

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Artikel: Theorie und Versuche über das plastische Ausbeulen von
Rechteckplatten unter gleichmässig verteiltem Längsdruck

Autor: Bijlaard, P.P. / Kollbrunner, C.F. / Stüssi, F.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-4003>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ic1

Théorie et essais de voilement de tôles sollicitées par des tensions longitudinales à distribution égale

Theorie und Versuche über das plastische Ausbeulen von Rechteckplatten unter gleichmässig verteiltem Längsdruck

Theorie and tests concerning buckling of plates stressed by equally distributed longitudinal stresses

P. P. BIJLAARD
Delft

C. F. KOLLBRUNNER
Döttingen

F. STUSSI
Zürich

Theoretische Grundlagen

Wir legen unserer Theorie des plastischen Ausbeulens die Theorie der örtlichen plastischen Verformungen von P. P. Bijlaard ⁽¹⁾ zu Grunde; damit lassen sich für eine längsgedrückte Platte (Abb. 1) mit $\sigma_x > \sigma_t$ die Formänderungsgleichungen

$$\begin{aligned} M_x &= -N \left(A_r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -N \left(C_r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= -M_{yx} = N \cdot 2 F_r \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

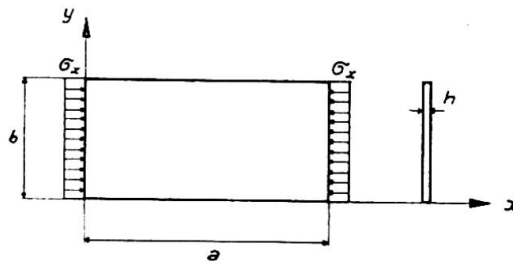


Abb. 1.

anschreiben. Dabei bedeutet N die Plattensteifigkeit im elastischen Bereich,

$$N = \frac{E\mathcal{J}}{1 - \nu^2} = \frac{E \cdot 1 \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

während die Abminderungszahlen A_r , $B_r = C_r$, D_r und F_r die Abnahme der Steifigkeit gegenüber den verschiedenen hier auftretenden Beanspruchungsarten nach Ueberschreiten der Proportionalitätsgrenze kennzeichnen. Sie

⁽¹⁾ P. P. BIJLAARD, *Theory of local plastic deformations* (Abh. I. V. B. H., Band 6).
P. P. BIJLAARD, *Theory of the plastic stability of thin plates* (Abh. I. V. B. H., Band 6).
P. P. BIJLAARD, *Some contributions to the theory of elastic and plastic stability* (Abh. I. V. B. H., Band 8).

sind hier, im Interesse einer einheitlichen Darstellung des elastischen und des plastischen Beulbereiches und in Abweichung gegenüber der ursprünglichen Darstellung durch die Zahlen A , $B = C$, D und F ⁽¹⁾ auf die Plattensteifigkeit N und nicht auf EJ bezogen; gegenüber der ursprünglichen Darstellung erscheinen diese reduzierten Abminderungswerte somit hier mit $(1 - \nu^2)$ multipliziert, also

$$(A_r, B_r, C_r, D_r, F_r) = (1 - \nu^2) (A, B, C, D, F) .$$

Im elastischen Bereich nehmen die reduzierten Abminderungszahlen die Werte

$$A_r = D_r = 1 ,$$

$$B_r = C_r = \nu ,$$

$$2 F_r = 1 - \nu$$

an.

Wir beschränken uns hier, mit Rücksicht auf die heute vorliegenden Versuchsergebnisse, auf das Ausbeulen unter gleichmässig verteiltem Längsdruck σ_x . Setzen wir für diesen Fall die Formänderungsgleichungen (1) in die Gleichgewichtsbedingung eines Plattenelementes,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \sigma_x \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} , \quad (2)$$

ein, so erhalten wir die Beulgleichung für den plastischen Bereich (für $\sigma_x = \text{Konst.}$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$)

$$\boxed{A_r \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 (B_r + 2 F_r) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + D_r \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{\sigma_x \cdot h}{N} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} \quad (3)$$

Die Lösung dieser Beulgleichung ist von der Lagerungsart der Längsränder abhängig.

a. GELENKIG GELAGERTE LÄNGSRÄNDER.

