

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Rubrik: Ib: The design of connections

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ib1

**Détermination des tensions dans les goussets des nœuds
au moyen de grilles semblables
(Avec appendice concernant le problème analysé par Marvin Mass)**

**Die Bestimmung der Spannungen in Knotenblechen
mit Hilfe eines analogen Netzes
(Mit Nachtrag über das von Marvin Mass analysierte Problem)**

**Stresses in gusset plates
by use of an analogous grid ⁽¹⁾
(With appendix on problem analysis by Marvin Mass)**

L. E. GRINTER

Research Professor of Civil Engineering and Mechanics,
Illinois Institute of Technology, Chicago, Illinois

The writer and some of his students have been engaged in investigating the stresses in plate structures by a grid analogy. The analogous grid is considered to be a physical substitute for the plate and the analysis of its stresses is undertaken by the procedures that the author developed for the analysis of wind stresses in tall building frames ⁽²⁾. To a structural engineer it will not seem strange that all of the important distortions of a plate can be reproduced in a substitute planar grid. This fact is almost obvious except for the introduction of Poisson's ratio which is not found to greatly complicate the analysis.

Of the planar structures so far studied one of the most important is the gusset plate of the truss or other structural joint. For study by the grid analogy the gusset plate often has two simplifying features : (1) It may have a centerline of symmetry and (2) since its forces intersect at a point its edges remain reasonably straight lines. It is upon these two observations that the method of analysis to be described has been based. This method is not sufficiently simplified as yet to be used effectively by a designer. It is still to be looked upon as a research tool. However, the writer feels

⁽¹⁾ For a thorough explanation of the procedures outlined here see *Numerical Methods of Analysis in Engineering*, Chapter 2, published January, 1949 by the Macmillan Co. (New York).

⁽²⁾ L. E. GRINTER, *Wind Stress Analysis Simplified* (Transactions, American Society of Civil Engineers, 1934, pp. 610-634). Also see the author's *Theory of Modern Steel Structures*, Vol. 2, The Macmillan Co. (New York) 1937 and 1949.

certain that further study will reveal means of standardizing certain analytical steps so that the procedure may become sufficiently simplified for convenient use in the design office.

The method to be described is a numerical procedure of relaxation and distribution following the writers' development of other applications of the Cross procedure of moment distribution. Here, alternate relaxation of force restraints in two directions along with distributions of moments will be needed. However, the joint-by-joint relaxation of force restraints is found to be too tedious for direct use and the necessity for such relaxations is therefore minimized by repeated use of stress estimates and moment distributions. By this procedure, termed "Strain Justification", the problem has been reduced to practical limits of time consumption. Further simplification may depend upon the analysis of typical cases of force patterns which can be combined as needed to give first approximations of an analysis of almost any gusset plate. Final adjustments of grid stresses from an approximate to a nearly exact solution are not usually troublesome.

Summary of the analytical procedure

If a grid such as the one illustrated by figure 1 is acted upon by a single vertical load, the columns shorten unequal amounts as indicated. An estimate of the column stresses based upon experience with the method can usually be made with reasonable accuracy. Note however that in figure 1 we have as a simplifying feature a fixed base to the structural grid. A line of symmetry may be used with equal effectiveness. Also, it has been found that any boundary line of a typical rectangular gusset plate (where loads intersect at a point) remains sufficiently straight to serve as a base line from which we may calculate joint movements of the substitute grid structure after direct stresses have been estimated.

Once the direct stresses have been estimated and two perpendicular base lines of zero distortion chosen, we can locate readily the position of each joint of the substitute grid. Then based upon properties of the members, which will be derived to reproduce plate deformations, fixed-end shears in all members are calculated from relative displacements of the ends of the members. Now if our estimate of direct stresses had been exactly correct a simple distribution of moments would result in a set of shears in all members that would be in static equilibrium with the direct stresses and the loads. Instead, there will be some lack of equilibrium which will be expressed as a set of joint restraints acting in each of the two major directions.

If the joint restraints are relatively small, say 10 % to 20 % as significant as the original loading, they may be eliminated without difficulty by successive joint relaxation. But if they are more serious, it is far better to repeat the estimate of direct stresses one or several times until equilibrium is nearly achieved before relaxation of joint restraints is begun. With this brief explanation of the procedure to be used we will consider the proportioning of the gridwork to reproduce the deformations of the plate. We are here interested in stresses in the plate away from a rivet or a weld. Such stress concentrations can be superimposed on the general state of stress at any point desired since all stresses will be considered to be below the elastic limit.

Properties of the analogous grid

Reproducing direct stress deformations

The deformation of the plate under an uniaxial stress P/A is PL/AE for the length L . Since the area of the plate for a width L is Lt , this area must be replaced by each vertical member of the grid when the bar spacing of the grid is L .

$$A = Lt = bd \quad (\text{where } b \text{ and } d \text{ are dimensions of a grid member}) \quad (1)$$

For members of this area the longitudinal deformation of the grid under uniaxial stress corresponds exactly with the longitudinal deformation of the plate.

In equation (1), d is the depth of a bar in the plane of the plate and b is its dimension perpendicular to the plate so that $I_{\text{bar}} = 1/12 bd^3$ for flexure in the plane of the plate.

Reproducing the shearing deformation of the plate

Consider the influence of a uniform shearing stress, P/A , across the top of the plate or of the grid. For the elastic Plate

$$G = \frac{s_s}{\Theta} = \frac{P/A}{\Theta} \quad (2)$$

Also

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{P/A}{\Theta} \quad (3)$$

Hence

$$\Theta_{\text{plate}} = \frac{2P(1 + \mu)}{AE} \quad (4)$$

By considering the influence of shear upon joint rotations of the grid

$$\Theta_{\text{grid}} = \frac{PL^2}{6EI} \quad (5)$$

By equating the θ values of the plate and the grid we obtain

$$\frac{2P(1 + \mu)}{AE} = \frac{PL^2}{6EI} \quad (6)$$

Substituting $A = Lt = bd$ and $I = 1/12 bd^3$, and canceling terms, we have

$$\frac{L^2}{d^2} = (1 + \mu) \text{ or } \frac{d}{L} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu}} = \sqrt{1 - \mu + \mu^2 - \mu^3 + \dots} \quad (7)$$

For convenience, we may write

$$d = \frac{L}{\sqrt{1 + \mu}} \quad \text{and} \quad b = \frac{Lt}{d} = t\sqrt{1 + \mu} \quad (8)$$

When $\mu = 0$, $d = L$ and $b = t$.

When $\mu = 0.25$, $d = 0.89 L$ and $b = 1.12 t$.

Member sizes

Hence, the member sizes of the grid are established. The area bd of each member replaces the corresponding area Lt of the plate and the ratio b/d is the ratio t/L times the quantity $(1 + \mu)$. It is to be noted that the grid members in the horizontal direction are identical with those in the vertical direction. It may at first seem peculiar that the grid members in either direction replace the entire area of the plate. However, when we realize that plate material does have the ability to resist forces in both directions while grid members are uniaxial, we find this relationship reasonable.

Division of load between columns and beams

Although their positions may reverse with change in direction of the main loads, we will temporarily find it convenient to look upon vertical members as columns and horizontal members as beams or girders.

Length of column = L .

Breadth of column = depth of beam = $d = \frac{L}{\sqrt{1 + \mu}}$

Area of cross-section of column or beam = bd

$$= t \sqrt{1 + \mu} \left(\frac{L}{\sqrt{1 + \mu}} \right) = tL .$$

Force necessary to shorten column one unit

$$\Delta = 1.0 = \frac{PL}{AE} . \quad \text{Hence , } P = \frac{AE}{L} = \frac{tLE}{L} = tE .$$

For unit plate thickness, $t = 1$ and therefore

$$P_{\text{col}} = E \quad (\text{for unit deformation and unit plate thickness}) . \quad (9)$$

Force necessary to deflect beam one unit by flexure alone as a fixed end beam or as a double cantilever.

$$\Delta = 1.0 = 2 \left(\frac{P (L/2)^3}{3 EI} \right) = \frac{PL^3}{12 EI} .$$

$$\text{But } I = \frac{1}{12} bd^3 = \frac{1}{12} (t \sqrt{1 + \mu}) \left(\frac{L}{\sqrt{1 + \mu}} \right)^3 = \frac{tL^3}{12 (1 + \mu)} .$$

$$\text{Hence } \Delta = 1.0 = \frac{PL^3}{12 E} \left(\frac{12 (1 + \mu)}{tL^3} \right) = \frac{P (1 + \mu)}{tE} .$$

For unit plate thickness, $t = 1$ and therefore

$$P_{\text{beam}} = \frac{E}{1 + \mu} \quad (\text{for unit deflection and unit plate thickness}) . \quad (10)$$

Relative stiffnesses for force distribution

$$\text{Column stiffness} = 1.0 \quad (\text{from } P = E \text{ when } \Delta = 1 \text{ and } t = 1) . \quad (11)$$

$$\text{Girder stiffness} = \frac{1.0}{1 + \mu} \left(\text{from } P = \frac{E}{1 + \mu} \text{ when } \Delta = 1 \text{ and } t = 1 \right) . \quad (12)$$

These relations control the division of load or of joint force between the columns and girders meeting at any joint.

When $\mu = 0$, $d = L$, $b = t$ and the force distribution to columns and girders meeting at a joint is identical.

