Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Artikel: Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies

Autor: Dubas, Ch.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4004

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ic2

Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies

Beitrag zum Studium des Ausbeulens ausgesteifter Bleche

A contribution to the study of buckling stiffened plates

CH. DUBAS
Ingénieur, Bulle

I. Le voilement

Dans le problème du voilement, il faut tenir compte des charges transversales qui proviennent des *déformations possibles* de la tôle sollicitée dans son plan par des efforts de bout. Nous pouvons admettre ces charges transversales, fonction des flèches que nous appellerons w_0. Elles agissent alors comme des charges ordinaires d'une plaque et produisent en conséquence des flèches que nous désignerons par w_1.

Au moment où $w_0 = w_1$, la tôle fléchit par suite des efforts de bout. Si l'on multiplie à cet instant les charges transversales admises par un facteur quelconque d'affinité, on trouve des flèches w_0 et w_1 multipliées par ce même facteur d'affinité, la condition $w_0 = w_1$ restant toujours exacte. Puisque la flèche possède à la fois plusieurs valeurs, elle est indéterminée et l'équilibre est instable : la tôle se voile. La charge de bout correspondant à $w_0 = w_1$ est donc la charge critique, exprimée généralement au moyen du facteur de voilement k.

La méthode exposée est la méthode bien connue d'Engesser-Vianello, utilisée couramment pour le calcul des barres au flambement. Dans ce dernier cas, il est vrai, on ne tient pas compte de charges transversales, mais directement de moments fléchissants.

II. La plaque fléchie

1. Cas général

Les charges transversales une fois admises, nous avons à calculer les flèches qui en découlent. C'est le problème de la plaque fléchie. L'exactitude dont nous avions besoin aurait exigé des calculs trop longs en utili-

sant les méthodes classiques (séries de Fourier ou autres, différences selon Marcus, ...). Ci-après la méthode employée :

Considérons la relation bien connue entre les charges transversales et les flèches d'une plaque :

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}} \qquad (1)$$

où $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ est la rigidité de la plaque à la flexion, par unité de largeur. Cette équation différentielle (1) correspond à celle de la flexion des poutres :

$$\boxed{\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{E\mathcal{J}}} \qquad (2)$$

qui provient elle-même de la combinaison des équations fondamentales :

$$\boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} = -p} \quad (3) \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{E\mathcal{J}}} \quad (4)$$

Remplaçons la plaque par une série de poutres longitudinales (parallèles à l'axe des x) et de poutres transversales (parallèles à l'axe des y). Alors, d'après (2), le terme $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ n'est rien d'autre que la charge $\frac{p_x}{D}$ des poutres longitudinales et $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$, la charge $\frac{p_y}{D}$ des poutres transversales, à la condition que les flèches de la plaque coïncident parfaitement avec celles des poutres de remplacement :

$$\boxed{w_x = w} \quad (5) \quad \text{et} \quad \boxed{w_y = w} \quad (6)$$

Quant au terme $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$, il représente une charge p_{xy} des poutres longitudinales telle que les moments M_{xy} produits soient égaux aux moments M_y des poutres transversales chargées avec les p_y :

$$\boxed{M_{xy} = M_y} \qquad (7)$$

En effet, selon (3), nous avons : $\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x^2} = -p_{xy} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}$ et comme $\frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} = -\frac{M_y}{D}$ d'après (4), alors $\frac{p_{xy}}{D} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ en tenant compte de (6).

En chargeant les poutres transversales avec des charges p_{yx}, on trouverait de même : $\frac{p_{xy}}{D} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{p_{xy}}{D}$, à la condition que :

$$\boxed{M_{yx} = M_x} \qquad (8)$$

Si nous introduisons les valeurs de $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ dans l'équation différentielle (1), nous trouvons :

$$\boxed{p_x + 2\,p_{xy} + p_y = p} \qquad (9)$$

Nous avons donc maintenant remplacé la plaque par un système de poutres entre-croisées. Pour le résoudre, nous ne disposons que d'une seule condition d'équilibre (9), de sorte que le problème est doublement hyperstatique. Mais nous disposons aussi de quatre conditions exprimant les déformations mutuelles des poutres de remplacement. En réalité (5) et (6) ne forment qu'une seule condition : $w_x = w_y$, de même que (7) et (8), puisque $p_{xy} = p_{yx}$. Nous pouvons donc écrire en chaque point de croisement des poutres longitudinales et transversales trois équations pour les trois inconnues p_x, p_{xy}, p_y.