Bei beidseitig frei drehbaren oder gelenkig gelagerten Längsrändern lautet der Lösungsansatz der Beulgleichung

$$w = w_0 \cdot \sin \frac{n \pi x}{a} \cdot \sin \frac{n \pi y}{b}$$

und wir erhalten die kleinste kritische Spannung mit $n = 1$ zu

$$\sigma_{xkr} = \frac{N}{h} \left[\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot A_r + \frac{\pi^2}{b^2} \cdot 2 \cdot (B_r + 2 F_r) + \frac{a^2 \pi^2}{b^4 m^2} \cdot D_r \right]$$

oder mit der Abkürzung

$$\beta^2 = \frac{m^2 \cdot b^2}{a^2}$$

zu

$$\boxed{\sigma_{xkr} = \left[A_r \beta^2 + 2 (B_r + 2 F_r) + \frac{D_r}{\beta^2} \right] \frac{\pi^2 N}{h \cdot b^2}} \quad (4)$$

Im elastischen Bereich wird mit der Schreibweise

$$\sigma_{kr} = k \cdot \frac{\pi^2 N}{h \cdot b^2} = k \cdot \sigma_E$$

der Klammerausdruck zur Beulzahl k ,

$$k_{el} = \beta^2 + 2,00 + \frac{1}{\beta^2}; \quad (5a)$$

für den plastischen Bereich haben wir somit eine abgeminderte Beulzahl k ,

$$k = A_r \beta^2 + 2(B_r + 2F_r) + \frac{D_r}{\beta^2}, \quad (5b)$$

erhalten.

Für die Konstruktionspraxis ist besonders der Kleinstwert von k von Interesse; wir erhalten diesen Kleinstwert k_{min} für

$$2A_r \beta - 2 \frac{D_r}{\beta^3} = 0,$$

$$\beta^2 = \sqrt{\frac{D_r}{A_r}}$$

zu

$$k_{min} = 2\sqrt{A_r \cdot D_r} + 2(B_r + 2F_r) \quad (5c)$$

Eine übersichtliche und für die Konstruktionspraxis bequeme Darstellung des plastischen Ausbeulens erhalten wir, in Analogie zur Knickspannungslinie des zentrisch gedrückten Stabes, durch die Beulspannungslinie, die im elastischen Bereich durch die Beziehung

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

gegeben ist. Aus der Gleichsetzung

$$\frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = k_{el} \cdot \frac{\pi^2 \cdot N}{h \cdot b^2}$$

finden wir die ideelle Schlankheit der Platte zu

$$\lambda = \frac{b}{h} \sqrt{\frac{12 \cdot (1 - \nu^2)}{k_{el}}}. \quad (6)$$

Es liegt nun nahe, auch für das plastische Ausbeulen einen « Beulmodul » T_B durch den Ansatz

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot T_B}{\lambda^2} \quad (7)$$

zu definieren, den wir, ausgehend von k_{min} der Gleichung 5c, aus der Gleichsetzung

$$\frac{\pi^2 \cdot T_B}{\lambda^2} = k_{\min} \cdot \frac{\pi^2 N}{h \cdot b^2}$$

und durch Einführen des Schlankheitsgrades nach Gleichung 6 zu

$$T_B = k_{\min} \cdot \frac{E}{k_{el}} \quad (8)$$

bestimmen können. Für den betrachteten Fall der frei drehbaren Längsränder erhalten wir mit k_{\min} nach Gleichung 5c und mit dem entsprechenden Mindestwert $k_{el} = 4,00$ für den elastischen Bereich den Beulmodul T_B zu

$$T_B = 0,50 \left[\sqrt{A_r \cdot D_r} + B_r + 2 F_r \right] \cdot E \quad (8 a)$$

oder

$$T_B = 0,455 \left[\sqrt{A \cdot D} + B + 2 F \right] \cdot E \quad (8 b)$$

b. STARR EINGESPANNTE LÄNGSRÄNDER :

