

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 3 (1948)

**Rubrik:** Ic: Strength and stability of thin walled structures

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ic1

## **Le voilement des plaques planes sollicitées dans leur plan**

### **Das Ausbeulen der Platten**

### **Buckling of plates**

CH. MASSONNET

Chargé de Cours à l'Université de Liège

Dans les recherches expérimentales sur le voilement des plaques, il est extrêmement difficile de noter le moment précis où l'on atteint la charge critique de voilement. Cette difficulté est due à ce que tout montage expérimental est nécessairement imparfait : la plaque possède inévitablement une certaine courbure initiale et le dispositif de mise en charge applique toujours les forces avec une certaine excentricité.

Il en résulte qu'il se produit toujours un voilement par divergence précédé de grandes déformations. Or, au fur et à mesure que croissent celles-ci, il croît aussi dans le feuillet moyen de la plaque des tensions de membrane que la théorie usuelle ignore, et qui perturbent le phénomène de voilement. Ces tensions de membrane empêchent la plaque de prendre de grandes déformations transversales, de sorte que la courbe de la flèche transversale en fonction de la charge présente l'aspect de la figure 1, sans point d'inflexion bien marqué.

Les circonstances que je viens de rappeler brièvement ont été particulièrement mises en évidence dans tous les essais exécutés pour étudier la stabilité des âmes de poutres à âme pleine, en particulier ceux de MM. Gaber, Moheit, Wästlund et Bergmann. La perturbation introduite par les tensions de membrane est particulièrement gênante dans les poutres soudées, parce que la soudure produit inévitablement des gauchissements des pièces d'essai.

Dans les expériences sur plaques isolées, telles que celles de MM. Seydel, Lahde et Wagner, Kollbrunner, les circonstances sont plus favorables, mais l'instant exact du voilement reste cependant difficile à noter.

Avant d'entreprendre des essais nouveaux sur poutres soudées, j'ai essayé de me rendre compte théoriquement de l'ordre de grandeur des tolérances qu'il faudrait imposer à la planéité des âmes pour obtenir des charges critiques de voilement suffisamment marquées.

Le problème non linéaire de la flexion des plaques accompagné de grandes déformations obéit à deux équations simultanées aux dérivées

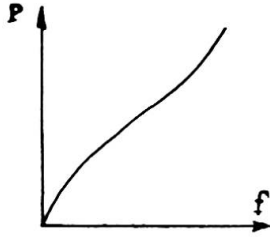


Fig. 1. Allure générale de la courbe de la flèche transversale en fonction de la charge.

partielles du quatrième ordre, dues à von Kármán <sup>(1)</sup>. Il est aisé de généraliser ces équations pour le cas où la plaque présente une courbure initiale. Appelons :

- $w_0(x, y)$  la déformée initiale de la plaque ;  
 $w_1(x, y)$  sa déformée additionnelle élastique ;  
 $F(x, y)$  la fonction de tension définissant l'état de tension de membrane ;  
 $h$  l'épaisseur de la plaque ;  
 $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$  sa rigidité ;  
 $q$  la charge transversale par unité d'aire ;  
 $\nu$  le coefficient de Poisson.

On trouve les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\Delta F = E \left\{ \left[ \frac{\partial^2(w_0 + w_1)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{\partial^2(w_0 + w_1)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2(w_0 + w_1)}{\partial y^2} \right\} \\ \quad \quad \quad - \left\{ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \\ \Delta\Delta w_1 = \frac{h}{D} \left[ \frac{q}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2(w_0 + w_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2(w_0 + w_1)}{\partial y^2} \right. \\ \quad \quad \quad \left. - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2(w_0 + w_1)}{\partial x \partial y} \right] \end{array} \right. \quad (1)$$

L'analyse exacte d'une plaque rectangulaire légèrement courbe par ces équations étant en dehors des possibilités pratiques, j'ai examiné le cas plus simple d'une plaque circulaire légèrement courbe, encadrée sur son pourtour et soumise à des forces radiales de compression  $p$  uniformément réparties (fig. 3). Dans ce problème, la déformation présente la symétrie de révolution et la seule variable indépendante est le rayon  $r$ , de sorte que le laplacien  $\Delta$  se réduit à

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} .$$

<sup>(1)</sup> Voir, par exemple, à ce sujet S. TIMOSHENKO, *Théorie de la Stabilité élastique*. Béranger, 1943, pp. 310 et 311.

Les équations générales (1) prennent alors la forme plus simple

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dF}{dr} \right) &= E \left\{ - \frac{d^2(w_0 + w_1)}{dr^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{d(w_0 + w_1)}{dr} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2 w_0}{dr^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dw_0}{dr} \right\} \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw_1}{dr} \right) &= \frac{h}{D} \left[ \frac{q}{h} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d^2(w_0 + w_1)}{dr^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2 F}{dr^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d(w_0 + w_1)}{dr} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Les tensions principales de l'état de tension de membrane sont radiale et circonférentielle ; elles valent respectivement

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{dF}{dr} \quad \text{et} \quad \sigma_\theta = \frac{d^2 F}{dr^2} .$$

Les conditions aux limites sont

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \frac{dw}{dr} = 0 \\ \sigma_r \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{dF}{dr} = -p, \end{array} \right\} \quad \text{sur le bord } (r = R) \quad (3)$$

si l'on compte les forces  $p$  positivement en compression.

Le problème de voilement correspond évidemment à  $q = 0$  ; il a été résolu en adaptant au cas d'une plaque légèrement courbe la méthode proposée par Friedrichs et Stoker pour une plaque parfaitement plane<sup>(2)</sup>. Je renvoie à leur mémoire pour le détail de la méthode et ne donnerai que les renseignements strictement indispensables.

Le rayon de giration d'une section droite de la plaque vaut

$$i = \sqrt{\frac{D}{Eh}} = \frac{h}{\sqrt{12(1-\eta^2)}} = \gamma h ,$$

à condition de poser

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{12(1-\eta^2)}} . \quad (4)$$

Introduisons le rapport

$$\eta = \frac{\gamma h}{R} . \quad (5)$$

qui est l'inverse du « degré d'élanement » de la plaque.

Rapportons le problème à la nouvelle variable indépendante sans dimensions

$$\alpha = \frac{Ar}{R} , \quad (6)$$

où  $A$  est une constante provisoirement indéterminée.

(2) K. O. FRIEDRICHS, et J. J. STOKER, *Journ. of Appl. Mech.*, mars 1942, pp. 7 à 14.