Nous choisissons pour commencer le réseau des poutres de remplacement et nous appliquons aux poutres de bord ce que nous venons de dire. On en déduit alors les valeurs correspondantes de p_x, p_{xy} et p_y. Par exemple, si la plaque est appuyée sur son pourtour, les poutres de bord ne supportent aucune charge.

Les p_x, p_{xy}, p_y doivent maintenant être déterminés en tous les points de croisement non situés sur le pourtour de la plaque. Nous pouvons très bien faire agir l'un après l'autre les p_x aux différents points. Pour chacun d'eux, nous calculerons les w_x correspondants des poutres longitudinales. Nous connaissons par conséquent les w_y des poutres transversales, puisque $w_x = w_y$. Nous écrivons alors que les p_y inconnus produisent les w_y trouvés, ce qui nous donne une série d'équations. En les résolvant nous obtenons les valeurs des p_y. On procède de même avec les moments $M_x = M_{yx}$ et l'on trouve les p_{xy}. Nous connaissons donc à cet instant les p_x, $2\,p_{xy}$, p_y en tous les points et par conséquent leur somme p. En superposant l'influence des p_x inconnus aux divers points et en introduisant les valeurs connues des charges réelles de la plaque p, on obtient une série d'équations, qui une fois résolues, donnent les p_x aux divers points. De là on calcule aisément les flèches $w_x = w$, qui seules nous intéressent dans les calculs au voilement. Le même raisonnement peut se faire, bien entendu, en partant des p_y, des p_{xy}, des M_x, des M_y ou même directement des w.

2. Cas particulier de la plaque appuyée seulement sur son pourtour et fléchie par des charges réparties sinusoïdalement dans le sens longitudinal

Dans ce cas les p_y, M_y *et* w_y de toutes les poutres transversales sont des sinusoïdes parallèlement à l'axe des x. Nous n'avons donc plus que la poutre transversale médiane à considérer (sommet des sinusoïdes). Puisque $w_x = w_y$, les p_x sont également des sinusoïdes, qui valent, selon (2), $\frac{\pi^4}{a^4} w_y$. De même les p_{xy} valent $\frac{\pi^2}{a^2} M_y$, d'après (3). La relation (9) nous donne alors :

$$\boxed{p = \frac{\pi^4}{a^4} D \cdot w_y + 2\frac{\pi^2}{a^2} M_y + p_y} \qquad (10)$$

où w_y et M_y sont les moments et les flèches de la poutre transversale médiane dus à p_y. De là, le calcul se poursuit comme dans le cas général en superposant l'influence des divers p_y inconnus.

3. Observations

Dans les applications numériques, on exécutera tous les calculs des poutres de remplacement pour des charges, des moments ou des flèches unitaires. Ceci fait, le calcul des p d'une plaque rectangulaire de dimensions quelconques est extrêmement rapide : il suffit d'une simple superposition. Il ne reste plus alors qu'à résoudre un système d'équations contenant autant d'inconnues que de points de croisement, comme avec le procédé de Marcus, bien moins précis et par conséquent bien moins avantageux. Nous avons de plus exécuté tous les calculs sous forme de tables, en utilisant les charges nodales

$$K_m = \frac{\Delta x}{12} (p_{m-1} + 10\, p_m + p_{m+1}) ,$$

ce qui nous a permis en plus de ramener les charges concentrées de la plaque à des charges réparties équivalentes p.

Outre le calcul des plaques, de nombreuses applications de la méthode exposée sont possibles, notamment pour le calcul des tranches minces, des voiles et des barrages arqués. On remarquera d'ailleurs que la seule différence d'avec le calcul élémentaire des plaques et des barrages arqués par bandes entre-croisées provient de ce que nous avons tenu compte du terme de torsion.

III. Les charges transversales dues à la flexion latérale d'une âme de poutre pleine raidie longitudinalement. Le coefficient de voilement k

La charge transversale due à la flexion latérale d'une tôle d'épaisseur h soumise à des contraintes σ_x seulement vaut :

$$\boxed{p_t = \sigma_x \cdot h \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}} \tag{11}$$

L'effort dû au raidisseur de section F_r, de moment d'inertie J_r et de largeur c au droit de la tôle a pour expression :

$$\boxed{c\,(p_{rF} + p_{rN}) = -\,E\mathcal{J}_r \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \sigma_x F_r \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}} \tag{12}$$