Für beidseitig starr eingespannte Längsränder kann der Beulwert k_{el} für den elastischen Bereich in Analogie zu Gleichung 5a angeschrieben werden zu ⁽²⁾

$$k_{el} = \beta^2 + 2,39 + \frac{5,24}{\beta^2} \quad (9 a)$$

Wenn auch genau genommen diese Zahlenwerte für einen bestimmten Wert von β ($\beta = 1,5$) ermittelt worden sind und die Form der Beulfläche hier von β abhängig ist, so gilt Gleichung 9a doch mit praktisch mehr als ausreichender Genauigkeit auch für andere Werte von β und sie darf insbesondere auch auf den plastischen Bereich übertragen werden. Damit erhalten wir

$$k = A_r \cdot \beta^2 + 2,39 (B_r + 2 F_r) + \frac{5,24 \cdot D_r}{\beta^2} \quad (9 b)$$

k wird zum Kleinstwert für

$$\beta^2 = 2,29 \sqrt{\frac{D_r}{A_r}}$$

und es ist

$$k_{\min} = 4,58 \sqrt{A_r \cdot D_r} + 2,39 (B_r + 2 F_r) \quad (9 c)$$

Der Beulmodul T_B ergibt sich für diesen Fall mit $\min. k_{el} = 6,97$ zu

⁽²⁾ F. Stüssi, Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten (Abh. I. V. B. H., Band 8).

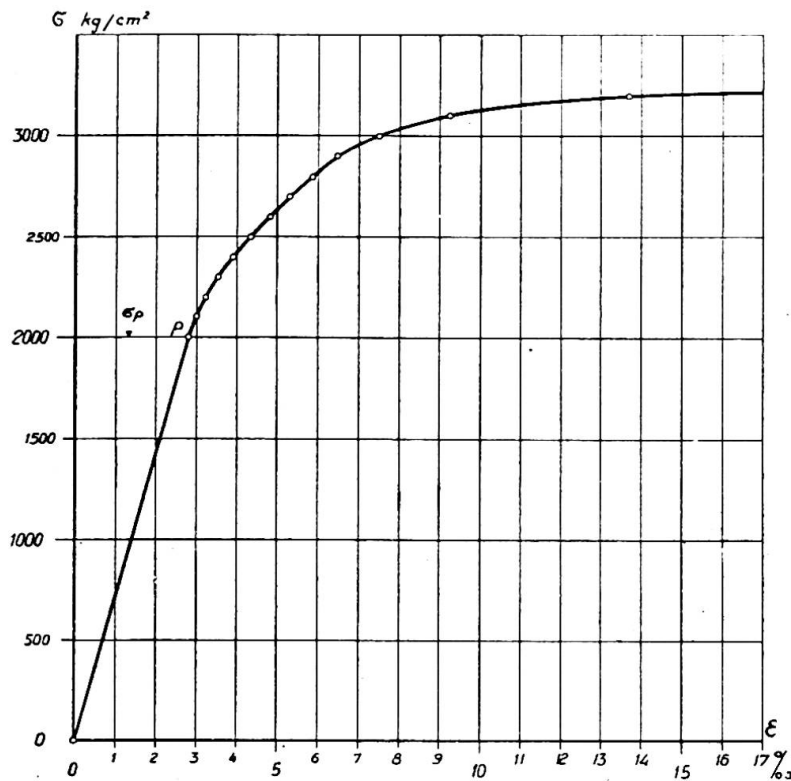


Abb. 2. Mittleres Spannungs - Dehnungs - Diagramm von Avional-M Platten.

$$T_b = [0,657 \sqrt{A_r \cdot D_r} + 0,343 (B_r + 2F_r)] E \quad (8 c)$$

oder

$$T_b = [0,598 \sqrt{A \cdot D} + 0,312 (B + 2F)] \cdot E \quad (8 d)$$

Genau so, wie der Knickmodul T_k des Druckstabes von der Querschnittsform abhängig ist, so ist hier der Beulmodul von der Lagerungsart der Längsränder abhängig. Für Platten mit einem gelenkig gelagerten und einem starr eingespannten Längsrand darf der Beulmodul genau genug als Mittelwert der beiden durch die Gleichungen 8a und 8b bestimmten Werte angenommen werden.