Adoptons comme fonctions inconnues, à la place de  $F$  et  $w_1$ , les quantités sans dimensions

$$\pi = - \frac{1}{A^2 \gamma^2 E} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dF}{dr} \quad \text{et} \quad k = - \frac{1}{A^2 \gamma} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{dw_0}{dr}. \quad (7)$$

Caractérisons la déformée initiale de la plaque par la fonction

$$k_0 = - \frac{1}{A^2 \gamma} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{dw_0}{dr}. \quad (8)$$

Intégrons une fois les équations (2) — avec des constantes d'intégration nulles — puis introduisons les notations ci-dessus ; il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha^3} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left( \alpha^3 \frac{d\pi}{d\alpha} \right) = \frac{1}{2} k^2 + k k_0 \\ \frac{1}{\alpha^3} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left( \alpha^3 \frac{dk}{d\alpha} \right) + \pi (k + k_0) = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Les conditions aux limites (3) s'écrivent à présent

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0 \\ \pi = \pi_e \end{array} \right\} \quad \text{pour } \alpha = A. \quad (10)$$

à condition de poser

$$\pi_e = - \frac{P}{A^2 \gamma^2 E} \quad (11)$$

Comme on ne désire déterminer que l'allure du phénomène de voilement, il s'indique de choisir comme déformée initiale de la plaque une forme aussi simple que possible. Si l'on adopte la déformée parabolique

$$w_0 = B \gamma R \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (12)$$

on constate que la fonction  $k_0$  se réduit à la constante

$$k_0 = \frac{2B}{A^2},$$

ce qui simplifie sensiblement les calculs ultérieurs.

La flèche initiale de la plaque vaut dans ce cas

$$f_0 = B \gamma R = B \gamma h,$$

d'où

$$B = \frac{f_0}{\gamma h}. \quad (13)$$

Pour résoudre le système d'équations (9), on représente  $k$  et  $\pi$  par des séries de puissances. Le problème étant symétrique par rapport au centre de la plaque, ces séries ne contiennent que des puissances paires de  $\alpha$  et sont de la forme

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \alpha^{2n}, \quad k = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \alpha^{2n}$$

En les introduisant dans les équations (9), et en égalant les coefficients des mêmes puissances de  $\alpha$  dans les deux membres, on obtient les formules de récurrence suivantes pour  $\pi$  et  $k$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2n(2n+2)\pi_n = \frac{1}{2} \sum_{i+j=n-1} k_i k_j + \frac{2B}{A^2} k_{n-1} \\ 2n(2n+2)k_n = - \sum_{i+j=n-1} \pi_i k_j - \frac{2B}{A^2} \pi_{n-1} \end{array} \right\} \quad (15)$$

On peut se donner arbitrairement les valeurs des deux premiers coefficients  $k_0$  et  $\pi_0$  des séries (14). On calcule ensuite les coefficients suivants à l'aide des formules (15).

Il reste à déterminer la constante  $A$  ; elle se détermine à l'aide de la première condition aux limites (10)

$$k=0 \quad \text{pour} \quad \alpha=A, \quad (10)$$

qui s'écrit explicitement

$$0 = k_0 + k_1 A^2 + k_2 A^4 + k_3 A^6 + \dots \quad (16)$$

$A$  est la plus petite racine de cette équation transcendante. On doit la déterminer par tâtonnements. Une fois  $A$  trouvé, on calcule la valeur de la fonction  $\pi$  pour  $\alpha=A$ , puis l'intensité de la force de compression  $p$  appliquée au bord de la plaque par la relation

$$p = A^2 \eta^2 E \pi_{(\alpha=A)}.$$

La charge critique de voilement de la plaque parfaitement plane vaut <sup>(3)</sup>

$$p_{cr} = 14,68 \eta^2 E,$$

de sorte que l'on a

$$\frac{p}{p_{cr}} = \frac{A^2 \pi_{(\alpha=A)}}{14,68}.$$

Enfin, la flèche de la plaque en son centre vaut

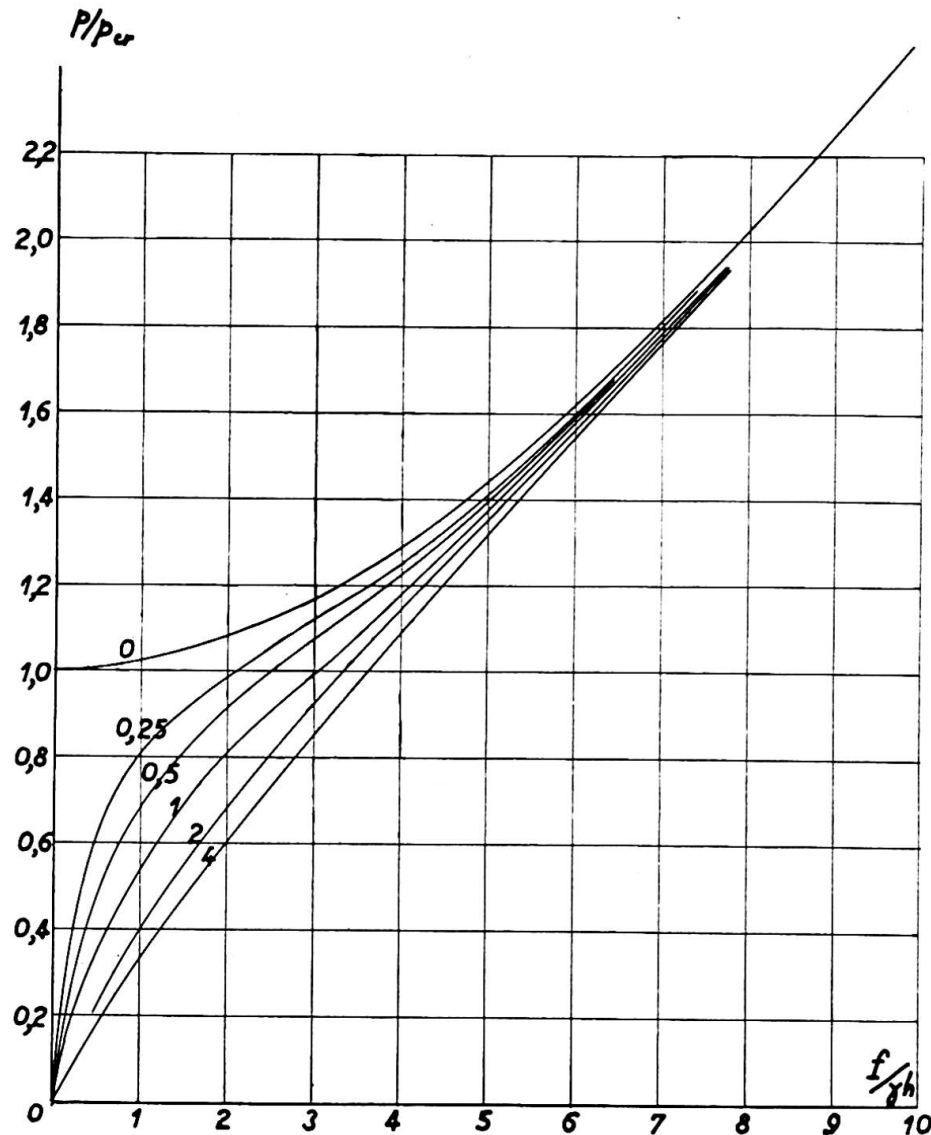
$$f = \eta R \int_0^A k \alpha d\alpha = \eta R \left( k_0 \frac{A^2}{2} + k_1 \frac{A^4}{4} + k_2 \frac{A^6}{6} + \dots \right),$$

d'où

$$\frac{f}{\gamma h} = k_0 \frac{A^2}{2} + k_1 \frac{A^4}{4} + k_2 \frac{A^6}{6} + \dots$$

La convergence des séries (14) diminue au fur et à mesure que le rapport  $\frac{p}{p_{cr}}$  augmente. Pour obtenir une précision suffisante, on doit pousser les calculs jusqu'aux coefficients d'ordre 10 pour les valeurs de  $\frac{p}{p_{cr}}$  voisines de 1 et jusqu'à ceux d'ordre 20 pour  $\frac{p}{p_{cr}} = 2$ .