Relative stiffnesses for moment distribution

Since the cross-section of columns and girders are identical the resistances to joint rotation are the same for all members.

Grid analysis by strain justification

The grid analogy as applied to gusset-plate analysis will be outlined as a series of steps and then one very elementary example will be given so that the reader may have a better understanding of the numerical procedures involved. Of course, special devices are needed for more difficult problems, but space is not available for their consideration here.

(1) Study the gusset plate under consideration and select two perpendicular axes which will be assumed to remain straight lines. Although lines that distort under load have been used as axes, additional corrections are involved which will not be discussed here. A line of symmetry is one preferred axis. If no better choice appears obvious, a boundary line of the plate may be chosen as an axis when all applied forces intersect at a point.

(2) Using the lines chosen above as fixed bases, direct stresses in columns and girders of the grid are estimated. This procedure requires experience and judgment, but after a few elementary cases have been solved it is found that much more complex cases can be handled with assurance.

(3) Based upon estimated direct stresses and fixed axes or base lines the deformed coordinates of each joint become known, and the fixed-end shears in all members of the framework may be calculated therefrom. These shears give rise to fixed-end moments which may be balanced and distributed, and thus a first set of balanced moments are obtained.

(4) From the balanced moments a set of shears for all members are determined. These shears will be compared at each joint with the estimated direct stresses to see if the joint is in equilibrium. Since a perfect estimate of the direct stresses could not be hoped for, there will be some lack of equilibrium at each joint which can be expressed as two perpendicular joint restraints.

(5) At this point it is wise to compare the joint restraints in one direction with the loads and estimated direct stresses in the same direction. If the restraints considered individually or in groups represent an influence in excess of 20 % of the applied loads in that direction, the original estimate of direct stresses needs to be improved. Based upon preceding work it is possible to improve the estimated direct stresses to reach this standard of accuracy without great difficulty.

(6) Once an estimate of direct stresses has been obtained which gives rise to joint restraints within the limitation set in step (5), a routine joint-by-joint relaxation of restraints, first in one direction and then in the other direction, will nearly complete the analysis. In this step, joints are not permitted to rotate.

(7) Of course, step (6) will change all girder shears with resultant changes in end moments, and the moment balance of step (3) will be disturbed. It is a simple matter to rebalance moments and determine the influence of the accompanying shear changes upon the balanced joint forces achieved in step (6). Now it becomes clear why a reestimate of direct stresses or even several reestimates may be preferred to a routine repetition of relaxation steps. When one is working in two directions the routine procedure becomes extremely tedious. An estimate of direct stresses can usually be made that eliminates much of this tedium.

(8) The steps of force relaxation and of moment distribution can be repeated as often as necessary to achieve any desired degree of accuracy of grid stresses. However, the accuracy attained in the analysis of the grid should be correlated with the fineness of the subdivision of the grid since the basic approximation of the method is found in the latter relationship.

(9) Subdivision of the grid need not be uniform. In fact it is clear that for equal accuracy throughout the grid the subdivision should vary in fineness being made finer in the regions of steep gradients of stress.

(10) The influence of Poisson's ratio μ is introduced into the grid merely through lengthening members in one direction by μ times the shortening of members perpendicular thereto or *vice versa*. However, since Poisson's ratio has not been found to influence stresses away from interior load concentrations, it will not be considered further here. As a matter of interest, when Poisson's ratio is introduced with loads applied at 45 degrees to the direction of the grid it is found that deformations in line with and perpendicular to the loads do bear the relationship predicted by Poisson. Hence the grid is more nearly isotropic than might be anticipated from its directional appearance.

Interpretation of grid forces as plate stresses

This interpretation is a study in statistics not unlike the interpretation of measured strains with electrical or mechanical strain gages. The grid subdivision is finite while a point stress in a plate is of a different character. However, there is considerable question as to the contribution of point stresses to the failure of a gusset plate. Most engineers would probably be satisfied to accept measured strains over one-inch gage lengths as indicative of stresses that might produce failure of a gusset plate. Such average or statistical strains or stresses can be obtained by the procedure of grid analysis, but point stresses can only be approximated. Of course, stresses around rivet holes, which are not obtained by the procedure of grid analysis, might be super-imposed upon the final stress pattern. Both experimental and mathematical results are available for this purpose.

We conclude then that the physical make-up of the grid gives it a different relationship to the structural plate than that borne by the idealized homogeneous, isotropic, continuous material considered by the mathematical theory of elasticity. In reality, internal grid forces represent statistical or average stresses over lengths controlled by the bar spacing of the grid. It is the author's belief that in many cases such statistical stresses when obtained from a grid of proper unit dimensions or bar spacing will give more useful relative numbers for picturing the remaining quasi-elastic

range before structural damage results than will the point stresses determined by the mathematical theory of elasticity. The lattice or unit dimension of the grid for this purpose needs study since there should clearly be a finer subdivision of the grid where the stress gradient steepens. This approach to analysis and design might properly be termed the acceptance of a Statistical Theory of Elasticity.

Conclusions

Methods of numerical analysis when applied to plates and wall problems have in the past proved to be extremely tedious. Such methods required organized machine computations and therefore they could be of little help to a designer. The physical tool of grid analogy has been simplified by three devices (1) the concept of permitting initial relative movements of all joints in agreement with statics, (2) the concept of « strain justification » or checking the accuracy of this initial estimate of stresses and deflections and then revising that estimate as often as necessary to avoid tedious joint relaxations (3) the procedure of using a finer grid only in regions of steep stress gradients. The first two simplifications are merely refinements of the author's procedures of wind stress analysis of tall buildings. The third has been used in some form by most writers on numerical methods. These simplifications have reduced the time consumption to the point where a grid analysis for an important problem may soon become feasible within the time limitations of a design office. Further simplifications are in prospect.

The concept of a statistical approach to internal stresses is an important one. The fact that grid analogy automatically produces average stresses rather than point stresses is a favorable factor if used intelligently. It is particularly meaningful that the subdivision of the grid can be related roughly to the stress gradient. Thus it would be possible to control in a crude way the relationship between the statistical or average stress and

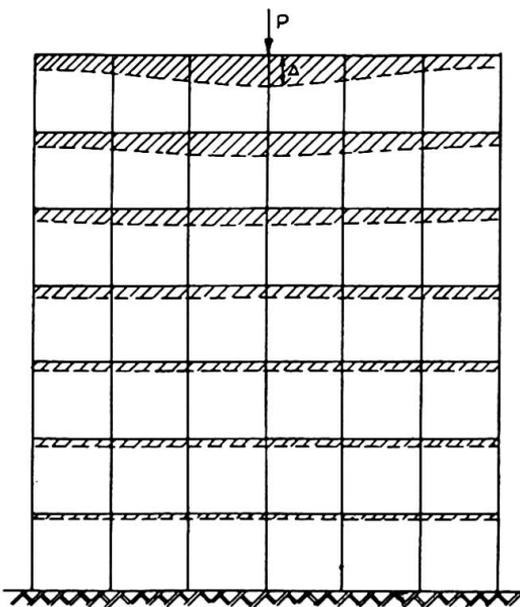


Fig. 1. Estimate of joint movements due to a vertical load on the grid.

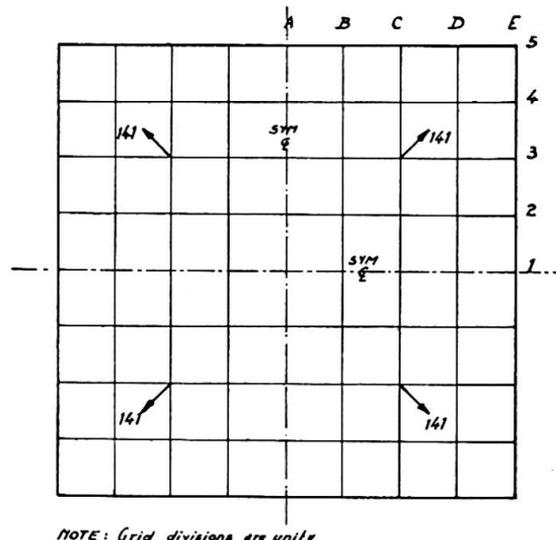


Fig. 2. Loaded gusset plate with grid superimposed.

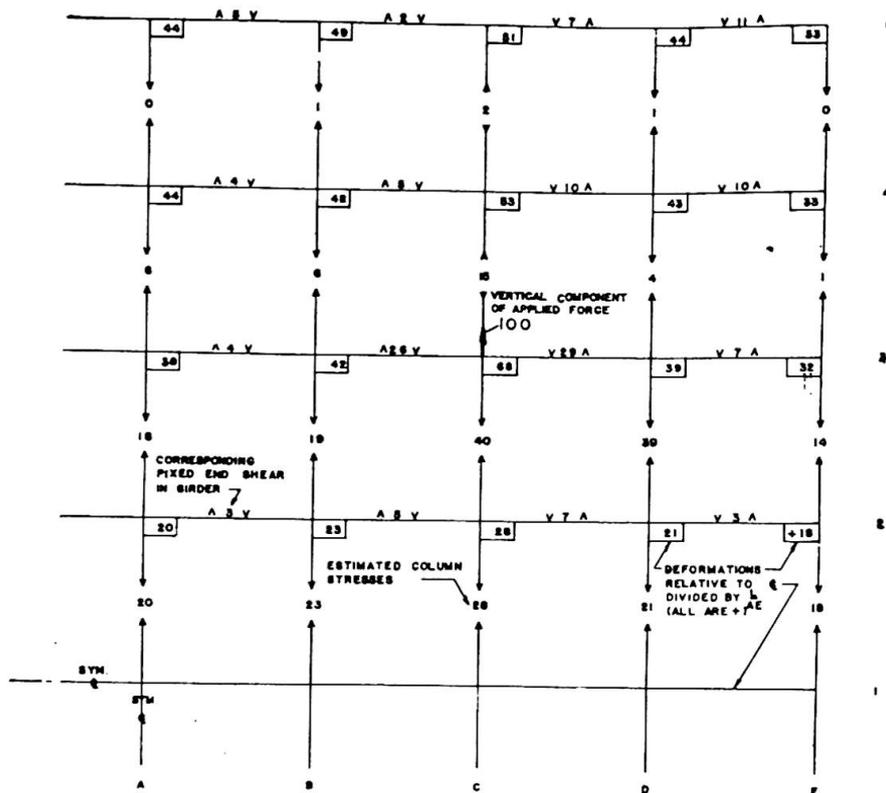


Fig. 3. Estimate of vertical column stresses.