Versuchsergebnisse

a. FRÜHERE VERSUCHE :

Diese theoretischen Ergebnisse seien zunächst mit den früheren Versuchen von C. F. Kollbrunner ⁽³⁾ verglichen. Diese Beulversuche ($\sigma_x = \text{Konst.}$) wurden an Platten aus Avional M der Aluminium Industrie A. G. Neuhausen mit $E = 715 \text{ t/cm}^2$ durchgeführt. Das mittlere Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist in Abb. 2 aufgetragen. Die daraus nach der Theorie

⁽³⁾ C. F. KOLLBRUNNER, *Das Ausbeulen der auf einseitigen, gleichmässig verteilten Druck beanspruchten Platten im elastischen und plastischen Bereich* (Mitteil. a. d. Institut f. Baustatik an der E. T. H., Zürich, Nr. 17).

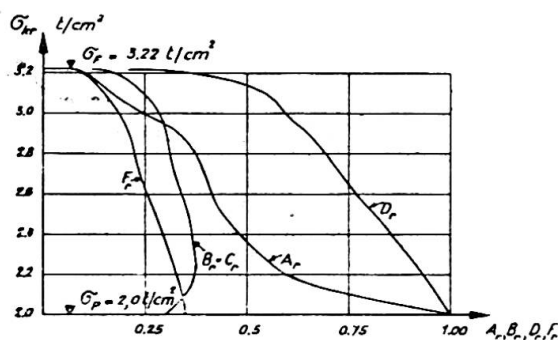


Abb. 3. Abminderungszahlen.

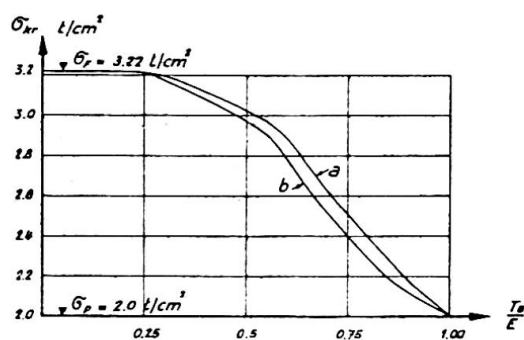


Abb. 4. Beulmodul.

von P. P. Bijlaard berechneten Abminderungszahlen A_r , $B_r = C_r$, D_r , F_r sind aus Abb. 3 ersichtlich, während der Beulmodul T_B für die beiden Lagerungsarten nach den Gleichungen 8a und 8c in Abb. 4 dargestellt ist.

Die folgende Tabelle I enthält die Versuchsmittelwerte von σ_{kr} für Versuche im elastischen und plastischen Bereich, geordnet nach den aus Gleichung 6 berechneten Schlankheiten λ und für die drei Lagerungsarten

a : beidseitig gelenkig,

b : beidseitig starr eingespannt,

c : einseitig gelenkig, einseitig starr eingespannt.

σ_{kr}	b	h	λ	Lagerung	Tab. Nr.
t/cm ²	cm	cm			
2,924	4,4	0,2	27,6	b	10
2,733	5,3	0,2	37,6	c	9
2,116	6,2	0,2	51,2	a	6
2,024	10,2	0,3	56,2	a	5
1,936	9,4	0,2	58,9	b	11
1,246	10,3	0,2	73,0	c	8
0,939	10,2	0,2	84,3	a	5
0,732	20,3	0,3	96,0	c	7
0,683	6,2	0,1	102,4	a	6
0,474	19,4	0,2	121,5	b	12

TABELLE I.

Zur Orientierung sind in Tabelle I auch die Tabellennummern des Versuchsberichtes (³) angegeben.

Abb. 5 enthält den Vergleich dieser Versuchswerte mit den nach Gleichung 7 berechneten Beulspannungslinien.

b. NEUE VERSUCHE :

Da für die früheren Versuche nur eine Belastungseinrichtung (Hebelmaschine) beschränkter Leistungsfähigkeit ($P_{\max} \equiv 6$ t) zur Verfügung stand und auch die Ausführung der Führungselemente der Platten nicht voll befriedigte, wurde am Institut für Baustatik an der E. T. H. (Abteilung Stahlbau und Holzbau, F. Stüssi) in Zusammenarbeit mit der Technischen

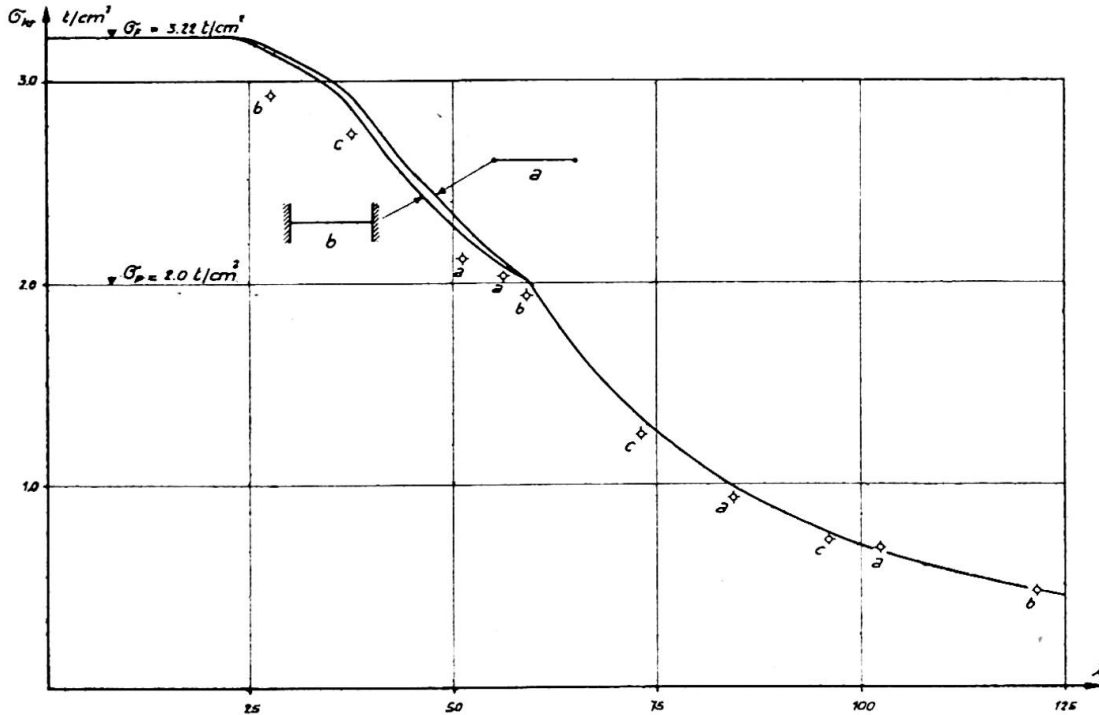


Abb. 5. Vergleich der Versuchswerte mit den berechneten Beulspannungslinien.

Kommission des Verbandes der Schweiz. Brückenbau- und Stahlhochbau-Unternehmungen (T. K. V. S. B. Präsident C. F. Kollbrunner) eine neue verbesserte und leistungsfähigere Hebelmaschine mit $P_{max} \equiv 25 t$ (Abb. 6