<sup>(3)</sup> Ce résultat est établi dans la plupart des traités d'élasticité; voir par exemple S. TIMOSHENKO, *Théorie de la Stabilité élastique*, p. 355.



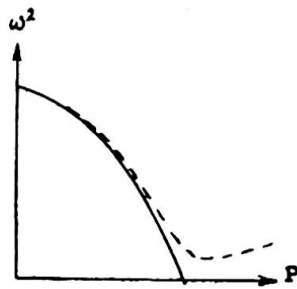
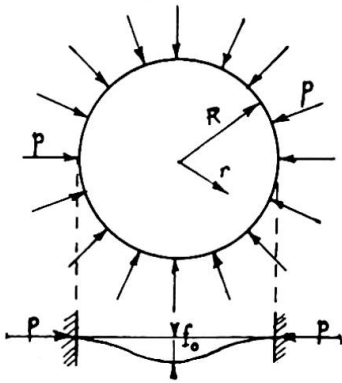
**Fig. 2.** Variation de la flèche relative de voilement  $\frac{f}{\gamma h}$  en fonction de la tension relative  $\frac{P}{P_{cr}}$  pour diverses valeurs de la flèche initiale relative  $\frac{f_0}{\gamma h}$ .

Les calculs numériques ont été effectués pour 35 couples différents de coefficients  $k_0$  et  $\pi_0$ .

Comme résultat de ces calculs extrêmement laborieux, on peut tracer, pour chaque valeur de la courbure initiale de la plaque, la courbe de variation de la flèche relative  $\frac{f}{\gamma h}$  en fonction de la charge relative  $\frac{P}{P_{cr}}$ . Rappelons que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{12(1-\eta^2)}} (= 0,303 \text{ pour l'acier}).$$

Le diagramme de la figure 2 représente une série de ces courbes, cotées en valeurs de la flèche initiale relative  $\frac{f_0}{\gamma h}$ . Il résulte de ce diagramme que, même pour la faible courbure initiale  $\frac{f_0}{\gamma h} = 0,25$ , le point d'inflexion de la courbe est à peine marqué et l'apparition de l'instabilité très malaisée à saisir.



**Fig. 3** (à gauche). Plaque circulaire encastree soumise à des forces radiales de compression.

**Fig. 4** (à droite). Loi de variation du carré de la fréquence en fonction de la charge.

Si l'on admet que les résultats précédents sont applicables à une plaque carrée de 1 mètre de côté et 5 millimètres d'épaisseur, il faudrait, pour y observer un phénomène d'instabilité nettement marqué, que  $\frac{f_0}{\gamma h}$  soit de l'ordre de 0,10, c'est-à-dire  $f_0$  de l'ordre de

$$0,10 \gamma h = 0,10 \times 0,303 \times 5 = 0,15 \text{ mm},$$

ce qui est extrêmement malaisé à réaliser pratiquement.

Par exemple, dans les essais de MM. Wästlund et Bergmann <sup>(4)</sup>, le rapport  $\frac{f_0}{\gamma h}$  est compris entre 1,2 et 6 et vaut 3,5 en moyenne. Il est donc compréhensible que ces auteurs n'aient pu mettre en évidence l'apparition de la charge critique.

La méthode statique habituelle ne convenant donc décidément pas pour déterminer la charge critique de voilement, j'ai pensé à utiliser une méthode vibratoire que j'avais développée théoriquement dans un mémoire paru en 1940 <sup>(5)</sup>. Cette méthode non destructive est basée sur le fait que la fréquence propre de vibration d'un système élastique, chargé de forces capables de produire son instabilité, diminue lorsque croissent ces forces et s'annule au moment précis où le flambage se produit. La loi de variation du carré de la fréquence en fonction de la charge a généralement l'allure de la figure 4. Ce procédé a été utilisé expérimentalement sous une autre forme par M. Kollbrunner pour mesurer la charge critique de flambage des arcs.

Cette méthode ne peut s'appliquer telle quelle à l'étude du voilement d'une plaque légèrement courbe, parce que les tensions de membrane qui croissent dans le feuillet moyen avec les déplacements transversaux de ce feuillet, au fur et à mesure que la charge augmente, ont un effet stabilisateur. On peut donc prévoir que la fréquence de vibration, après avoir décru, doit passer par un minimum puis recommencer à croître, comme l'indique la courbe en pointillé de la figure 4.

Le problème est de savoir de combien la courbe expérimentale s'écarte

<sup>(4)</sup> G. WÄSTLUND et St. BERGMANN, *Buckling of webs in deep steel I girders*, Stockholm, 1947, 205 pages.

<sup>(5)</sup> Ch. MASSONNET, *Les relations entre les modes normaux de vibration et la stabilité des systèmes élastiques* (Bulletin des Cours et Laboratoires d'essais du Génie civil, t. 1<sup>er</sup>, nos 1 et 2, Liège 1940, 353 pages).

de la courbe théorique et si l'on peut encore déduire de cette courbe la charge critique avec une précision suffisante.

Pour obtenir des renseignements quantitatifs à ce point de vue, j'ai repris les calculs relatifs à la plaque circulaire comprimée radialement, que j'ai étudiée plus haut. Il est assez simple de calculer, par la méthode de Ritz, la fréquence propre des petites vibrations de la plaque autour de sa position d'équilibre légèrement courbe, en tenant compte de l'effet des tensions de membrane.

En répétant ces calculs pour toute la série de valeurs des forces de compression  $p$  envisagées plus haut, on arrive à tracer le diagramme de la figure 5, qui donne la variation du carré de la fréquence relative de vibration avec la tension relative de voilement, pour diverses valeurs de la courbure initiale de la plaque.

On voit que, pour  $\frac{f}{\gamma h}$  inférieur à un, on peut obtenir une bonne valeur de la charge critique en extrapolant la courbe expérimentale de fréquence parallèlement à la courbe théorique et en cherchant son intersection avec l'axe des abscisses.

