Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Rubrik: Ic: Strength and stability of thin walled structures

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ic1

Théorie et essais de voilement de tôles sollicitées par des tensions longitudinales à distribution égale

Theorie und Versuche über das plastische Ausbeulen von Rechteckplatten unter gleichmässig verteiltem Längsdruck

Theorie and tests concerning buckling of plates stressed by equally distributed longitudinal stresses

P. P. BIJLAARD
Delft

C. F. KOLLBRUNNER
Döttingen

F. STÜSSI
Zürich

Theoretische Grundlagen

Wir legen unserer Theorie des plastischen Ausbeulens die Theorie der örtlichen plastischen Verformungen von P. P. Bijlaard ([1]) zu Grunde; damit lassen sich für eine längsgedrückte Platte (Abb. 1) mit $\sigma_x > \sigma_l$ die Formänderungsgleichungen

$$M_x = -N\left(A_r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -N\left(C_r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = N \cdot 2\, F_r \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}\,.$$

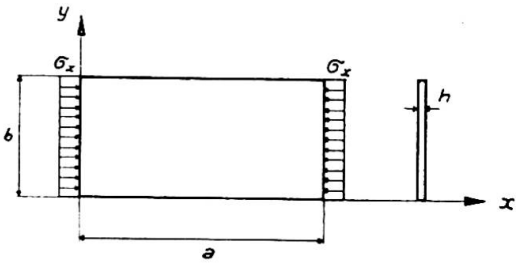


Abb. 1.

anschreiben. Dabei bedeutet N die Plattensteifigkeit im elastischen Bereich,

$$N = \frac{E\mathcal{J}}{1-\nu^2} = \frac{E \cdot 1 \cdot h^3}{12\,(1-\nu^2)}$$

während die Abminderungszahlen A_r, $B_r = C_r$, D_r und F_r die Abnahme der Steifigkeit gegenüber den verschiedenen hier auftretenden Beanspruchungsarten nach Ueberschreiten der Proportionalitätsgrenze kennzeichnen. Sie

---

([1]) P. P. Bijlaard, *Theory of local plastic deformations* (*Abh. I. V. B. H.*, Band 6).
P. P. Bijlaard, *Theory of the plastic stability of thin plates* (*Abh. I. V. B. H.*, Band 6).
P. P. Bijlaard, *Some contributions to the theory of elastic and plastic stability* (*Abh. I. V. B. H.*, Band 8).

sind hier, im Interesse einer einheitlichen Darstellung des elastischen und des plastischen Beulbereiches und in Abweichung gegenüber der ursprünglichen Darstellung durch die Zahlen A, B = C, D und F ([1]) auf die Plattensteifigkeit N und nicht auf EJ bezogen; gegenüber der ursprünglichen Darstellung erscheinen diese reduzierten Abminderungswerte somit hier mit $(1 - \nu^2)$ multipliziert, also

$$(A_r, B_r, C_r, D_r, F_r) = (1 - \nu^2)\ (A, B, C, D, F)\ .$$

Im elastischen Bereich nehmen die reduzierten Abminderungszahlen die Werte

$$A_r = D_r = 1\ ,$$
$$B_r = C_r = \nu\ ,$$
$$2\,F_r = 1 - \nu$$

an.

Wir beschränken uns hier, mit Rücksicht auf die heute vorliegenden Versuchsergebnisse, auf das Ausbeulen unter gleichmässig verteiltem Längsdruck σ_x. Setzen wir für diesen Fall die Formänderungsgleichungen (1) in die Gleichgewichtsbedingung eines Plattenelementes,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \sigma_x \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ , \tag{2}$$

ein, so erhalten wir die Beulgleichung für den plastischen Bereich (für $\sigma_x =$ Konst., $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$)

$$\boxed{A_r \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,(B_r + 2\,F_r)\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + D_r \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{\sigma_x \cdot h}{N} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} \tag{3}$$

Die Lösung dieser Beulgleichung ist von der Lagerungsart der Längsränder abhängig.

a. Gelenkig gelagerte Längsränder.

Bei beidseitig frei drehbaren oder gelenkig gelagerten Längsrändern lautet der Lösungsansatz der Beulgleichung

$$w = w_0 \cdot \sin\frac{n\,\pi x}{a} \cdot \sin\frac{n\,\pi y}{b}$$

und wir erhalten die kleinste kritische Spannung mit $n = 1$ zu

$$\sigma_{x_{kr}} = \frac{N}{h}\left[\frac{m^2\pi^2}{a^2} \cdot A_r + \frac{\pi^2}{b^2} \cdot 2 \cdot (B_r + 2\,F_r) + \frac{a^2\pi^2}{b^4 m^2} \cdot D_r\right]$$

oder mit der Abkürzung

$$\beta^2 = \frac{m^2 \cdot b^2}{a^2}$$

zu

$$\boxed{\sigma_{x_{kr}} = \left[A_r\beta^2 + 2\,(B_r + 2\,F_r) + \frac{D_r}{\beta^2}\right]\frac{\pi^2 N}{h \cdot b^2}} \tag{4}$$

Im elastischen Bereich wird mit der Schreibweise

$$\sigma_{kr} = k \cdot \frac{\pi^2 N}{h \cdot b^2} = k \cdot \sigma_E$$

der Klammerausdruck zur Beulzahl k,

$$k_{el} = \beta^2 + 2{,}00 + \frac{1}{\beta^2} \; ; \tag{5a}$$

für den plastischen Bereich haben wir somit eine abgeminderte Beulzahl k,

$$\boxed{k = A_r \beta^2 + 2\,(B_r + 2\,F_r) + \frac{D_r}{\beta^2} \, ,} \tag{5 b}$$

erhalten.

Für die Konstruktionspraxis ist besonders der Kleinstwert von k von Interesse; wir erhalten diesen Kleinstwert k_{min} für

$$2\,A_r \beta - 2\,\frac{D_r}{\beta^3} = 0 \, ,$$

$$\beta^2 = \sqrt{\frac{D_r}{A_r}}$$

zu

$$\boxed{k_{min} = 2\sqrt{A_r \cdot D_r} + 2\,(B_r + 2\,F_r)} \tag{5 c}$$

Eine übersichtliche und für die Konstruktionspraxis bequeme Darstellung des plastischen Ausbeulens erhalten wir, in Analogie zur Knickspannungslinie des zentrisch gedrückten Stabes, durch die Beulspannungslinie, die im elastischen Bereich durch die Beziehung

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

gegeben ist. Aus der Gleichsetzung

$$\frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = k_{el} \cdot \frac{\pi^2 \cdot N}{h \cdot b^2}$$

finden wir die ideelle Schlankheit der Platte zu

$$\lambda = \frac{b}{h} \sqrt{\frac{12 \cdot (1 - \nu^2)}{k_{el}}} \, . \tag{6}$$

Es liegt nun nahe, auch für das plastische Ausbeulen einen « *Beulmodul* » T_B durch den Ansatz

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot T_B}{\lambda^2} \tag{7}$$

zu definieren, den wir, ausgehend von k_{min} der Gleichung 5c, aus der Gleichsetzung

$$\frac{\pi^2 \cdot T_B}{\lambda^2} = k_{min} \cdot \frac{\pi^2 N}{h \cdot b^2}$$

und durch Einführen des Schlankheitsgrades nach Gleichung 6 zu

$$T_B = k_{min} \cdot \frac{E}{k_{el}} \tag{8}$$

bestimmen können. Für den betrachteten Fall der frei drehbaren Längsränder erhalten wir mit k_{min} nach Gleichung 5c und mit dem entsprechenden Mindestwert $k_{el} = 4{,}00$ für den elastischen Bereich den Beulmodul T_B zu

$$\boxed{T_B = 0{,}50 \left[\sqrt{A_r \cdot D_r} + B_r + 2\,F_r\right] \cdot E} \tag{8 a}$$

oder

$$\boxed{T_B = 0{,}455 \left[\sqrt{A \cdot D} + B + 2\,F\right] \cdot E} \tag{8 b}$$

b. Starr eingespannte Längsränder :

Für beidseitig starr eingespannte Längsränder kann der Beulwert k_{el} für den elastischen Bereich in Analogie zu Gleichung 5*a* angeschrieben werden zu (²)

$$k_{el} = \beta^2 + 2{,}39 + \frac{5.24}{\beta^2} \tag{9 a}$$

Wenn auch genau genommen diese Zahlenwerte für einen bestimmten Wert von β ($\beta = 1{,}5$) ermittelt worden sind und die Form der Beulfläche hier von β abhängig ist, so gilt Gleichung 9*a* doch mit praktisch mehr als ausreichender Genauigkeit auch für andere Werte von β und sie darf insbesondere auch auf den plastischen Bereich übertragen werden. Damit erhalten wir

$$k = A_r \cdot \beta^2 + 2{,}39\,(B_r + 2\,F_r) + \frac{5{,}24 \cdot D_r}{\beta^2} \tag{9 b}$$

k wird zum Kleinstwert für

$$\beta^2 = 2{,}29 \sqrt{\frac{D_r}{A_r}}$$

und es ist

$$k_{min} = 4{,}58 \sqrt{A_r \cdot D_r} + 2{,}39\,(B_r + 2\,F_r) \tag{9 c}$$

Der Beulmodul T_B ergibt sich für diesen Fall mit min. $k_{el} = 6{,}97$ zu

---

(²) F. Stüssi, *Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten* (*Abh. I. V. B. H.*, Band 8).

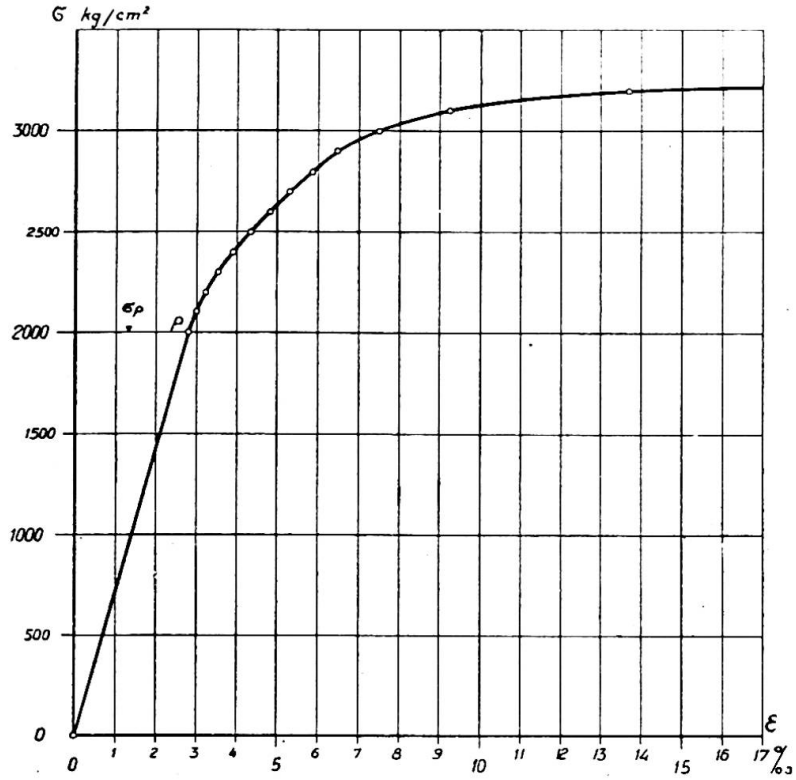


Abb. 2. Mittleres Spannungs - Dehnungs - Diagramm von Avional-M Platten.

$$\boxed{T_B = \left[0{,}657\sqrt{A_r \cdot D_r} + 0{,}343\,(B_r + 2F_r)\right]E} \qquad (8\,c)$$

oder

$$\boxed{T_B = \left[0{,}598\sqrt{A \cdot D} + 0{,}312\,(B + 2\,F)\right] \cdot E} \qquad (8\,d)$$

Genau so, wie der Knickmodul T_k des Druckstabes von der Querschnittsform abhängig ist, so ist hier der Beulmodul von der Lagerungsart der Längsränder abhängig. Für Platten mit einem gelenkig gelagerten und einem starr eingespannten Längsrand darf der Beulmodul genau genug als Mittelwert der beiden durch die Gleichungen 8*a* und 8*b* bestimmten Werte angenommen werden.