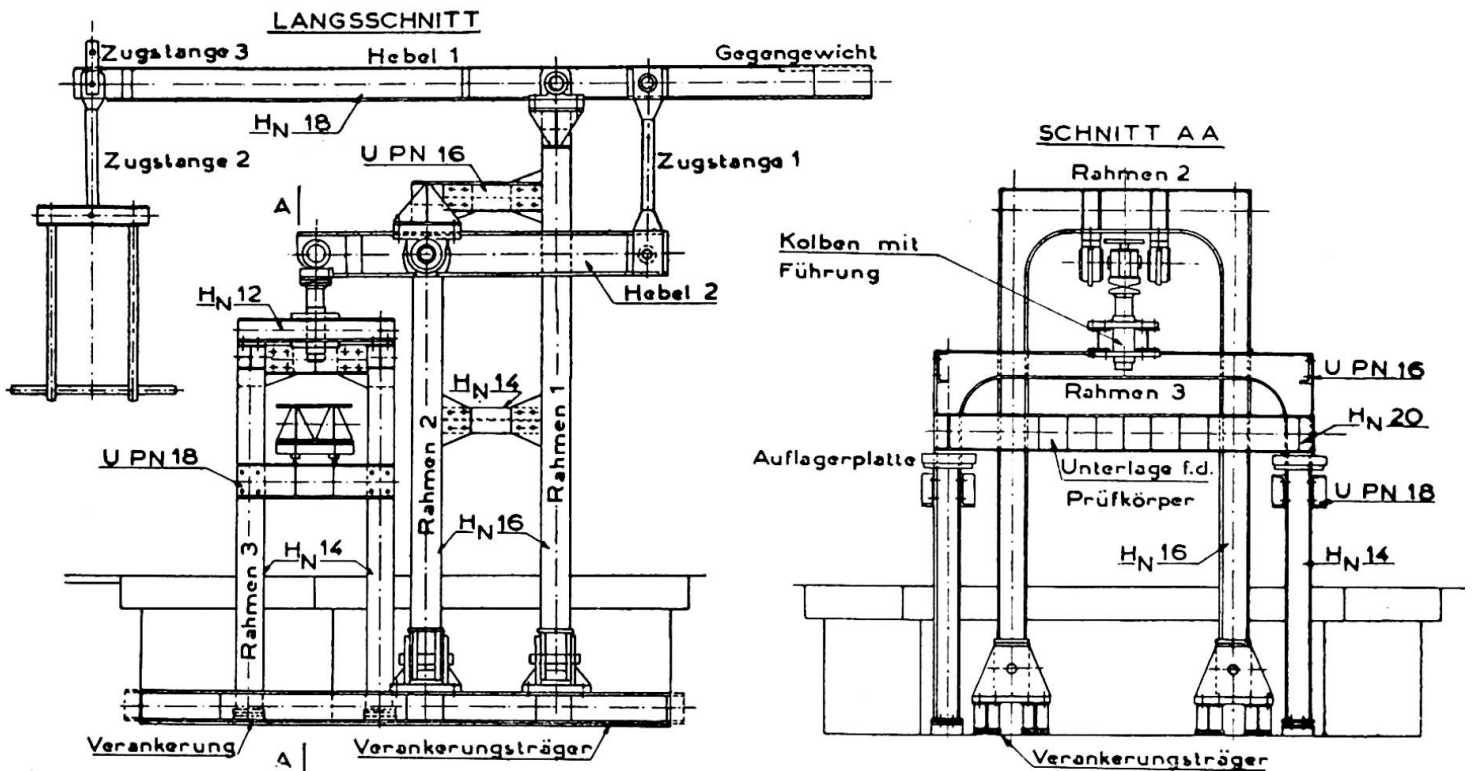


Abb. 6. Hebelmaschine von 25 t Leistungsfähigkeit.

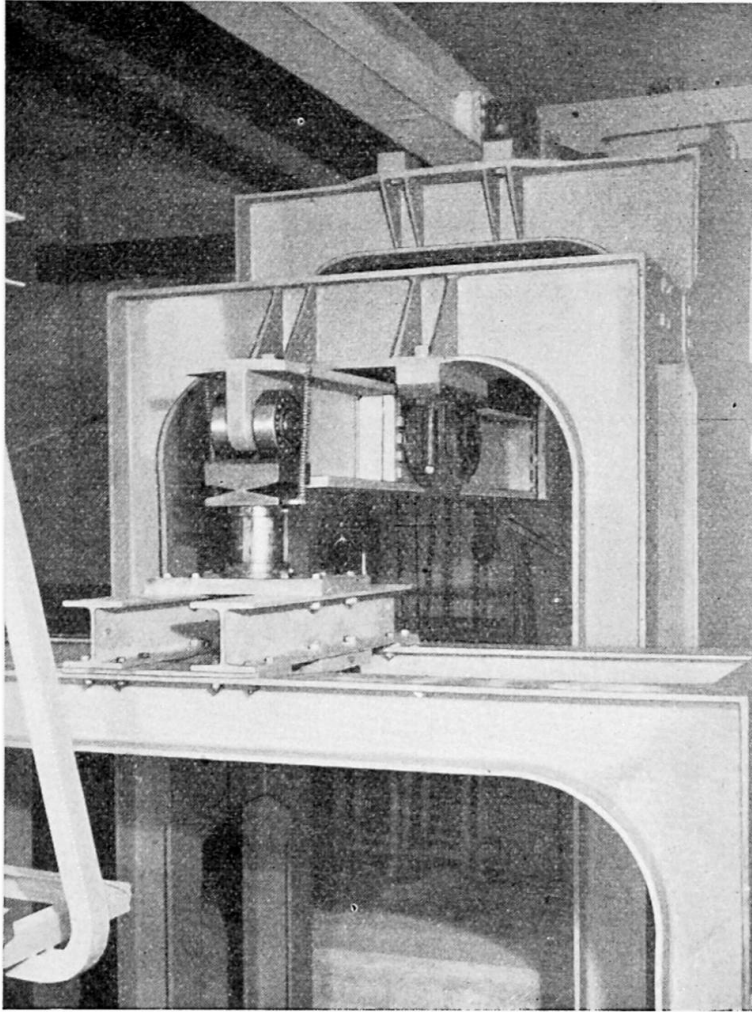


Abb. 7. Hebelmaschine von 25 t Leistungsfähigkeit.

u. 7) aufgestellt und es wurden auch verbesserte Plattenführungen (Abb. 8) und Versuchseinrichtungen entwickelt.

Die Einzelheiten dieser neuen Versuchseinrichtungen wurden von Dipl. Ing. M. Walt entworfen, der auch zusammen mit Mechaniker E. Peter die neuen Versuche durchführte.

Zunächst wurden aus von den früheren Versuchen her noch vorhandenen Platten (Avional M) einige Versuchsreihen mit $\sigma_r = \text{Konst.}$ für die beiden Lagerungsarten *a* und *b* durchgeführt, deren Ergebnisse in Tabelle 2 zusammen gestellt sind.

In Abb. 9 sind diese Versuchswerte mit den theoretischen Beulspannungen verglichen.

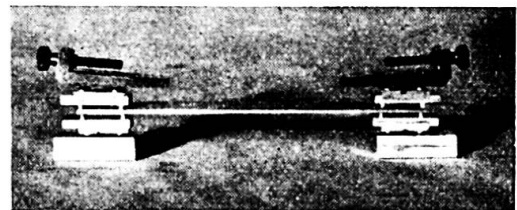
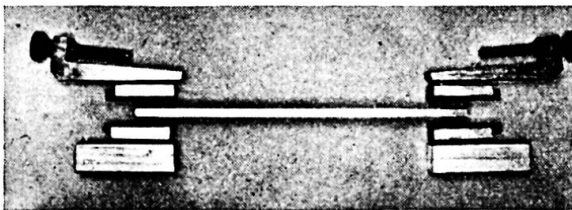


Abb. 8. Neue verbesserte Plattenführungen.