J'espère pouvoir ausculter prochainement, par cette méthode, les dif-

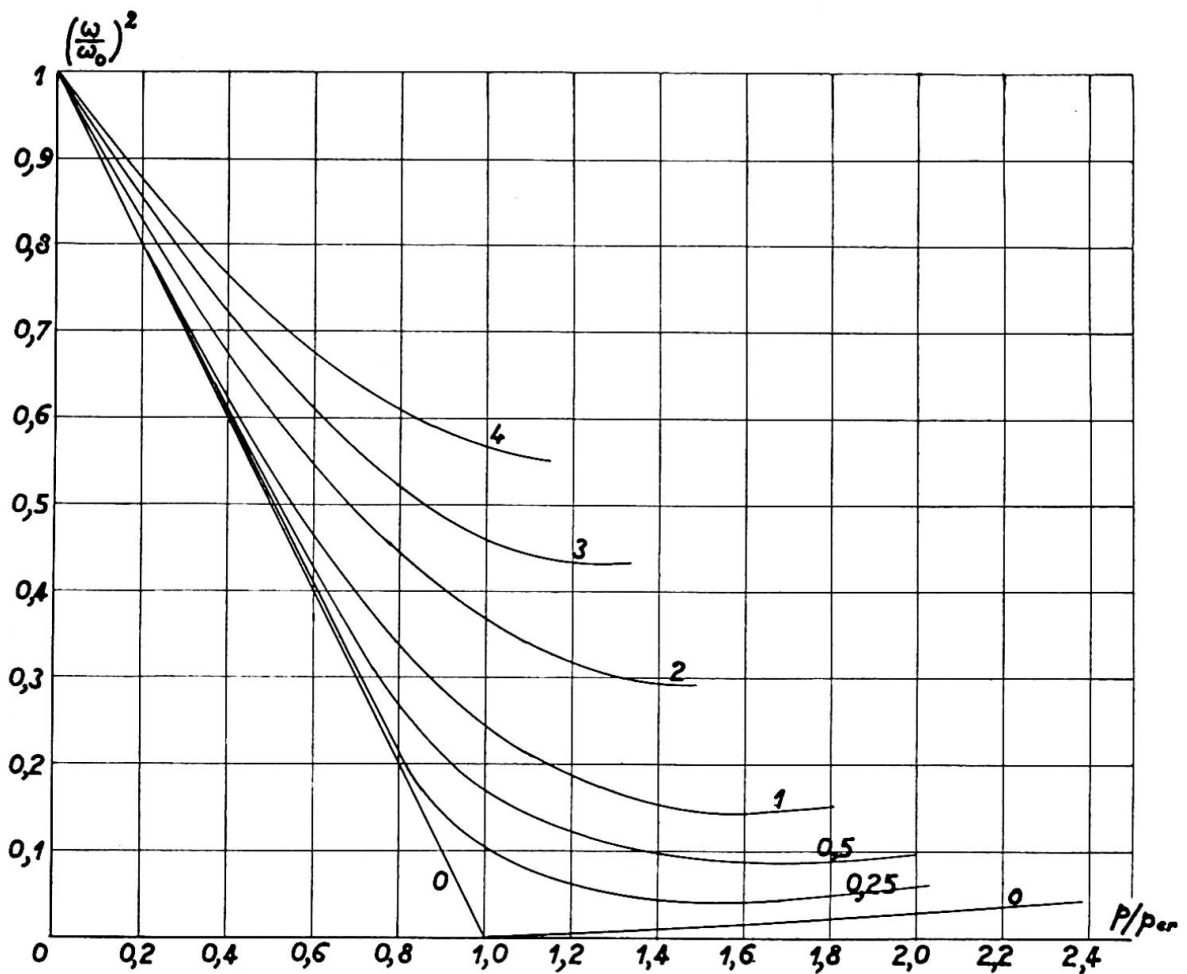


Fig. 5. Variation du carré de la fréquence relative de vibration avec la tension relative de voilement pour diverses valeurs de la flèche initiale relative  $\frac{f_0}{\gamma h}$ .

férents panneaux d'une poutre à âme pleine soumise par des vérins hydrauliques à de nombreuses combinaisons différentes de charges.

Pour terminer, je voudrais compléter la discussion qui précède par quelques constatations qui découlent de la comparaison de la théorie usuelle du voilement avec les essais et les observations faites sur les ouvrages construits.

En ce qui concerne l'allure du phénomène de voilement, il faut distinguer soigneusement les plaques maintenues ou même raidies sur leurs bords — comme les panneaux de poutres à âme pleine — et les plaques comportant un ou plusieurs bords libres. Les considérations qui suivent ne s'appliquent en principe qu'à la première catégorie de plaques.

Il semble qu'on ait été hypnotisé jusqu'ici par la théorie linéaire du voilement des plaques, qui ne fournit cependant qu'une description incomplète (sinon erronée) du phénomène réel.

Les expériences faites sur des poutres à âme pleine complètes montrent que la charge critique théorique de voilement, non seulement peut être difficilement mise en évidence, mais encore ne constitue pas nécessairement une limite dangereuse. A l'appui de cette affirmation, je citerai les faits suivants :

a) Quand on lit la littérature technique consacrée au voilement, on constate que les coefficients de sécurité proposés ont été sans cesse en décroissant depuis 1,8 et 2 à l'origine jusqu'à des valeurs proches de l'unité (essais de MM. Wästlund et Bergmann);

b) Il existe de nombreux ponts à âme pleine de grande hauteur où l'âme manifeste en service un début de voilement variable avec l'intensité des charges, l'insolation, etc. Ces ouvrages ne s'en comportent pas moins parfaitement ;

c) On autorise couramment en construction aéronautique de larges dépassements de la charge critique théorique et il n'en résulte aucun inconvénient ;

d) Enfin, même dans le cas de plaques libres sur certains de leurs bords, on peut constater que le voilement n'entraîne pas nécessairement la rupture. Le professeur Hartmann rapporte des essais de flambage d'une poutre en T à parois minces comprimée axialement <sup>(6)</sup> dans lesquels il s'est manifesté d'abord un voilement de l'âme en plusieurs ondes ; mais ce voilement s'est bientôt stabilisé et la rupture de la pièce a eu lieu par flambage d'ensemble en une demi-onde.

En résumé, même si le voilement théorique de l'âme se produit dans le domaine élastique, la rupture d'une poutre à âme pleine par insuffisance de l'âme est un phénomène complexe où interviennent entre autres la courbure initiale de l'âme, la rigidité de son encadrement et les propriétés plastiques du métal. La charge critique théorique, qui ne tient pas compte de toutes ces circonstances, ne saurait donner à elle seule une idée exacte de la résistance réelle d'un panneau d'âme. Il est d'ailleurs périlleux d'appliquer directement à des panneaux d'âme les résultats expérimentaux obtenus sur des plaques isolées articulées sur leurs bords, parce que les conditions aux limites sont très différentes dans les deux cas.

Il est parfaitement possible que des panneaux d'âme présentant une courbure initiale appropriée, voulue par le constructeur, soient plus résistants qu'un panneau parfaitement plan. Ce point mériterait d'être éclairci par des recherches expérimentales.

(6) F. HARTMANN, *Knickung, Kippung, Beulung*, pp. 175 à 183, Vienne, F. Deuticke, 1937.

### Résumé

Il est très difficile de réaliser des essais mettant en évidence la charge critique de voilement des âmes de poutres à âme pleine. Ce fait provient de la naissance, dans le feuillet moyen de la plaque, de tensions de membrane qui perturbent le phénomène.

L'auteur donne les équations générales du voilement non linéaire d'une plaque à légère courbure initiale. Par l'étude d'une plaque circulaire comprimée radialement, il montre que la charge critique n'apparaît que si la plaque est d'une planéité exceptionnelle.