When turned at 90° this sheet will also represent the estimate of horizontal girder stresses due to the horizontal force of 100.

the theoretical maximum stress. Finally grid analogy makes use of the physical concepts of column stresses, girder moments and shears, column shortening, joint rotation, moment distribution and joint relaxation that have become the standard working tools of the structural designer. They are merely put together here in an effective form for as rapid analysis as possible of the analogous grid.

Problem of gusset-plate analysis analyzed by Marvin Mass⁽³⁾

The simple problem illustrated by figure 2 was analyzed by the procedure of grid analogy. The subdivision into 8 by 8 grid spaces with two lines of symmetry reduces the study to that of a 4 by 4 grid. The initial estimate of stresses in the vertical direction due to the vertical component of the diagonal force is shown in figure 3. Based upon these estimated stresses in vertical members the joint movements (SL/AE) were computed and recorded in boxes at the joints. Since adjacent horizontal joints have unequal movements there are fixed-end shears developed in all horizontal members which are recorded on the member itself. If the sheet of figure 3 is turned at 90 degrees, it will also represent a proper estimate of horizontal girder stresses due to the horizontal component of the diagonal load shown in figure 2.

When fixed-end shears in horizontal and also vertical members are converted into fixed-end moments for members of unit length and recorded at the end of each member as in figure 4 the joints will not be in moment

⁽³⁾ Assistant Professor, Department of Civil Engineering, University of Colorado.

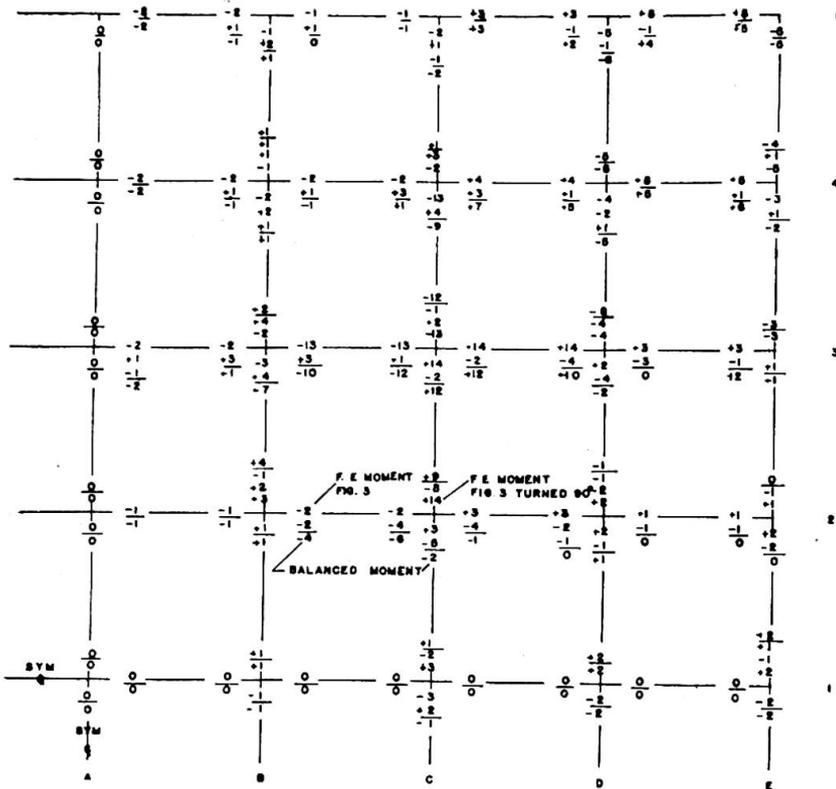


Fig. 4. First moment balance. Initial fixed-end moments computed from fixed-end shears in Fig. 3.

equilibrium. Hence on figure 4 is illustrated the distribution of moments to reach rotational equilibrium of the joints. The final shears in all horizontal members after moment distribution are computed from figure 4 and introduced along with the estimated stresses in vertical members on

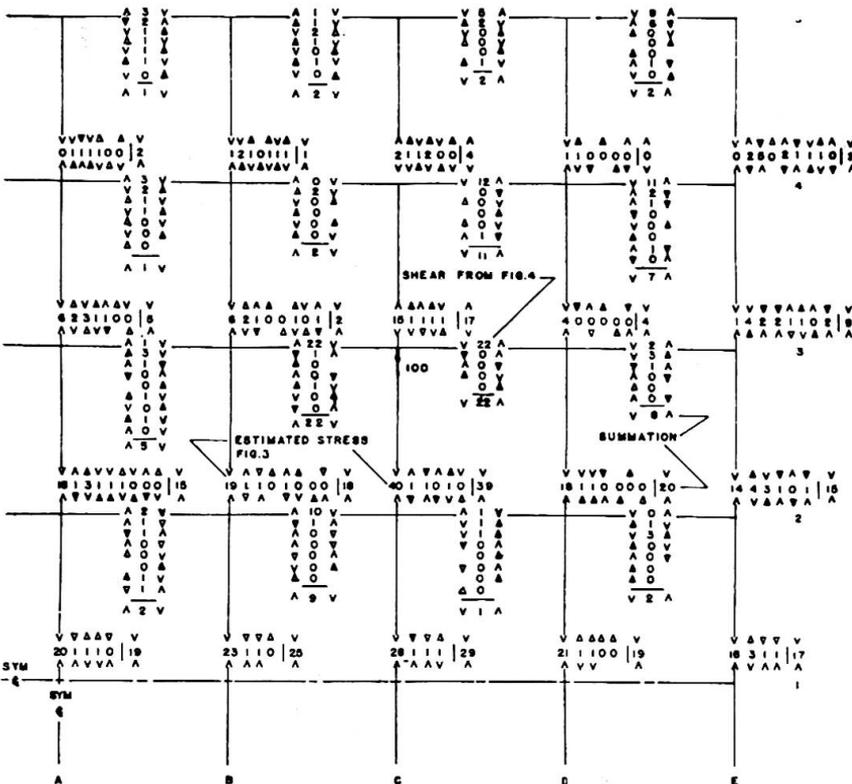


Fig. 5. First vertical force balance.

Arrow head indicates direction of action on adjacent joint. Arrow head is closed on side from which balancing force comes.

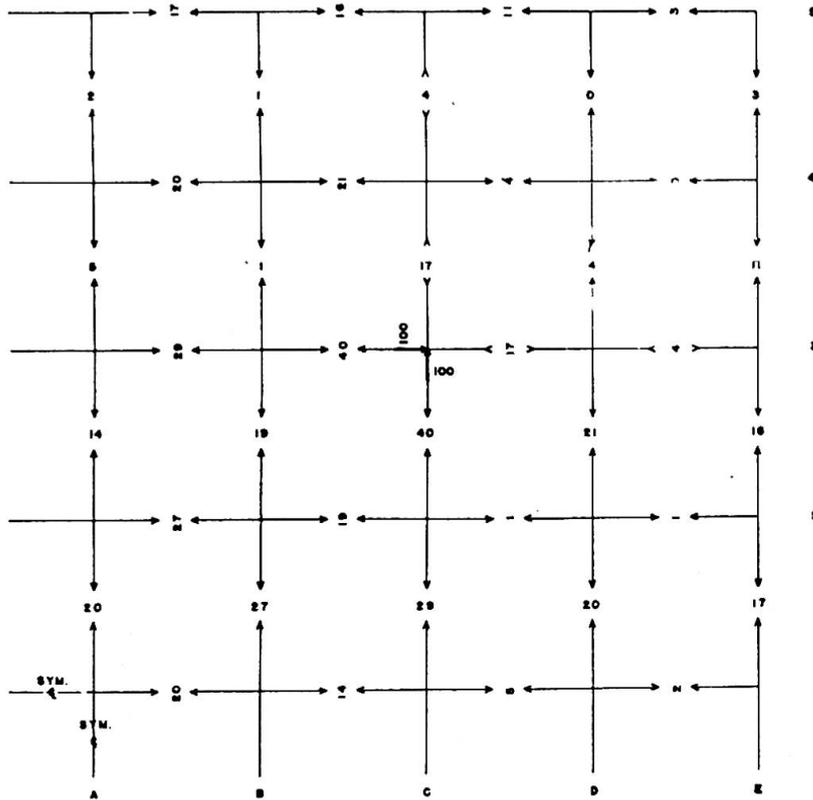


Fig. 6. Final direct stresses for one quarter of the gusset plate.

figure 5. Then the procedure of relaxing vertical joint restraints and permitting vertical translation without rotation joint-by-joint is carried out in figure 5. The first number at the top or to the left of a sequence of numbers represents the initial value. The final value occurs below or to

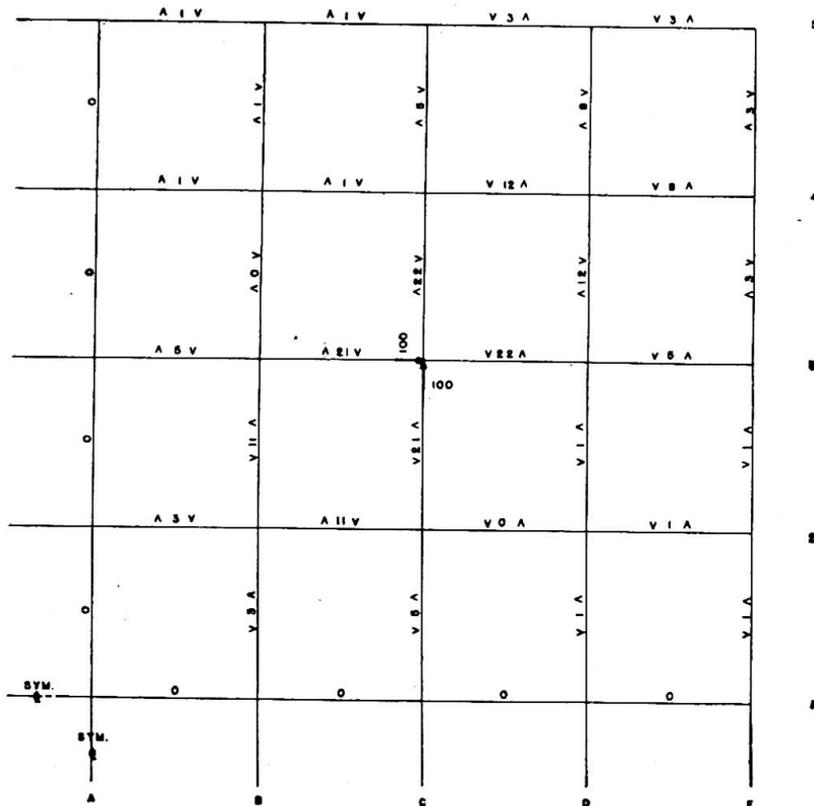


Fig. 7. Final shears for one quarter of the gusset plate.

the right of the sequence and is separated from the sequence by a short straight line. By turning the sheet of figure 5 at 90 degrees the effect of relaxation of restraints in the horizontal direction is obtained.

As in all instances of numerical procedures it is now necessary to reconsider the influence of the relaxation achieved in figure 5 upon the moment distribution of figure 4. Then any redistribution of moments found necessary will produce changes in shear with small accompanying joint restraints to be again relaxed. For the example chosen these corrections were all found to be minor and they are not illustrated here. However, the results in terms of the direct stresses in figure 6 and the shears in figure 7 do include these small corrections. If the subdivision of the grid had been somewhat finer it would have been possible to introduce average direct stresses at a joint and the average shear into Mohr's circle to compute a statistical or average value of the principal stress corresponding to the point on the plate represented by the joint of the grid. Finer subdivision would permit the computation of principal stresses closer to the application of the load but the ultimate stress-concentration would have to be superimposed upon the stress pattern obtained by grid analogy.

Résumé

Les déformations d'une tôle pleine, soumise à une sollicitation quelconque, peuvent être prédéterminées avec une approximation suffisante, en analysant, à la place de la tôle, un treillis constitué par des barres formant un réseau octogonal à nœuds rigides. La détermination des efforts dans un tel treillis se fait par la méthode préconisée par l'auteur pour la détermination des cadres à étage soumis à l'effort du vent. L'auteur montre que le cas spécial d'un gousset de nœud s'apparente au problème général par lequel les efforts s'appliquent dans la partie centrale. En annexe, il donne un exemple de calcul de cette méthode appliquée à un nœud de gousset du type classique.

Zusammenfassung

Die Deformation einer vollen Scheibe infolge einer beliebigen Belastung, können mit guter Genauigkeit näherungsweise bestimmt werden, indem statt der Scheibe ein zweckmässig ausgewähltes Netz von steif verbundenen, senkrecht aufeinander stehenden Stäben untersucht wird. Die Bestimmung der Kräfte in derartigen, steifen Stabwerken geschieht nach der vom Verfasser veröffentlichten Methode zur Untersuchung von durch Windkräfte beanspruchten mehrstöckigen Rahmen mittels Momenten- und Kräfteverteilung. Es wird gezeigt, dass das spezielle Problem des Knotenblechs denjenigen Platten- und Scheibenproblemen verwandt ist, bei denen die Kräfte ausschliesslich in der Mittelebene wirken. Ein Beispiel dieser Berechnungsmethode, angewandt auf ein typisches Knotenblech durch Marvin Mass, wird in einem Anhang vorgeführt.

Summary

By properly proportioning an analogous grid of rigidly connected members meeting at right angles the physical deformations of a continuous

plate due to any loading may be approximated with good accuracy. The analysis of the stresses in such a rigid gridwork follows from the author's previous publication of a method of analyzing for the wind stresses in a multistory building frame by moment and force distribution. The particular problem of a gusset plate is shown to be similar to any plate or wall problem where the forces exist entirely within the plane of the plate. An example of the method of analysis, as applied to a typical gusset plate by Marvin Mass, is presented in an appendix.

Ib2

**Constitution des nœuds d'assemblage,
forme optima à donner aux goussets dans les systèmes à cadres
et importance de leur influence
sur les sollicitations de l'ensemble de la construction**

**Die Ausbildung der Knotenpunkte,
die günstige Form der Knotenbleche von Rahmenträgern
und die Bedeutung ihres Einflusses
auf die Beanspruchung des ganzen Tragwerks**

**Constitution of assembly joints,
the best shape to give the gussets in frame systems
and the importance of their influence on stresses
of the structure as a whole**

A. DE MARNEFFE

Professeur à l'Université de Liège

Dans les systèmes à cadres, les barres sont soumises, en plus des efforts longitudinaux et des efforts tranchants, à des sollicitations par flexion dont le moment s'accroît en s'approchant des nœuds. C'est donc surtout la résistance à ces moments de flexion que l'on doit envisager dans l'étude de ces nœuds d'assemblage.

La variation du moment de flexion dans les diverses sections de la barre, lorsqu'on se déplace selon l'axe de celle-ci, est le plus souvent linéaire. Même si elle est curviligne, la courbe se confond très sensiblement avec sa corde au voisinage du nœud.

Dans les constructions soumises à des effets dynamiques il est avantageux de rechercher la forme du solide d'égale résistance pour les barres et leurs assemblages afin d'éviter la localisation des régions dangereuses.

D'autre part, le profil le plus adéquat pour une barre fléchie est le double T dont les semelles sont pour ainsi dire les seules à résister à la flexion. Dans ce cas, le module de flexion $1/v$ est proportionnel à la hauteur h du profil. Si donc la variation de M est linéaire, la condition de taux de fatigue maximum constant demande que la variation de h soit aussi linéaire (fig. 1). Cette condition n'est pas réalisée dans le type de nœud le plus utilisé jusqu'à présent, notamment dans l'exécution des poutres

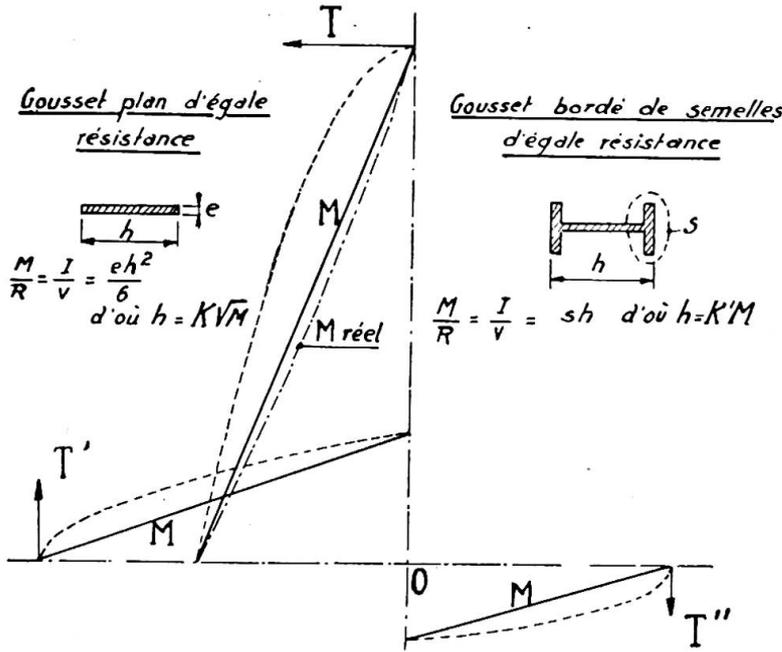


Fig. 1. Constitution des nœuds d'assemblage des systèmes à cadre :

M : Diagramme du moment de flexion;
 - - : Contour théorique linéaire (gousset bordé);
 ... : Contour théorique curviligne (gousset plan).

Vierendeel où les semelles des montants s'incurvent selon une courbe circulaire de façon à se raccorder tangentiellement à la semelle de la poutre constituant la membrure (fig. 2).

En outre, l'équilibre des efforts concentrés dans les semelles ne peut s'établir qu'à la condition que ces efforts quittent les semelles pour solliciter l'âme de façon exagérée, ce qui en provoque le flambage (fig. 3 et 4).

La condition de l'équilibrage direct des efforts des semelles nous amène à assimiler ces semelles à des barres d'un système triangulé. Dès lors, la solution qui s'impose est donnée par la figure 5 où l'on constate que les efforts s'équilibrent parfaitement par l'intermédiaire de nervures disposées sur l'âme de la pièce principale.

L'exécution de cet assemblage présente l'inconvénient de la réalisation des jonctions des semelles et nervures aux points de croisement a_3 , b_3 et d . Cela est très difficile par rivure et n'est guère possible que par soudure.

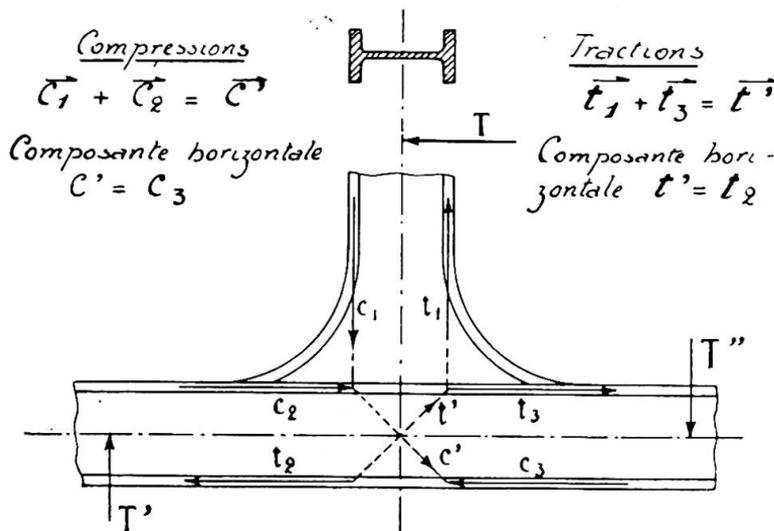


Fig. 2. Nœud avec gousset bordé de semelles avec raccordement tangentiel.

Diagramme des équilibres des efforts des semelles. La composante verticale de c' équilibre celle de t' . Comme ces résultantes quittent les semelles et sollicitent l'âme, il y a danger de flambage de l'âme.

La soudure même demandera beaucoup de soins pour y être exécutée parfaitement. C'est un problème qui doit absolument être résolu par les techniciens de la soudure.

Lorsque les nœuds des systèmes à cadres, donc essentiellement hyperstatiques, sont réalisés de cette façon on ne peut plus admettre que les barres soient prismatiques, c'est-à-dire de section S et de moment d'inertie i constant sur toute leur longueur. La déformabilité du système en est donc modifiée et il convient de se rendre compte dans quelle proportion la répartition des sollicitations hyperstatiques, qui en dépend, en est affectée.

Une application à une poutre Vierendeel existante nous donnera une indication à ce sujet.

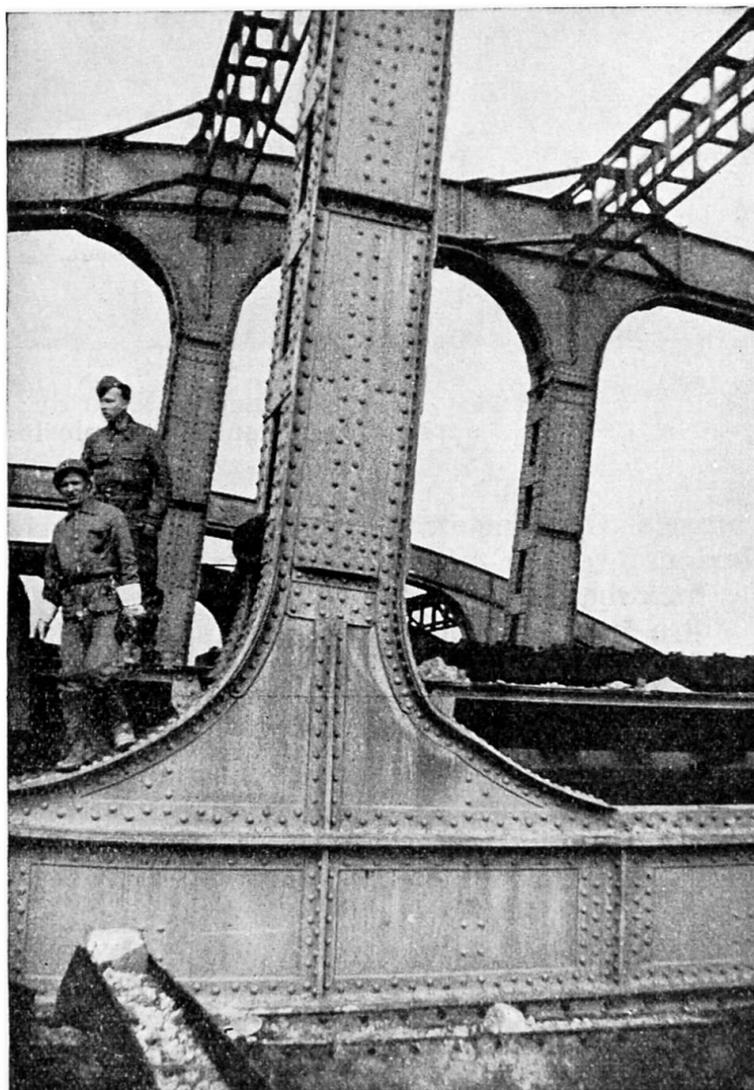


Fig. 3. Nœud du pont Vierendeel du Val-Benoît à Liège, tombé à la suite d'explosion en 1939, montrant nettement le flambement de l'âme.

Soit donc la poutre dont la moitié est représentée à la figure 4, d'environ 75 mètres de portée, et soumise à une charge concentrée appliquée au nœud 3, c'est-à-dire au quart de la portée.

Le diagramme (fig. 6) donne la répartition calculée des M , dans les membrures 2-3 et 3-4; le trait plein lorsque l'on suppose des barres prismatiques et le trait pointillé lorsque l'on tient compte de la raideur des

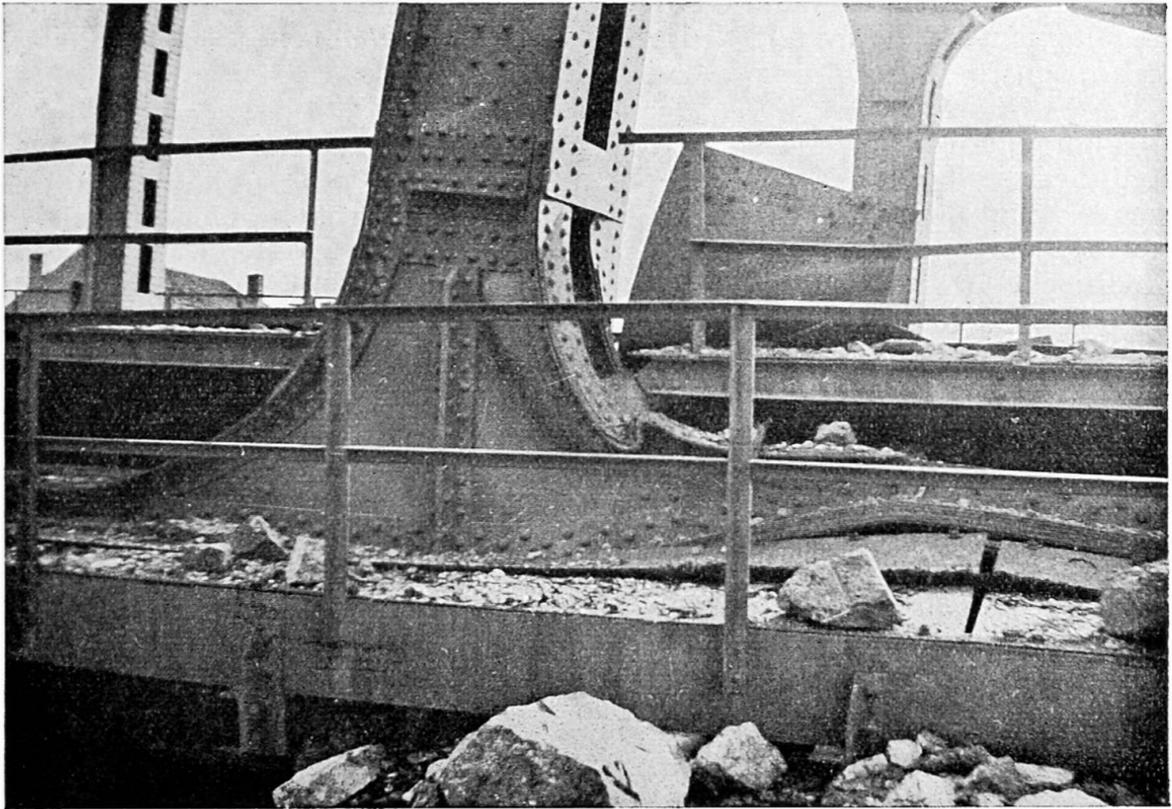


Fig. 4. Autre nœud du Pont du Val-Benoît après écoulement par explosion en 1939.

goussets. On constate d'abord que les goussets refoulent les points d'inflexion i vers le milieu des barres, et ensuite des variations importantes des maxima des M_x .