Versuchsergebnisse

a. Frühere Versuche :

Diese theoretischen Ergebnisse seien zunächst mit den früheren Versuchen von C. F. Kollbrunner ([3]) verglichen. Diese Beulversuche ($\sigma_x =$ Konst.) wurden an Platten aus Avional M der Aluminium Industrie A. G. Neuhausen mit $E = 715$ t/cm² durchgeführt. Das mittlere Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist in Abb. 2 aufgetragen. Die daraus nach der Theorie

---

([3]) C. F. Kollbrunner, *Das Ausbeulen der auf einseitigen, gleichmässig verteilten Druck beanspruchten Platten im elastischen und plastischen Bereich* (*Mitteil. a. d. Institut f. Baustatik an der E. T. H.*, Zürich, Nr. 17).

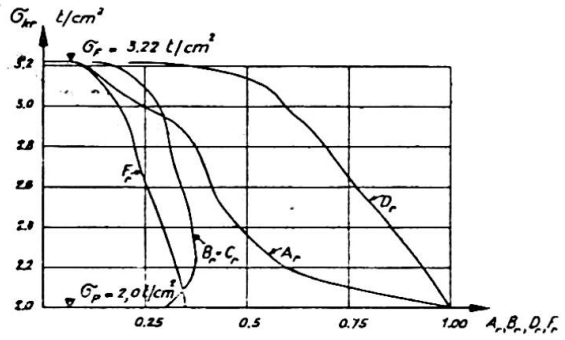


Abb. 3. Abminderungszahlen.

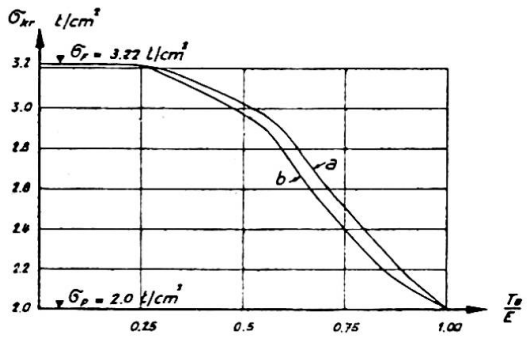


Abb. 4. Beulmodul.

von P. P. Bijlaard berechneten Abminderungszahlen A_r, $B_r = C_r$, D_r, F_r sind aus Abb. 3 ersichtlich, während der Beulmodul T_B für die beiden Lagerungsarten nach den Gleichungen 8*a* und 8*c* in Abb. 4 dargestellt ist.

Die folgende Tabelle I enthält die Versuchsmittelwerte von σ_{kr} für Versuche im elastischen und plastischen Bereich, geordnet nach den aus Gleichung 6 berechneten Schlankheiten λ und für die drei Lagerungsarten

a : beidseitig gelenkig,
b : beidseitig starr eingespannt,
c : einseitig gelenkig, einseitig starr eingespannt.

σ_{kr}	*b*	*h*	λ	Lagerung	Tab. Nr.
t/cm²	cm	cm			
2,924	4,4	0,2	27,6	*b*	10
2,733	5,3	0,2	37,6	*c*	9
2,116	6,2	0,2	51,2	*a*	6
2,024	10,2	0,3	56,2	*a*	5
1,936	9,4	0,2	58,9	*b*	11
1,246	10,3	0,2	73,0	*c*	8
0,939	10,2	0,2	84,3	*a*	5
0,732	20,3	0,3	96,0	*c*	7
0,683	6,2	0,1	102,4	*a*	6
0,474	19,4	0,2	121,5	*b*	12

TABELLE I.

Zur Orientierung sind in Tabelle I auch die Tabellennummern des Versuchsberichtes ([3]) angegeben.

Abb. 5 enthält den Vergleich dieser Versuchswerte mit den nach Gleichung 7 berechneten Beulspannungslinien.

b. NEUE VERSUCHE :

Da für die früheren Versuche nur eine Belastungseinrichtung (Hebelmaschine) beschränkter Leistungsfähigkeit ($P_{max} \cong 6$ t) zur Verfügung stand und auch die Ausführung der Führungselemente der Platten nicht voll befriedigte, wurde am Institut für Baustatik an der E. T. H. (Abteilung Stahlbau und Holzbau, F. Stüssi) in Zusammenarbeit mit der Technischen

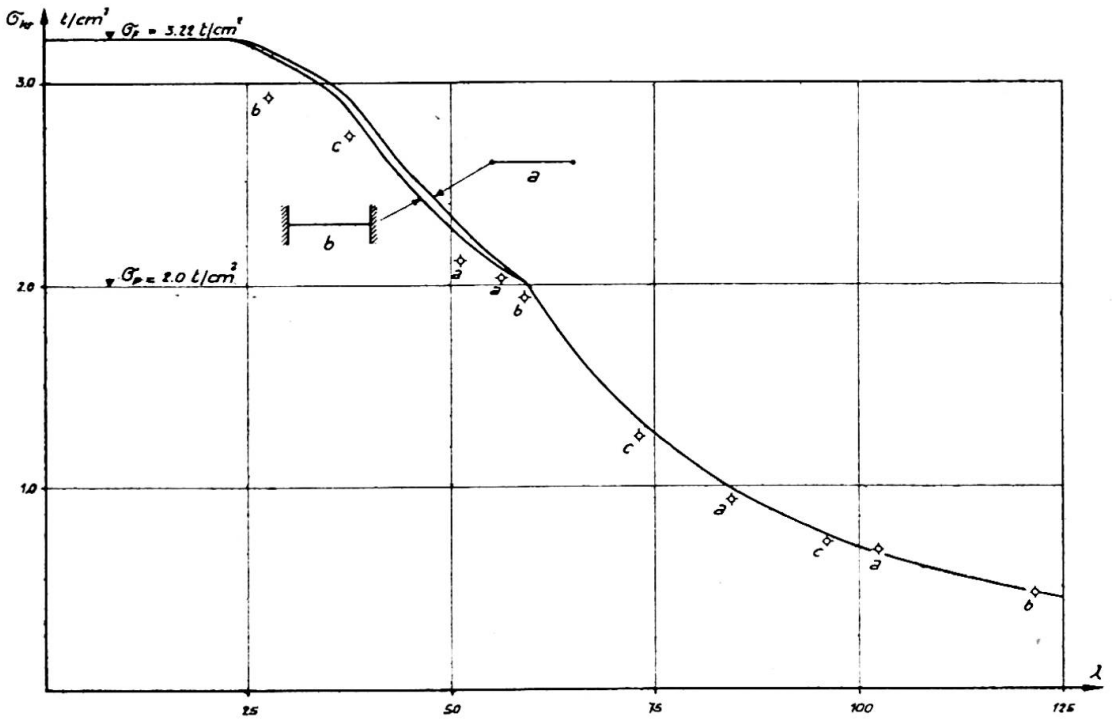


Abb. 5. Vergleich der Versuchswerte mit den berechneten Beulspannungslinien.

Kommission des Verbandes der Schweiz. Brückenbau- und Stahlhochbau-Unternehmungen (T. K. V. S. B. Präsident C. F. Kollbrunner) eine neue verbesserte und leistungsfähigere Hebelmaschine mit $P_{max} = 25$ t (Abb. 6

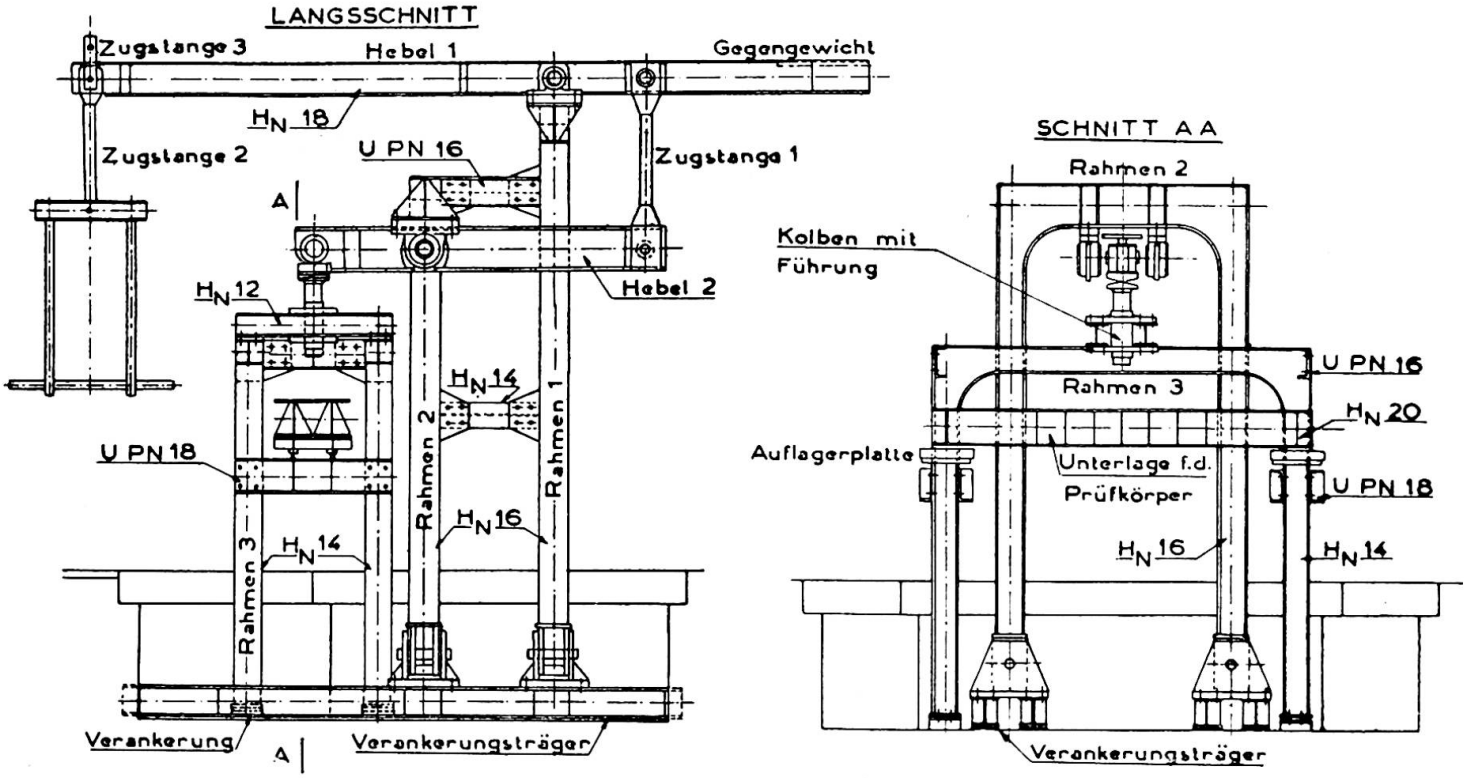


Abb. 6. Hebelmaschine von 25 t Leistungsfähigkeit.