L'auteur propose ensuite une méthode vibratoire non destructive pour déterminer la charge critique. L'étude vibratoire de la plaque circulaire montre que ce procédé a des chances de donner de bons résultats.

En terminant, l'auteur souligne toute la complexité du phénomène de voilement des âmes et fait des réserves concernant la signification des charges critiques déduites de la théorie linéaire des plaques.

### Zusammenfassung

Es ist sehr schwierig, Versuche zur Bestimmung der kritischen Beulast der Stege von Vollwandträgern durchzuführen. Dies rührt davon her, dass in der Mittelebene der Platte Membranspannungen entstehen, die den Vorgang stören.

Der Verfasser stellt die Grundgleichungen des nichtlinearen Ausbeulens einer Platte mit leichter Anfangskrümmung auf. An dem Beispiel der radial gedrückten Kreisplatte zeigt er, dass die kritische Last nur dann in Erscheinung tritt, wenn die Platte aussergewöhnlich eben ist.

Der Verfasser schlägt dann zur Bestimmung der kritischen Last eine zerstörungsfreie Methode mittels Schwingungen vor. Die Untersuchung der Kreisplatte zeigt, dass dieses Verfahren Aussichten auf gute Ergebnisse hat.

Der Verfasser unterstreicht abschliessend die Mannigfaltigkeit des Ausbeulvorganges von Stegblechen und macht Vorbehalte gegenüber den kritischen Lastwerten, die aus der linearen Plattentheorie abgeleitet werden.

### Summary

It is very difficult to create tests which will show the critical buckling load of the web of full-web girders. This fact arises from the creation, in the middle plane of the plate, of membrane stresses which perturb the phenomenon.

The author cites general equations of the non-linear buckling of a plate having a slight initial curvature. By studying a radially compressed circular plate he shows that the critical load will only appear if the plate is of exceptional planeness.

The author then proposes a non destructive vibratory method to determine the critical load. The vibratory study of the circular plate shows that it is likely that this method will give good results.

In conclusion, the author stresses the whole complexity of the phenomenon of buckling of plates and makes some provisos regarding the significance of critical loads deduced from the linear theory of plates.

# Ic2

## **Essais sur le voilement de tôles rectangulaires sollicitées par des tensions longitudinales à distribution triangulaire**

### **Versuche über das Ausbeulen von Rechteckplatten unter dreieckförmig verteiltem Längsdruck**

### **Tests about buckling of plates loaded by triangular distributed longitudinal stresses**

C. F. KOLLBRUNNER

Dr Sc. techn. Ing., Zürich

#### Einleitung

Damit dem konstruierenden Ingenieur mathematisch oder baustatisch abgeleitete, theoretisch einwandfreie und durch Versuche bestätigte Resultate für die Berechnung dünnwandiger Flächentragwerke in die Hand gegeben werden können, befasst sich die Technische Kommission des Verbandes Schweizerischer Brückenbau- und Stahlhochbauunternehmungen (T. K. V. S. B.) zusammen mit Prof. Dr F. Stüssi der E. T. H. Zürich und Prof. Ir. P. P. Bijlaard der T. H. Delft seit zwei Jahren mit der versuchsmässigen Untersuchung der Ausbeulung von Blechen, wie auch mit der theoretisch exakten Abklärung der Plattenstabilität <sup>(1)</sup>.

Als erster Schritt der gemeinsamen Arbeit wurde das Ausbeulen der auf einseitigen, gleichmässig verteilten Druck beanspruchten Platten im elastischen und plastischen Bereich sowohl theoretisch wie auch versuchsmässig abgeklärt. Momentan werden am Institut für Baustatik an der E. T. H. Zürich, Abteilung Prof. Dr F. Stüssi, Versuche über die Aus-

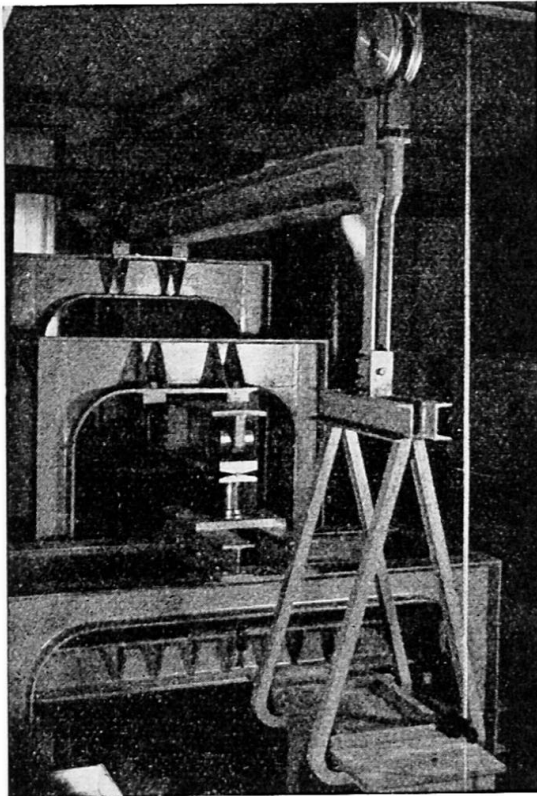
---

<sup>(1)</sup> C. F. KOLLBRUNNER, *Das Ausbeulen der auf einseitigen, gleichmässig verteilten Druck beanspruchten Platten im elastischen und plastischen Bereich (Versuchsbericht) (Mitteil. aus dem Institut für Baustatik an der E. T. H., Nr. 17, A. G. Gebr. Leemann & Co., Zürich, 1946).*

P. P. BIJLAARD, *Grundlegende Betrachtungen zum Ausbeulen der Platten und Schalen im plastischen Bereich (Mitteil. aus dem Institut für Baustatik an der E. T. H., Nr. 21, A. G. Gebr. Leemann & Co., Zürich, 1948).*

C. F. KOLLBRUNNER und G. HERRMANN, *Elastische Beulung von auf einseitigen, ungleichmässigen Druck beanspruchten Platten (Mitteilungen der T. K. V. S. B., Nr. 1, A. G. Gebr. Leemann & Co., Zürich, 1948).*

P. P. BIJLAARD, C. F. KOLLBRUNNER, F. STÜSSI, *Theorie und Versuche über das plastische Ausbeulen von Rechteckplatten unter gleichmässig verteiltem Längsdruck (I. V. B. H., dritter Kongress, Vorbericht, S. 119. Lüttich, 1948).*



**Abb. 1.** Hebelmaschine von 25 t Druckkraft.

beulung von auf einseitigen, ungleichmässigen Druck beanspruchten Platten im elastischen und plastischen Bereich durchgeführt.

Der jetzige Bericht orientiert nur über die Versuchsergebnisse dieser Serie im *elastischen* Bereich. Die ganze Serie, die sich selbstverständlich auch auf den *plastischen* Bereich erstreckt, wird noch dieses Jahr beendet sein. Darauf werden noch Versuche mit Biegung und mit Schub durchgeführt, so dass für alle Belastungsfälle und Randbedingungen Ende 1949 dem Konstrukteur durch Versuche belegte Berechnungsformeln übergeben werden können <sup>(2)</sup>.