On peut en conclure que si l'on veut calculer ces poutres avec une précision suffisante, il s'impose de tenir compte de l'influence des goussets où des variations de section des barres. D'autant plus qu'en réalité le calcul n'en est pas aussi fortement compliqué qu'on le pense généralement. Il suffit d'utiliser en stabilité des constructions le procédé employé depuis longtemps en résistance des matériaux lorsque l'on envisage des solides de section compliquée tel que les profilés.

La figure 7 montre le parallélisme, et je dirai la concordance, des

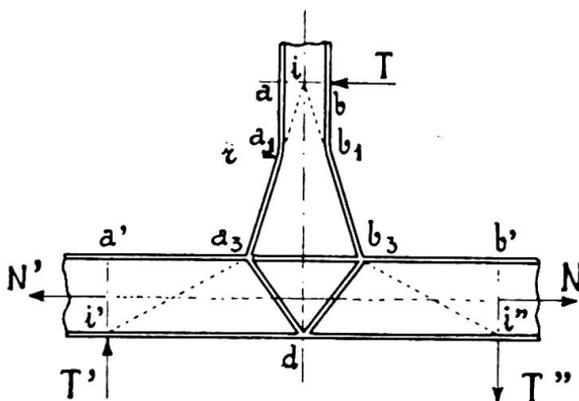


Fig. 5. Nœud avec gousset bordé de semelles rectilignes prolongées par des nervures.

Equilibre direct des efforts dans un système triangulé, l'âme n'étant que faiblement sollicitée à la flexion.

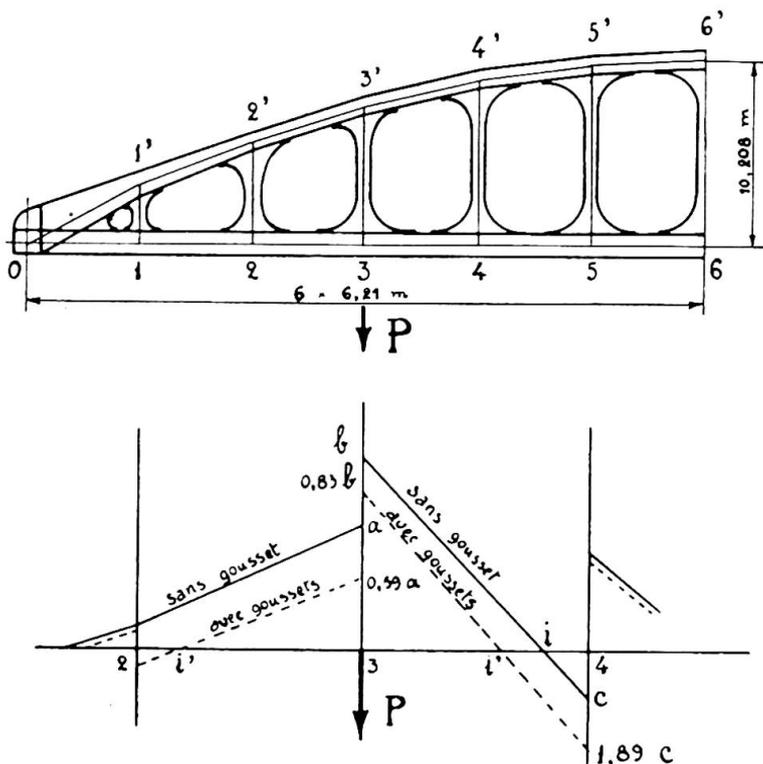


Fig. 6. Influence des goussets sur les sollicitations dans une poutre Vierendeel.

Moments fléchissants dans les membrures pour une charge concentrée au nœud 3.

calculs nécessaires pour établir la déformation d'une section de poutre et la déformée de la fibre moyenne d'une poutre entière. En résistance des matériaux depuis très longtemps on a remplacé les intégrales $\int ds = S$ et $\int \xi^2 ds = i$ par les notions et notations de surface et de moment d'inertie et cela a permis d'étendre les formules établies pour la section rectangulaire à un profil quelconque. Il ne viendrait actuellement à l'esprit de personne, *par raison de simplification*, de calculer une poutre profilée en double T comme si elle était de profil rectangulaire. Il doit en être de même en stabilité des constructions et on doit maintenant admettre qu'on ne peut plus tolérer, par raison de simplification, le calcul d'une poutre à section variable ou renforcée par goussets comme si elle était de section constante car il suffit pour cela d'utiliser les notions et les notations qui

s'imposent de *masse élastique* $\sigma = \int \frac{ds}{Ei}$

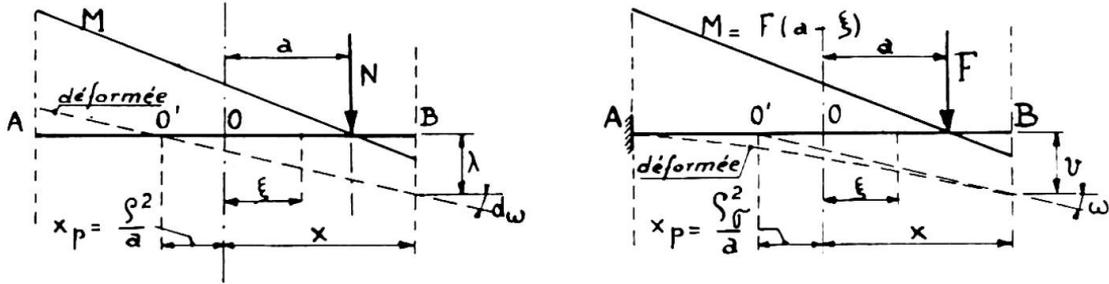
de *moment d'élasticité* $I = \int \xi^2 \frac{ds}{Ei}$

ainsi que celle de *rayon d'élasticité* ρ_r qui s'en déduit par $\rho_r = \frac{I}{\sigma}$.

La figure 8 montre à suffisance le parallélisme des procédés.

Si même on ignore la loi exacte de variation de i le long des goussets, on peut se contenter d'une loi approchée car cela n'affectera qu'une décimale des valeurs σ et I (ou de ϵ et ν) et non sa valeur principale.

J'estime donc qu'il y a lieu de voir se généraliser les notions de *masse élastique* des poutres, de *moment d'élasticité* et du *rayon d'élasticité* pour simplifier et rendre plus précis les calculs des systèmes hyperstatiques.



SECTION

$$\lambda = \frac{N}{\int E dS} + \frac{Nax}{\int E \xi^2 dS}$$

$$\int E dS = ES \quad \int E \xi dS = 0$$

$$\int E \xi^2 dS = Ei = ES\rho^2$$

S = surface de la section

i = moment d'inertie

ρ = rayon d'inertie

$$\lambda = \frac{N}{ES} \left(1 + \frac{ax}{\rho^2} \right) = \frac{Na}{ES\rho^2} \left(x + \frac{\rho^2}{a} \right)$$

$$\lambda = d\omega \left(x + x_p \right) = d\omega x \left(1 + \frac{x}{x_p} \right)$$

en posant $d\omega = \frac{Na}{Ei}$

$$x_p = \frac{\rho^2}{a} \quad v' = \frac{x^2}{\rho^2}$$

POUTRE

$$\omega = \int \frac{M ds}{Ei} = Fa \int \frac{ds}{Ei} - F \int \xi \frac{ds}{Ei}$$

$$v = \omega x - \int M \xi \frac{ds}{Ei}$$

$$= \omega x - Fa \int \xi \frac{ds}{Ei} + F \int \xi^2 \frac{ds}{Ei}$$

$$\int \frac{ds}{Ei} = \sigma \quad \int \xi \frac{ds}{Ei} = 0$$

$$\int \xi^2 \frac{ds}{Ei} = I = \sigma \rho_\sigma^2$$

σ = masse élastique de la poutre

I = moment d'élasticité

ρ_σ = rayon d'élasticité

$$\omega = Fa\sigma \quad v = Fa\sigma x + F\sigma \rho_\sigma^2$$

$$v = Fa\sigma \left(x + \frac{\rho_\sigma^2}{a} \right) = \omega \left(x + x_p \right)$$

$$= \omega x \left(1 + \frac{x}{x_p} \right)$$

en posant $x_p = \frac{\rho_\sigma^2}{a} \quad v = \frac{x^2}{\rho_\sigma^2}$

Fig. 7. Stabilité des constructions dans un plan de symétrie.

Résumé

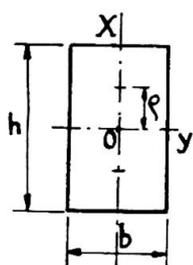
Les nombreux essais effectués sur des goussets plans pour en établir le meilleur contour ne sont pas transposables aux goussets en T qui sont utilisés le plus fréquemment dans les systèmes à cadres.

Les semelles d'une poutre concentrent les efforts résistant spécialement aux moment de flexion; lorsqu'elles s'assemblent à une autre poutre, elles doivent être prolongées par des raidisseurs judicieusement disposés sur l'âme de celle-ci pour que les efforts des semelles des deux poutres puissent s'équilibrer directement.

On arrive ainsi à préconiser le plus souvent des goussets avec semelles rectilignes se prolongeant par des raidisseurs disposés en triangle sur l'âme de la poutre porteuse.

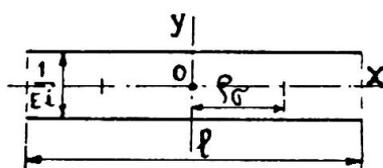
Ces goussets exercent une influence suffisante sur la répartition des sollicitations hyperstatiques dans l'ensemble du système pour que l'on doive en tenir compte dans un calcul quelque peu précis. Notamment les points d'inflexion sont assez fortement déplacés. Dans le but de ne pas compliquer les calculs, on assimile souvent les éléments de moment d'inertie variable à des éléments de moment d'inertie constant. Cependant, la généralisation de l'emploi de notations spéciales pour les notions de

SECTION RECTANGULAIRE



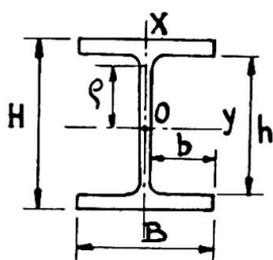
$S = bh$ surface
 $i = bh \times \frac{h^2}{12}$ moment d'inert.
 $\rho^2 = \frac{i}{S} = \frac{h^2}{12}$ $\rho =$ rayon d'inertie
 $\nu' = \frac{\frac{1}{4}h^2}{\rho^2} = 3$

POUTRE PRISMATIQUE



$\sigma = \frac{1}{Ei} \times l$ masse élastique
 $I = \frac{l}{Ei} \times \frac{l^2}{12}$ moment d'élasticité
 $\rho_{\sigma}^2 = \frac{I}{\sigma} = \frac{l^2}{12}$ rayon d'élasticité $= \rho_{\sigma}$
 $\nu = \frac{\frac{1}{4}l^2}{\rho_{\sigma}^2} = 3$

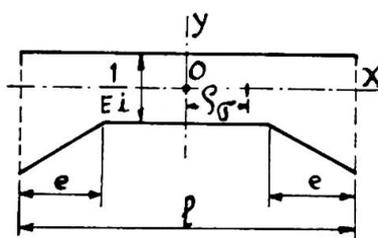
SECTION EN DOUBLE T



$S = BH - 2bh$
 $i = \frac{BH^3 - 2bh^3}{12}$
 $\rho^2 = \frac{i}{S}$ $\nu' = \frac{\frac{1}{4}H^2}{\rho^2}$

Pour un profilé Grey DIN 1.000 $\nu' = 1,56$

POUTRE AVEC GOUSSETS



Soit : $\sigma_1 = \frac{l}{Ei_1}$
 $\sigma = \frac{l}{Ei_1} - \frac{2e}{Ei_1} + \frac{2e}{Ei_{moy}}$
 $\sigma = \varepsilon \sigma_1$ avec $\varepsilon < 1$
 $I = \int \xi^2 d\sigma = \sigma \rho_{\sigma}^2$
 $\rho_{\sigma}^2 = \frac{I}{\sigma}$ $\nu = \frac{\frac{1}{4}l^2}{\rho_{\sigma}^2}$

Pour $\frac{e}{l} = 0 \quad 0,1 \quad 0,25 \quad 0,4$

On a $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 1 \quad 0,8666 \quad 0,6666 \quad 0,4666 \\ \nu = 3 \quad 3,96 \quad 6,243 \quad 10,293 \end{array} \right.$

Fig. 8. Stabilité des constructions dans un plan de symétrie.

masses élastiques et de leurs moments du second degré permet d'étendre facilement les formules établies pour les poutres de section uniforme à celles de section variable, et est fortement à préconiser.

Ces caractéristiques élastiques des éléments à moment d'inertie variable qui interviennent alors dans les calculs sont relativement aisées à déterminer et leur inemploi devient inexcusable.

Zusammenfassung

Die zahlreichen an ebenen Knotenblechen ausgeführten Versuche zur Bestimmung ihrer günstigsten Form sind nicht übertragbar auf die T-förmigen Knotenbleche, welche bei Rahmenträgern sehr oft angewendet werden.

Die Flanschen eines Trägers konzentrieren ihren Widerstand hauptsächlich auf die Biegemomente. Wenn sie mit einem anderen Träger verbunden werden, müssen sie durch sorgfältig auf dessen Knotenblech angeordnete Aussteifungen verlängert werden, damit die Flanschkräfte beider Träger sich unmittelbar das Gleichgewicht halten können.

Man wird daher dazu geführt, sehr oft Knotenbleche mit geraden Flanschen vorzusehen, die durch dreieckförmig angeordnete Versteifungen auf das Stegblech des Tragbalkens verlängert werden.

Diese Knotenbleche beeinflussen die Verteilung der statisch unbestimmten Kräfte im ganzen Tragwerk so stark, dass dies bei einer genaueren Berechnung berücksichtigt werden muss. Hauptsächlich die Wendepunkte der Biegelinie werden stark verschoben. In der Absicht, die Berechnung nicht allzusehr zu erschweren, ersetzt man oft Glieder mit variablem durch solche mit konstantem Trägheitsmoment. Die Verallgemeinerung der Anwendung von speziellen Bezeichnungen für den Begriff der elastischen Massen und ihrer Momente zweiten Grades erlaubt indessen leicht, die für Träger mit konstantem Querschnitt abgeleiteten Formeln auf diejenigen mit veränderlichen Querschnitten anzuwenden, was sehr zu empfehlen ist. Diese elastischen Eigenschaften der Elemente mit veränderlichem Trägheitsmoment, die dann in der Berechnung auftreten, sind relativ leicht zu bestimmen und ihre Vernachlässigung ist nicht zu entschuldigen.

Summary

The numerous tests on plane gussets, to ascertain the best contour, are not transposable to T gussets such as are most frequently used in frame systems.

The flanges of a girder concentrate the efforts resisting especially at the moment of flexion; when they are assembled to another girder they have to be lengthened by stiffeners judiciously arranged on the web, in order that the efforts of the flanges of the two girders may directly counter-balance one another.

One is thus most often induced to arrange for gussets with rectilinear flanges lengthened by stiffeners placed triangularly on the web of the bearing-beam.

These gussets exert sufficient influence on the subdivision of the hyperstatic stresses in the system as a whole to require account to be taken of them in a somewhat precise calculation. Notably, the points of inflexion are much displaced. In order not to complicate the calculations, the elements of the variable moment of inertia are often assimilated to elements of constant moment of inertia. Nevertheless, the generalisation of the use of special notations for the notions of elastic masses and their moments of the second degree enables us to easily extend the formulae established for girders of a uniform section to those of a variable section, and is highly to be recommended.

These elastic characteristics of the elements of variable moment of inertia which then intervene in the calculations are comparatively easy to determine and an omission to use them becomes inexcusable.

Ib3

Le calcul des pièces à plan moyen

Die Berechnung von Vollwandträgern

The calculation of plate girders

CH. MASSONNET

Chargé de Cours à l'Université de Liège

Désignons sous le nom de pièces à plan moyen les pièces formées d'une âme plane garnie sur ses bords de semelles normales à l'âme et s'étendant symétriquement de part et d'autre de celle-ci (fig. 1). L'âme peut éventuellement être munie de raidisseurs droits ou courbes. On peut d'ailleurs considérer une pièce en caisson comme formée de deux pièces à plan moyen identiques accolées (fig. 2).

On rencontre dans la pratique de nombreuses pièces de ce genre dont le calcul ne peut se faire par les règles de la résistance des matériaux. Les plus importantes sont sans doute les nœuds de portiques, pont Vierendeel et charpentes continues, qui peuvent présenter deux, trois ou quatre branches.

J'ai établi une méthode qui permet de calculer ces pièces, quelle que soit leur forme, avec une bonne précision.

Je suppose d'abord que les tensions sont uniformément réparties sur toute la largeur des semelles. Cette hypothèse est conforme à la réalité, sauf si les semelles présentent une forte courbure. Dans ce cas, la distribution des tensions n'est pas uniforme, comme l'a montré H. Bleich ⁽¹⁾, mais on peut alors corriger cet effet en remplaçant la section réelle de la semelle par une section fictive plus faible, à l'aide des coefficients de réduction donnés par Bleich.

Je suppose ensuite que les semelles sont assez minces pour que les tensions soient uniformément réparties dans leur épaisseur. En d'autres termes, je néglige les couples répartis transmis par les semelles à l'âme et j'assimile pour le calcul les semelles à des fils élastiques, au sens qu'on donne à ce vocable en mécanique rationnelle. Cette hypothèse est très généralement admise et l'on peut montrer qu'elle est très approximativement vérifiée en pratique.

⁽¹⁾ *Stahlbau*, 6 janvier 1933, pp. 3 à 6.

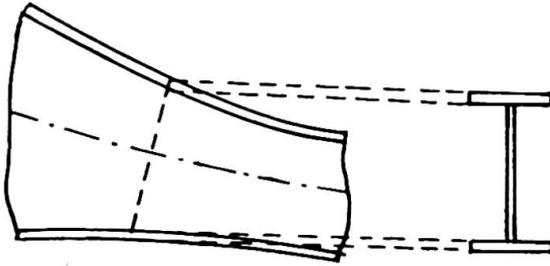


Fig. 1.