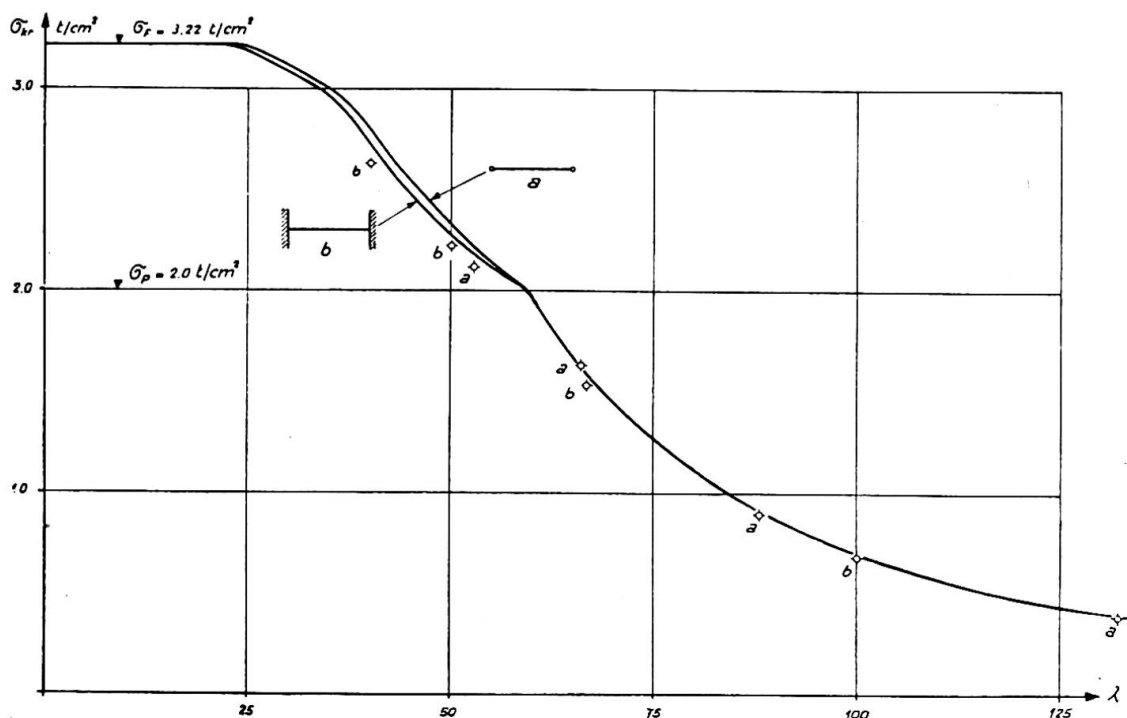


Abb. 9. Vergleich der Versuchswerte mit den theoretischen Beulspannungen.

Lagerung	b	h	σ_{kr}	λ
	cm	cm	t/cm^2	
a	16	0,2	0,386	132,2
		0,3	0,892	88,1
		0,4	1,625	66,1
		0,5	2,112	52,9
b	16	0,2	0,680	100,2
		0,3	1,530	66,8
		0,4	2,219	50,1
		0,5	2,630	40,1

TABELLE 2.

Schlussfolgerungen

Für den untersuchten Fall von gleichmässig verteiletem Längsdruck σ_x ist die Uebereinstimmung von Theorie und Versuch bemerkenswert gut. Damit darf auch die Theorie der örtlichen plastischen Verformungen von P. P. Bijlaard als gesichert angesehen werden.

Ueber unsere weiteren gemeinsamen Untersuchungen, die sich besonders auch auf ungleichmässig verteilten Druck beziehen werden, soll am Kongress selbst berichtet werden.

Résumé

Pour le voilement des tôles sollicitées par des tensions longitudinales à distribution égale, les tensions théoriques de voilement sont calculées en se basant sur la théorie des déformations locales plastiques de P. P. Bijlaard et elles sont présentées sous forme de la courbe des tensions de voilement, c'est-à-dire en fonction d'un coefficient d'élanement idéal λ . D'ailleurs, en analogie du module de flambage, un module de voilement T_B est introduit, dont la grandeur pour un matériel déterminé et une répartition de charge déterminée ne dépend pas seulement de la tension critique, mais aussi des conditions au bord de la tôle. Les tensions de voilement calculées présentent notamment une bonne concordance avec les résultats d'épreuves antérieures et récentes.

Zusammenfassung

Für das Ausbeulen von durch gleichmässig verteilten Längsdruck beanspruchten Platten werden die theoretischen Beulspannungen auf Grund der Theorie der örtlichen plastischen Verformungen von P. P. Bijlaard berechnet und in Form der Beulspannungslinie, d. h. in Funktion eines ideellen Schlankheitsgrades λ dargestellt. Ferner wird in Analogie zum Knickmodul ein Beulmodul T_B eingeführt, dessen Grösse für gegebenes Material und gegebene Belastung nicht nur von der kritischen Spannung, sondern auch von den Randbedingungen der Platte abhängt. Die berechneten Beulspannungen zeigen bemerkenswert gute Uebereinstimmung mit älteren und neuen Versuchsergebnissen.

Summary

For the buckling of plates stressed by equally distributed longitudinal stresses the theoretical buckling tensions are calculated on the basis of the theory of local plastic torsions of P. P. Bijlaard and depicted in the form of the buckling pressure-curve, i.e. in function of an ideal ratio of slenderness λ . Furthermore, in analogy to the modulus of buckling, a buckling-modulus T_B is introduced, the extent of which, for a given material and a given load distribution, does not depend only on the critical tension but also on conditions at the edge of the plate. The buckling tensions calculated show a noteworthy resemblance to previous and recent results of tests.