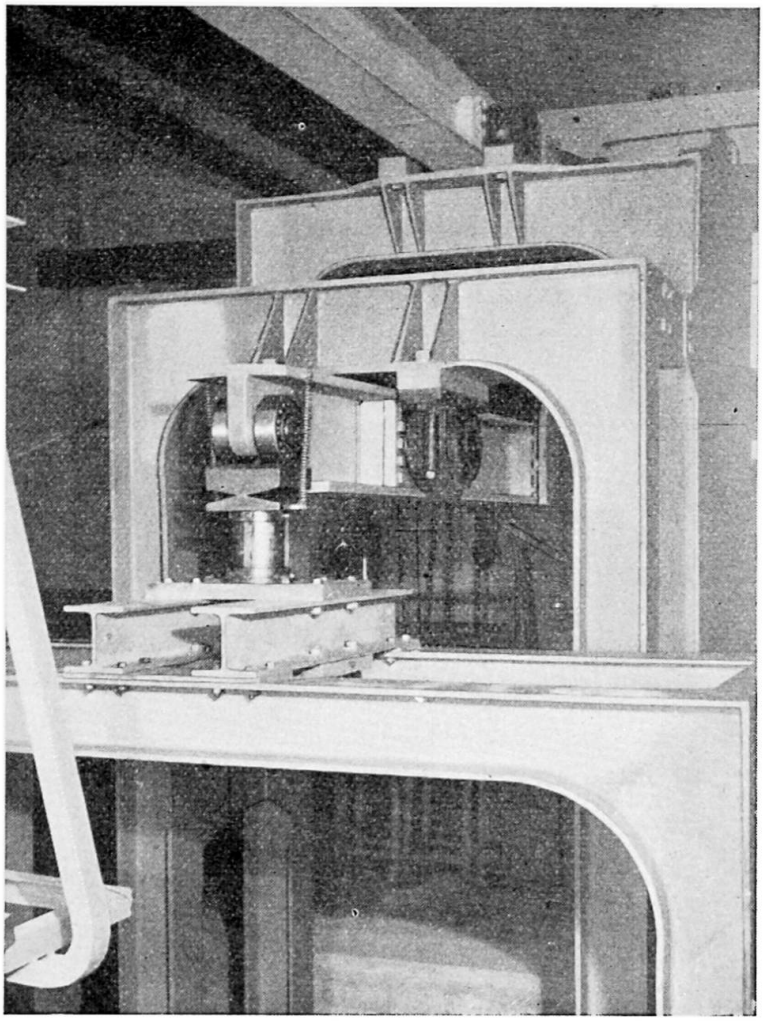


Abb. 7. Hebelmaschine von 25 t Leistungsfähigkeit.

u. 7) aufgestellt und es wurden auch verbesserte Plattenführungen (Abb. 8) und Versuchseinrichtungen entwickelt.

Die Einzelheiten dieser neuen Versuchseinrichtungen wurden von Dipl. Ing. M. Walt entworfen, der auch zusammen mit Mechaniker E. Peter die neuen Versuche durchführte.

Zunächst wurden aus von den früheren Versuchen her noch vorhandenen Platten (Avional M) einige Versuchsreihen mit $\sigma_x =$ Konst. für die beiden Lagerungsarten *a* und *b* durchgeführt, deren Ergebnisse in Tabelle 2 zusammen gestellt sind.

In Abb. 9 sind diese Versuchswerte mit den theoretischen Beulspannungen verglichen.

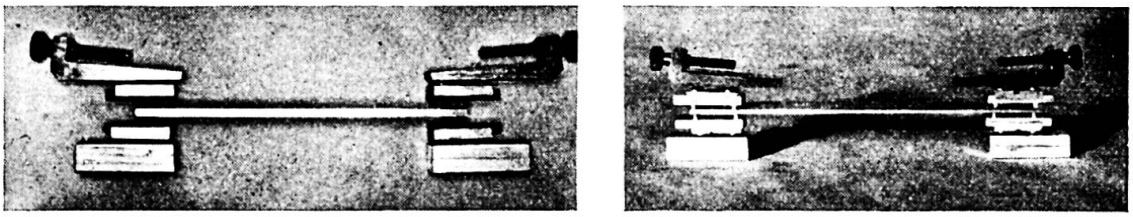


Abb. 8. Neue verbesserte Plattenführungen.

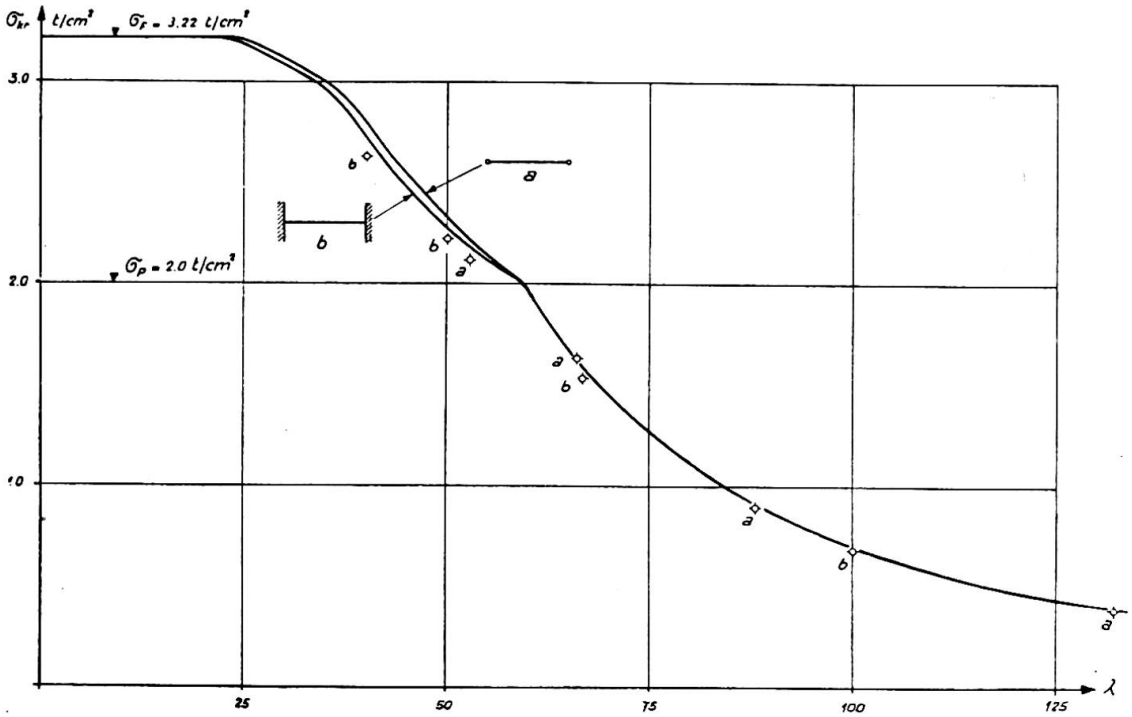


Abb. 9. Vergleich der Versuchswerte mit den theoretischen Beulspannungen.

Lagerung	b	h	σ_{kr}	λ
	cm	cm	t/cm²	
a	16	0,2	0,386	132,2
		0,3	0,892	88,1
		0,4	1,625	66,1
		0,5	2,112	52,9
b	16	0,2	0,680	100,2
		0,3	1,530	66,8
		0,4	2,219	50,1
		0,5	2,630	40,1

TABELLE 2.

Schlussfolgerungen

Für den untersuchten Fall von gleichmässig verteiltem Längsdruck σ_x ist die Uebereinstimmung von Theorie und Versuch bemerkenswert gut. Damit darf auch die Theorie der örtlichen plastischen Verformungen von P. P. Bijlaard als gesichert angesehen werden.

Ueber unsere weiteren gemeinsamen Untersuchungen, die sich besonders auch auf ungleichmässig verteilten Druck beziehen werden, soll am Kongress selbst berichtet werden.

Résumé

Pour le voilement des tôles sollicitées par des tensions longitudinales à distribution égale, les tensions théoriques de voilement sont calculées en se basant sur la théorie des déformations locales plastiques de P. P. Bijlaard et elles sont présentées sous forme de la courbe des tensions de voilement, c'est-à-dire en fonction d'un coefficient d'élancement idéal λ. D'ailleurs, en analogie du module de flambage, un module de voilement T_B est introduit, dont la grandeur pour un matériel déterminé et une répartition de charge déterminée ne dépend pas seulement de la tension critique, mais aussi des conditions au bord de la tôle. Les tensions de voilement calculées présentent notamment une bonne concordance avec les résultats d'épreuves antérieures et récentes.

Zusammenfassung

Für das Ausbeulen von durch gleichmässig verteilten Längsdruck beanspruchten Platten werden die theoretischen Beulspannungen auf Grund der Theorie der örtlichen plastischen Verformungen von P. P. Bijlaard berechnet und in Form der Beulspannungslinie, d. h. in Funktion eines ideellen Schlankheitsgrades λ dargestellt. Ferner wird in Analogie zum Knickmodul ein Beulmodul T_B eingeführt, dessen Grösse für gegebenes Material und gegebene Belastung nicht nur von der kritischen Spannung, sondern auch von den Randbedingungen der Platte abhängt. Die berechneten Beulspannungen zeigen bemerkenswert gute Uebereinstimmung mit älteren und neuen Versuchsergebnissen.

Summary

For the buckling of plates stressed by equally distributed longitudinal stresses the theoretical buckling tensions are calculated on the basis of the theory of local plastic torsions of P. P. Bijlaard and depicted in the form of the buckling pressure-curve, i.e. in function of an ideal ratio of slenderness λ. Furthermore, in analogy to the modulus of buckling, a buckling-modulus T_B is introduced, the extent of which, for a given material and a given load distribution, does not depend only on the critical tension but also on conditions at the edge of the plate. The buckling tensions calculated show a noteworthy resemblance to previous and recent results of tests.

Ic2

Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies

Beitrag zum Studium des Ausbeulens ausgesteifter Bleche

A contribution to the study of buckling stiffened plates

CH. DUBAS
Ingénieur, Bulle

I. Le voilement

Dans le problème du voilement, il faut tenir compte des charges transversales qui proviennent des *déformations possibles* de la tôle sollicitée dans son plan par des efforts de bout. Nous pouvons admettre ces charges transversales, fonction des flèches que nous appellerons w_0. Elles agissent alors comme des charges ordinaires d'une plaque et produisent en conséquence des flèches que nous désignerons par w_1.

Au moment où $w_0 = w_1$, la tôle fléchit par suite des efforts de bout. Si l'on multiplie à cet instant les charges transversales admises par un facteur quelconque d'affinité, on trouve des flèches w_0 et w_1 multipliées par ce même facteur d'affinité, la condition $w_0 = w_1$ restant toujours exacte. Puisque la flèche possède à la fois plusieurs valeurs, elle est indéterminée et l'équilibre est instable : la tôle se voile. La charge de bout correspondant à $w_0 = w_1$ est donc la charge critique, exprimée généralement au moyen du facteur de voilement k.

La méthode exposée est la méthode bien connue d'Engesser-Vianello, utilisée couramment pour le calcul des barres au flambement. Dans ce dernier cas, il est vrai, on ne tient pas compte de charges transversales, mais directement de moments fléchissants.

II. La plaque fléchie

1. Cas général

Les charges transversales une fois admises, nous avons à calculer les flèches qui en découlent. C'est le problème de la plaque fléchie. L'exactitude dont nous avions besoin aurait exigé des calculs trop longs en utili-

sant les méthodes classiques (séries de Fourier ou autres, différences selon Marcus, ...). Ci-après la méthode employée :

Considérons la relation bien connue entre les charges transversales et les flèches d'une plaque :

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}} \qquad (1)$$

où $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ est la rigidité de la plaque à la flexion, par unité de largeur. Cette équation différentielle (1) correspond à celle de la flexion des poutres :

$$\boxed{\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{E\mathcal{J}}} \qquad (2)$$

qui provient elle-même de la combinaison des équations fondamentales :

$$\boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} = -p} \quad (3) \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{E\mathcal{J}}} \quad (4)$$

Remplaçons la plaque par une série de poutres longitudinales (parallèles à l'axe des x) et de poutres transversales (parallèles à l'axe des y). Alors, d'après (2), le terme $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ n'est rien d'autre que la charge $\frac{p_x}{D}$ des poutres longitudinales et $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$, la charge $\frac{p_y}{D}$ des poutres transversales, à la condition que les flèches de la plaque coïncident parfaitement avec celles des poutres de remplacement :

$$\boxed{w_x = w} \quad (5) \quad \text{et} \quad \boxed{w_y = w} \quad (6)$$

Quant au terme $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$, il représente une charge p_{xy} des poutres longitudinales telle que les moments M_{xy} produits soient égaux aux moments M_y des poutres transversales chargées avec les p_y :

$$\boxed{M_{xy} = M_y} \qquad (7)$$

En effet, selon (3), nous avons : $\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x^2} = -p_{xy} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}$ et comme $\frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} = -\frac{M_y}{D}$ d'après (4), alors $\frac{p_{xy}}{D} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ en tenant compte de (6).

En chargeant les poutres transversales avec des charges p_{yx}, on trouverait de même : $\frac{p_{xy}}{D} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{p_{xy}}{D}$, à la condition que :

$$\boxed{M_{yx} = M_x} \qquad (8)$$

Si nous introduisons les valeurs de $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ dans l'équation différentielle (1), nous trouvons :

$$\boxed{p_x + 2\,p_{xy} + p_y = p} \qquad (9)$$

Nous avons donc maintenant remplacé la plaque par un système de poutres entre-croisées. Pour le résoudre, nous ne disposons que d'une seule condition d'équilibre (9), de sorte que le problème est doublement hyperstatique. Mais nous disposons aussi de quatre conditions exprimant les déformations mutuelles des poutres de remplacement. En réalité (5) et (6) ne forment qu'une seule condition : $w_x = w_y$, de même que (7) et (8), puisque $p_{xy} = p_{yx}$. Nous pouvons donc écrire en chaque point de croisement des poutres longitudinales et transversales trois équations pour les trois inconnues p_x, p_{xy}, p_y.

Nous choisissons pour commencer le réseau des poutres de remplacement et nous appliquons aux poutres de bord ce que nous venons de dire. On en déduit alors les valeurs correspondantes de p_x, p_{xy} et p_y. Par exemple, si la plaque est appuyée sur son pourtour, les poutres de bord ne supportent aucune charge.

Les p_x, p_{xy}, p_y doivent maintenant être déterminés en tous les points de croisement non situés sur le pourtour de la plaque. Nous pouvons très bien faire agir l'un après l'autre les p_x aux différents points. Pour chacun d'eux, nous calculerons les w_x correspondants des poutres longitudinales. Nous connaissons par conséquent les w_y des poutres transversales, puisque $w_x = w_y$. Nous écrivons alors que les p_y inconnus produisent les w_y trouvés, ce qui nous donne une série d'équations. En les résolvant nous obtenons les valeurs des p_y. On procède de même avec les moments $M_x = M_{yx}$ et l'on trouve les p_{xy}. Nous connaissons donc à cet instant les p_x, $2\,p_{xy}$, p_y en tous les points et par conséquent leur somme p. En superposant l'influence des p_x inconnus aux divers points et en introduisant les valeurs connues des charges réelles de la plaque p, on obtient une série d'équations, qui une fois résolues, donnent les p_x aux divers points. De là on calcule aisément les flèches $w_x = w$, qui seules nous intéressent dans les calculs au voilement. Le même raisonnement peut se faire, bien entendu, en partant des p_y, des p_{xy}, des M_x, des M_y ou même directement des w.

2. Cas particulier de la plaque appuyée seulement sur son pourtour et fléchie par des charges réparties sinusoïdalement dans le sens longitudinal

Dans ce cas les p_y, M_y *et* w_y de toutes les poutres transversales sont des sinusoïdes parallèlement à l'axe des x. Nous n'avons donc plus que la poutre transversale médiane à considérer (sommet des sinusoïdes). Puisque $w_x = w_y$, les p_x sont également des sinusoïdes, qui valent, selon (2), $\frac{\pi^4}{a^4} w_y$. De même les p_{xy} valent $\frac{\pi^2}{a^2} M_y$, d'après (3). La relation (9) nous donne alors :

$$\boxed{p = \frac{\pi^4}{a^4} D \cdot w_y + 2\frac{\pi^2}{a^2} M_y + p_y} \qquad (10)$$

où w_y et M_y sont les moments et les flèches de la poutre transversale médiane dus à p_y. De là, le calcul se poursuit comme dans le cas général en superposant l'influence des divers p_y inconnus.

3. Observations

Dans les applications numériques, on exécutera tous les calculs des poutres de remplacement pour des charges, des moments ou des flèches unitaires. Ceci fait, le calcul des p d'une plaque rectangulaire de dimensions quelconques est extrêmement rapide : il suffit d'une simple superposition. Il ne reste plus alors qu'à résoudre un système d'équations contenant autant d'inconnues que de points de croisement, comme avec le procédé de Marcus, bien moins précis et par conséquent bien moins avantageux. Nous avons de plus exécuté tous les calculs sous forme de tables, en utilisant les charges nodales

$$K_m = \frac{\Delta x}{12} (p_{m-1} + 10\, p_m + p_{m+1}) ,$$

ce qui nous a permis en plus de ramener les charges concentrées de la plaque à des charges réparties équivalentes p.

Outre le calcul des plaques, de nombreuses applications de la méthode exposée sont possibles, notamment pour le calcul des tranches minces, des voiles et des barrages arqués. On remarquera d'ailleurs que la seule différence d'avec le calcul élémentaire des plaques et des barrages arqués par bandes entre-croisées provient de ce que nous avons tenu compte du terme de torsion.

III. Les charges transversales dues à la flexion latérale d'une âme de poutre pleine raidie longitudinalement. Le coefficient de voilement k

La charge transversale due à la flexion latérale d'une tôle d'épaisseur h soumise à des contraintes σ_x seulement vaut :

$$\boxed{p_t = \sigma_x \cdot h \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}} \tag{11}$$

L'effort dû au raidisseur de section F_r, de moment d'inertie J_r et de largeur c au droit de la tôle a pour expression :

$$\boxed{c\,(p_{rF} + p_{rN}) = -\,E\mathcal{J}_r \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \sigma_x F_r \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}} \tag{12}$$

On voit que si w_0 est une sinusoïde parallèlement au raidisseur, les charges p_t, p_{rF} et p_{rN} sont également des sinusoïdes. Il en est de même, comme nous l'avons vu, des flèches w_1 dues à ces charges. La condition de voilement $w_0 = w_1$ énoncée tout au début est par conséquent satisfaite : les flèches $w_0 = w_1$ sont bien des sinusoïdes parallèlement au raidisseur. Introduisons les abréviations usuelles

$$\gamma = \frac{E\mathcal{J}_r}{Db}, \quad \delta = \frac{F_r}{bh}, \quad N_x = \omega N_x^{\max}, \quad N_x = kN_c = k\frac{\pi^2 D}{b^2}$$

où b est la hauteur de la tôle, et remarquons que $c\,(p_{rF} + p_{rN})$ est une charge concentrée dans un sens. Il suffit de considérer désormais le sommet

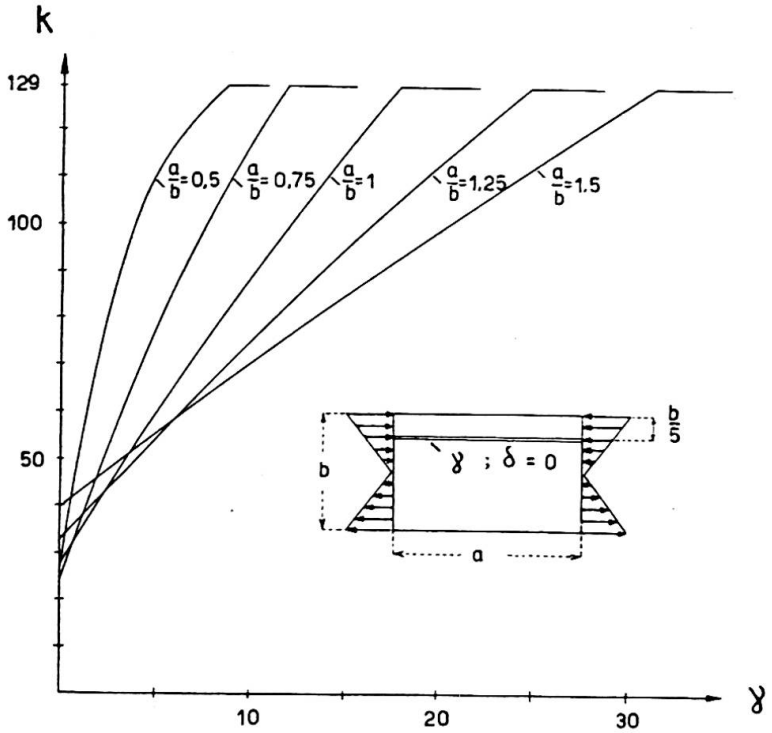


Fig. 1.

des sinusoïdes $w_0 . \sin \frac{\pi}{a} x$, (où a est la longueur de la tôle), c'est-à-dire la médiane perpendiculaire au raidisseur. Les équations (11) et (12) deviennent alors :

$$\boxed{p_t = k \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \omega D w_0} \tag{13}$$

$$\boxed{P_{rF} + P_{rN} = - D w_0 \left(\gamma b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b} \right),} \tag{14}$$

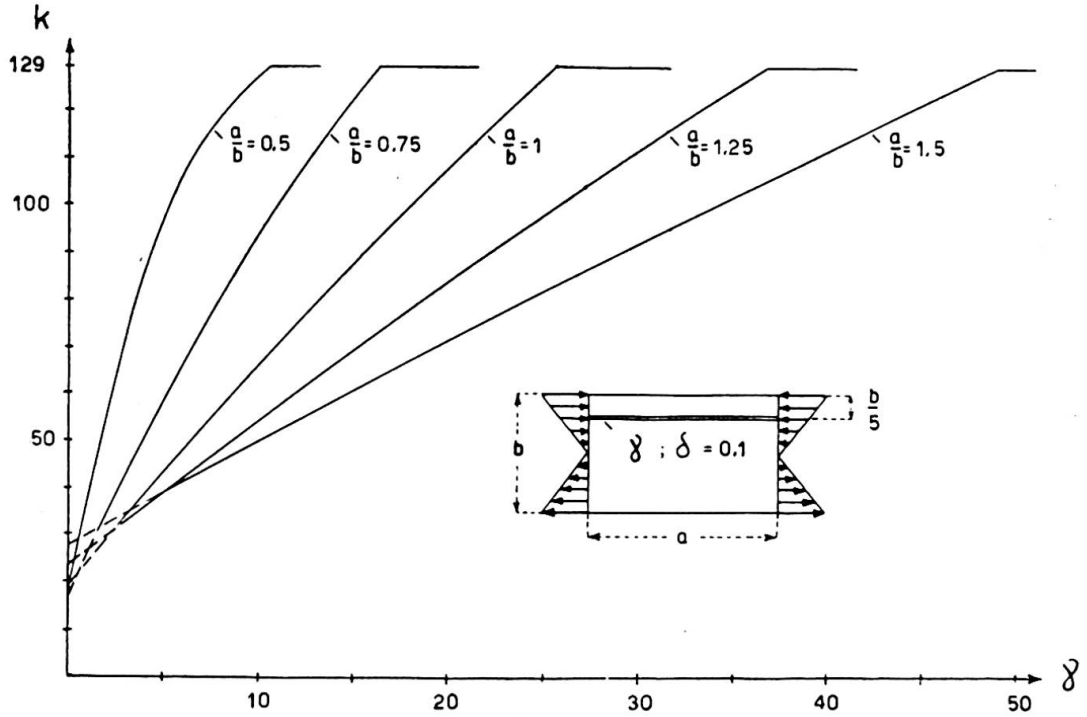


Fig. 2.