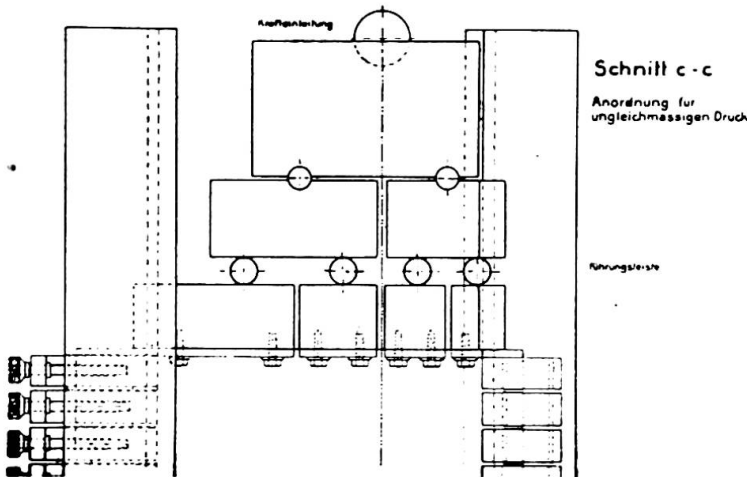
#### Versuchseinrichtung

Die neue von Dipl. Ing. M. Walt entworfene Hebelmaschine ist im Vorbericht dieses Kongresses skizziert (Abb. 1). Die Krafteinleitung für den dreieckförmig verteilten Druck erfolgt gemäss Abb. 2. Die Einzellasten im Verteilsystem greifen im Schwerpunkt der Dreiecke resp. Trapeze an.

Abb. 3 zeigt den Querschnitt einer einerseits fest eingespannten, andererseits gelenkig gelagerten Platte mit den die Reibung verhindernden Kugellagern.

Damit der gewünschte ungleichmässige, d. h. dreieckförmig verteilte Längsdruck erhalten werden kann, müssen die *belasteten* Plattenränder, somit der obere und der untere Rand, die Pressungen durch verschiedene Einzelelemente erhalten. Dabei muss die horizontale Verschieblichkeit der Plattenränder gewährleistet sein, damit sich die Querkontraktionen frei

<sup>(2)</sup> F. Strüssi, *Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten* (Abhandlungen der I. V. B. H., Bd. VIII. A. G. Gebr. Leemann & Co., Zürich, 1947).



**Abb. 2.** Ansicht der Krafteinleitung in die Versuchsplatte für dreieckförmig verteilten Längsdruck.

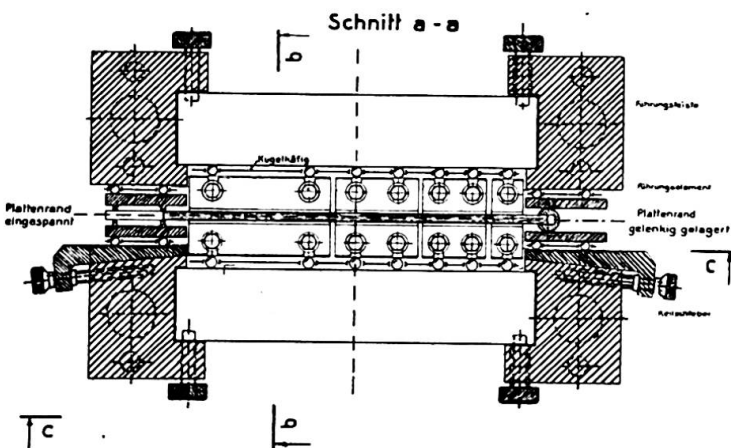
auswirken können. Zudem müssen diese Plattenränder gegen seitliches Ausweichen gehalten sein.

Je nach der Lagerungsart können die seitlichen, d. h. die *unbelasteten* Plattenränder frei, gelenkig oder eingespannt ausgebildet werden. Diese Plattenränder müssen sowohl die vertikalen Bewegungen infolge der Zusammendrückung in der Kraftrichtung, wie auch die horizontalen Verschiebungen, herrührend von der Querkontraktion, ohne Widerstand mitmachen können. Dies wurde durch Anbringung einzelner reibungsfreier Führungselemente erreicht.

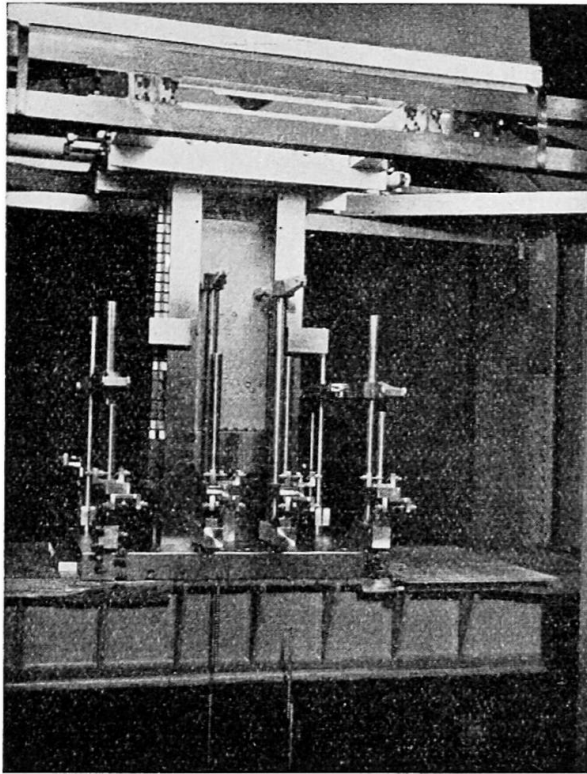
Die Abb. 4 und 5 zeigen einen Gesamtüberblick der Beul- und Messvorrichtungen bei zwei verschiedenen Versuchsplatten. Die angebrachten Messvorrichtungen mittelst Hohlspiegeln, also auf optischem Wege, erlauben Messungen der Dehnungen an je zwei Stellen der Platte vorn und hinten in vertikaler wie auch in horizontaler Richtung. Gleichzeitig werden somit an 8 Messstrecken die Längenänderungen registriert. Die Ausbeulung wurde einerseits mit Messuhren, andererseits mit den Dehnungsmessungen bestimmt.

