Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Artikel: Das räumliche Seileck

Autor: Beer, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4114

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IIIb2

L'étude spatiale du câble de suspension

Das räumliche Seileck

Stereometrical study of suspension cables

PROF. Dr TECHN. H. BEER
Graz

Die Untersuchung der einzelnen Phasen der Montage von Hängebrücken erfordert die Behandlung des unversteiften Seiles, d.h. die Bestimmung der Seillage und der Horizontalzüge unter der jeweiligen Montagebelastung. Eine sehr anschauliche Darstellung des ebenen Seileckes gibt F. Stüssi ([1]), wobei er ausser den lotrechten auch noch horizontale Lasten in Brückenlängsrichtung berücksichtigt. Bei Hängebrücken mit schräger Hängerführung in Brückenquerrichtung — wie sie bei zentrisch belasteten Pylonenschäften zur Durchführung der vollen Breite der Verkehrswege erforderlich ist — sowie bei einer zusätzlichen Seilabspannung (Sturmseile) ist mit der Ausbildung eines räumlichen Seileckes zu rechnen. Auch bei Belastung durch den Winddruck quer zur Brücke während der Montage tritt ein räumliches Seileck auf. Die Anwendung der Abhandlung soll jedoch nicht nur auf den Hängebrückenbau beschränkt bleiben, sondern alle Tragkonstruktionen mit Seilen als Abspannung oder Zugglied umfassen.

Der Diskussionsbeitrag beschäftigt sich mit der Ermittlung der Seillage (Seileck) und der Horizontalzüge für beliebig im Raume gerichtete Lasten, wobei das Seil in irgendwelchen Punkten starr oder nachgiebig gestützt sein kann. Der Berechnung wird das in beliebigen Intervallen durch Einzellasten belastete Seil zugrunde gelegt und auch sein Eigengewicht in diesen Punkten wirkend gedacht.

Abbildung 1 zeigt ein solches — zwischen zwei nachgiebigen Punkten O und n gestütztes — räumliches Seileck, das z.B. einer Hängebrückenöffnung entspricht in der Grund- und Aufrissprojektion. Die „*Ausgangslage*" bezieht sich hierbei auf den Zustand vor der Belastung durch die Montagelasten, in dem das Seil durch die Lastkomponenten V_{m0}, L_{m0} und W_{m0} belastet ist, während in der „*Endlage*" die entsprechenden Werte —

([1]) *Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau*, Band 6.

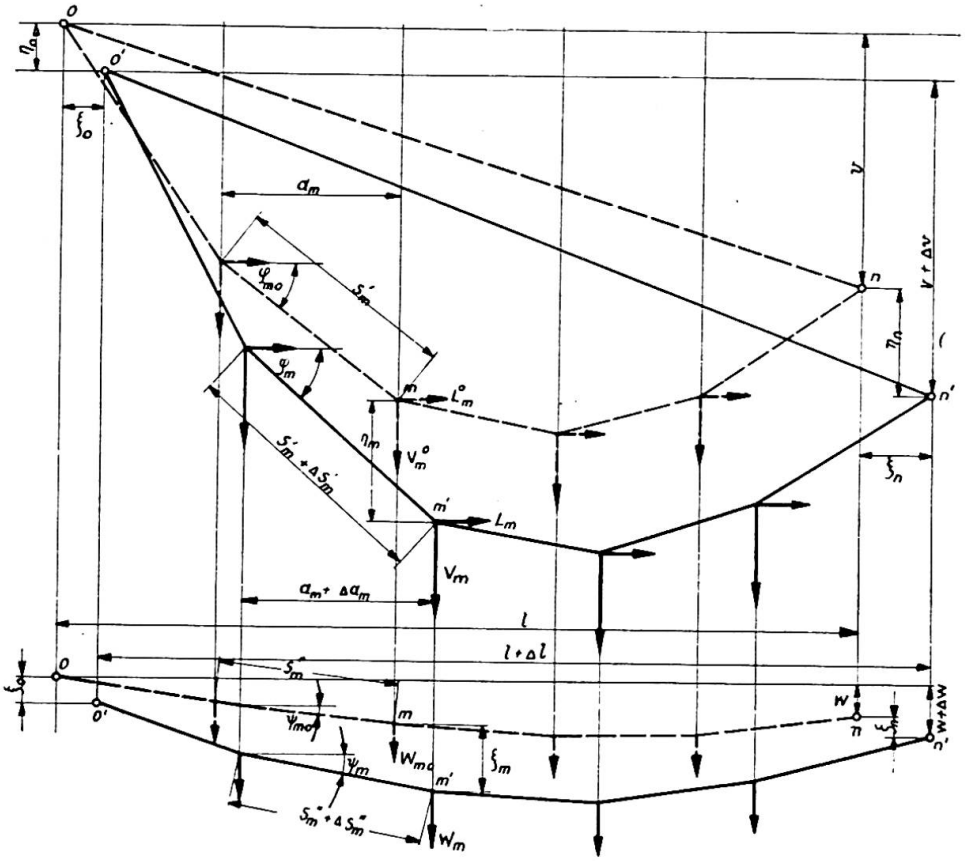

Abb. 1. Räumliches Seileck im Grund- und Aufriss.

um die Montagelasten und gegebenenfalls den Winddruck vermehrt — auf den Betrag V_m, L_m und W_m anwachsen. Der feldweise veränderliche Horizontalzug im Feld $m-1$ bis m soll in der Ausgangslage H_{m0} und in der Endlage H_m sein. Zur Ermittlung der Endlage dienen bei gegebenem H_m die beiden Gleichgewichtsbedingungen in jedem Knoten m und die Randbedingungen in der Y- und Z-Richtung. Der Horizontalzug für ein Endfeld ($H_1 = H$) wird aus der Bedingung bestimmt, dass die Summe aller Feldweitenänderungen gleich sein muss der Aenderung der Horizontaldistanz der Aufhängepunkte (Randbedingung in der X-Richtung). Da beide Grössen aber wieder von H abhängen, muss die Berechnung der Endlagen für mehrere angenommene Werte von H durchgeführt und das tatsächlich vorhandene H durch ein hierfür entwickeltes graphisches Verfahren ermittelt werden.

