) + \frac{1}{k+1} M_\lambda \quad (1)$$

und

$$M_B = \frac{1}{k+1} (M_v + M_B) - \frac{1}{k+1} M_\lambda \quad (2)$$

abgeleitet.

Im Folgenden werden zwei Nebensätze bewiesen und zw.:

1. Die Grösse  $(M_v + M_B)$  kann ebenso, wie im Falle der starren Hängestangen, auch jetzt in der Form  $M_0 - Hy$  geschrieben werden ;

<sup>(1)</sup> Dr. Ing. J. WANKE, Ueber die Berechnung von Bogenträgern einem Streckträger (Der Eisenbau, 1922, S. 264-274).

2. Das Biegemoment  $M_\lambda = EJ_v \frac{\Delta^2 \lambda}{\Delta x^2}$  ist in der Form  $M_\lambda = \varepsilon H$  ausdrückbar, wo  $\varepsilon$  eine Konstante bedeutet.

1. Wenn wir auf den Trägern Abb. 5a und 5b ausser den dort eingezeichneten Kräften und Momenten auch die Momente  $\frac{1}{k+1} M_\lambda$  und  $-\frac{1}{k+1} M_\lambda$  wirken lassen, so fallen bei der Addition der Momente  $M_v$  und  $M_B$  die Momente  $\frac{1}{k+1} M_\lambda$  und  $-\frac{1}{k+1} M_\lambda$  aus, so dass auch hier tatsächlich

$$(M_v + M_B) = M_0 - Hy \quad \text{ist.}$$

2. In dem Ausdrucke  $M_\lambda = EJ_v \frac{\Delta^2 \lambda}{\Delta x^2}$  bedeutet die Längenänderung  $\lambda = \frac{Sy}{EF}$ , wo  $y$  die Länge der Hängestange bezeichnet.

Die Hängestangenkraft  $S$  kann in diesem Ausdruck annähernd mit dem Werte

$$S = \frac{k}{k+1} S_L + \frac{1}{k+1} P$$

angenommen werden. Hier gilt das erste Glied auf die ganze Trägerlänge, dagegen das zweite nur an der Angriffsstelle der Kraft  $P$ , so dass das letztere auf die Momente des ganzen Trägers vernachlässigt werden und in dem Ausdrucke

$$\lambda = \frac{Sy}{EF}$$

anstatt  $S$

$$S = \frac{k}{k+1} S_L = \frac{k}{k+1} \frac{8fa}{l^2} H$$

geschrieben werden kann; so wird

$$\lambda = \frac{k}{k+1} \frac{8fa}{l^2} \frac{H}{EF} y.$$

Falls  $k$  entlang des Trägers konstant oder abschnittsweise konstant ist, so ist auch der Koeffizient von  $y$  konstant oder abschnittsweise konstant so dass

$$M_\lambda = EJ_v \frac{\Delta^2 \lambda}{\Delta x^2} = \frac{J_v}{F_v} \frac{k}{k+1} \frac{8fa}{l^2} \cdot \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \cdot H$$

geschrieben werden kann.

Bei einer parabolischen Bogenachse gilt, dass  $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{8f}{l^2}$  ist, so dass

$$M_\lambda = EJ_v \frac{\Delta^2 \lambda}{\Delta x^2} = \frac{k}{k+1} \left( \frac{8f}{l^2} \right)^2 a \frac{J_v}{F_v} \cdot H$$

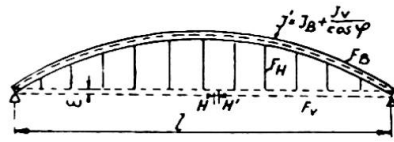


Abb. 11.

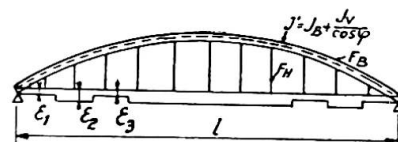


Abb. 12.

und mit der Bezeichnung  $\varepsilon = k \left( \frac{8f}{l^2} \right)^2 a \frac{J_v}{F_v}$ .