Dès que les w_0 sont choisis, on peut trouver très rapidement les flèches $w_{1kt}.k$, w_{1rF}, $w_{1krN}.k$ dues aux p_t, P_{rF}, P_{rN}, en utilisant les tables dressées lors du calcul de la plaque fléchie de mêmes dimensions que la tôle. La flèche totale $w_1 = w_0$ vaut alors, au moment du voilement :

$$w_0 = (w_{1kt} + w_{1krN})\ k + w_{1rF}$$

d'où :

$$\boxed{k = \frac{w_0 - w_{1rF}}{w_{1kt} + w_{1krN}}} \tag{15}$$

expression dans laquelle k doit être constant, quel que soit le point considéré. Si ce n'est pas le cas, il faut recommencer le calcul avec de nouveaux w_0 améliorés : c'est le principe de la méthode d'Engesser-Vianello, dont nous avons déjà parlé. On traitera pour débuter le cas $\delta = 0$. Pour un δ non nul, on peut montrer que les w_0 et le k ne changent pas, si le γ augmente suffisamment. On trouve aisément la valeur de ce γ en maintenant constante l'expression (14). Ceci fait, le γ correspondant à un δ quelconque s'obtient de façon rigoureuse au moyen d'une simple interpolation linéaire.

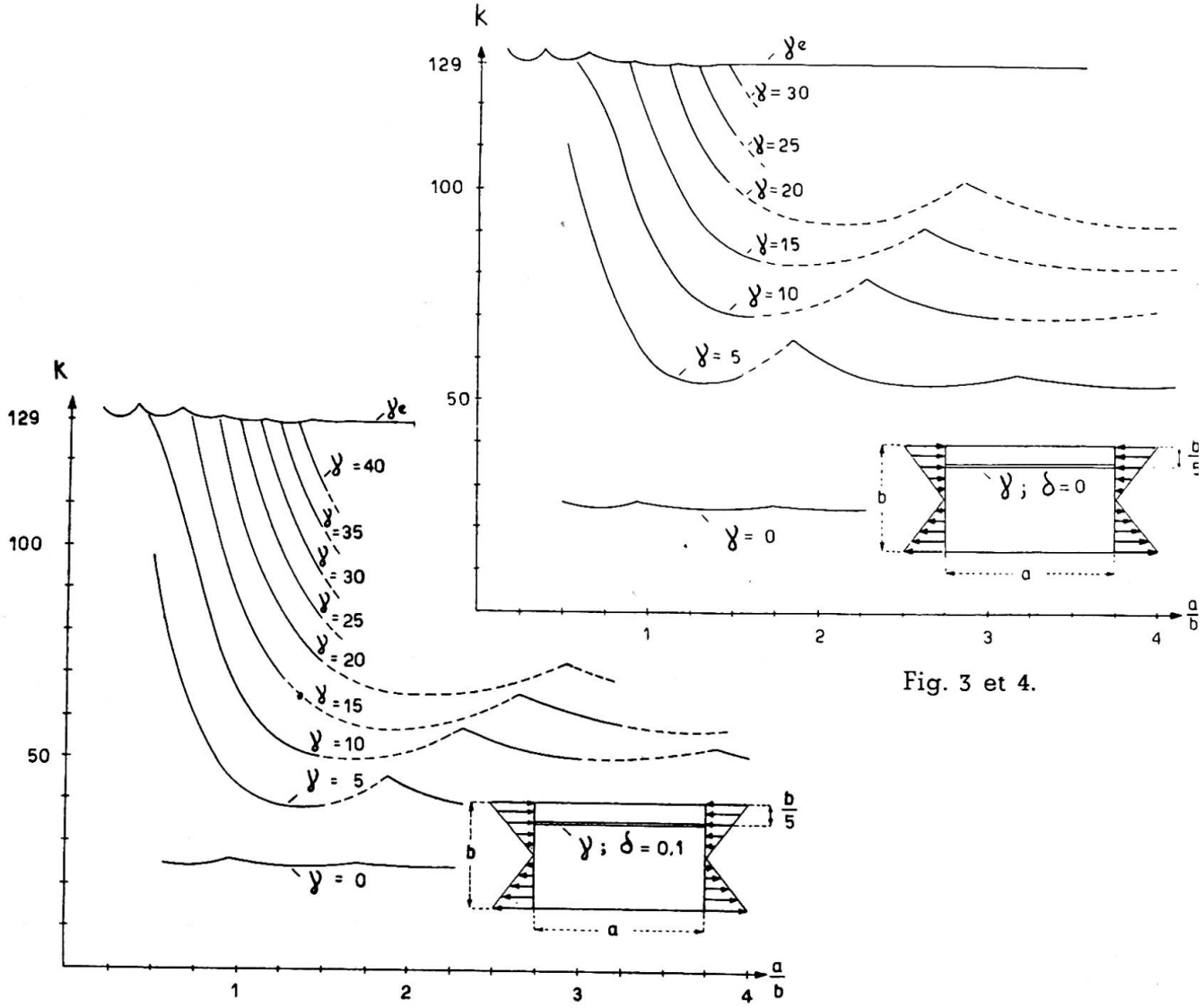


Fig. 3 et 4.

IV. Résultats et conclusions

On montre que le coefficient de voilement k atteint son maximum lorsque le raidisseur se trouve entre deux séries librement formées de cloques superposées ($w = 0$) et qu'il possède la rigidité *ad hoc*, dite *économique, rationnelle* ou *minimum*. A ce moment, le voilement se produit indifféremment avec une seule série de cloques juxtaposées ou deux séries de cloques superposées. Pour les panneaux sans effort tranchant appréciable d'une poutre fléchie, les calculs exécutés donnent, pratiquement dans tous les cas, le *cinquième supérieur de l'âme* et non le quart, supposé généralement, sans justification.

L'augmentation du k, et par conséquent des tensions critiques

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = k \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2$$

est considérable si l'on déplace du quart au cinquième supérieur le raidisseur dit *parfaitement rigide*, c'est-à-dire *possédant la rigidité économique* ou rationnelle. En comparant nos résultats et ceux de Stiffel (*Biegungsbeulung versteifter Rechteckplatten*, *Der Bauingenieur*, 5. Okt. 1941), qui paraissent les plus exacts, cette augmentation atteint *37* %. Les courbes nécessaires au constructeur, données ci-contre (avec parties pointillées approximatives) ont d'ailleurs la même allure que si le raidisseur se

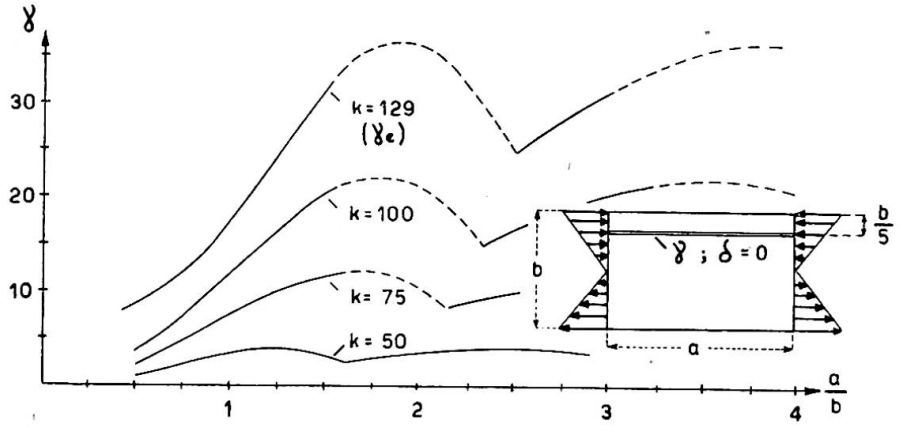


Fig. 5.

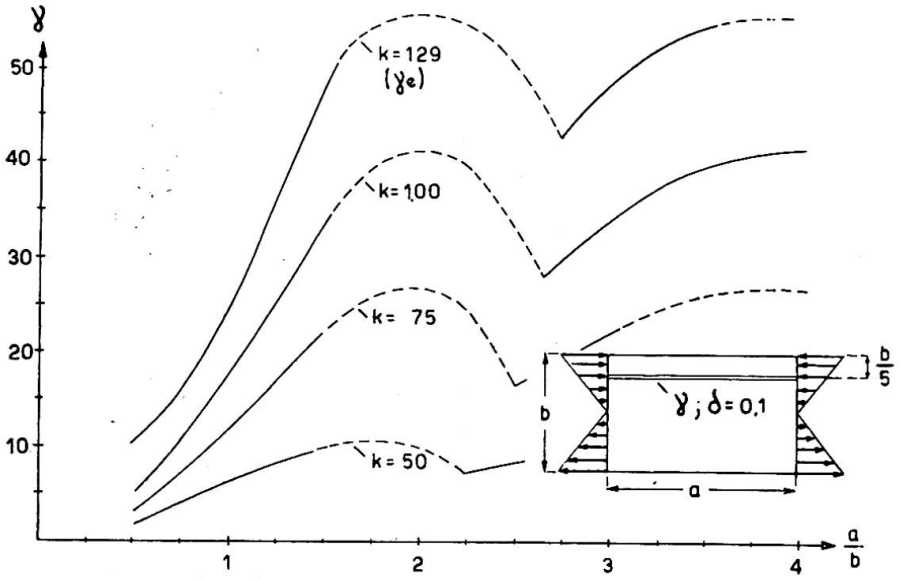


Fig. 6.

trouve au quart supérieur de l'âme (cf. Ch. Massonnet, *La stabilité de l'âme des poutres munies de raidisseurs horizontaux et sollicitées par flexion pure*, *Mémoires A. I. P. C.*, 1940-1941). Nous ne donnons que les courbes correspondant à $\delta = 0$ et à $\delta = 0{,}1$ puisque nous pouvons interpoler linéairement ou même extrapoler. Des contrôles nombreux ont en outre été faits par la méthode énergétique.

Remarquons pour terminer que la *rigidité minimum de deuxième espèce* distinguée par certains auteurs (voir les deux articles du *Stahlbau*, 8. Sept. 1944 : A. Kromm, *Zur Frage der Mindeststeifigkeiten von Plattenaussteifungen*; E. Chwalla, *Ueber die Biegebeulung der längsversteiften Platte und das Problem der Mindeststeifigkeit*) n'est rien d'autre que la rigidité minimum pour former deux séries de cloques superposées, lorsque le raidisseur ne se trouve pas à l'endroit le plus favorable.

Résumé

L'emploi de la méthode Engesser-Vianello pour résoudre le problème du voilement est possible par elle-même. Il faut au préalable déterminer les flèches de la tôle sollicitée transversalement, ce qui peut se faire facilement à l'aide d'une méthode améliorée par bandes entrecroisées, en tenant compte de la torsion.

L'épaisseur des tôles d'une poutre à âme pleine sollicitée par flexion pure est minimum, lorsque le raidisseur se trouve au cinquième supérieur et possède la rigidité suffisante. Dans ce cas, le coefficient de voilement atteint la valeur de 129.

Zusammenfassung

Die Anwendung des Verfahrens von Engesser-Vianello zur Lösung der Beulprobleme ist ohne weiteres möglich, erfordert aber zuerst die Bestimmung der Durchbiegungen der als querbelastete Platten beanspruchten Bleche, was am besten mit Hilfe einer verbesserten, genauen Streifenmethode mit Berücksichtigung der Torsion erfolgt.

Die Blechdicke eines auf reine Biegung beanspruchten vollwandigen Trägers wird dann am kleinsten, wenn die Steife im oberen Fünftel liegt und die notwendige Steifigkeit besitzt. Die Beulzahl erreicht in diesem Falle den Wert 129.

Summary

The use of the Engesser-Vianello process for solving the problem of buckling is actually possible, but it is necessary te have a prior knowledge of the deflection of the stressed plates used as transversally loaded slabs, which is best done with the help of an improved and precise strip method, taking torsion into account.

The thickness of plates of a plate girder stressed by bending alone is smallest if the strip lies in the upper fifth and has the requisite stiffness. In this case the buckling factor reaches the value of 129.

Ic3

Le comportement des éléments comprimés de faible épaisseur

Das Verhalten dünnwandiger Druckgurte

Performance of thin steel compression flanges

Dr GEORGE WINTER
Professor of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, N. Y., U. S. A.

The economic use of standard, hot-rolled steel shapes is limited to relatively substantial structures. The need for lighter steel members for small scale industrial, commercial and residence building initiated the use of structural members made from sheet steels by cold forming (cold rolling or pressing). Roof decks of a considerable variety of sizes and shapes, formed in this manner, as well as structural shapes of I-, channel, and similar sections, have been in use in the U. S. A. for many years. The development of automatic spot welding on the one hand, and the wartime demand for light, pre-fabricated buildings on the other, have stimulated this development.

It was soon realized, however, that accepted design procedures had to be modified to suit the special requirements of such thin-walled structures. The American Iron and Steel Institute, in 1939, inaugurated a research program under the writer's direction at Cornell University, which has resulted in the « Specifications for the Design of Light Gage Steel Structural Members » issued by the Institute in 1946.

One of the main problems in this connection is that of the performance of thin compression plates, both at loads causing failure and at the lower design loads. In this connection two types of such plates must be distinguished :

a) Long plates that are stiffened along both longitudinal edges, such as webs of channels and I-beams;

b) Long plates that are stiffened only along one longitudinal edge, such as the flanges of channels, I-sections, and angles.

The present paper is concerned only with the first of these two types.

The classical theory of elasticity allows the calculation of critical buckling loads of such plates by the so-called small deflection theory, that is by the solution of the differential equation

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{st}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} . \qquad (1)$$

In contrast to the phenomenon of column buckling, the critical stresses calculated from eq. 1 do not represent the limit of carrying capacity of edge supported plates. Indeed, in such plates, deflections can not increase indefinitely, as they do in columns at the Euler load. Consequently, once the critical stress is passed, the hitherto plane plate merely deforms into a non-developable, wavy surface, but continues to resist increasing stress. The deformations just described result in additional, particularly transverse stresses which act jointly with the imposed, primary longitudinal compression stress. In analyzing this state one can no longer neglect the influence of the deflections on the distribution of stress, which had been the basis for the development of eq. 1.

The differential equation for this large deflection buckling of plates was developed by Th. v. Kármán in 1910, and reads as follows

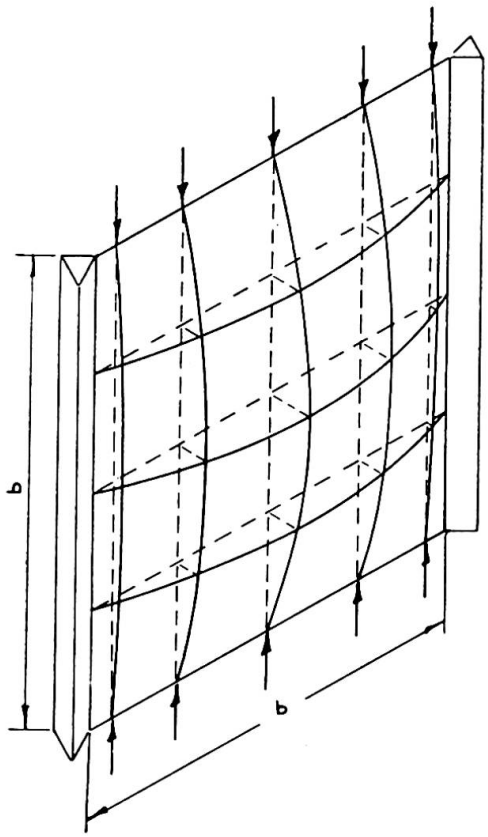
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{t}{D}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

where F is a stress function. The complexity of this equation has so far prevented its explicit solution for rectangular plates. It is for this reason that this problem had to be investigated primarily by experimental methods.

In this connection the concept of the equivalent width, initiated by Th. v. Kármán, proved most helpful. This concept is best visualized by means of a model. Imagine a square compressed plate replaced by a lattice of bars. Beyond the buckling load of the compressed rods the lattice will obviously distort in the manner shown in fig. 1. Two circumstances are clear from this picture :

a) The compression bars cannot fail as simple columns by continued deflection because they are restrained from doing so by the cross-bars.

b) In the stage shown in the figure the total load is obviously not equally distributed among the compression bars; in view of the variations of the deflections the bars near or at the edges carry more load than those near



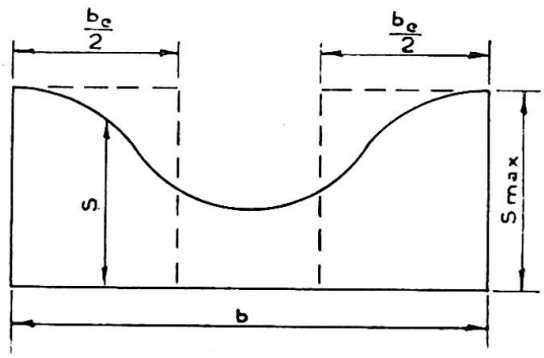


Fig. 1 (left) and Fig. 2 (right).

the center, and failure will occur when the more heavily loaded bars will reach their yield strength.

It can be seen, therefore, that after first buckling has occurred, the stress in a compressed plate must show a distribution as given in fig. 2. The effective width b_e is that width which will make the area under the dotted lines equal to the area under the actual solid stress curve. Once this effective width is determined, design can proceed in the usual manner, merely by replacing the actual plate area $b \times t$ by the equivalent area $b_e \times t$. T. v. Kármán gave the following tentative expression for this effective width at the failure load :

$$b_e = \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\, t \sqrt{\frac{E}{s_{yp}}} = 1 \cdot 9\, t \sqrt{\frac{E}{s_{yp}}} \qquad (3)$$

for Poisson's ratio $\nu = 0.3$ (1).

Subsequent tests by E. E. Sechler showed that this expression was reasonably correct for very wide and thin plates, but that a smaller value of b_e results for plates of smaller b/t-values (2).

All these investigations were concerned only with the determination of the ultimate or yield strength of such plates. In addition, the amount of test evidence even in this respect was limited.

For practical design, however, it is necessary to determine equivalent widths not only at failure, but also at smaller loads, in particular at service loads. Indeed, since slight buckling occurs for large b/t at loads far below the ultimate, the stress distribution of the type of fig. 2 takes place not only at failure but frequently at design loads. Hence, in a flexual member of the type of fig. 3, stresses and corresponding deformations are distributed at design loads in the manner shown. The neutral axis of such a member is then located below the centroid of the area, and its location as well as the moment of inertia, section modulus, etc. must be computed by using the equivalent instead of the real width of the compression flange. That is, in order to compute stresses, deflections, and other design information for any load up to failure, the actual section, fig. 3*a*, with its non-uniform stress distribution can be replaced by the equivalent section, fig. 3*b*. Since the maximum stresses, and corresponding strains, at the edges of the webs are equal for these two sections, all required information can be gained from this equivalent section.

It was therefore necessary for practical design to determine the effective width not only at failure, but also at lower loads.

For this purpose more than 100 tests were carried out on members of the type of fig. 3, and other shapes, with b/t-ratios from 14 to 429 and with steel yield points from 20 100 to 57 800 psi. Deformations were measured in these flexural tests and it was found, as anticipated, that the neutral axis was located below the centroid, and was shifting downward under increasing load, i.e. with decreasing effective width.

Only the most recent of these tests are reported here (3).

Specimens of these tests were of the type of fig. 3*a*, 3 in deep, 5 to 10 in wide, with thicknesses from 0.0288 tot 0.0615 in. Corresponding width/

---

(1) Th. v. Kármán, E. E. Sechler, L. H. Donnell, *The Strength of Thin Plates in Compression* (*Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, Vol. 54, 1932, p. 53).

(2) E. E. Sechler, *The Ultimate Strength of Thin Flat Sheet in Compression*, Publication No. 27, Guggenheim Aeronautics Labor, Pasadena, Cal., 1933.

(3) Geo. Winter, *The Strength of Thin Steel Compression Flanges* (*Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*

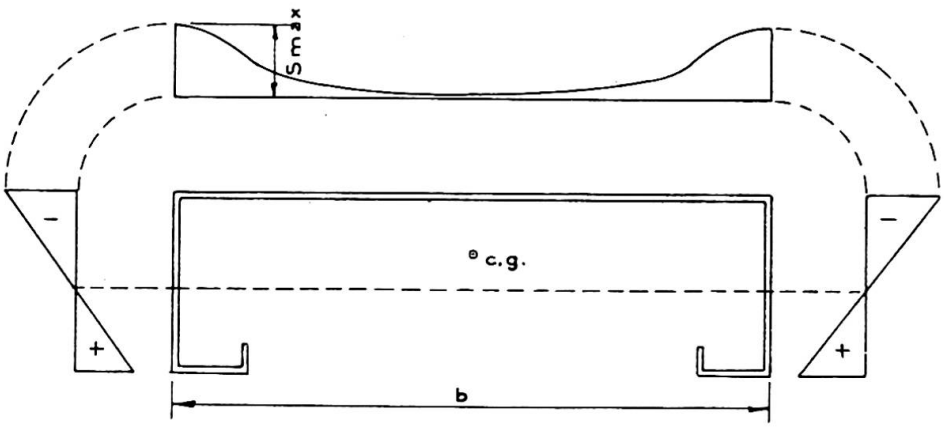


Fig. 3a.

thickness ratios b/t ranged from 86 to 344, yield points of steels, from tension tests, were found to range from 24 400 to 56 850 psi. Specimens were tested as beams, with two equal loads at the quarter points of the span. In addition to deflections, strains were measured at the top and bottom of the flanges, allowing an experimental determination of the position of the neutral axis. Finally, displacements of the top flange out of its original plane were measured at six points along the center line, in the portions of the beams between loads.

Information on the magnitude of the equivalent width was gained from these tests in the following manner : The position of the neutral axis, at various loads, was established from strain gage readings. Knowing this position, in a section like fig. 3*b*, it is simple to compute the corresponding value of b_e. With the equivalent section determined in this manner, the maximum compression stress s_{max} corresponding to the particular load is computed by customary methods. The tests, therefore, give information on the relation of b_e to b/t and s_{max}.

To evaluate this relation, eq. 3 is rewritten as

$$b_e = Ct\sqrt{\frac{E}{s_{max}}} \tag{4}$$

where C is a coefficient to be determined from test. Previous investigations by Sechler and the writer ([2]) ([3]) established that C depends primarily on the non-dimensional parameter $\sqrt{\frac{E}{s_{max}}}\left(\frac{t}{b}\right)$. It is for this reason that, in fig. 4, the experimentally determined coefficients C are plotted against this parameter. Determinations were made, for each test specimen, at the yield load and at 1/3 and 2/3 of that load.

Although the scattering of test results, as depicted in fig. 4, is quite considerable it is clearly seen that the coefficient C decreases with increasing $\sqrt{\frac{E}{s_{max}}}\left(\frac{t}{b}\right)$. The scattering is apparently due to the extreme sensitivity of this method to very minor experimental deviations. Indeed, a variation of 1 % in the experimentally determined location of the neutral axis will cause, in many cases, a variation of 10 % and more of the value of C. For

Vol. 72 p. 199, 1946 and *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, Vol. 112, p. 1, 1947). See also *Bull.* No. 35, Part 3, Cornell University Engg. Experiment Station, Ithaca, N. Y., 1947.

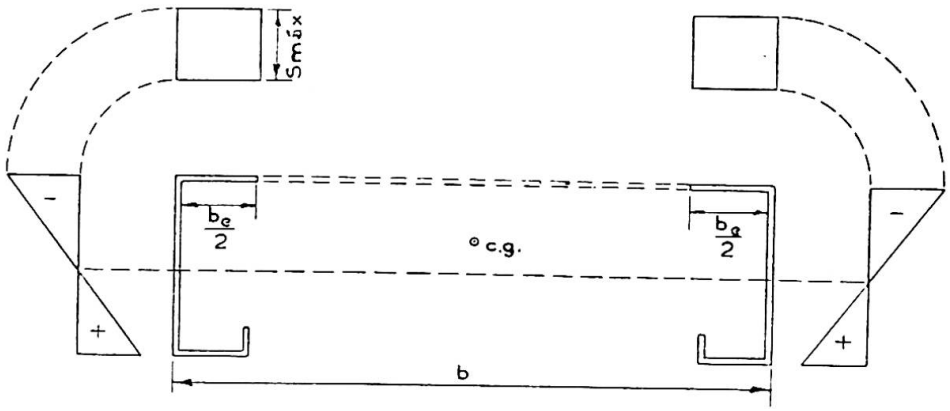


Fig. 3b.

this reason, in interpreting fig. 4, the data should be regarded as statis tically distributed, rather than as strictly accurate.

With this in mind, the straight line drawn on that figure was thought to represent a reasonable, and somewhat conservative means of developing a simple formula for the equivalent width b_e. The line is seen to start at a value of 1.9 for extremely large b/t-values and relatively high stresses, for which case, therefore, the experimental determinations are in substantial agreement with v. Kármán's original eq. 3. The formula for b_e obtained from this straight line can be written as

$$b_e = 1.9\, t \sqrt{\frac{E}{s_{max}}} \left(1 - 0.475 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{s_{max}}}\right) \tag{5}$$

which is seen to be identical with eq. 3, except for the modifying term in parenthesis, which, as pointed out, approaches 1 closely for large b/t and s_{max}.

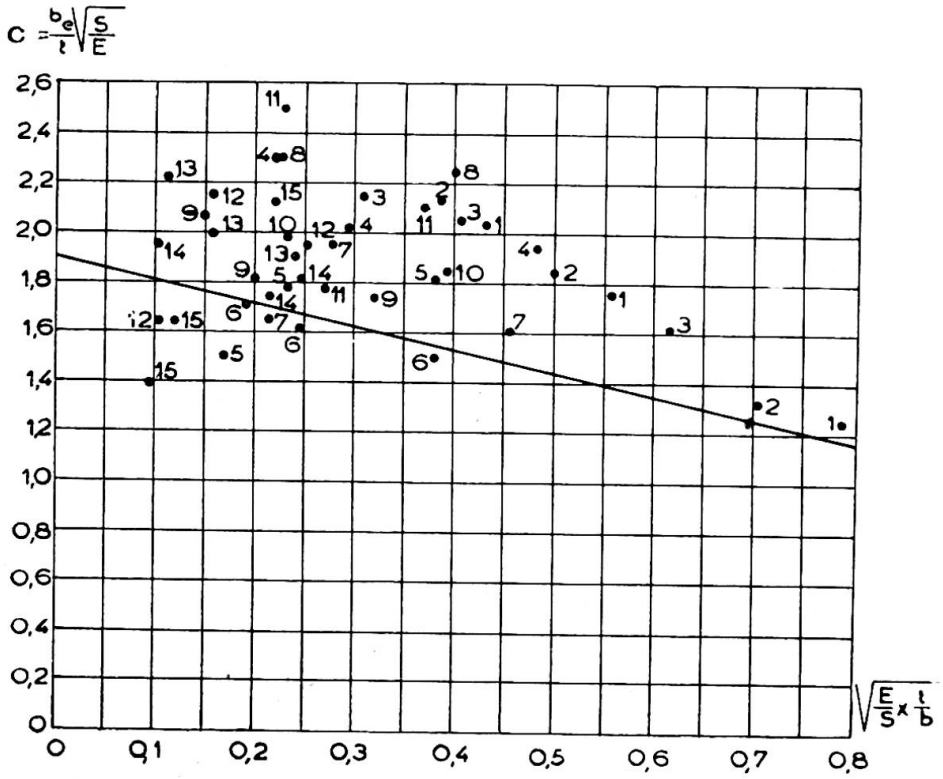


Fig. 4.

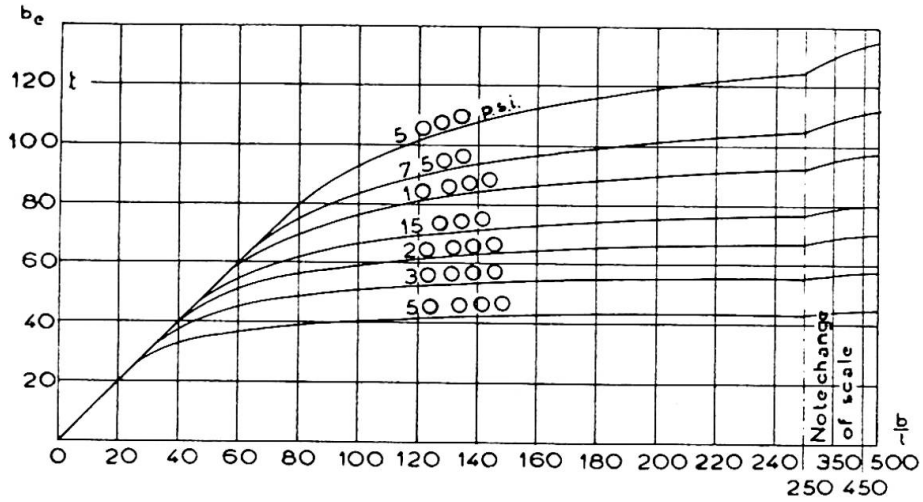


Fig. 5. Effective width of compression elements stiffened along both edges.

Eq. 5 indicates that a compression plate is fully effective (uniform stress distribution, $b_e = b$) for values of b/t smaller than

$$\left(\frac{b}{t}\right)_L = 0.95 \sqrt{\frac{E}{s_{max}}} \tag{6}$$

and that, for values above $(b/t)_L$ deformations, deflections, and yield loads can be calculated with good accuracy by using the effective instead of the real width.

By solving eq. 6, for s_{max}, it can easily be calculated that the first redistribution of stress, that is the first gradual formation of buckling waves occurs at stresses equal to $s_{cr}/4$, where s_{cr} is the critical buckling stress obtained from the small deflection theory, i.e. from eq. 1. This result is not amazing. Theoretically, an ideally plane plate should not buckle at stresses below s_{cr}. Actual sheet steel members, however, are not perfect but possess initial distortions of shape, which result in small deflections at stresses below s_{cr}. The situation is comparable to that of initially bent or eccentric columns, which also deflect below the Euler load.

The fact that the initial shape has a definite influence on the performance of such plates, causes considerable scattering of test results. These are also influenced by the amount of restraint provided by adjoining members, such as the webs in fig. 3. For this reason eq. 5 represents merely a conservative statistical expression of test results.

Fig. 5 shows a graphical representation of eq. 5 from which the effective width can be read directly for any given b/t and E/s_{max} for use in design.

The findings of this primarily experimental investigation merely represent an elaboration of v. Kármán's concept. They improve the accuracy of his original expression, particularly for plates with moderate b/t. In addition, they prove the important additional finding that the same expression, eq. 5, can be applied with good accuracy to stresses occurring at design loads, as well as to failure stresses.

The real worth of an equation of the type of eq. 5 depends, of course, on the degree of accuracy with which it predicts the actual carrying capacities and deflections of test beams. The following table contains, for the 15 beams whose results are plotted on fig. 4, the yield loads as deter-

mined from test, and those computed by means of the equivalent section, fig. 3*b*, using eq. 5 for determining the equivalent width.

N°	b/t	Yield Point psi	Yield Load, Computed lb	Yield Load Test lb	Deviation %
1	95	27 500	2 660	2 300	— 13.5
2	86	36 000	3 640	3 600	— 1.1
3	109	37 400	2 730	2 500	— 8.4
4	145	30 150	1 480	1 550	+ 4.7
5	175	25 750	964	1 100	+ 14.1
6	172	24 700	945	1 025	+ 8.5
7	155	25 850	1 160	1 200	+ 3.4
8	175	47 200	4 520	4 500	— 0.4
9	163	56 850	5 570	5 500	— 1.3
10	222	24 400	1 845	1 760	— 4.6
11	216	36 050	2 550	2 250	— 11.8
12	284	30 650	1 523	1 480	— 2.8
13	303	25 100	1 165	1 280	+ 9.9
14	339	28 000	1 052	940	— 10.7
15	344	27 650	1 028	1 060	+ 3.0
					average deviation — 0.7 %

It is seen that, for a very wide range of b/t and yield point stress, eq. 5 allows the prediction of the actual carrying capacity with very satisfactory accuracy. The same was found to be true for the numerous earlier tests ([3]).

It is interesting to note that despite the rather bad scattering of some points on fig. 4, such as points 4, 8, 11 and 15, the predicted and actual carrying capacities of these four beams, as given in the table, are in very satisfactory agreement. This supports the opinion advanced before that the scattering in fig. 4 is due mainly to inevitable inaccuracies in the empirical determination of the neutral axes.

For practical design, deflections are of interest at design loads rather than at yield loads. Since b_e depends on the value of s_{max}, the effective moment of inertia is variable and must be determined for any given load. The « Design Specifications » mentioned in the introductory paragraphs stipulate a factor of safety of 1.85. For this reason, a comparison of measured and computed deflections is given in the table below for loads approximately equal to the computed yield loads divided by 1.85. Further computations, the results of which are omitted here, show that the same general picture as given in this table obtains for other values of loads, up to the yield load. The table gives the deflections d measured in tests at the load P, and the deflections computed for that load (a) by using the equivalent width b_e and (b) by using the full unreduced width b.

N°	P lb	d, from test in	d, computed using b_e, in	%	d, computed using b in	%
1	1 465	0.090	0.091	— 1.1	0.085	+ 5.6
2	2 000	0.120	0.118	+ 1.7	0.111	+ 8.1
3	1 495	0.128	0.131	— 2.3	0.108	+ 18.5
4	811	0.108	0.097	+ 10.2	0.076	+ 42.1
5	526	0.076	0.072	+ 5.6	0.055	+ 38.2
6	514	0.068	0.068	0.0	0.054	+ 25.9
7	635	0.078	0.075	+ 4.0	0.060	+ 30.0
8	2 500	0.128	0.161	— 20.5	0.122	+ 4.9
9	3 080	0.170	0.195	— 12.8	0.148	+ 14.9
10	1 010	0.072	0.083	— 13.3	0.064	+ 12.5
11	1 395	0.102	0.119	— 14.2	0.089	+ 14.6
12	833	0.083	0.100	— 17.0	0.066	+ 25.8
13	635	0.061	0.074	— 17.6	0 055	+ 10.9
14	574	0.075	0.078	— 3.9	0.052	+ 44.2
15	559	0.077	0.075	+ 2.7	0.050	+ 54.0
				Average deviation — 5.2 %		Average deviation + 23.3 %

The table shows that by using the effective width b_e deflections are computed with an average accuracy of about 5 %, whereas the use of the full, unreduced section for this purpose leads to an average error of about 23 %. Though scattering is again considerable, all significant discrepancies in the first case are on the safe side (computed deflections larger than measured values). On the other hand, by using the full, unreduced sectional area, errors on the unsafe side in several cases reach magnitudes of 40-50 %; by this method, for all beams, actual deflections were found to be larger than computed.

It should be said that an accurate computation of deflections by the equivalent width method would involve the use of a moment of inertia, variable along the beam. Indeed, since b_e depends on s_{max}, the effective moment of inertia increases from a minimum value at the point of maximum moment to a maximum value near the supports. In the table above, however, only the minimum moment of inertia was used. For the present tests this does not lead to too large an error, since M_{max} is constant over the center half of the span, for quarter point loading. Had a variable moment of inertia been used, all deflections computed by using b_e would have been obtained slightly smaller, to various relative degrees, resulting in a still better average agreement with test results. This method of calculation was not used because. in routine design procedures, engineers can hardly be expected to spend the very considerable amount of time necessary for such detailed calculations with variable moment of inertia.