Ermittlung der Endlage

Für die Endlage gelten die folgenden Gleichgewichtsbedingungen für die Aufriss- und Grundrissebene:

$$H_m \operatorname{tg} \varphi_m - H_{m+1} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} = V_m \tag{1}$$

$$H_m \operatorname{tg} \psi_m - H_{m+1} \operatorname{tg} \psi_{m+1} = W_m \,. \tag{2}$$

Führt man

$$\sum_{r=1}^{r=m-1} V_r = \mathcal{V}_m \,, \quad \sum_{r=1}^{r=m-1} L_r = \mathcal{L}_m \quad \text{und} \quad \sum_{r=1}^{r=m-1} W_r = \mathcal{W}_m$$

ein, so erhält man aus (1) und (2) die beiden Rekursionsformeln :

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{H}{H_m}\left(\operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{\mathcal{V}_m}{H}\right) \tag{3}$$

$$\operatorname{tg} \psi_m = \frac{H}{H_m}\left(\operatorname{tg} \psi_1 - \frac{\mathcal{W}_m}{H}\right). \tag{4}$$

Hierbei ist $H_m = H - \mathcal{L}_m$. Zur Ermittlung der Anfangswinkel des Seilpolygons $\operatorname{tg} \varphi_1$ und $\operatorname{tg} \psi_1$ dienen die folgenden geometrischen Randbedingungen in Richtung der Y- und Z-Achse :

$$\sum_{m=1}^{m=n} (a_m + \Delta a_m) \operatorname{tg} \varphi_m = v + \Delta v \tag{5}$$

$$\sum_{m=1}^{m=n} (a_m + \Delta a_m) \operatorname{tg} \psi_m = w + \Delta w \tag{6}$$

Woraus in Verbindung mit (3) und (4) folgt :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{\sum_1^n \frac{H}{H_m}(a_m + \Delta a_m)} \cdot \left[\sum_1^n \frac{\mathcal{V}_m}{H_m}(a_m + \Delta a_m) + v + \Delta v\right] \tag{7}$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{1}{\sum_1^n \frac{H}{H_m}(a_m + \Delta a_m)} \cdot \left[\sum_1^n \frac{\mathcal{W}_m}{H_m}(a_m + \Delta a_m) + w + \Delta w\right] \tag{8}$$

Δa_m bedeutet — wie schon aus Abbildung 1 hervorgeht — die Aenderung der Horizontaldistanz a_m beim Uebergang von der Ausgangslage in die Endlage. Nach Abbildung 2 ist :

$$a_m + \Delta a_m = (s_m + \Delta s_m) \cos \varphi_m \cdot \cos \overline{\psi}_m \tag{9}$$

Δs_m stellt die Seildehnung infolge des — bei diesem Uebergang erzeugten — Horizontalschubes H_{mp} dar. Ist auch noch eine Temperaturänderung von t° Celsius damit verbunden, so wird :

$$\Delta s_m = \frac{H_{mp} s_m}{E' F_m \cdot \cos \varphi_m \cdot \cos \overline{\psi}_m} + \varepsilon_t t \cdot s_m , \tag{10}$$

E' ist der Elastizitätsmodul des Seiles und F_m die Fläche des Seilstückes

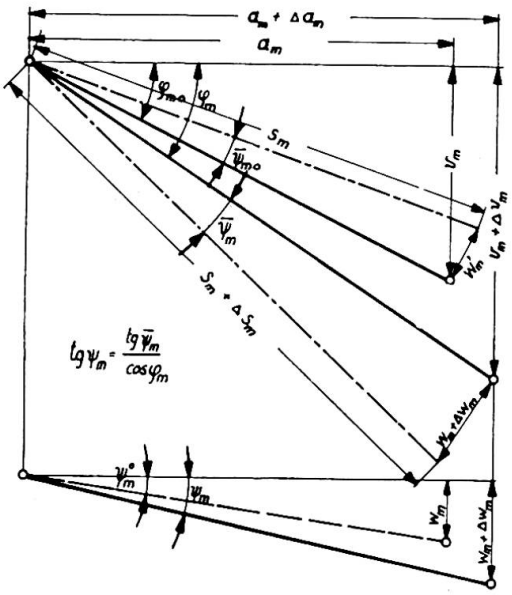

Abb. 2. Ermittlung von Δa_m

zwischen $m-1$ und m (für Kabelhängebrücken ist $F_m = F = \text{const.}$). Die Feldweitenänderung wird dann:

$$\Delta a_m = s_m \left[\frac{H_{mp}}{E' F_m} + \cos \varphi_m \cdot \cos \bar{\psi}_m - \cos \varphi_{m0} \cdot \cos \bar{\psi}_{m0} + \varepsilon_t \cdot t \cdot \cos \varphi_m \cdot \cos \bar{\psi}_m \right]. \tag{11}$$

Dieser Ausdruck für Δa_m wäre nun in die Gleichungen (7) und (8) einzusetzen und mit Hilfe von (3) und (4) die goniometrischen Gleichungen für $\operatorname{tg} \varphi_1$ und $\operatorname{tg} \psi_1$ aufzustellen. Ihre Auflösung würde jedoch sehr langwierig und nur graphisch oder durch Probieren durchzuführen sein. Man kann aber die ganze umständliche Rechnung vermeiden, wenn man von der Tatsache ausgeht, dass Δa_m wohl in allen praktisch vorkommenden Fällen wesentlich kleiner als a_m sein wird. Bei den Hängebrücken ist dies — selbst bei grossen lotrechten Verschiebungen, wie sie bei der Montage auftreten — stets der Fall. Aus dieser Tatsache ergibt sich folgender Iterationsweg zur Bestimmung der Werte φ_m und ψ_m. Man setzt zunächst $\Delta a_m^0 = 0$ und berechnet mit Hilfe von (7) und (8) die ersten Näherungswerte φ_1^{I} und ψ_1^{I} und mit (3) und (4) die entsprechenden Werte φ_m^{I} und ψ_m^{I}. Nunmehr ist es mit Hilfe von Gl. (11) möglich, die Näherungswerte Δa_m^{I} zu bestimmen. Man kann nun im zweiten Iterationsgang mit Hilfe dieser Werte Δa_m^{I} verbesserte Winkel φ_m^{II} und ψ_m^{II} bestimmen und erhält schliesslich neue Feldweitenänderungen Δa_m^{II}, die in der Regel schon ausreichend genau sein werden, um daraus die endgültigen Neigungswinkel zu berechnen.