Versuchsergebnisse

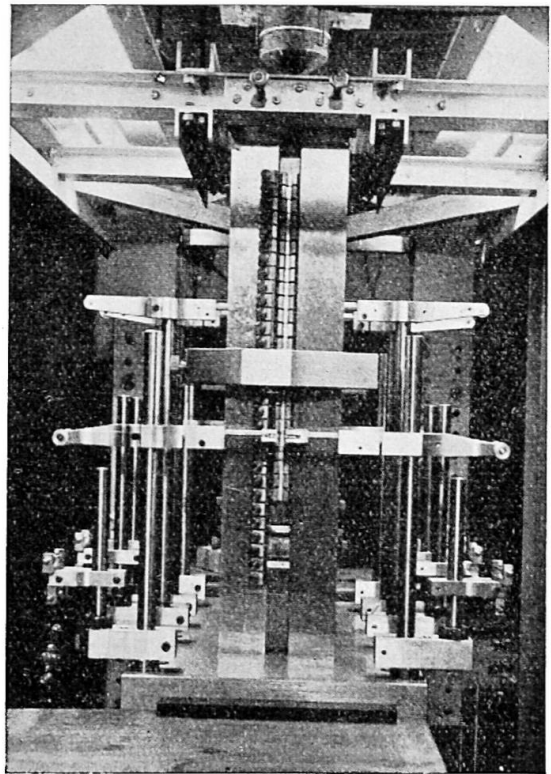
Die Versuche wurden am Institut für Baustatik an der E. T. H. Zürich, Abteilung Prof. Dr. F. Stüssi von Dipl. Ing. M. Walt durchgeführt. Die Versuchsplatten aus Avional M wurden von der Aluminium-Industrie-



**Abb. 3.** Querschnitt durch eine links fest eingespannte, rechts gelenkig gelagerte Versuchsplatte.



**Abb. 4.** Gesamtüberblick der Beul- und Messvorrichtungen für eine Platte 20 × 48 cm (Frontalansicht).



**Abb. 5.** Gesamtübersicht der Beul- und Messvorrichtungen für eine Platte 16 × 48 cm (Seitenansicht).

Aktien-Gesellschaft in Lausanne-Ouchy kostenlos zur Verfügung gestellt. Diese grosszügige Unterstützung unserer Versuche sei auch hier bestens verdankt. In Abb. 6 sind die erhaltenen mittleren Versuchswerte von je zwei Platten im elastischen Bereich, die mit den theoretischen Beulspannungen äusserst gut übereinstimmen, aufgetragen. Die Abszisse ist die ideelle Schlankheit der Platte :

$$\lambda = \frac{b}{h} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{k}}$$

und die Ordinate die Beulspannung  $\sigma_{kr}$ .

Bei den Versuchen wurde mittelst Messuhren eindeutig festgestellt, dass die Ausbeulung bei ursprünglich geraden Platten unter der kritischen Last ( $P_{kr}$ ) plötzlich auftritt, währenddem bei anfänglich leicht ausgebogenen Platten die Ausbiegungen bis zur kritischen Last ( $P_{kr}$ ) in leicht zunehmendem Mass anwachsen, um unter dieser Last jedoch bedeutend stärker, d. h. sprunghaft zuzunehmen. Wenn die Platte schon anfänglich sehr stark verbogen ist, kann kein eindeutiges Beulen mehr festgestellt werden. Wohl nehmen in der Nähe der kritischen Last die Ausbiegungen stärker zu, doch kann von einer eigentlichen Unstabilität nicht mehr gesprochen werden.

Die Dehnungen bei ursprünglich geraden Platten verlaufen bis zur kritischen Belastung ( $P_{kr}$ ) linear, um bei der Ausbeulung selbst diese Gesetzmässigkeit zu verlassen und den den Ausbiegungen entsprechenden Spannungen zu folgen. Auch bei anfänglich leicht ausgebogenen Platten lässt sich mittelst Dehnungsmessungen die kritische Last ( $P_{kr}$ ) sehr gut

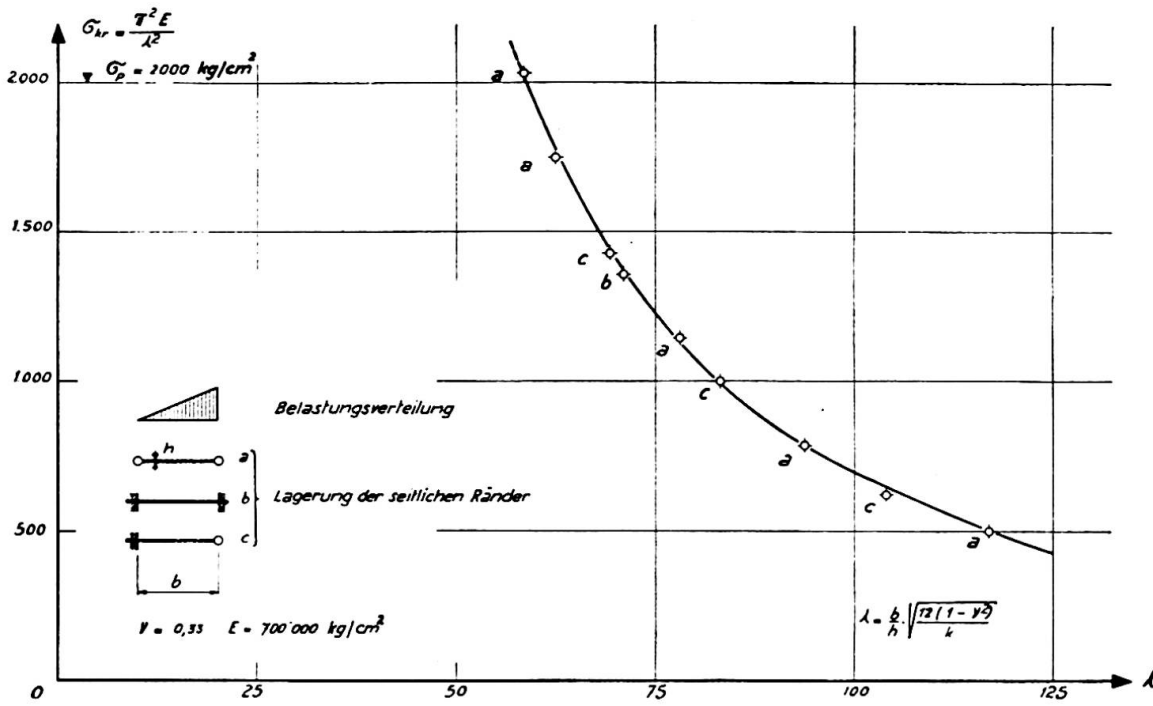


Abb. 6. Theoretische Werte und Versuchsergebnisse.