On voit que si w_0 est une sinusoïde parallèlement au raidisseur, les charges p_t, p_{rF} et p_{rN} sont également des sinusoïdes. Il en est de même, comme nous l'avons vu, des flèches w_1 dues à ces charges. La condition de voilement $w_0 = w_1$ énoncée tout au début est par conséquent satisfaite : les flèches $w_0 = w_1$ sont bien des sinusoïdes parallèlement au raidisseur. Introduisons les abréviations usuelles

$$\gamma = \frac{E\mathcal{J}_r}{Db}, \quad \delta = \frac{F_r}{bh}, \quad N_x = \omega N_x^{\max}, \quad N_x = kN_c = k\frac{\pi^2 D}{b^2}$$

où b est la hauteur de la tôle, et remarquons que $c\,(p_{rF} + p_{rN})$ est une charge concentrée dans un sens. Il suffit de considérer désormais le sommet

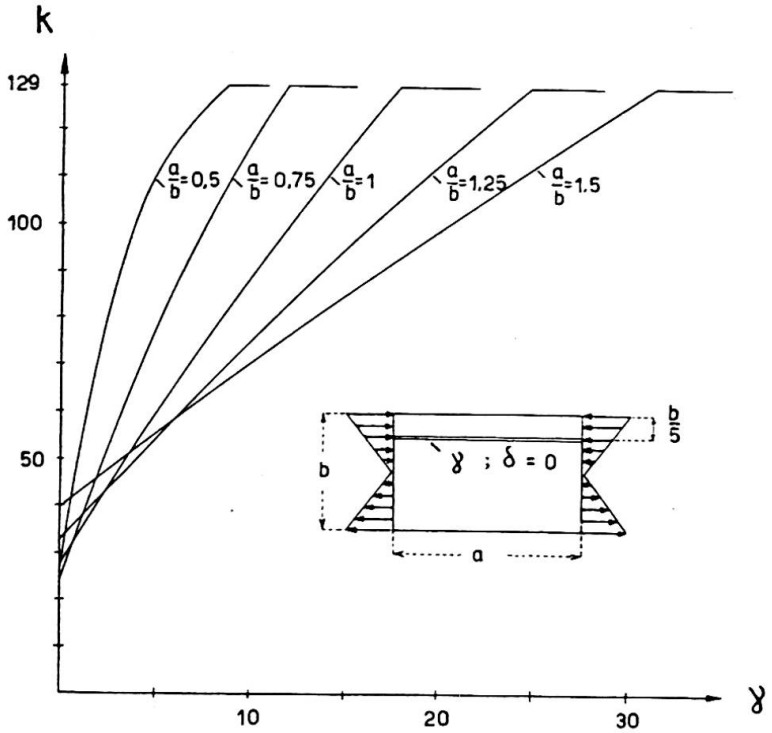

Fig. 1.

des sinusoïdes $w_0 . \sin \frac{\pi}{a} x$, (où a est la longueur de la tôle), c'est-à-dire la médiane perpendiculaire au raidisseur. Les équations (11) et (12) deviennent alors :

$$\boxed{p_t = k \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \omega D w_0} \tag{13}$$

$$\boxed{P_{rF} + P_{rN} = - D w_0 \left(\gamma b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b} \right),} \tag{14}$$