Eine anschauliche bildliche Darstellung dieses Iterationsverfahrens und seiner Konvergenz zeigt Abbildung 3. Der Einfachheit halber wird ein Seil, das zunächst ohne Last und daher durch den Horizontalzug H_0 straff gespannt ist, mit nur einer Einzellast P belastet. Lässt man zunächst die Feldweitenänderung unberücksichtigt ($\Delta a = 0$), so würde — bei lotrechtem Lastweg und unverschiebbaren Lagern — das Seil die Lage 1-1 einnehmen. Diese Lage ist aber mit den geometrischen Bedingungen nicht verträglich, da die Länge der beiden Seilstrahlen ja gegeben ist (der Einfachheit halber wird ein dehnungsloses Seil vorausgesetzt, da die Berücksichtigung der Seildehnung an der Konvergenzbetrachtung nichts ändert). Das Auftragen der richtigen Seillängen bedingt eine Parallelverschiebung des Seilstrahles 1 nach 1′ während E in die neue Lage E^{I} kommt. Um die richtige Höhenlage von E herzustellen, ist nun eine lotrechte Verschiebung des Seilzuges notwendig. Trägt man nun wieder Seilstrahllängen ab, so wird 2

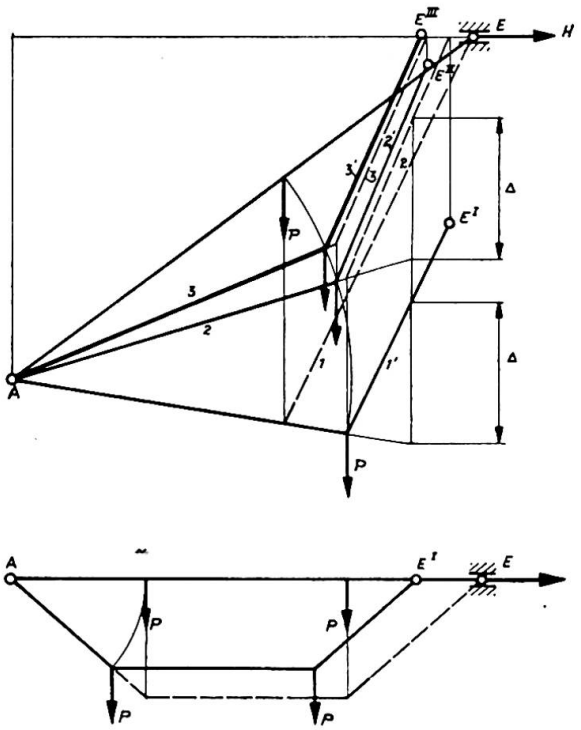

Abb. 3. Bildliche Darstellung des Iterationsverfahrens.

parallel nach 2′ verschoben, wodurch der Endpunkt nach E^{II} kommt. Das Verfahren wird nun solange fortgesetzt, bis E genügend genau in der richtigen Höhe liegt. Sind System und Belastung symmetrisch, so ist von vornherein eine Erfüllung der Höhenbedingung möglich. Der erste Iterationsgang gibt also bereits das endgültige Ergebnis.

Aus dieser figuralen Darstellung, die natürlich auch auf viele Lasten in beliebiger Richtung ergänzt werden könnte, erkennt man, dass umso weniger Iterationsschritte erforderlich sein werden, je mehr sich System und Belastung dem Symmetriefall nähern. Auch eine Verminderung der Steilheit der Geraden AE bedingt eine noch bessere Konvergenz des Verfahrens.

Die Konvergenz lässt sich allerdings auch noch auf folgende Art verbessern. Man sucht für $\Delta a_m{}^0$ genäherte Ausgangswerte für den ersten Rechnungsgang, wobei man trachtet in Gleichung (11) statt der Cosinuswerte der Neigungswinkel deren Tangenten einzuführen. Dies geschieht durch Vernachlässigung der Quadrate der Verschiebungswege — beim Uebergang von der Ausgangslage in die Endlage — gegenüber den Produkten aus Verschiebungsweg und entsprechender Koordinate. Es wird also z.B. Δa^2 gegenüber $a \cdot \Delta a$ vernachlässigt. Man erhält dann nach kurzer Zwischenrechnung :

$$\frac{\Delta a_m}{a_m} \approx \frac{\Delta s_m}{s_m} - \frac{a_m{}^2}{s_m{}^2}\left[\operatorname{tg}\varphi_{m0}\left(\operatorname{tg}\varphi_m - \operatorname{tg}\varphi_{m0}\right) + \operatorname{tg}\psi_{m0}\left(\operatorname{tg}\psi_m - \operatorname{tg}\psi_{m0}\right)\right]. \quad (12)$$

Setzt man noch

$$\frac{\Delta s_m}{s_m} \approx \frac{H_{mp}}{E'F_m \cos\varphi_{m0} \cos\bar{\psi}_{m0}} + \varepsilon_t \cdot t$$

und führt Gl. (12) in die Gl. (7) und (8) ein, so wird :

$$\sum_1^n a_m \left\{ 1 + \frac{\Delta s_m}{s_m} - \frac{a_m{}^2}{s_m{}^2}\left[\operatorname{tg}\varphi_{m0}\frac{H}{H_m}\left(\operatorname{tg}\varphi_1 - \frac{\mathfrak{V}_m}{H}\right) - \operatorname{tg}^2\varphi_{m0}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \operatorname{tg}\psi_{m0}\frac{H}{H_m}\left(\operatorname{tg}\psi_1 - \frac{\mathfrak{W}_m}{H}\right) - \operatorname{tg}^2\psi_{m0}\right]\right\} \cdot \frac{H}{H_m}\left(\operatorname{tg}\varphi_1 - \frac{\mathfrak{V}_m}{H}\right) = v + \Delta v \quad (13)$$

$$\sum_1^n a_m \left\{ 1 + \frac{\Delta s_m}{s_m} - \frac{a_m{}^2}{s_m{}^2}\left[\operatorname{tg}\varphi_{m0}\frac{H}{H_m}\left(\operatorname{tg}\varphi_1 - \frac{\mathfrak{V}_m}{H}\right) - \operatorname{tg}^2\varphi_{m0}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \operatorname{tg}\psi_{m0}\frac{H}{H_m}\left(\operatorname{tg}\psi_1 - \frac{\mathfrak{W}_m}{H}\right) - \operatorname{tg}^2\psi_{m0}\right]\right\} \cdot \frac{H}{H_m}\left(\operatorname{tg}\varphi_1 - \frac{\mathfrak{W}_m}{H}\right) = w + \Delta w. \quad (14)$$

Man erhält schliesslich zwei quadratische Gleichungen für $\operatorname{tg}\varphi_1$ und $\operatorname{tg}\psi_1$ von folgender Bauart :

$$A_\varphi \operatorname{tg}^2\varphi_1 + A_\psi \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\psi_1 - B_\varphi \operatorname{tg}\varphi_1 - C_\varphi \operatorname{tg}\psi_1 + D_v = 0 \quad (15)$$

$$A_\psi \operatorname{tg}^2\psi_1 + A_\varphi \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\psi_1 - B_\psi \operatorname{tg}\psi_1 - C_\psi \operatorname{tg}\varphi_1 + D_w = 0 \quad (16)$$

aus denen $\operatorname{tg}\varphi_1$ und $\operatorname{tg}\psi_1$ berechnet werden kann. Die hierbei erforderliche Auflösung einer Gleichung vierten Grades ist jedoch ziemlich langwierig, sodass man in der Regel die Rechnung mit $\Delta a^0 = 0$ beginnen wird und lieber einen Iterationsgang mehr durchführt.