The evidence presented above, which is additionally supported by a great number of other tests previously published elsewhere ([3]) indicates that the proposed method allows, with reasonable accuracy, the determination of carrying capacities as well as deflections of members containing thin compression flanges. The measure of agreement with test results is not as close as would be obtained on customary, heavy steel structures. This, however, is predicated on the inherent character of thin sheet material with its inevitably larger imperfections as to accuracy of sheet

thickness, of geometrical shape, etc. The discrepancies obtained in these tests are believed to be tolerable practically; they are certainly not larger than these observed in tests of reinforced concrete or timber structural members.

The use of eq. 5 is somewhat cumbersome for routine design computations. The graph of fig. 5 allows the direct determination of b_e for any given stress and b/t-ratio. The initial straight line to which all curves are tangent indicates the range over which the full width b is effective. It is seen that the larger the maximum stress, the smaller is that limiting b/t beyond which the effectiveness of the flange begins to decrease (see eq. 6).

In contrast to conventional, thick-walled steel structures, the cross-sections of thin-walled elements distort at loads far below the ultimate, and in most cases at values even below the design loads. The type and magnitude of these deformations is therefore of interest, since an excessive amount of flange distortion would obviously make such members practically objectionable even if their strengths and over-all deflections were adequate for the purpose.

These distortions of shape, for members of the type of fig. 3, consist of two separate kinds of deformation which superpose to result in the final shape under load. The first, and more obvious, is the simple buckling deformation. Indeed, ultimate stresses and frequently working stresses are considerably above the critical buckling stress as determined from eq. 1. Moreover, it was mentioned in connection with eq. 6 that on the basis of this equation incipient, extremely slight flange distortions apparently occur at stresses of the order of $s_{cr}/4$. Consequently, at stresses of about that magnitude, the compression flange begins to buckle into a series of approximately quadratice buckling waves. That is, the half-wave length is about equal to the flange width b, and the general shape of each of these half-waves is that schematically indicated on fig. 1. This type of deformation, which was observed in all tests of this kind, is of course exactly the one predicted by the mathematical theory of buckling of plates.

In beam specimens of the type discussed herein, however, a fundamentally different type of deformation is superposed on the one just discussed. This type, which was likewise observed in all tests, is not limited to compression flanges; it occurs likewise if the beams of fig. 3 are turned by 180° so that the wide flange is in tension. The following brief and intentionally approximate analysis illustrates the nature of these deformations and allows a reasonably accurate determination of their magnitude.

Consider an element of the flange, of unit width in the transverse direction, and length dl longitudinally, as shown on fig. 6. Under load, this element is curved, its radius, r_b, being equal to that of the beam at that cross-section. The total compression forces at both ends of the element consequently subtend an angle $d\varphi$ and, therefore have a resultant

$$R = st\,\frac{d\varphi}{dl} = \frac{st}{r_b}\,. \tag{7}$$

If the stress s is uniform over the width of the cross-section, R acts in the same manner as an external, transverse load, as shown in fig. 6a, tending to bend the flange toward the neutral axis. This bending is governed by the simple equation for flexure of a long, narrow rectangular plate under transverse load, i.e.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{r_f} = -\frac{M_f}{D}\,. \tag{8}$$

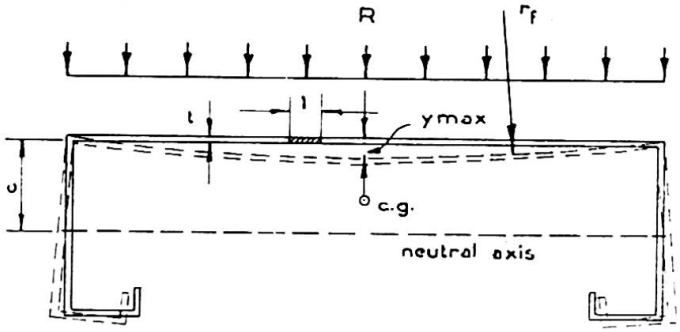


Fig. 6a.

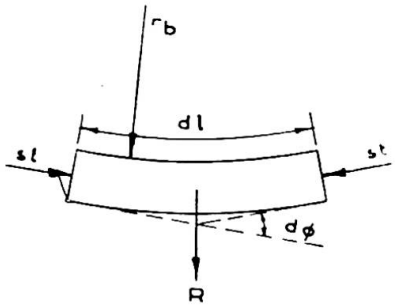


Fig. 6b.

The maximum deflection is then found from the usual formula

$$y_{max} = \frac{5}{384} \frac{st}{r_b} \frac{b^4}{D} . \tag{9}$$

The use of this formula neglects the influence of restraint provided to the flange by the webs. However, this restraint is of rather undetermined magnitude. The webs of isolated beams deform as shown on fig. 6*a*, and therefore afford little restraint. The restraint would be larger if such beams were laid side by side, with webs in contact, as in a floor. In view of this indeterminacy it seems best to neglect the unreliable effect of possible restraint.

To find r_b for substitution in eq. (9) one has from standard, elementary beam theory

$$r_b = \frac{EI}{M_b} ; \quad M_b = \frac{sI}{c} ; \quad r_b = \frac{Ec}{s} . \tag{10}$$

With this value of r_b, the maximum flange distortion becomes

$$y_{max} = \frac{5}{32} \left(\frac{s}{E}\right)^2 \frac{b^4}{t^2 c} (1 - \nu^2) . \tag{11}$$

For tension flanges with their generally rather uniform stress distribution, this type of distortion is the only one that occurs and its magnitude can be determined with satisfactory accuracy from eq. 11. In compression flanges the longitudinal stresses vary over the width of the flange, as shown on fig. 2. Consequently, R is likewise distributed in this manner, instead of the uniform distribution shown on fig. 6*a*. In view of the approximate character of this calculation, and of the uncertainty as to the amount of edge restraint, the details of the actual distribution of *s*, and other factors, an elaborate modification of eq. 11 to account for the stress distribution of fig. 2 would represent a rather fictitious improvement. For this reason it is believed that a sufficiently close approximation is obtained, if, in eq. 11, the average stress of fig. 2 is substituted for *s*. From the definition of the equivalent width, this average stress is easily obtained from

$$s_{av} = s_{max} \left(\frac{b_e}{b}\right) . \tag{12}$$

For more information on this type of deformation, particularly for tension flanges, see the writer's earlier paper ([4]).

([4]) Geo. WINTER, *Stress-Distribution in, and Equivalent Width of Wide, Thin-Wall Steel Beams*, Techn. Note No. 784. Advisory Comm. for Aeronautics, 1940, Washington, D. C.

In the tests reported herein, both types of deformation were clearly observed. That is, the flanges showed a general « dishing » (smooth downward deflection of the center line) on which was superposed the square-wave pattern of the buckling deformations. By means of special apparatus, the magnitude of these distortions of the flanges perpendicular to their original planes were measured at six points along the center line of each beam. It was found that at design loads (i.e. about $P_{yield}/1.85$) these deformations reached a maximum of 1 % of the flange width for two of the beams; and in most other cases they were closer to 1/2 %. Although these distortions are clearly visible, it can be said that their magnitude at design loads is sufficiently small so as not to interfere with the practical use of such light gage steel members.

In conclusion it should be said that the information given in this paper suffers from the evident disadvantage of being primarily empirical and approximate. The theoretical complexity of plate buckling at stresses larger than s_{cr}, as well as the large amount of possible variations of shape resulting in a wide range of conditions of edge restraint, precluded an analytical treatment of practical value. It is hoped that future investigations in this field, both mathematical and experimental, will elucidate some of the more detailed aspects of this problem.

NOTATION

b = flat width of flange.
b_e = equivalent flange width.
c = distance from neutral axis to extreme fiber.
D = flexural plate rigidity.
$= E\ t^3/12\ (1 - \nu^2)$.
M_b = bending moment in beam.
M_f = bending moment in flange.
r_b = radius of curvature of beam.
r_f = radius of curvature of flange.
s = stress in flange.
s_{cr} = critical buckling stress of flange by small deflection theory.
s_{yp} = yield stress of material.
t = flange thickness.
w = buckling deflection of flange.
x, y = coordinates.
ν = Poisson's ratio.

Résumé

L'emploi de profilés laminés normaux pour les petites portées et les charges relativement faibles n'est pas économique. Pour de telles constructions, les éléments en tôles minces laminées et pliées à froid ont fait leur preuve aux Etats-Unis. Des spécifications pour le calcul de constructions en tôles minces pliées furent publiées récemment, basées sur les recherches de l'auteur. Dans ce système, le comportement des ailes comprimées est d'une importance primordiale.

Pour de telles tôles, la tension de flambage calculée de la façon habituelle, ne représente pas la limite de la charge utile. Dans l'état de déformation, il y a une distribution irrégulière des tensions. On peut calculer le comportement de tels éléments constructifs en remplaçant la largeur réelle b par une largeur équivalente b_e, qui se calcule par une équation empirique. La limite de fluage devient la valeur critique des tensions calculées au moyen de b_e.

Une série d'essais caractéristiques a montré l'erreur moyenne très faible obtenue par le calcul de la charge utile, ainsi que la déformation, en se basant sur la largeur équivalente.

Une méthode approximative de calcul, amplement vérifiée par des mesures, est également indiquée pour la déformation des ailes dans l'état de déformation après flambage.

Zusammenfassung

Die Verwendung normaler Walzprofile ist bei kleineren Spannweiten und relativ leichter Belastung nicht wirtschaftlich. Für solche Bauwerke haben sich in den Vereinigten Staaten Elemente aus kalt gepressten oder gewalzten dünnen Blechen bewährt, für die auf Grund von Untersuchungen des Verfassers kürzlich Entwurfsvorschriften veröffentlicht wurden. In diesem Zusammenhang ist das Verhalten dünnwandiger Blech-Druckgurte von besonderer Bedeutung.

Für ein solches Blech stellt die auf die übliche Art berechnete Beulspannung nicht die Grenze der Tragfähigkeit dar. Im ausgebeulten Zustand tritt eine ungleichförmige Spannungsverteilung ein. Man kann das Verhalten solcher Bau-Elemente durch Ersetzen der wirklichen Breite b durch eine äquivalente Breite b_e berechnen, die sich mit Hilfe einer empirisch gefundenen Gleichung bestimmen lässt. Die Fliessgrenze wird für die auf Grund von b_e ermittelten Spannungen zum kritischen Wert.

Eine Reihe charakteristischer Versuche zeigte die nur geringen durchschnittlichen Fehler, die sich bei Berechnungen der Tragfähigkeit wie auch der Durchbiegungen auf Grund der äquivalenten Breite ergeben.

Ebenfalls wird für die Blechverformungen im ausgebeulten Zustand ein durch Messungen überprüftes angenähertes Berechnungsverfahren angegeben.

Summary

The use of conventional rolled steel shapes for small spans and comparatively light loads is uneconomical. For such constructions, light members, cold formed from sheet steel, have stood the test in the U. S. A. Specifications for the design of such members were recently issued, based on the author's investigations. In this connection, the performance of thin compression flanges is of particular importance.

For such plates the buckling stress calculated in the usual way does not represent the limit of carrying capacity. In the buckled state an irregular distribution of stresses occurs. The behaviour of such structural members can be calculated by replacing the actual width b by an equivalent width b_e, which can be ascertained with the help of an empirical equation. The yield point becomes the limiting value of the stresses as determined by means of b_e.

A series of characteristic tests showed only slight average errors arising from the calculations of the carrying capacity ,as well as deflection on the basis of the equivalent width.

An approximate method of calculation, amply proved by measurements, is also given for distortion of members in the buckled state.