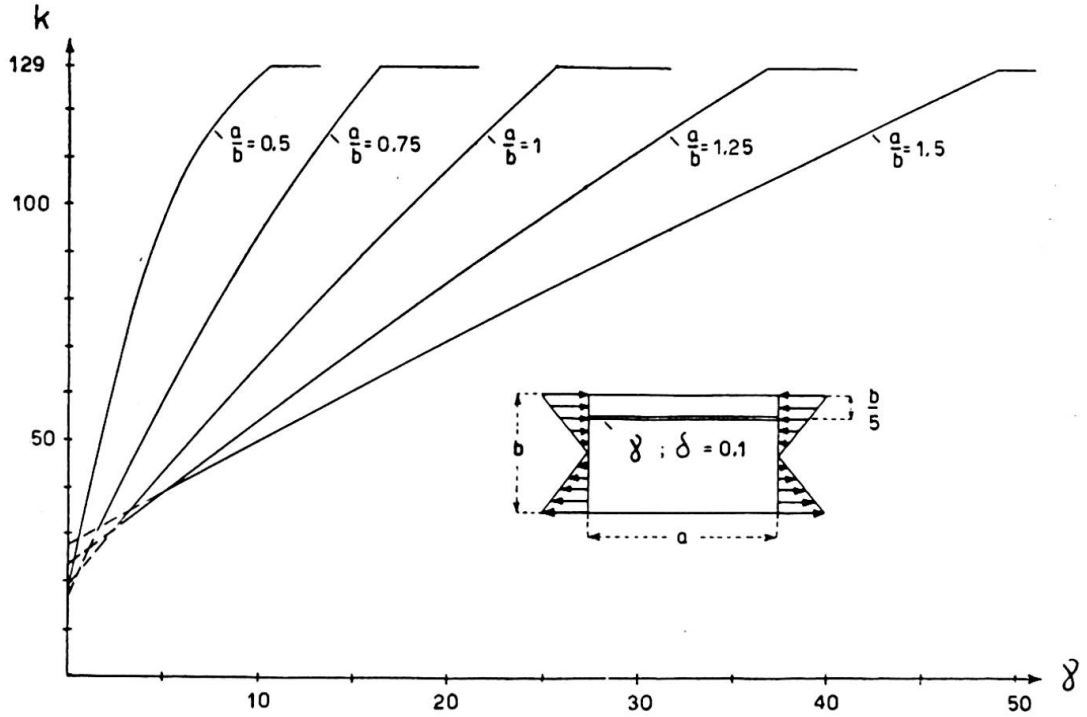

Fig. 2.

Dès que les w_0 sont choisis, on peut trouver très rapidement les flèches $w_{1kt}.k$, w_{1rF}, $w_{1krN}.k$ dues aux p_t, P_{rF}, P_{rN}, en utilisant les tables dressées lors du calcul de la plaque fléchie de mêmes dimensions que la tôle. La flèche totale $w_1 = w_0$ vaut alors, au moment du voilement :

$$w_0 = (w_{1kt} + w_{1krN})\ k + w_{1rF}$$

d'où :

$$\boxed{k = \frac{w_0 - w_{1rF}}{w_{1kt} + w_{1krN}}} \tag{15}$$

expression dans laquelle k doit être constant, quel que soit le point considéré. Si ce n'est pas le cas, il faut recommencer le calcul avec de nouveaux w_0 améliorés : c'est le principe de la méthode d'Engesser-Vianello, dont nous avons déjà parlé. On traitera pour débuter le cas $\delta = 0$. Pour un δ non nul, on peut montrer que les w_0 et le k ne changent pas, si le γ augmente suffisamment. On trouve aisément la valeur de ce γ en maintenant constante l'expression (14). Ceci fait, le γ correspondant à un δ quelconque s'obtient de façon rigoureuse au moyen d'une simple interpolation linéaire.