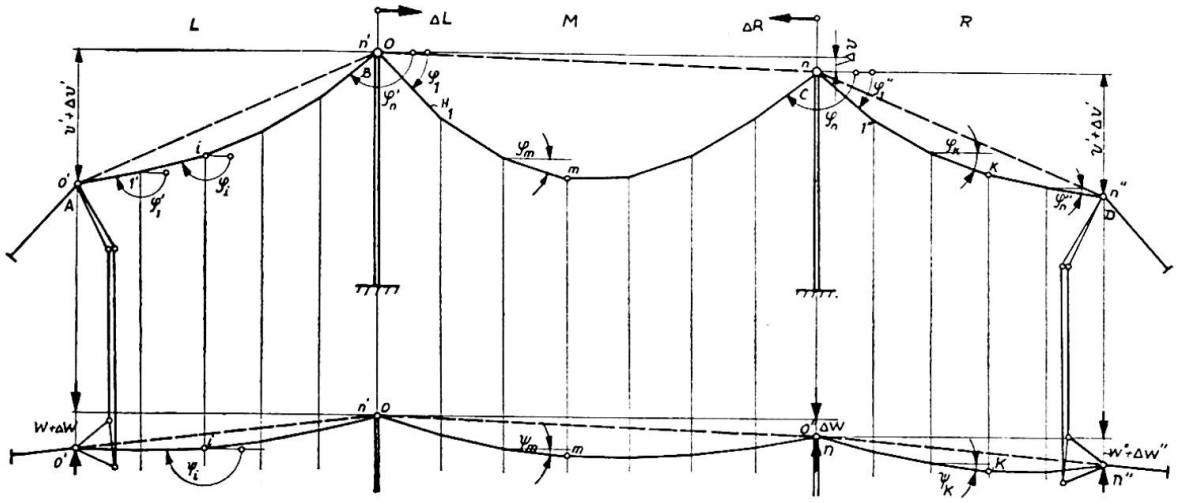

Abb. 4. Hängebrücke mit Aussenöffnung und räumlicher Seilführung.

Bestimmung des Horizontalzuges

Die graphische Bestimmung des Horizontalzuges wird für eine Hängebrücke mit 3 Oeffnungen und eingespannten Stahlpylonen gezeigt. Mit den Bezeichnungen von Abbildung 4 werden die Verschiebungen der Pylonenspitzen B und C in Richtung der X-Achse :

Linke Seitenöffnung

$$\Delta L = \sum_{i=1'}^{i=n'} \Delta a_i + \xi_A ; \tag{17}$$

Rechte Seitenöffnung

$$\Delta R = \sum_{k=1''}^{k=n''} \Delta a_k + \xi_D ; \tag{18}$$

Mittelöffnung

$$\Delta M = \sum_{m=1}^{m=n} \Delta a_m . \tag{19}$$

Da diese Verschiebungen für verschiedene angenommene Horizontalzüge berechnet wurden, können die Kurven

$$\Delta L + \Delta R = f(H) \quad \text{und} \quad \Delta M = \varphi(H)$$

aufgetragen werden. Die Auflösung der Gleichung $\Delta M = \Delta L + \Delta R$ d.h. die Ordinate des Schnittpunktes der beiden Kurven gibt sodann den tatsächlichen vorhandenen Horizontalzug. Bei eingespannten Pylonen muss hierbei beachtet werden, dass die Horizontalzüge links und rechts von den Pylonen um jene Kräfte ΔH_L und ΔH_R verschieden sind, welche die Pylonen bei ihrer Ausbiegung um die Masse ΔL und ΔR aufnehmen. Ist μ die Federkonstante der Pylone (die Ausbiegung, welche von der Kraft 1 t

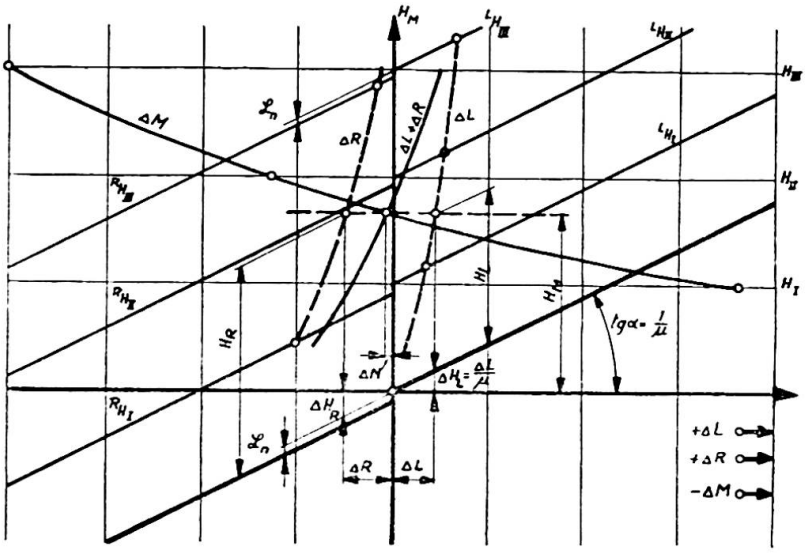

Abb. 5. Graphische Ermittlung des Horizontalzuges.

erzeugt wird), so ist in den Aussenöffnungen eine Drehung der Δ-Achse um den Winkel α erforderlich, wobei gilt: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\mu}$. Ferner muss die Δ-Achse für die rechte Aussenöffnung noch um den Betrag $\mathcal{L}_n = \sum_1^n L_m$ parallel verschoben werden, um zu berücksichtigen, dass positive Horizontallasten der Mittelöffnung den Horizontalzug an der linken Pylone um ihre Summe vermehren. In Abbildung 5 ist die Bestimmung des Horizontalzuges durchgeführt. Für drei angenommene Horizontalzüge am Beginn der Mittelöffnung H_I, H_{II} und H_{III} werden nach Abschnitt B die Werte ΔL, ΔR und ΔM berechnet und die Kurven ΔL, ΔR und ΔM gezeichnet. Hierbei ist zu beachten, dass die Kurvenpunkte für ΔL auf den um den Winkel α gedrehten Geraden ^LH_I, $^LH_{II}$ und $^LH_{III}$ liegen, während die entsprechenden Punkte für ΔR sich auf den um α gedrehten und um $\mathcal{L}_n$ parallel nach abwärts verschobenen Geraden ^RH_I, $^RH_{II}$ und $^RH_{III}$ befinden. Sodann wird die Summenkurve ΔL + ΔR gezeichnet und mit der Kurve ΔM zum Schnitt gebracht. In Abbildung 5 sind die dem Schnittpunkt entsprechenden Werte der Verschiebungen ΔL, ΔM und ΔR, sowie die zugehörigen Horizontalzüge H_L, H_M und H_R eingetragen. Das Wertetripel der angenommenen Horizontalzüge muss für den ersten Iterationsgang so gewählt werden, dass der — sich als Lösung ergebende — Horizontalzug dazwischen liegt. Da zunächst nur rohe Schätzungen des Horizontalzuges vorliegen, werden die Intervalle zwischen H_I, H_{II} und H_{III} entsprechend gross sein, wodurch natürlich die Lösung ungenau wird. Man wird sich daher für den zweiten Iterationsgang diese erste Lösung für H zu Nutze machen und die Wertetripel für H nunmehr dicht beieinander annehmen können, sodass man mit Hilfe des graphischen Verfahrens eine ausreichende Genauigkeit erzielen kann. Meist ist es sogar besser, die zweite Iteration nur mehr mit dieser ersten Lösung durchzuführen (vgl. d. Zahlenbeispiel).