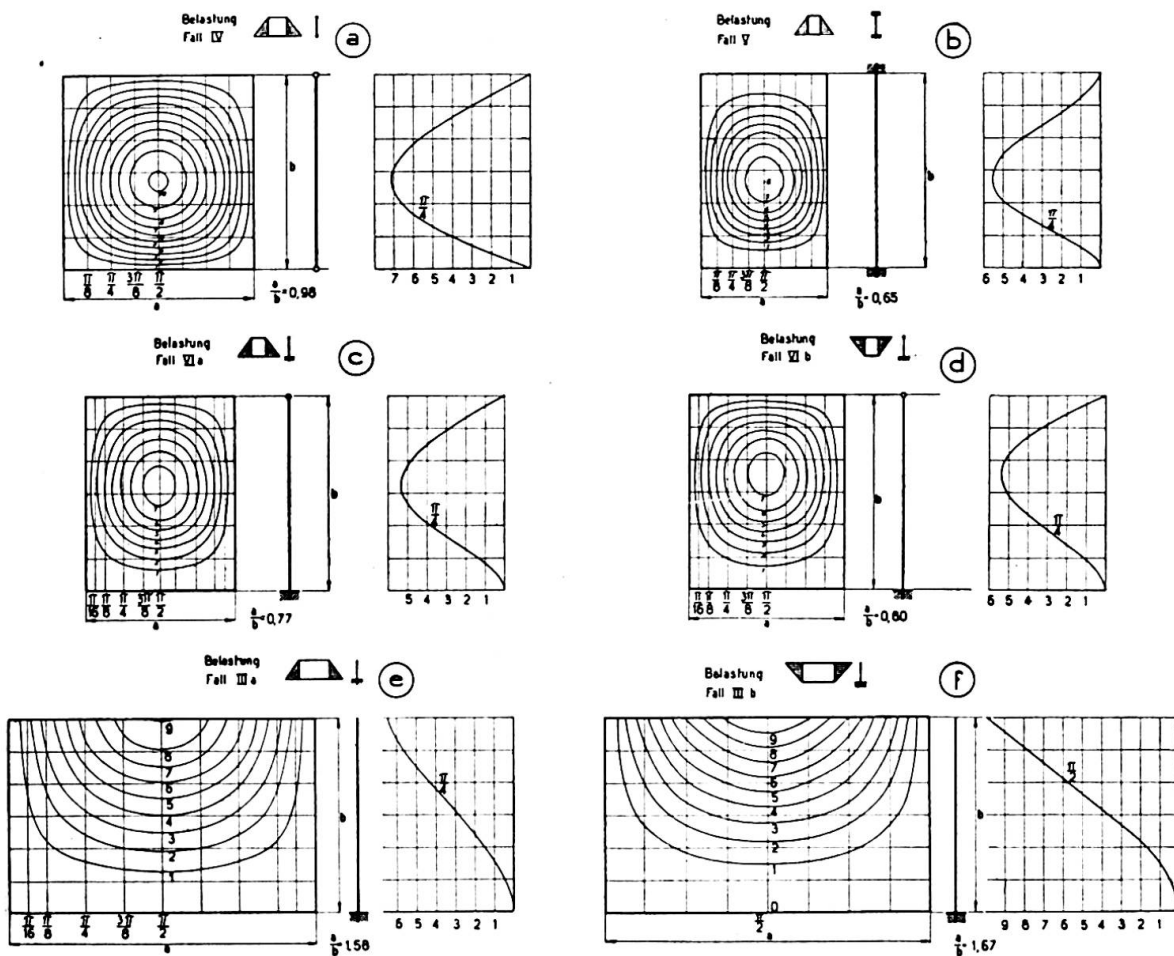


Abb. 7. Theoretische Ausbeulflächen.

bestimmen, währenddem bei anfänglich sehr stark verbogenen Platten sich auch auf diese Weise kein eigentliches Unstabilwerden feststellen lässt.

Die *theoretischen Ausbeulflächen*, die gewisse Hinweise für die Anbringung der Aussteifungen geben, sind in Abb. 7 dargestellt. Abb. 8 zeigt zwei Versuchsplatten mit je drei Halbwellen, wobei die mittlere Halbwellen nach der Ausbeulung, bei der Erschöpfung der Tragfähigkeit, am stärksten ausgebildet wurde.

### Schlussfolgerungen

Die in Tabelle I angegebenen  $k$ -Werte für den gleichmässigen und für den ungleichmässigen Druck sind durch die Versuche kontrolliert und als richtig befunden worden. Die nur teilweise angegebenen  $k$ -Werte für die Biegung, die noch dieses Jahr vervollständigt werden, müssen erst noch versuchstechnisch untersucht werden. Dabei ist

$$\sigma_{kr} = k \cdot \sigma_e$$

worin

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 \cdot N}{h \cdot b^2}$$

die Euler'sche Knickspannung für einen Plattenstreifen der Länge  $b$ , der Dicke  $h$  und der Breite  $a = 1$  darstellt

$$N = \frac{E \cdot I \cdot h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

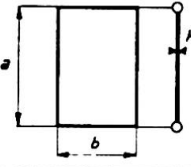





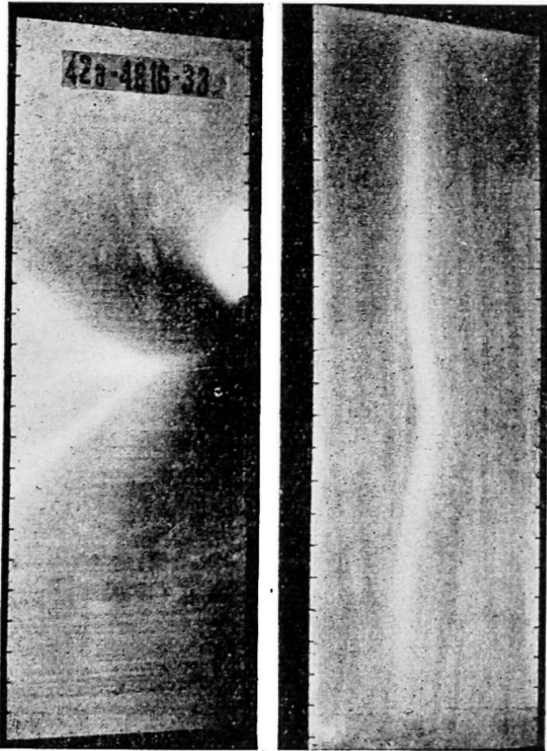
	Gleichmässiger Druck		Ungleichmässiger Druck				Biegung			
	$k_{min}$	$\frac{a}{b}$	$k_{min}$	$\frac{a}{b}$	$k_{min}$	$\frac{a}{b}$	$k_{min}$	$\frac{a}{b}$	$k_{min}$	$\frac{a}{b}$
	4.00	1.00	7.81	0.98	7.81	0.98	23.9	0.67	23.9	0.67
	6.97	0.67	13.56	0.65	13.56	0.65	39.6	0.47	39.6	0.47
	5.40	0.79	12.16	0.77	9.89	0.80	24.5	0.66		
	1.28	1.63	6.26	1.58	1.60	1.67	2.16	1.67		
	0.475	$\infty$	1.71	$\infty$	0.57	$\infty$				

Tabelle I.  $k$ -Werte für gleichmässigen und ungleichmässigen Druck und für Biegung.



**Abb. 8.** Versuchsplatten mit je drei Halbwellen, wobei die mittlere Halbwellen nach der Ausbeulung am stärksten ausgebildet wurde.

#### Résumé

Dans le cas de tôles sollicitées par des tensions longitudinales à distribution inégale dans le domaine élastique, l'accord entre la théorie et les essais est très bien.

#### Zusammenfassung

Für den untersuchten Fall von ungleichmäßig verteiltem Längsdruck im elastischen Bereich ist die Übereinstimmung von Theorie und Versuch sehr gut.

#### Summary

In the case of plates stressed by unequally distributed longitudinal stresses in the elastic zone, the conformity between theory and tests is very good.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide