Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Biegung, Drillung und Knickung von Stäben aus dünnen Wänden

Autor: Bleich, F. / Bleich, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-2726

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

V3

Biegung, Drillung und Knickung von Stäben aus dünnen Wänden.

Flexion, torsion et flambage des barres composées de parois minces.

Bending, Torsion and Buckling of Bars Composed of Thin Walls.

Dr. Ing. F. Bleich und Dr. Ing. H. Bleich, Wien.

1. Einleitung.

Die Tatsache, daß bei einzelnen Trägerformen die Verteilung der Längsspannungen im Querschnitt nicht mit der nach der *Navier*'schen Biegungstheorie errechneten Verteilung übereinstimmt, wurde zum erstenmal von *Bach*[1] versuchsmäßig festgestellt. Etwa gleichzeitig und unabhängig von *Bach* hat *R. Sonntag*[2] auf die Verdrehungserscheinungen bei Biegung von Stäben mit ⌊, [und ⊤-Querschnitt hingewiesen und die tatsächlichen Spannungen errechnet. Die Differentialgleichung des Verdrehungsproblems des symmetrischen I-Trägers entwickelte *Timoschenko.*[3] *Weber*[4] verallgemeinerte diese Untersuchung für beliebige zweigurtige Stäbe, also für [, ⊤ und I-Querschnitte. Das Kipproblem des I-Trägers hat *Timoshenko*[3] behandelt. Das Stabilitäts- und Drillungsproblem von ⊥, I, ⊤ und [-förmigen Stäben untersuchte *Ostenfeld.*[5] Die Verdrehung von Stäben mit rechteckigem, kastenförmigem Querschnitt wurde von *Eggenschwyler*[6] erörtert.

Die klassische Theorie der Biegung und Verdrehung gerader prismatischer Stäbe geht von der Annahme aus, daß die Biegungslängsspannungen nach linearem Gesetz über den Stabquerschnitt verteilt sind und daß bei bloßer Verdrehung, wenn man von Größen zweiter Kleinheitsordnung absieht, keine Längsspannungen auftreten. Bei Stäben, die aus dünnen Platten zusammengesetzt sind, trifft dies aber, wie in den oben zitierten Arbeiten nachgewiesen wurde, nicht zu. Da im

---

[1] *C. Bach:* Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Balken mit [-förmigem Querschnitt. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1909, S. 1790 und 1910, S. 382.

[2] *R. Sonntag:* Biegung, Schub und Scherung. Berlin 1909.

[3] *S. Timoschenko:* Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschrift für Math. u. Phys. 1910, S. 361.

[4] *C. Weber:* Übertragung der Drehmomente in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt. Zeitschrift für angew. Math. u. Mech. 1926, S. 85.

[5] *A. Ostenfeld:* Mitt. Nr. 5 und Nr. 6 des Lab. für Baustatistik der Techn. Hochschule in Kopenhagen. Kopenhagen 1931 und 1932.

[6] *A. Eggenschwyler:* Über die Verdrehungsbeanspruchung rechteckiger Kastenquerschnitte. Eisenbau 1918, S. 45.

Stahlbau fast durchwegs Träger verwendet werden, die aus einzelnen Platten zusammengesetzt sind, so erscheint es notwendig, das tatsächliche Verhalten derartiger Träger, ohne Beschränkung auf besondere Querschnittsformen, zu untersuchen.

Die folgende auszugsweise Darstellung ist der erste Versuch, das hier in Rede stehende Problem der Biegung und Drillung dünnwandiger Stäbe einer möglichst allgemeinen Behandlung zuzuführen. Diese Untersuchung ermöglicht es, die Zusammenhänge tiefer zu erfassen, und allgemein gültige Grundgleichungen für die Behandlung der hier in Frage kommenden Sonderaufgaben des stabilen und unstabilen Gleichgewichtes zu schaffen.

Gegenstand dieser Untersuchung sind demnach prismatische Stäbe, die aus einzelnen langgestreckten rechteckigen Scheiben bestehen, und deren Querschnitte etwa nach Fig. 1 gestaltet sind. Fig. 1a zeigt ein Beispiel eines *offenen* oder *einfach zusammenhängenden Querschnittes*. Fig. 1b das eines *geschlossenen*

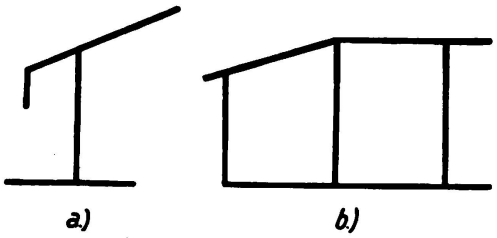


Fig. 1.

oder *mehrfach zusammenhängenden Querschnittes*. Die Dicke der einzelnen Scheiben kann innerhalb einer Scheibe veränderlich sein, doch wird sie immer als klein gegen die Scheibenhöhe vorausgesetzt.

Aus der *Navier*'schen Biegungstheorie übernehmen wir die Annahme, daß die geometrische Form des Querschnittes auch bei der Verformung unter der Belastung erhalten bleibt. Auf diesen grundlegenden Gesichtspunkt kommen wir weiter unten nochmals zurück. Nicht beibehalten wird aber die Bedingung des Ebenbleibens der Querschnitte. Wir setzen nur voraus, daß für jede einzelne Scheibe die Grundlagen der *Navier*'schen Biegungstheorie in Geltung sind. Diese Annahme kann natürlich dort, wo zwei oder mehr Scheiben zusammentreffen, wegen der von Null verschiedenen Dicke der Scheiben nicht genau erfüllt sein, doch soll diese Dicke so gering angenommen werden, daß diese Abweichungen außer Betracht bleiben können. Wir ziehen nur Verbiegungen der Scheibe in ihrer Ebene in Betracht, während Verbiegungen senkrecht zur Scheibenebene wegen des geringen Biegungswiderstandes in dieser Richtung vernachlässigt werden. Von den Schubspannungen wird nur jener Teil in Rechnung gestellt, der von der Verdrehung herrührt, während die Biegungsschubspannungen wegen des untergeordneten Einflusses auf die Formänderungen des Stabes, wenn die Stablänge groß gegen die Querschnittsabmessungen ist, vernachlässigt werden. Die Ergebnisse gelten daher nicht für ganz kurze Stäbe.

Um die Differentialgleichung des Problems in allgemeinster Form zu gewinnen, gehen wir von einem bekannten Variationsprinzip der Mechanik aus. Wir gewinnen so den Vorteil, das allgemeine Ergebnis auch für die Aufstellung von Näherungslösungen nach dem Verfahren von *Ritz* in jenen Fällen benutzen zu

können, wo eine strenge Lösung der aus der Variationsaufgabe hervorgehenden Differentialgleichungen auf Schwierigkeiten stößt.

Bezeichnet A_a die Arbeit der äußeren Kräfte, A_i die Arbeit der inneren Kräfte (Deformationsarbeit), so gilt die Extremalbedingung

$$\delta\,(A_i - \lambda\, A_a) = 0 \tag{1}$$

wobei λ ein von den besonderen Bedingungen des Problems abhängiger Multiplikator ist. In jenen Fällen, die wir hier in Betracht ziehen wollen, kann λ von vorneherein festgelegt werden.

Handelt es sich um die Formänderungen erster Ordnung einer *Verbiegungs-* oder *Verdrehungsaufgabe* des geraden Stabes, so sind A_i und A_a homogene Funktionen des zweiten bzw. ersten Grades der Formänderungsgrößen.[7] Aus dieser Tatsache ergibt sich, wie bekannt, für den Multiplikator λ der Wert 2.

Kommt ein Problem des *instabilen Gleichgewichtes* (Knickaufgabe) in Betracht, so wird, falls nur Formänderungen erster Ordnung in den Gleichgewichtsbedingungen auftreten, $\lambda = 1$.

Die Bedingung (1) lautet daher:

Im Falle des stabilen Gleichgewichtes: $\delta\,(A_i - 2\,A_a) = 0$ (2)

Im Falle des instabilen Gleichgewichtes: $\delta\,(A_i - A_a) = 0$ (3)

Der wesentliche Teil der folgenden Untersuchung besteht nun darin, die Formänderungsarbeit A_i und die Arbeit der äußeren Kräfte A_a darzustellen. Bei der Festlegung von A_i ist hierbei zwischen Stäben mit einfach zusammenhängendem und solchen mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt zu unterscheiden.

2. Die Formänderungsarbeit A_i.

Stäbe mit einfach zusammenhängendem Querschnitt.

Betrachtet man eine einzelne Scheibe eines Stabes, so wird ihre Mittellinie bei der Verformung des ganzen Stabes im allgemeinen eine Krümmung K_i in der Scheibenebene und eine Dehnung $\bar{\varepsilon}_i$ erfahren. Gleichzeitig dreht sich die ganze Scheibe um den Winkel φ. Sei J_i das Trägheitsmoment des Scheibenquerschnittes, mit der Höhe h_i und der im allgemeinen der Höhe nach veränderlichen Stärke δ_i, bezogen auf die winkelrecht zur Scheibenebene stehende Schwerpunktachse, F_i die Querschnittfläche, J_{di} der Verdrillungswiderstand der Scheibe, so gilt für die gesamte Formänderungsarbeit A_i des aus n Scheiben zusammengesetzten Stabes von der Länge l der Ausdruck

$$A_i = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} (E\,J_i\,K_i^2 + E\,F_i\,\bar{\varepsilon}_i^2 + G\,J_{di}\,\varphi'^2)\right] dz, \tag{4}$$

wobei dz der Abstand zweier unendlich nahe benachbarter Stabquerschnitte bedeutet.

Die Größen K_i und $\bar{\varepsilon}_i$ sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern sind

[7] Dies gilt unter der Einschränkung, daß in den Gleichgewichtsbedingungen die Formänderungen gegenüber den Abmessungen des Trägers vernachlässigt werden.

durch gewisse Übergangsbedingungen aneinander gebunden. An der Kante, wo zwei Scheiben zusammenstoßen, müssen die Längsspannungen und damit die Längsdehnungen der beiden Scheiben einander gleich sein. Für jede Stabkante gilt, wenn a der Abstand der Schwerachse der Scheibe von der Kante ist, siehe Fig. 2.

$$\bar{\varepsilon}_i + a'_i K_i = \bar{\varepsilon}_{i+1} - a_{i+1} K_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1) \tag{5}$$

Bei n Scheiben können n derartige Gleichungen aufgestellt werden. Ist ferner S die im Stabe wirkende Längskraft, so ist die mittlere Dehnung ε_m

$$\varepsilon_m = \frac{S}{EF}, \quad \text{wobei} \quad F = \sum_i F_i.$$

Es besteht die Gleichgewichtsbeziehung

$$E \sum_i F_i \bar{\varepsilon}_i = S = E F \varepsilon_m \tag{6}$$

Mit $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_m + \varepsilon_i$ gehen die Gleichungen (5) und (6) in die Beziehungen

$$\varepsilon_i + a' K_i = \varepsilon_{i+1} - a_{i+1} K_{i+1} \tag{5'}$$

$$\sum_i \varepsilon_i F_i = 0 \tag{6'}$$

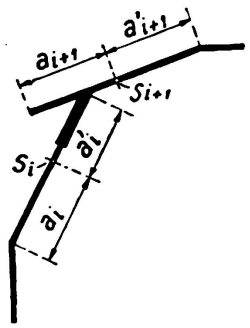


Fig. 2.

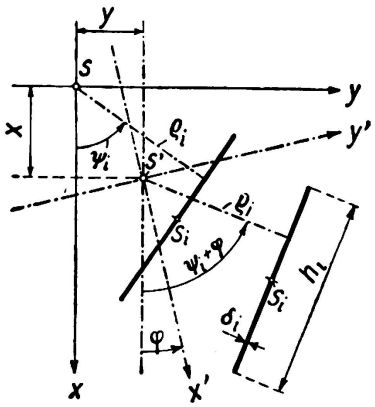


Fig. 3.

über. Führt man anderseits $\varepsilon_i = \varepsilon_m + \bar{\varepsilon}_i$ in die Gl. (4) ein, so gewinnt man unter Beachtung der Verknüpfung (6'), wenn man noch $J_d = \Sigma J_{di}$ setzt,

$$A_i = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\sum_i (E J_i K_i^2 + E F_i \varepsilon_i^2) + E F \varepsilon_m^2 + G J_d \varphi'^2 \right] dz \tag{7}$$

Die n Gleichungen (5') und (6') ermöglichen es, die n Größen ε_i durch die n Größen K_i auszudrücken, so daß ε_i als lineare Funktion der K_i erscheint.

Es ist nun notwendig, den Zusammenhang zwischen den Krümmungen K_i der einzelnen Scheiben und der Verformung des ganzen Stabes herzustellen. Wir wählen für die weiteren Betrachtungen ein linkshändiges Koordinatensystem, dessen z-Achse mit der Schwerachse des Stabes zusammenfällt, und dessen x- und y-Achse im jeweilig betrachteten Stabquerschnitt liegen und mit den Hauptträgheitsachsen desselben übereinstimmen. Bei der Verformung unter der Belastung verschiebt sich der Schwerpunkt S des betrachteten Querschnittes nach S', siehe die Fig. 3. Die Komponenten dieser Verschiebung seien x und y. Ferner

verdreht sich der Querschnitt um den Winkel φ. Der Winkel φ wird in Richtung von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse positiv gezählt. Da wir vorausgesetzt haben, daß die geometrische Form des Querschnittes erhalten bleibt, so genügen die drei Größen x, y, φ, um die Lage eines jeden Punktes im Querschnitt festzulegen. In Fig. 3 ist die Scheibe i mit dem Schwerpunkt S_i vor und nach der Verschiebung und Verdrehung dargestellt. Bei beliebigem Lastangriff wird die vorher gerade Stabachse in eine räumliche Kurve übergehen. Die Projektionen dieser Linie auf die xz- bzw. yz-Ebene haben, wenn die Verformungen als klein angenommen werden, die Krümmungen $x'' = \frac{d^2x}{dz^2}$ und $y'' = \frac{d^2y}{dz^2}$. Nun ist aber die Krümmung K_i der Scheibe i nichts anderes als die Projektion der Stabachsenkrümmung auf die verdrehte Scheibenebene. Es folgt daraus, wenn man Fig. 3 beachtet,

$$K_i = x'' \sin(\psi_i + \varphi) - y'' \cos(\psi_i + \varphi) - \rho_i \varphi'' \tag{8}$$

Diese Gleichung gestattet eine Vereinfachung in jenen Fällen, wo φ gegenüber ψ vernachlässigt werden kann. Dies gilt z. B. für die meisten Aufgaben des *stabilen Gleichgewichtes.* Die Beziehung (8) nimmt dann die einfachere Form

$$K_i = x'' \sin \psi_i - y'' \cos \psi_i - \rho_i \varphi'' \tag{8'}$$

an. Führt man die Beziehung (8′) in die Gl. (7) ein, so gewinnt man A_i in der Gestalt

$$A_i = \frac{E}{2}\int_0^l \Big[\alpha_{xx} x''^2 + \alpha_{yy} y''^2 + \alpha_{xy} x'' y'' + \alpha_{x\varphi} x'' \varphi'' + \alpha_{y\varphi} y'' \varphi'' + \\ + \alpha_{\varphi\varphi} \varphi''^2 + F \varepsilon_m^2 + \frac{G}{E} J_d \varphi'^2\Big] dz \tag{9}$$

Es läßt sich nun in allgemeiner Form nachweisen, daß

$$\alpha_{xx} = J_y, \quad \alpha_{yy} = J_x, \quad \alpha_{xy} = J_{xy} = 0,$$

wobei J_x und J_y die Trägheitsmomente des Stabquerschnittes in Bezug auf die Hauptachsen x, y bedeuten. J_{xy} ist das Zentrifugalmoment. Ferner ist bei Querschnitten, die Symmetrie hinsichtlich der x- bzw. y-Achse aufweisen, $\alpha_{xy} = 0$ bzw. $\alpha_{y\varphi} = 0$.[8]

Für Aufgaben des stabilen Gleichgewichtes lautet somit die Gleichung für die innere Arbeit, wenn wir die endgültigen Bezeichnungen $\alpha_{x\varphi} = B_x$, $\alpha_{y\varphi} = B_y$ und $\alpha_{\varphi\varphi} = B_\varphi$ einführen,

$$A_i = \frac{E}{2}\int_0^l \Big[J_y x''^2 + J_x y''^2 + B_x x'' \varphi'' + B_y y'' \varphi'' + B_\varphi \varphi''^2 + F \varepsilon_m^2 + \frac{G}{E} J_d \varphi'^2\Big] dz \tag{10}$$

Geht man auf die genauere Gl. (8) zurück, die bei manchen *Stabilitätsproblemen* heranzuziehen ist, so kann man in dieser Gleichung wegen der vorausgesetzten Kleinheit von φ

[8] Auf die Beweisführung kann hier wegen des knappen Raumes nicht eingegangen werden. Sie wird an anderer Stelle veröffentlicht werden.

$$\sin(\psi_i + \varphi) = \sin\psi_i + \varphi\cos\psi_i$$

$$\cos(\psi_i + \varphi) = \cos\psi_i - \varphi\sin\psi_i$$

schreiben. Somit erhält man für K_i den Ausdruck

$$K_i = (x'' + y''\varphi)\sin\psi_i + (x''\varphi - y'')\cos\psi_i - \rho_i\varphi'' \tag{11}$$

Die Einführung der Beziehung (11) in die Gl. (7) liefert eine Formel für A_i, die den gleichen Bau hat wie Gl. (10) nur ist x'' bzw. y'' durch $x'' + y''\varphi$ bzw. $x''\varphi - y''$ ersetzt. *Die Gleichung für die innere Arbeit nimmt somit bei Stabilitätsproblemen die Gestalt an:*

$$A_i = \frac{E}{2}\int_0^l \Big[J_y(x''+y''\varphi)^2 + J_x(x''\varphi - y'')^2 + B_x(x''+y''\varphi)\varphi'' + B_y(x''\varphi - y'')\varphi'' + B_\varphi\varphi''^2 + F\varepsilon_m^2 + \frac{G}{E}J_d\varphi'^2\Big]dz \tag{12}$$

Stäbe mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt.

Bei geschlossenem Stabquerschnitt erzeugen die Schubspannungen, die bei der Verdrehung des Stabes auftreten, eine Verbiegung der einzelnen Scheiben, während bei den Stäben mit offenem Querschnitt die Verbiegungen nur im Zusammenhang mit den Längsspannungen stehen. Im offenen Querschnitt fließen die Verdrehungsschubspannungen im Scheibenquerschnitt an den beiden Längsrändern in entgegengesetzter Richtung, bei geschlossenen Querschnitten in der gleichen Richtung. Sie verlaufen im Letztfalle so wie die Biegeschubspannungen. Die Krümmung einer Scheibe in ihrer Ebene setzt sich sonach in den hier betrachteten Fällen aus zwei Teilen zusammen, aus den Krümmungen infolge der Längsspannungen $\overline{K}_i$ und den Krümmungen infolge der Verdrehungsschubspannungen $\overline{\overline{K}}_i$. Die von der Verdrehung herrührende Schubkraft je Längeneinheit des Scheibenquerschnitts sei T_i, Fig. 4.

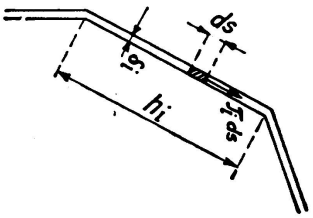


Fig. 4.

Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit A_i nimmt jetzt die Gestalt an:

$$A_i = \frac{1}{2}\int_0^l \Big[\sum_i (EJ_i\overline{K}_i^2 + EF_i\varepsilon_i^2) + F\varepsilon_m^2 + \sum_i \frac{1}{G}\frac{h_i}{\delta_i}T_i^2\Big]dz, \tag{13}$$

wobei der Verdrehungswiderstand der einzelnen Scheiben vernachlässigt wurde, da er klein ist gegenüber dem Verdrehungswiderstand des geschlossenen Stabquerschnittes, der durch das letzte Glied in Gl. (13) dargestellt wird.

Zur weiteren Umgestaltung der Gl. (13) benützen wir wieder die Übergangsbedingungen (5′) und die Gleichgewichtsbedingungen (6′), die wir hier nochmals ansetzen,

$$\varepsilon_i + a'_i \overline{K}_i = \varepsilon_{i+1} - a_{i+1} \overline{K}_{i+1} \tag{14}$$

$$\sum \varepsilon_i F_i = 0 \tag{14'}$$

Ist der aus n Teilen bestehende Stabquerschnitt r-fach zusammenhängend (beim einfachen Ring ist $r = 2$), so gibt es $n + r - 2$ Gleichungen (14) und eine Gleichung (14′), insgesamt $n + r - 1$ Beziehungen, denen n Größen ε als Unbekannte gegenüberstehen. Die Zahl der Gleichungen ist um $r - 1$ größer als die Zahl der Unbekannten. Addiert man aber die zu den Ecken einer geschlossenen Scheibenfolge gehörenden Gleichungen (14), so kürzen sich die Größen ε_i und man gewinnt bei einem r-fach zusammenhängenden Querschnitt $r - 1$ Beziehungen von der Form

$$\sum_i{}' h_i \overline{K}_i = 0, \tag{15}$$

wo h_i die Scheibenhöhe ist und der Strich beim Summenzeichen anzeigen soll, daß die Summe nur über die Teile einer geschlossenen Scheibenfolge zu nehmen ist. Diese Gleichungen sind frei von den ε_i und stellen $r - 1$ lineare Zusammenhänge zwischen den $\overline{K}_i$ vor. Die Gl. (14) sind daher nicht unabhängig voneinander. Es verbleiben nach dem Ausscheiden der Gl. (15), die keine Unbekannten ε_i mehr enthalten insgesamt n Gleichungen zurück, die aber nur dann eine Lösung haben, wenn die Bedingungen (15) erfüllt sind. Daß die $\overline{K}_i$ den Bedingungen (15) wirklich genügen, werden wir am Schlusse nachweisen. Es stellen daher die Gl. (14) und (14′) ein hinsichtlich der Unbekannten ε_i widerspruchsfreies, lineares Gleichungssystem vor. Bei der Ermittlung der ε_i kann dann in jeder Gruppe der Gl. (14), die zu einem geschlossenen Scheibenring gehört, eine der Gleichungen unterdrückt werden.

Die Gleichung für A_i enthält noch die n Größen T_i. Um die noch fehlenden Beziehungen für die T_i aufzustellen, betrachten wir eine einzelne ringförmige Scheibenfolge. Denkt man sich diese entlang einer Kante aufgeschnitten, so daß ein Stab mit offenem Querschnitt entsteht, so werden sich bei der Belastung eines solchen aufgeschnittenen Stabes die beiden Ufer des Schnittes gegeneinander in der Richtung z verschieben. In der geschlossenen Scheibenfolge müssen aber die beiden Schnittufer aneinander passen. Bezeichnet man die Verschiebung eines Scheibenpunktes in der Längsrichtung des Stabes (Richtung der z-Achse) mit ζ, so muß beim Durchlaufen eines geschlossenen Querschnittes das Linienintegral

$$\int_L \frac{\partial \zeta}{\partial s} \, ds = 0 \tag{16}$$

sein. Für jede ringartige Scheibenfolge gilt eine solche Gleichung, sonach verfügen wir über $r - 1$ Bedingungen (16).

Wir setzen nun $\zeta = \zeta' + \zeta''$, wobei ζ' die Verschiebung infolge der Biegungsspannungen σ, ζ'' die Verschiebungen infolge der Schubspannungen T_i/δ_i bedeuten. In jeder Scheibe gilt

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial s} = \int_0^z \overline{K}_i \, dz \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \zeta''}{\partial s} = \frac{T_i}{G \delta_i} - \rho_i \varphi',$$

wenn ρ_i der Abstand der Scheibe von der Stabschwerachse ist. Die Einführung in Gl. (16) liefert zunächst

$$\int_L ds \int_0^z \overline{K}_i \, dz + \int_L \frac{T_i}{G \delta_i} ds - \int_L \rho_i \varphi' ds = 0.$$

Vertauscht man im ersten Gliede die Integrationsfolge, und führt man die Linienintegrale scheibenweise aus, so erhält man

$$\int_0^z \left(\sum_i{}' h_i \overline{K}_i\right) dz + \frac{1}{G} \sum_i{}' \frac{T_i h_i}{\delta_i} - \varphi' \sum{}' \rho_i h_i = 0,$$