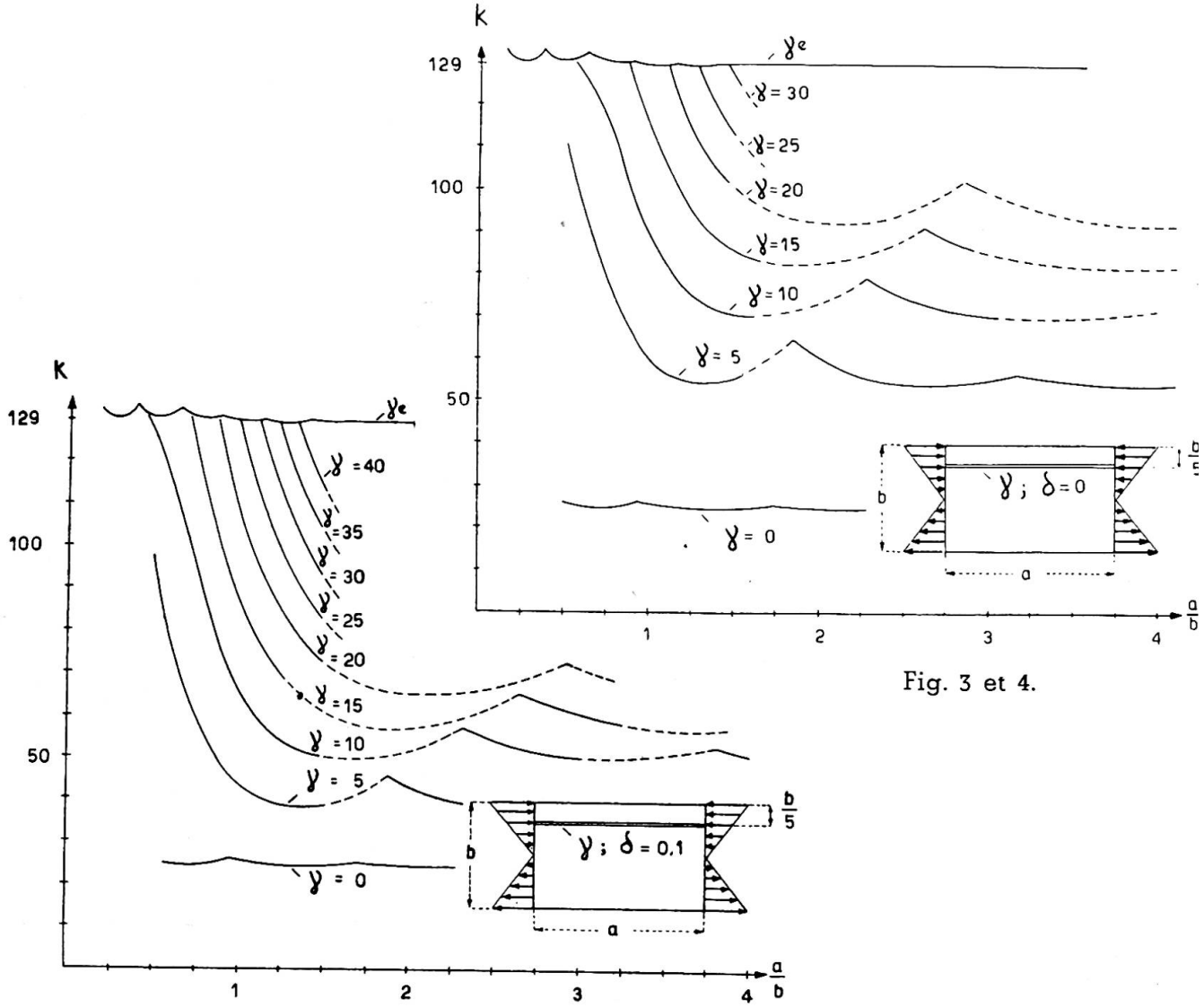

Fig. 3 et 4.

IV. Résultats et conclusions

On montre que le coefficient de voilement k atteint son maximum lorsque le raidisseur se trouve entre deux séries librement formées de cloques superposées ($w = 0$) et qu'il possède la rigidité *ad hoc*, dite *économique, rationnelle* ou *minimum*. A ce moment, le voilement se produit indifféremment avec une seule série de cloques juxtaposées ou deux séries de cloques superposées. Pour les panneaux sans effort tranchant appréciable d'une poutre fléchie, les calculs exécutés donnent, pratiquement dans tous les cas, le *cinquième supérieur de l'âme* et non le quart, supposé généralement, sans justification.

L'augmentation du k, et par conséquent des tensions critiques

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = k \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2$$

est considérable si l'on déplace du quart au cinquième supérieur le raidisseur dit *parfaitement rigide*, c'est-à-dire *possédant la rigidité économique* ou rationnelle. En comparant nos résultats et ceux de Stiffel (*Biegungsbeulung versteifter Rechteckplatten*, *Der Bauingenieur*, 5. Okt. 1941), qui paraissent les plus exacts, cette augmentation atteint *37* %. Les courbes nécessaires au constructeur, données ci-contre (avec parties pointillées approximatives) ont d'ailleurs la même allure que si le raidisseur se

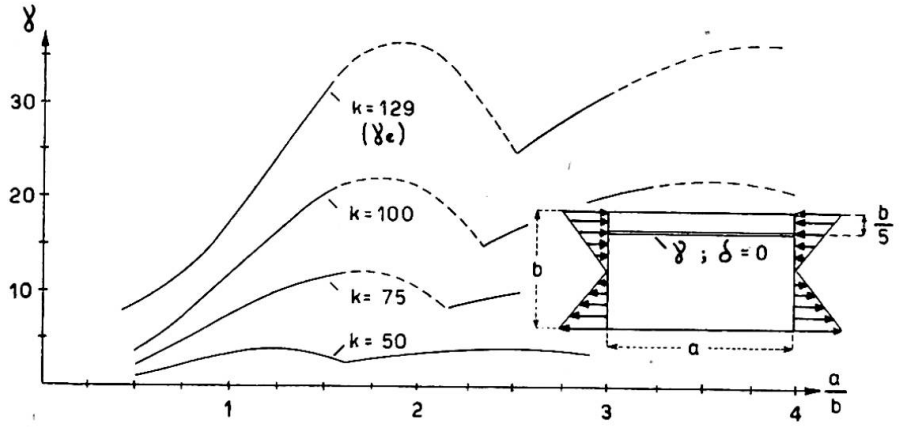

Fig. 5.