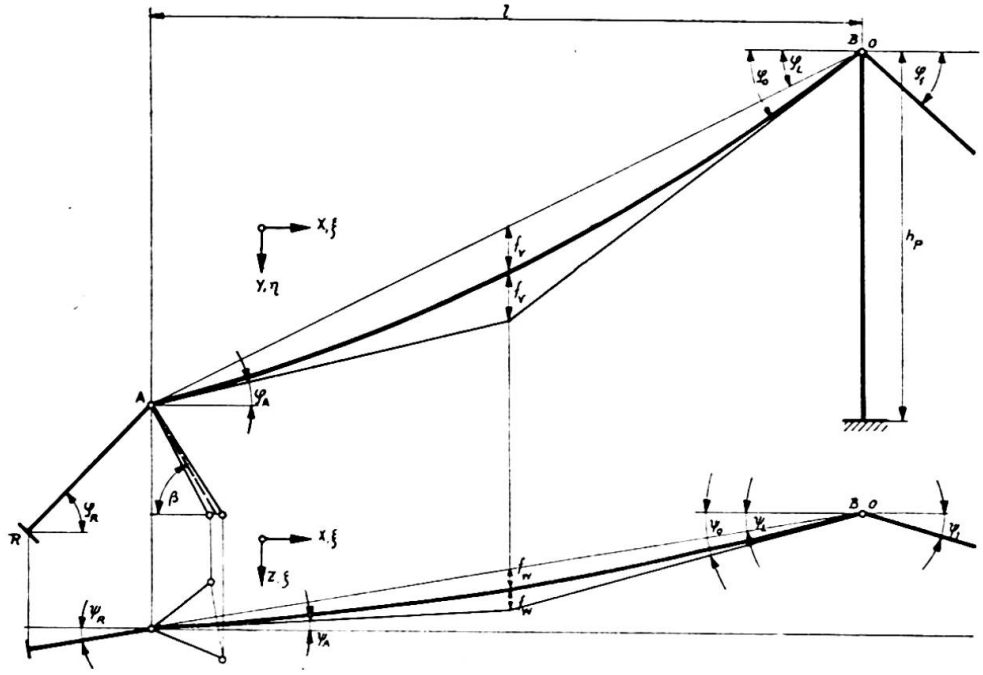

Abb. 6. Räumliche Seilführung der Aussenöffnung einer Hängebrücke bei Gleichlast.

Nachgiebigkeit der Verankerung und der Pylone

Um die Verhältnisse nicht unnötig zu komplizieren, wird nach Abbildung 6 angenommen, dass das Kabel im Punkt A über einen Pendelbock (Zweibock) umgelenkt wird, dessen Symmetrieachse in der lotrechten Ebene durch die Sehne des Kabelstückes AB liegt. Auch wird mit einer mittleren aber gleichen Verformung der beiden Stiele des Zweibockes gerechnet. Da die Verschiebungen des Punktes A in den praktisch in Frage kommenden Fällen nicht sehr ins Gewicht fallen, können auch abweichende Anordnungen der Pendelböcke mit ausreichender Genauigkeit durch das angenommene symmetrische System ersetzt werden. In Abbildung 7 ist die Kabelumlenkung durch einen Pendelbock und die Rückverankerung in Grund- und Aufriss dargestellt, wobei auch die Umlegung in die Grundrissebene eingezeichnet ist. Das Zweibein kann hierbei — unter Beachtung der vorstehend gemachten Voraussetzungen — durch einen Stab ersetzt werden, dessen Querschnittsfläche F_a so gewählt wird, dass er die selbe Zusammendrückung erleidet wie das Zweibein. Bezeichnet ${}^{A}H_p$ den Horizontalzug rechts von A infolge der Montagebelastung (in Abbildung 7 in der Umlegung in die Aufrissebene dargestellt), so folgt aus dem räumlichen Kräftepolygon die Kraft im Rückverankerungsseil :

$$S_p = {}^{A}H_p \cdot \frac{\cos \bar{\beta}}{\sin (\bar{\varphi}_R + \bar{\beta})} (\operatorname{tg} \varphi_A + \operatorname{tg} \beta) \tag{20}$$

und die Kraft im Pendel :

$$A_p = {}^{A}H_p \cdot \frac{\cos \bar{\varphi}_R}{\sin (\bar{\varphi}_R + \bar{\beta})} (\operatorname{tg} \varphi_R - \operatorname{tg} \varphi_A). \tag{21}$$

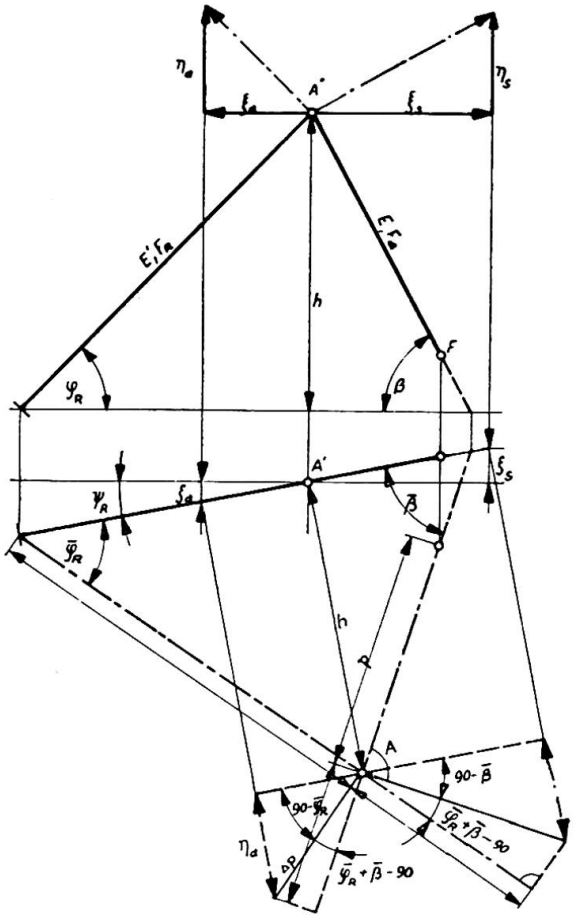

Abb. 7. Bestimmung der Verschiebungskomponenten für die Rückverankerung.

Man erhält sodann nach einiger Zwischenrechnung die drei Komponenten der Verschiebungen des Punktes A zu :

$$\xi_{Ap} = {}^{A}H_p \cdot \frac{\cos \psi_R}{\sin^2 (\bar{\varphi}_R + \bar{\beta})} \cdot \left[\frac{s \cdot \sin \bar{\beta} \cdot \cos \bar{\beta}}{E'F_R} (\operatorname{tg} \varphi_A + \operatorname{tg} \beta) + \frac{p \cdot \sin \bar{\varphi}_R \cdot \cos \bar{\varphi}_R}{E \cdot F_a} (\operatorname{tg} \varphi_R - \operatorname{tg} \varphi_A) \right] \tag{22}$$

$$\eta_{Ap} = - \frac{{}^{A}H_p}{\sin^2 (\bar{\varphi}_R + \bar{\beta})} \left[\frac{s \cdot \cos^2 \bar{\beta}}{E'F_R} (\operatorname{tg} \varphi_A + \operatorname{tg} \beta) - \frac{p \cdot \cos^2 \bar{\varphi}_R}{E \cdot F_A} (\operatorname{tg} \varphi_R - \operatorname{tg} \varphi_A) \right] \tag{23}$$

$$\zeta_{Ap} = - \xi_{Ap} \cdot \operatorname{tg} \psi_R \,. \tag{24}$$

Tritt ausserdem eine Temperaturänderung der Rückverankerung um t° C ein, so ergeben sich die folgenden zusätzlichen Verschiebungskomponenten :

$$\xi_{At} = \varepsilon_t \cdot t \cdot \frac{\cos \psi_R}{\sin (\bar{\varphi}_R + \bar{\beta})} (s \cdot \sin \bar{\beta} - p \cdot \sin \bar{\varphi}_R) \tag{25}$$

$$\eta_{At} = - \varepsilon_t \cdot t \cdot \frac{1}{\sin (\varphi_R + \bar{\beta})} (s \cdot \cos \bar{\beta} + p \cdot \cos \bar{\varphi}_R) \tag{26}$$

$$\zeta_{At} = - \xi_{At} \cdot \operatorname{tg} \psi_R \,. \tag{27}$$

E′ und E bedeuten hierbei die Elastizitätsmoduli von Kabel und Stützbock und F_R die Querschnittsfläche des Kabels.

Zur Ermittlung der Nachgiebigkeit der Pylonenspitzen B für den Fall, dass die Aussenöffnung nicht durch Montagelasten belastet ist, muss zunächst die Horizontalverschiebung Δl eines in A (Abb. 6) starr festgehaltenen Kabels ermittelt werden. Für ein Element ds, das die Längenänderung Δds mit den Verschiebungskomponenten $d\xi$, $d\eta$ und $d\zeta$ erfährt, besteht die einfache geometrische Beziehung :

$$2\,ds \cdot \Delta ds = 2\,dx \cdot d\xi + 2\,dy \cdot d\eta + 2\,dz \cdot d\zeta + d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 . \qquad (28)$$

Daraus wäre $d\xi$ zu berechnen und über die ganze Seitenöffnung zu integrieren. Vernachlässigt man $d\xi^2$ gegen die anderen Grössen der rechten Gleichungsseite, was allerdings nur für nicht zu grosse Pfeiländerungen beim Uebergang von der Ausgangslage in die Endlage zulässig ist, und setzt :

$$\Delta ds = \varepsilon t ds + \frac{ds}{E'F \cos\varphi \cos\bar{\psi}}, \quad y' = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{und} \quad z' = \operatorname{tg}\psi,$$

so wird nach einiger Umformung :

$$\Delta l = \int_0^l d\xi = \varepsilon t \int_0^l \frac{dx}{\cos^2\varphi \cdot \cos^2\bar{\psi}} + \frac{H_p}{E'F} \int_0^l \frac{dx}{\cos^3\varphi \cos^2\bar{\psi}} - \int_0^l \operatorname{tg}\varphi d\eta$$
$$- \int_0^l \operatorname{tg}\psi d\zeta - \frac{1}{2} \int_0^l (\eta'^2 + \zeta'^2)\, dx \qquad (29)$$

Nimmt man als Seilkurve eine Parabel an und entsprechen in der Ausgangslage den Lastkomponenten für den laufenden Meter v_0' und w_0', die Pfeilhöhen f_{v0} und f_{w0} ; während in der Endlage den Lasten v' und w' die Pfeilhöhen f_v und f_w (Abb. 6) zugeordnet sind, so wird für die Aufrissprojektion :

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_l + \frac{4 f_{v0}}{l^2}(l - 2x); \quad d\eta = \frac{4\,\Delta f_v}{l^2}(l - 2x)\, dx ;$$

$$\Delta f_v = f_v - f_{v0} = \frac{l^2}{8}\left(\frac{v'}{H} - \frac{v_0'}{H_0}\right)$$

während für die Grundrissprojektion sinngemäss φ durch ψ und v durch w zu ersetzen ist. Man erhält dann nach einiger Zwischenrechnung den Näherungswert :

$$\Delta l \approx l\left[1 + \operatorname{tg}^2\varphi_l + \operatorname{tg}^2\psi_l + \frac{16}{3 \cdot l^2}(f_{v0}^2 + f_{w0}^2)\right] \cdot \left(\frac{H_p}{\cos\varphi_l \cdot \cos\bar{\psi}_l \cdot E'F} + \varepsilon t\right)$$
$$- \frac{16}{3 \cdot l}\left(\Delta f_v \cdot f_{v0} + \Delta f_w \cdot f_{w0} + \frac{1}{2}\Delta f_v^2 + \frac{1}{2}\Delta f_w^2\right). \qquad (30)$$

Die Verschiebungskomponenten des Punktes B in der X- und Y-Richtung werden dann :

$$\xi_B = \xi_A + \Delta l - (\eta_A - \eta_B)\operatorname{tg}\varphi_l - (\zeta_A - \zeta_B)\operatorname{tg}\psi_l , \qquad (31)$$

$$\eta_B = -\varepsilon_t \cdot t \cdot h_p + H_p \cdot \frac{h_p}{EF_p}\left(\operatorname{tg}\varphi_l + \frac{v' l}{2\,H} + \operatorname{tg}\varphi_l\right). \qquad (32)$$

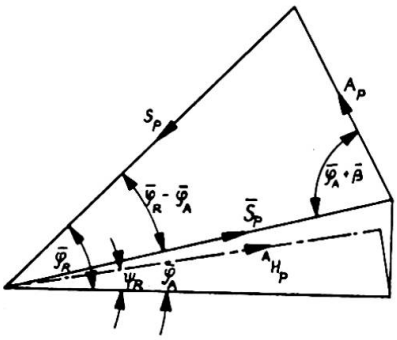

Abb. 8. Räumliches Krafteck zur Ermittlung des Horizontalzuges.

Zur Bestimmung der Verschiebungskomponente in der Z-Richtung müssen bestimmte Annahmen getroffen werden. Für den vorliegenden Fall wird zunächst eine symmetrische seitliche Verformung der beiden Kabel vorausgesetzt und mit gleichem Horizontalzug in den beiden Tragwänden gerechnet. Weichen die tatsächlichen Verhältnisse hiervon ab — wie z.B. bei schräger Hängerführung in Brückenquerrichtung — so muss diese Tatsache durch nachträgliche Einführung dieser Verschiedenheiten berücksichtigt werden, was zweckmässig beim zweiten Iterationsgang erfolgt. Mit

$$\zeta_B = H \cdot \nu_p \left(2 \operatorname{tg} \psi_1 - \frac{2\,\zeta_B}{l} + \frac{w'\,l}{H}\right) + \varepsilon_t \cdot t \cdot b_p$$

wird die gesuchte Verschiebungskomponente :

$$\zeta_B = \varepsilon_t \cdot t \cdot b_p + \frac{H \cdot \nu_p}{1 + 2 \cdot H \frac{\nu_p}{l}} \left(2 \cdot \operatorname{tg} \psi_1 + \frac{w'\,l}{H}\right) \tag{33}$$

ν_p bedeutet hierbei die Federkonstante gegen ein seitliches Verschieben der Pylone und b_p die halbe Pylonenbreite.

Für die drei angenommenen Horizontalzüge des ersten Iterationsganges wird von den Verschiebungskomponenten nur der Anteil $\xi_B = \xi_A + \Delta l$ berücksichtigt und erst für das daraus nach Abbildung 5 ermittelte H^* werden die drei Komponenten nach den Gleichungen (31) bis (33) in die weitere Rechnung eingeführt.

Ist die Pfeiländerung in der Aussenöffnung beim Uebergang von der Ausgangslage in die Endlage verhältnismässig gross, so wird die vorstehende Näherung unbrauchbar. Man kann dann die Horizontalverschiebung Δl aus der Seillänge in dieser Oeffnung bestimmen. Für die Ausgangslage ist diese Seillänge (Abb. 6):

$$L_0 \approx \ell_0 \left[1 + \frac{8}{3\,\ell_0^2} \left(f_{v0}'^2 + f_{w0}'^2\right)\right]$$

wenn für

$$\ell_0 = l_0 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_{l0} + \operatorname{tg}^2 \psi_{l0}\right)$$

gesetzt wird. Ebenso ist für die Endlage :

$$L = L_0 + \Delta L_t + \Delta L_p \approx \ell \left[1 + \frac{8}{3 \cdot \ell^2} \left(f_v'^2 + f_w'^2\right)\right] \tag{35}$$

daraus ist :

$$\ell \approx \frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{8}{3} \left(f_v'^2 + f_w'^2\right)}$$

und die horizontale Stützweite der Endlage :

$$l = \ell \sqrt{1 - \mathrm{tg}^2 \varphi_l - \mathrm{tg}^2 \psi_l} \, .$$

Man erhält schliesslich die gesuchte Verschiebung der Pylonenspitze aus :

$$\Delta l = l - l_0 \, .$$

Sind die Aussenöffnungen durch Montagelasten belastet oder ist der Durchhang und seine Aenderung so beträchtlich, dass beide Näherungen ungenaue Werte ergeben, so wird man — wie für die Mittelöffnung — das Iterationsverfahren auch für die Aussenöffnung anwenden.

Zahlenbeispiel

Dieses wurde für den Montagezustand (Versteifungsträgermontage) einer Hängebrücke mit den Abmessungen und Belastungen von Abbildung 9 durchgerechnet. Es wurde der für das Iterationsverfahren ungünstigere Fall eines unsymmetrischen Montagefortschrittes (Voreilen der Montage in der rechten Brückenhälfte) angenommen. Der Gang der Berechnung soll hier kurz geschildert werden.

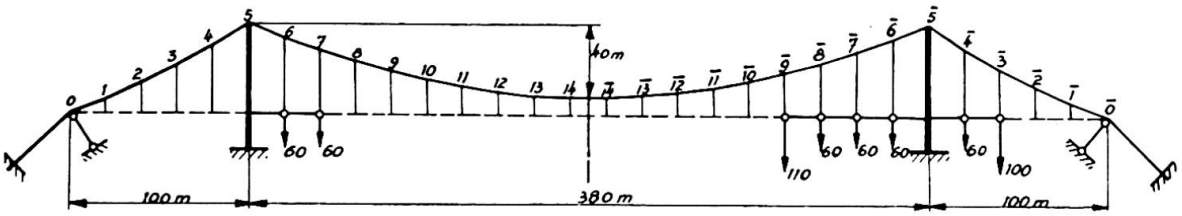

Abb. 9. Annahme des Zahlenbeispieles :
Die lotrechte Belastung der Ausgangslage beträgt 27 t je Knoten.