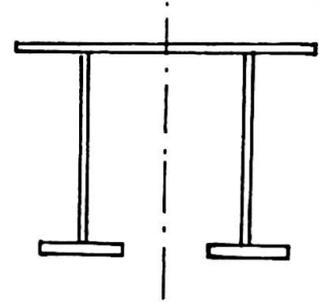


Fig. 2.

la semelle à l'âme en se servant de l'équation vectorielle d'équilibre d'un (fig. 3) :

ρ , rayon de courbure;

Ω , aire de la section droite;

N , effort de traction ou de compression simple, orienté suivant la tangente à la semelle, rapportée à la longueur d'arc s comptée le long de l'axe de la semelle.

L'âme, d'épaisseur h , est en état double de tension défini par les trois composantes σ_n , σ_s et τ_{ns} (fig. 4).

D'après ce qui vient d'être dit, on peut calculer l'effort transmis par la semelle à l'âme en se servant de l'équation vectorielle d'équilibre d'un fil, soit (fig. 3)

$$h\vec{\theta}_n = \frac{d\vec{N}}{ds}, \quad (1)$$

à condition de désigner par $\vec{\theta}_n$ le vecteur-tension sur la facette ds de l'âme.

Par ailleurs, la continuité de la pièce exige que les allongements proportionnels de l'âme et de la semelle à la jonction âme-semelle soient les mêmes. L'allongement proportionnel de l'âme le long de son bord vaut, d'après les lois de l'élasticité plane,

$$\varepsilon_{\text{âme}} = \frac{1}{E} (\sigma_s - \eta\sigma_n),$$

E étant le module d'élasticité et η le coefficient de Poisson.

L'allongement proportionnel de la semelle simplement tendue vaut

$$\varepsilon_{\text{semelle}} = \frac{N}{E\Omega}.$$

En égalant ces deux allongements proportionnels, on trouve

$$N = \Omega (\sigma_s - \eta\sigma_n),$$

ou, en précisant la direction du vecteur \vec{N} ,

$$\vec{N} = \Omega (\sigma_s - \eta\sigma_n) \vec{1}_s, \quad (2)$$

à condition de désigner par $\vec{1}_s$ le vecteur-unitaire allongé suivant l'axe de la semelle.

Pour éliminer l'effort N inconnu, il suffit de remplacer \vec{N} par sa valeur (2) dans (1). On trouve ainsi

$$h\vec{\theta}_n = \frac{d}{ds} \left[\Omega (\sigma_s - \eta\sigma_n) \vec{1}_s \right].$$

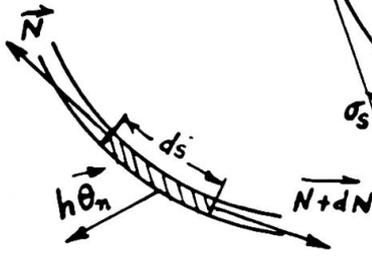


Fig. 3.

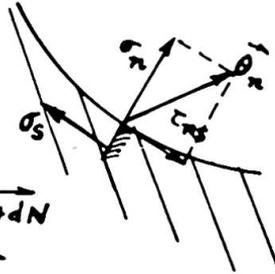


Fig. 4.

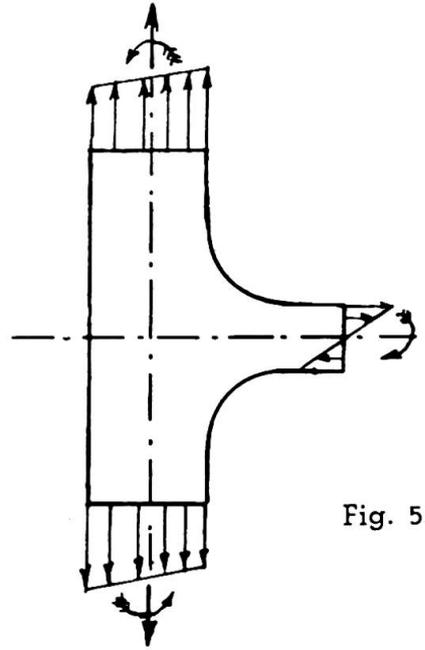


Fig. 5.

Cette condition vectorielle, équivalente à deux conditions scalaires, doit être vérifiée tout le long des semelles garnissant la pièce considérée.

Par ailleurs, on connaît généralement les efforts agissant aux extrémités de la pièce, soit que ce soient des efforts extérieurs donnés, soit que dans les sections d'extrémité les tensions obéissent aux lois élémentaires de la flexion composée des poutres droites. Ce dernier cas se présente par exemple pour le nœud Vierendeel représenté à la figure 5.

Ainsi donc, sur tout le contour de l'âme de la pièce, l'état de tension dans cette âme doit obéir à des conditions aux limites connues et bien déterminées. L'étude d'une pièce à plan moyen est ramenée à un problème d'élasticité plane. Ce problème peut être résolu pratiquement, grâce à un appareil qui permet de résoudre mécaniquement tous les problèmes d'élasticité plane ⁽¹⁾.

La méthode que je viens de décrire a été appliquée avec succès à l'étude du nœud représenté à la figure 5. Dans l'exécution pratique des calculs, on divise les semelles en un nombre suffisant de segments Δs égaux et l'on remplace la condition différentielle aux limites (5) par la condition finie

$$h\theta_n = \frac{\Delta N}{\Delta s}.$$

Cela revient à substituer à la courbe funiculaire matérialisée par la semelle un polygone funiculaire inscrit à nombre de côtés suffisamment grand. Les efforts N en les différents points de la semelle sont alors les rayons polaires du polygone des forces associé à ce funiculaire.

⁽¹⁾ La théorie et la description de cet appareil ont été données en résumé dans le volume IX des *Mémoires de l'A. I. P. C.* L'exposé complet de la méthode a paru en septembre 1949 dans le volume IV du *Bulletin du Centre d'Etudes, de Recherches et d'Essais scientifiques des Constructions du Génie civil de Liège.*

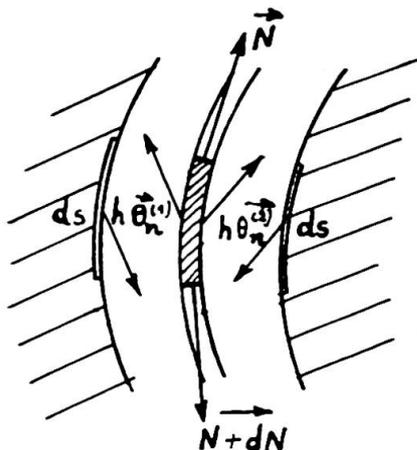


Fig. 6.

La méthode peut s'étendre sans difficulté au cas où l'âme de la pièce est munie de raidisseurs droits ou courbes.

En effet, détachons le raidisseur et la partie d'âme adjacente du restant de l'âme par deux coupes parallèles (fig. 6). On retrouve le même cas de sollicitation que pour une semelle, sauf que l'âme agit ici sur les deux faces. L'effort dans le raidisseur est donné par une formule entièrement analogue à (4) :

$$N = \Omega (\sigma_s^{(1)} - \eta \sigma_n^{(1)}) \vec{1}_s = \Omega (\sigma_s^{(2)} - \eta \sigma_n^{(2)}) \vec{1}_s .$$

Appelons $\vec{\theta}_n^{(1)}$ et $\vec{\theta}_n^{(2)}$ les vecteurs-tensions dans l'âme sur les faces supérieure et inférieure de la coupe et écrivons l'équilibre de l'élément ds du raidisseur; on trouve :

$$h (\vec{\theta}_n^{(1)} + \vec{\theta}_n^{(2)}) - \frac{dN}{ds} = 0 .$$

C'est la condition aux limites cherchée.

Résumé

Une pièce à plan moyen est constituée d'une âme pleine garnie sur ses bords de semelles normales à l'âme. L'auteur établit les conditions auxquelles doit satisfaire l'état plan de tension dans l'âme sur le bord de celle-ci, par suite de sa liaison avec la semelle. Le problème de la recherche des tensions dans une pièce à plan moyen est ainsi ramené à un problème d'élasticité plane relatif à l'âme de la pièce. Ce problème peut se résoudre pratiquement grâce à un appareil spécial qui sera décrit dans le volume 9 des *Mémoires* de l'A. I. P. C.

Zusammenfassung

Ein Vollwandträger besteht aus einem ebenen Stegblech und auf dessen Rändern senkrecht stehenden Lamellen. Der Verfasser stellt die Randbedingungen für den ebenen Spannungszustand des Stegblechs auf

unter Berücksichtigung der Verbindung des Steges mit den Lamellen. Das Problem der Spannungsermittlung in einem Vollwandträger wird dadurch auf das ebene Spannungsproblem des Stegblechs zurückgeführt. Das letztere kann praktisch mit einer speziellen Apparatur gelöst werden. Diese wird in Band 9 der *Abhandlungen* der I. V. B. H. näher beschrieben werden.

Summary

A plate girder consists of a solid web fitted on its edges with flanges at right angles to the web. The author states the conditions to which there must comply the plane state of tension in the web at its edges, owing to its connection with the flange. The problem of studying tensions in a plate girder thus resolves itself into a problem of plane elasticity as regards the web. This problem can be practically solved thanks to a special appliance which will be described in Vol. 9 of the *Publications* of the I. A. B. S. E.

Leere Seite
Blank page
Page vide