$M_y = \varepsilon H$  ist, wo  $\varepsilon$  eine Konstante bedeutet.

Bei der Bestimmung der statisch unbestimmten Grösse  $H$  können wir mit Benützung der Sätze 1 und 2 ebenso vorgehen, wie im Falle der starren Hängestangen, es muss bloss in der Grundgleichung

$$\int_A^B \frac{M_B ds}{EJ_B} y + H \int_A^B \frac{ds}{EF_B} \cos \varphi = H \int_A^B \frac{dx}{EF_v}$$

$$M_B = \frac{1}{k+1} (M_0 - Hy - M_k) = \frac{1}{k+1} [M_0 - H(y + \varepsilon)]$$

eingesetzt werden. Damit wird die Elastizitätsgleichung durch

$$\int_A^B \frac{(M_0 - H)(y + \varepsilon)}{(1+k) EJ_B} ds + \int_A^B \frac{ds}{EF_B} \cos \varphi = H \int_A^B \frac{dx}{EF_v}$$

dargestellt. Die Berechnung von  $H$  kann damit auch hier an dem Zweigelenkbogen mit Zugband mit der vergrösserten Steifheit von

$$J' = J_B + \frac{J_v}{\cos \varphi}$$

erfolgen. Da in dem Ausdruck von  $M_B$  die Kraft  $H$  mit  $(y + \varepsilon)$  multipliziert ist, kann die Wirkung der Elastizität der Hängestangen an dem Bogen und Versteifungsträger derart berechnet werden, dass man die Kraft  $H$  nicht in der elastischen Linie des Versteifungsträgers wirken lässt, sondern mit dem Masse  $\varepsilon$  nach unten verschoben und den Ersatzbogen auf diese  $H$  Kraft löst (Abb. 11). Wenn der Wert von  $k$  streckenweise veränderlich ist, so erfolgt die erwähnte Verschiebung stufenweise (Abb. 12).

Jener Umstand dass die Kraft  $H$  mit dem Hebelarm  $(y + \varepsilon)$  wirkt, erscheint nicht so sehr in der Grössenänderung von  $H$ , sondern ihre Hauptwirkung erscheint darin, dass im Falle ausgeglichener Momente, d.h. — wenn  $M_0$  nahe gleich  $Hy$  ist, — das Glied  $H\varepsilon$  zur Geltung kommt.

Dennoch ist, infolge der grossen Druckspannungen im Bogen die Wirkung der Aenderungen der Hängestangenlängen, nicht bedeutend.

#### b) Hängestangen

Grösser ist die Wirkung der Elastizität der Hängestangen auf die Innenkräfte derselben.

Im Folgenden soll die Aenderung der starren Hängestangenkraft

$$S_{\text{starr}} = \frac{k}{k+1} S_L \text{ bzw } S_{\text{starr}} = \frac{k}{k+1} S_L + \frac{1}{k+1} P$$

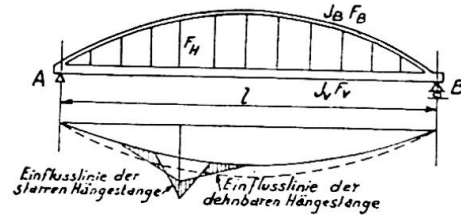
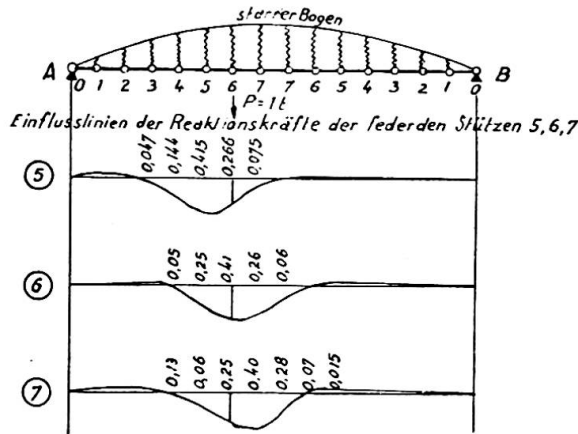


Abb. 13 (links) und 14 (rechts).

infolge der Dehnungen  $\lambda$  bestimmt werden. Dabei werden die Dehnungen annähernd auf Grund der starren Hängestangenkräfte  $S_{\text{starr}}$  angenommen, welche offensichtlich den Hauptteil dieser Kraft bilden.

Die Dehnung der Hängestange infolge der Kraftwirkung  $S_{\text{starr}}$  beträgt

$$\lambda = \frac{y}{EF} \frac{k}{k+1} + \frac{y}{EF} \frac{1}{k+1} = \lambda' + \lambda''.$$

Infolge dieser Dehnungen tritt im Versteifungsträger das Moment

$$M_{\lambda} = EJ_v \frac{\Delta^2 \lambda}{\Delta x^2}$$

auf, welches so gedeutet werden kann, dass in den Vertikalen der Hängestangen infolge der Dehnungen derselben neuere vertikale Kräfte auftreten, welche das Moment  $M_{\lambda}$  verursachen. Diese Zusatzkräfte sind eben die gesuchten Korrekturen der Kräfte  $S_{\text{starr}}$ .

Mit Anwendung des Zusammenhanges zwischen den Momenten und der Belastungskraft können wir schreiben:

$$S_{\lambda} = \left[ \frac{d}{dx} M_{\lambda} \right]_{\text{rechts}} - \left[ \frac{d}{dx} M_{\lambda} \right]_{\text{links}} = S_{\lambda}' + S_{\lambda}''$$

wo  $S_{\lambda}$  die Korrektur der Hängestangenkraft  $S_{\text{starr}}$  infolge der Dehnung bedeutet.

Es wurde in dem Vorhergehenden bewiesen, dass ein Anteil des Momentes  $M_{\lambda}$  welches von der Längenänderung  $\lambda' = \frac{y}{EF} \frac{k}{k+1} S_{\text{starr}}$  hervorgerufen wird, gleich der Konstanten  $\varepsilon H$  ist. Infolgedessen ist die von diesem Anteil stammende Grösse  $\frac{d}{dx} M_{\lambda}'$  und so auch die diesem entsprechende und mit  $S_{\lambda}'$  bezeichnete Korrektur gleich Null. Es muss daher nur die Wirkung des anderen Gliedes  $\lambda'' = \frac{y}{EF} \frac{1}{k+1}$  in Rücksicht genommen werden.

Falls der Bogen fix wäre, d.h. die Dehnungen in ihrer ganzen Grösse nur den Versteifungsträger verbiegen würden, so wären die gesuchten Hängestangenkräfte gleich (wie die aus diesen entstehenden Momente  $M_{\lambda}$  des Versteifungsträgers) den Reaktionsänderungen (bzw. den Momenten)

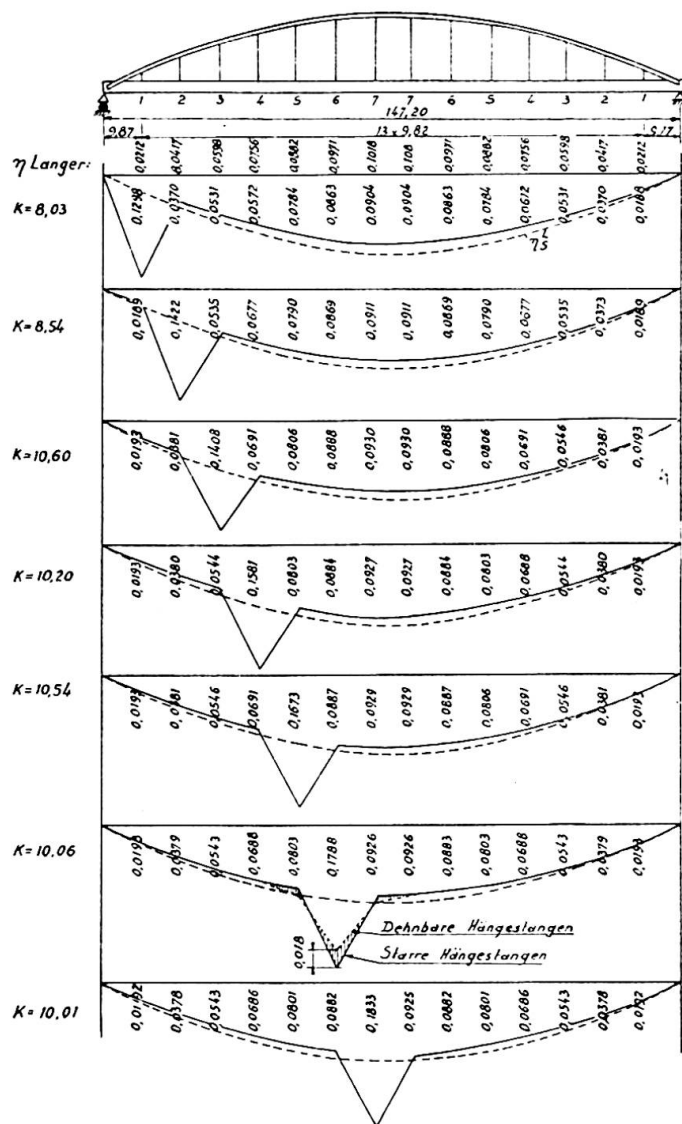
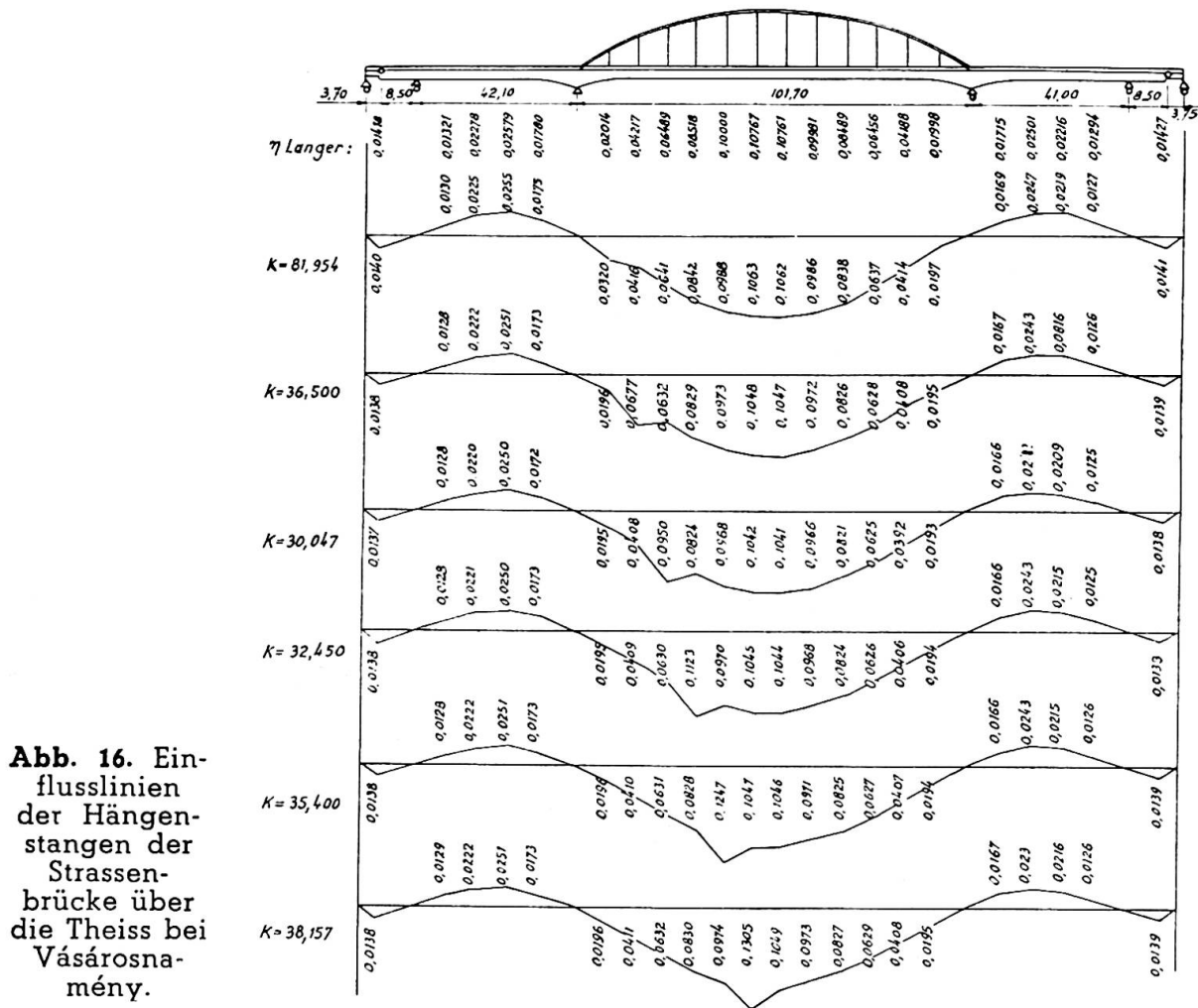


Abb. 15. Einflusslinien der Hängestangen über die Theiss bei Szeged.

des elastisch aufgehängten kontinuierlichen Versteifungsträgers. Der Versteifungsträger wirkt in diesem Falle nämlich wie ein Balkenträger, der an den elastischen Hängestangen federartig aufgehängt ist und dessen beide Enden mit dem Bogen starr verbunden sind (Abb. 13). Die Innenkräfte dieses Trägersystems können mittels der geometrischen und Festigkeitsangaben der Bogenkonstruktion bestimmt werden.

Der Bogen bewegt sich aber tatsächlich infolge der Teilnahme in den Wirkungen der Hängestangendehnungen. Die Beteiligung des Versteifungsträgers und des Bogens kann in der mit der Last  $P=1^t$  belasteten Vertikalen bestimmt werden, es muss aber dabei in Betracht genommen werden, dass vom Gesichtspunkte der gesuchten Dehnungskorrektur von der Hängestangenkraft nur der Teil von der Grösse  $\frac{1}{k+1} 1^t$  wirkungsvoll ist.

Wenn der auf den Versteifungsträger fallende Anteil der Dehnung  $\lambda''$  mit  $\frac{\lambda''}{\nu}$  bezeichnet wird, werden die Korrekturen der Hängestangenkräfte



annähernd gleich den  $\frac{1}{v}$  fachen Reaktionsänderungen des obigen elastisch aufgehängten kontinuierlichen Balkenträgers. Gleichzeitig erhält man jene Momente  $M''$  welche in dem Vorhergehenden als vernachlässigbare lokale Wirkungen angegeben wurden. Die Grösse dieser Momente beträgt das  $\frac{1}{v}$  fache der Momente  $M_0''$  des obigen kontinuierlichen Balkens.

Die Wirkung der Hängestangendehnungen in der Vertikalen der geprüften Hängestange vermindert die Einflussordinate dieser Hängestangenkraft und vergrössert die zwei benachbarten Ordinaten. Ferner ist die Wirkung vernachlässigbar klein (Abb. 14).

Die Wirkung der Längenänderungen der Hängestangen auf die Innenkräfte derselben bezüglich der Hängestange 6 der Bogenkonstruktion der Szegeder Tiszaabücke ist in Abb. 15 dargestellt.

### Anwendungen

1. Bei der 147,20 m weit gespannten Bogenkonstruktion der jetzt im Bau befindlichen eisernen Strassenbrücke über den Theiss (Tisza)-Fluss bei Szeged (Abb. 15) wurde die Steifheit des Stahlbogens grösser gewählt,

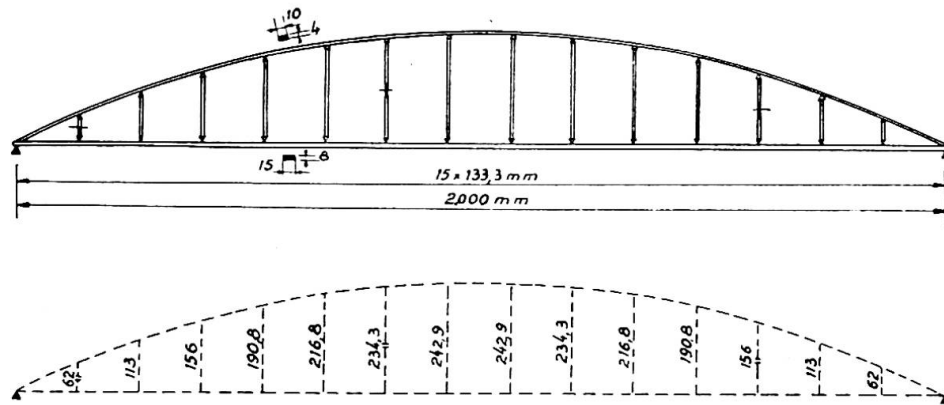


Abb. 17 und 18.

wie es die übliche annähernde Berechnung — mit Rücksicht auf Montage — als Minimum angibt, da sich der Wert von  $k$  zwischen 8 und 10 ändert.

Die Ergebnisse der mit starren Hängestangen durchgeführten Berechnung bezüglich der Bogenspannungen ergaben trotz der erwähnten grösseren Bogensteifheit eine Abweichung von höchstens 10 % gegenüber der üblichen annähernden Berechnungsmethode.

Die Einflussordinaten der Hängestangenkräfte in der Vertikalen der geprüften Hängestangen sind überall grösser, als die des Langer-Trägers, der grösste Unterschied ist 45 %. Die Einflussflächen der nach zwei Methoden berechneten Einflusslinien sind jedoch beinahe gleich gross, infolgedessen ist der Unterschied zwischen den massgebenden Kräften sehr klein.

Die Längenänderung der Hängestangen verursachte bei den Bogenspannungen nur einen Unterschied von höchstens 1 % im Vergleich mit den des Bogens mit starren Hängestangen. In solchen Fällen, wo die Montierung derart vorgeht, dass auch die ständige Belastung durch den versteiften Bogenträger aufgenommen wird, kann dieser Unterschied mehr bedeuten.

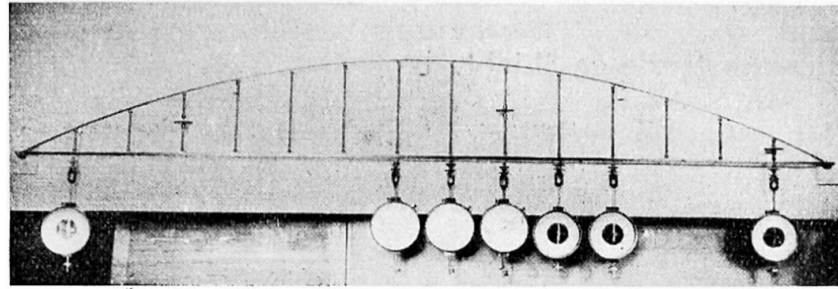
Die Wirkung der Dehnungen der Hängestange auf die Stabkräfte derselben wurde in Abb. 15 dargestellt. Die Entlastung in der Laststellung über dem geprüften Stabe beträgt 10 % im Vergleich mit der Stabkraft der starren Hängestange.

2. Bei dem Hauptträger der gleichfalls jetzt im Bau befindlichen Tiszabrücke bei Vásárosnamény (Abb. 16) ist der Stahlbogen verhältnismässig sehr schlank entworfen, so dass sich hier  $k$  zwischen 20 und 80 ändert. Die genauere Berechnung mit starren Hängestangen hat trotz der grösseren Bogenschlankheit bei den Bogenspannungen einen Unterschied von bis 10 % im Vergleich zu denjenigen des Langerträgers ergeben, da die Querschnittsprofile des Bogens hier bezüglich der Aufnahme von Biegungen weniger günstig ausgebildet wurden.

#### Modellversuche zur Bestimmung der Einflusslinien der Hängestangenkräfte

Zur Vergleichung der berechneten und in der Wirklichkeit entstehenden Kräftespiele in der Bogenkonstruktion Abb. 1 wurden Modellversuche ausgeführt. Da zwischen der genaueren und der üblichen annähernden Berechnung der grösste Unterschied in der Lastverteilung erscheint, welche





am besten durch die Einflusslinien der Hängestangen charakterisiert werden kann, so wurde bei den Modellversuchen die Einflusslinie dieser Kraft auf kinematischem Wege festgestellt.

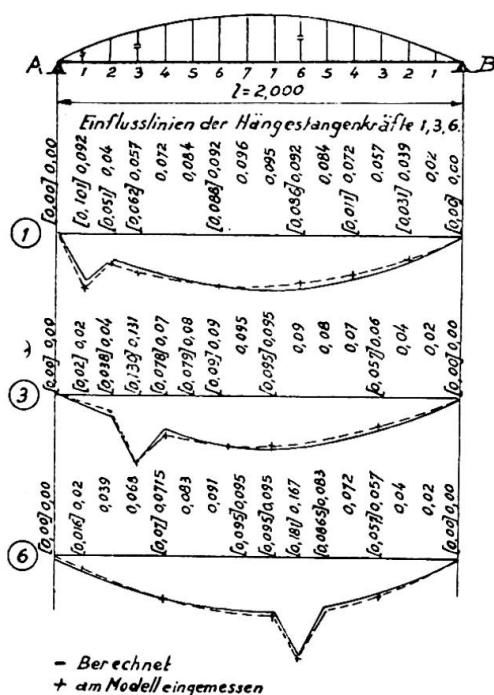
Der Bogen und der Versteifungsträger des Modells wurden aus Stahlstäben mit dem Querschnitte  $10 \times 4$  mm bzw.  $15 \times 10$  mm und die Hängestangen mit Rohrquerschnitten von Durchmesser 5 mm und der Wandstärke 0,3 mm erzeugt (Abb. 17).

Die Rohrquerschnitte der Hängestangen waren zwecks Sicherung einer entsprechenden Biegesteifigkeit gegen Knickung dieser Stäbe notwendig. Bei der Vorführung der kinematischen Einflusslinien sind nämlich Druckkräfte in einigen Hängestangen aufgetreten.

Ein Teil der geprüften drei Hängestangen wurden mit Schraubengewinden ausgebildet, so dass die Länge der geprüften Hängestange in einem bestimmten Mass geändert werden konnte.

Die kinematische Einflusslinie wurde durch die bestimmte Längenänderung der geprüften Hängestange erhalten und die infolgedessen entstandenen vertikalen Verschiebungen des Versteifungsträgers durch Messuhren eingemessen (Abb. 18).

Es sind die eingemessenen Einflusslinien der drei Hängestangen in Abb. 20 aufgezeichnet.





Die Vergleichung der gerechneten und eingemessenen Einflusslinien zeigt, dass die Lastverteilung tatsächlich gemäss der genaueren Berechnungsmethode geschieht.

Infolge der Rohrquerschnitte waren die Querschnittsflächen der Hängestangen verhältnismässig gross, so dass die angemessenen Einflusslinien dem Falle von starren Hängestangen entsprechen.

### Résumé

1. Considérations sur les déformations des suspentes et sur la rigidité de l'arc lors du calcul des poutres de rigidité.

2. Exemples de réalisation :

a) Le nouveau pont-route sur la Tisza à Szeged ( $l = 146$  m);

b) Le nouveau pont-route sur la Tisza à Vásárosnamény ( $l = 101,70$  m).

### Zusammenfassung

1. Berücksichtigung der Formänderung der Hängestangen und der Steifigkeit des Stabbogens bei der Berechnung des Versteifungsträgers.

2. Ausführungsbeispiele.

a) Die neue Strassenbrücke über die Theiss in Szeged ( $l = 146$  m);

b) Die neue Strassenbrücke über die Theiss bei Vásárosnamény ( $l = 101,70$  m).

### Summary

1. Considerations concerning the change in the shape of the hangers and stiffness of the arch members in calculating the stiffening girder.

2. Examples of execution :

a) The new highway bridge over the Tisza at Szeged ( $l = 146$  m);

b) The new highway bridge over the Tisza at Vásárosnamény ( $l = 101.70$  m).