1. Für die drei Horizontalzüge 800 t, 900 t und 1 000 t wird unter Vernachlässigung der Kabeldehnung und der hier nur kleinen Querlasten der erste Iterationsschritt durchgerechnet, wobei die — durch Schrägstellung der Hängeseile verursachten — Längskräfte nur roh geschätzt wurden. Da die Konvergenz des Iterationsverfahrens in der Aussenöffnung schlechter ist, als in der Mittelöffnung, wird für erstere sogleich noch ein zweiter Rechnungsgang durchgeführt, während für die Mittelöffnung die Werte aus dem ersten Rechnungsgang beibehalten werden. Es genügt den zweiten Gang für nur zwei Horizontalzüge durchzuführen, da im vorliegenden Fall das zu erwartende H im wesentlichen durch die Mittelöffnung bestimmt wird. Für beide Rechnungsgänge kann der Einfluss der Kabeldehnung angenähert unter Vernachlässigung des Kabeldurchhanges ermittelt werden. Die Genauigkeit des Rechenschiebers ist völlig ausreichend. Die angegebene zeichnerische Ermittlung des Horizontalzuges für die einzelnen Oeffnungen wird anschliessend vorgenommen. Man erhält für die drei Oeffnungen :

$$H_L = 910 \text{ t} \, , \qquad H_M = 926 \text{ t} \, , \qquad H_R = 957 \text{ t} \, .$$

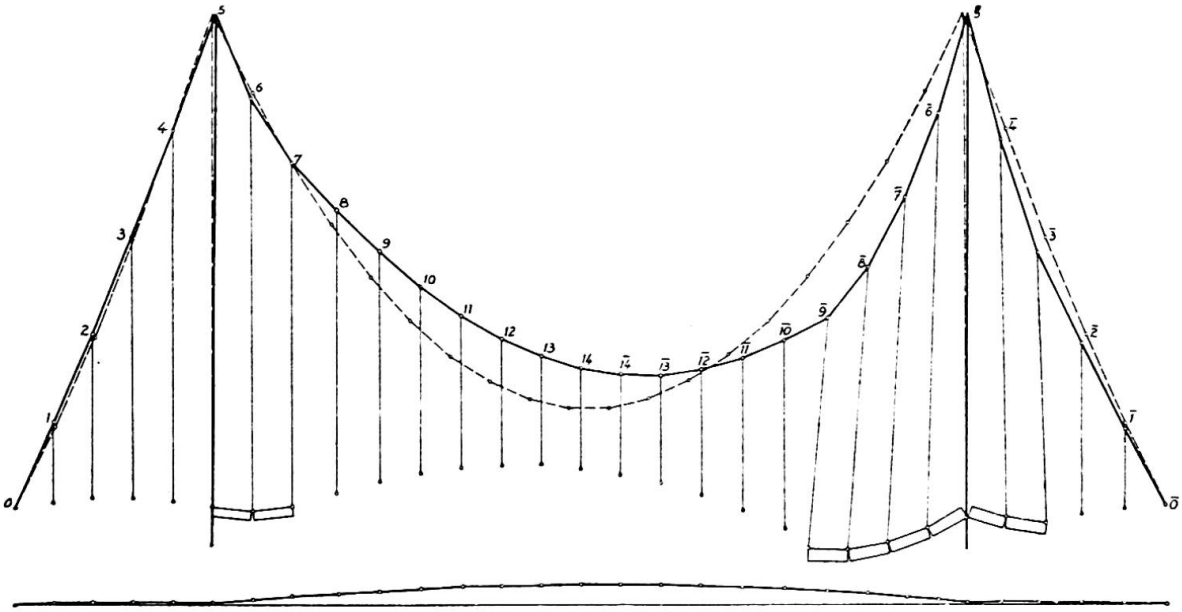

Abb. 10. Zahlenbeispiel : Räumliche Ausgangs- und Endlage des Kabels (Höhen und Verschiebungen sind fünffach verzerrt).

Die mit diesen Horizontalzügen ermittelten Verschiebungen der Ankerpunkte und die Verschiebungskomponenten η und ζ der Pylonenspitzen gehen nunmehr als feste Randbedingungen in den zweiten Iterationsgang ein.

2. Vor Beginn der zweiten Iteration werden — zur Bestimmung der Schräglage der Hänger und der daraus entstehenden Horizontallasten am Kabel — die Aenderungen der Feldweiten (Δa) bestimmt. Die diesbezüglichen Annahmen der ersten Iteration können so berichtigt werden. Der zweite Iterationsgang wird nun (auf 4 Stellen genau) durchgeführt, wobei alle Einflüsse erfasst werden. Im vorliegenden Fall ergab sich, dass — trotz der angenommenen starken Unsymmetrie des Montagefortschrittes — bereits die Genauigkeit dieses Rechnungsganges praktisch ausreicht. Es erwies sich als zweckmässig, diesen Iterationsgang nur mehr mit dem aus der ersten Iteration bestimmten Horizontalzug H* durchzurechnen und die nochmalige graphische Bestimmung des vorhandenen Horizontalzuges nach Abbildung 5 so vorzunehmen, dass man an Stelle der Kurven ΔM und $\Delta L + \Delta R$ nur mehr mit den Tangenten an der Stelle H* arbeitet, deren Neigung parallel zu den entsprechenden Tangenten and die beim ersten Iterationsschritt ermittelten Kurven angenommen wird.

In Abbildung 10 ist die räumliche Seillage (Ausgangs- und Endlage) für das behandelte Beispiel eingetragen. Man erkennt, dass die einzelnen Knotenpunkte beträchtliche Horizontalverschiebungen erleiden und dass insbesondere der Einfluss, der aus der Schräglage der Hänger entstehenden Horizontalkräfte nicht vernachlässigt werden darf.

Résumé

Ce mémoire traite du cas général du câble suspendu en deux ou plusieurs points élastiques sous l'effet de charges spatiales quelconques, avec application particulière concernant l'étude du montage des ponts

suspendus (câbles et efforts horizontaux). L'auteur développe une méthode par itération donnant une solution rapide pour tous les cas rencontrés en pratique. La position du câble se calcule en admettant des efforts horizontaux; ceux-ci seront alors déterminés graphiquement. Un exemple numérique indique le procédé à suivre pour l'application de cette méthode.

Zusammenfassung

Die Arbeit behandelt den allgemeinen Fall des an zwei oder mehreren nachgiebigen Punkten aufgehängten Seiles unter beliebiger Belastung im Raume und die spezielle Anwendung des entwickelten Berechnungsganges auf die Untersuchung der Montagezustände (Kabellagen und Horizontalzüge) von Hängebrücken. Es wird eine Iterationsverfahren entwickelt, das für alle praktisch vorkommenden Fälle sehr rasch zum Ziele führt. Die Bestimmung der Seillage erfolgt hierbei für angenommene Horizontalzüge. Der vorhandene Horizontalzug wird sodann durch ein graphisches Verfahren bestimmt. Ein Zahlenbeispiel zeigt den praktischen Gang der Rechnung und die Brauchbarkeit der Methode.

Summary

This paper deals with the general case of a cable suspended from two or more elastic points, under the effect of any kind of spatial loads, applying particularly to the study of erecting suspension bridges (cables and horizontal stresses). The author explains an iteration method which gives a rapid solution to all the cases encountered in actual practice. The position of the cable is calculated by assuming there are horizontal stresses; these are then determined graphically. A numerical example indicates the process to be followed in applying this method.