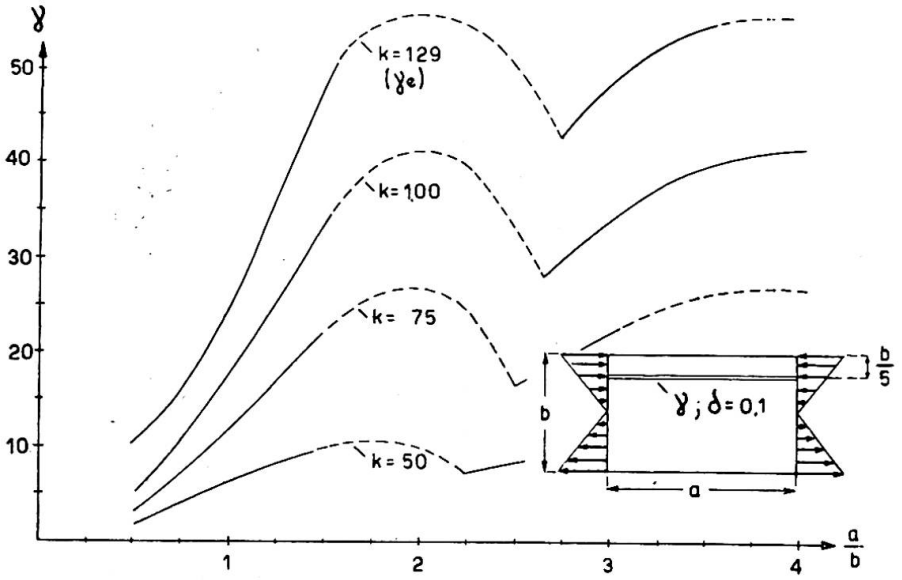

Fig. 6.

trouve au quart supérieur de l'âme (cf. Ch. Massonnet, *La stabilité de l'âme des poutres munies de raidisseurs horizontaux et sollicitées par flexion pure*, *Mémoires A. I. P. C.*, 1940-1941). Nous ne donnons que les courbes correspondant à $\delta = 0$ et à $\delta = 0{,}1$ puisque nous pouvons interpoler linéairement ou même extrapoler. Des contrôles nombreux ont en outre été faits par la méthode énergétique.

Remarquons pour terminer que la *rigidité minimum de deuxième espèce* distinguée par certains auteurs (voir les deux articles du *Stahlbau*, 8. Sept. 1944 : A. Kromm, *Zur Frage der Mindeststeifigkeiten von Plattenaussteifungen*; E. Chwalla, *Ueber die Biegebeulung der längsversteiften Platte und das Problem der Mindeststeifigkeit*) n'est rien d'autre que la rigidité minimum pour former deux séries de cloques superposées, lorsque le raidisseur ne se trouve pas à l'endroit le plus favorable.

Résumé

L'emploi de la méthode Engesser-Vianello pour résoudre le problème du voilement est possible par elle-même. Il faut au préalable déterminer les flèches de la tôle sollicitée transversalement, ce qui peut se faire facilement à l'aide d'une méthode améliorée par bandes entrecroisées, en tenant compte de la torsion.

L'épaisseur des tôles d'une poutre à âme pleine sollicitée par flexion pure est minimum, lorsque le raidisseur se trouve au cinquième supérieur et possède la rigidité suffisante. Dans ce cas, le coefficient de voilement atteint la valeur de 129.

Zusammenfassung

Die Anwendung des Verfahrens von Engesser-Vianello zur Lösung der Beulprobleme ist ohne weiteres möglich, erfordert aber zuerst die Bestimmung der Durchbiegungen der als querbelastete Platten beanspruchten Bleche, was am besten mit Hilfe einer verbesserten, genauen Streifenmethode mit Berücksichtigung der Torsion erfolgt.

Die Blechdicke eines auf reine Biegung beanspruchten vollwandigen Trägers wird dann am kleinsten, wenn die Steife im oberen Fünftel liegt und die notwendige Steifigkeit besitzt. Die Beulzahl erreicht in diesem Falle den Wert 129.

Summary

The use of the Engesser-Vianello process for solving the problem of buckling is actually possible, but it is necessary te have a prior knowledge of the deflection of the stressed plates used as transversally loaded slabs, which is best done with the help of an improved and precise strip method, taking torsion into account.

The thickness of plates of a plate girder stressed by bending alone is smallest if the strip lies in the upper fifth and has the requisite stiffness. In this case the buckling factor reaches the value of 129.