Die Summen beziehen sich jeweils auf eine ringförmige Scheibenfolge. Da wegen Gl. (15) das erste Glied Null ist, so verbleiben die r — 1 Beziehungen

$$\frac{1}{G} \sum_i{}' \frac{T_i h_i}{\delta_i} - \varphi' \sum_i{}' \rho_i h_i = 0 \tag{17}$$

Den Schubkräften T_i sind gleich große Schubkräfte in der Richtung z zugeordnet. Für jede Kante, in der zwei oder mehr Scheiben zusammentreffen, besteht daher die Gleichgewichtsbeziehung

$$\sum_i{}'' T_i = 0, \tag{18}$$

wobei die Summe sich nur auf die Schubkräfte der in der Kante zusammenstoßenden Scheiben bezieht. Insgesamt haben wir $n - r + 1$ Gleichungen (18), so daß die Gesamtheit der Gleichungen (17) und (18) gerade n beträgt. Da sie linear sind, so liefert ihre Auflösung die Unbekannten T_i in der einfachen Form

$$T_i = \beta_i G \varphi' \tag{19}$$

Die Beiwerte β_i hängen nur von der Querschnittsform ab.

Es bleibt noch übrig das tatsächliche Bestehen der Gl. (15) nachzuweisen. Zu diesem Zwecke berechnen wir die von den Schubkräften herrührenden Krümmungen $\overline{\overline{K}}_i$, nämlich

$$\overline{\overline{K}}_i = -\frac{T_i'}{G \delta_i}, \quad \text{wobei} \quad T_i' = \frac{\partial T_i}{\partial z}.$$

Die gesamte Krümmung ist $K_i = \overline{K}_i + \overline{\overline{K}}_i$, woraus $\overline{K}_i = K_i - \overline{\overline{K}}_i$ folgt. Für K_i gilt Gl. (8), daher ist

$$\overline{K}_i = x'' \sin(\psi_i + \varphi) - y'' \cos(\psi_i + \varphi) - \rho_i \varphi'' + \frac{T_i'}{G \delta_i} \tag{20}$$

Beziehung (20) in Gl. (15) eingeführt ergibt

$$x'' \sum_i{}' h_i \sin(\psi_i + \varphi) - y'' \sum_i{}' h_i \cos(\psi_i + \varphi) - \varphi'' \sum_i{}' \rho_i h_i + \frac{1}{G} \sum_i{}' \frac{T_i h_i}{\delta_i} = 0.$$

Die ersten beiden Summen sind die Länge der Projektion eines geschlossenen Linienzuges auf die x- bzw. y-Achse und daher gleich Null. Der verbleibende Rest entsteht aus Gl. (17) durch Differentiation nach z. Somit erscheint bewiesen, daß Gl. (15) identisch befriedigt ist.

Führt man schließlich Gl. (19) in Gl. (20) ein, so gewinnt man

$$\overline{K_i} = x'' \sin(\psi_i + \varphi) - y'' \cos(\psi_i + \varphi) + \left(\frac{\beta_i}{\delta_i} - \rho_i\right) \varphi'' \tag{20'}$$

d. i. die der Gl. (8) entsprechende Gleichung für geschlossene Querschnitte.

Unterdrückt man φ gegen ψ, so vereinfacht sich die Beziehung (20′) zu

$$\overline{K_i} = x'' \sin \psi_i - y'' \cos \psi_i + \left(\frac{\beta_i}{\delta_i} - \rho_i\right) \varphi'' \tag{20''}$$

Aus den Gleichungen (14) und (14′) können nun die ε_i als Funktion der $\overline{K_i}$ bestimmt werden. Man gelangt so auf Grund der Gl. (13), wenn man die Gl. (19) und (20″) beachtet, zu der folgenden *Gleichung für die innere Arbeit (Stabiles Gleichgewicht):*

$$A_i = \frac{E}{2} \int_0^l \left[J_y x''^2 + J_x y''^2 + B_x x'' \varphi'' + B_y y'' \varphi'' + B_\varphi \varphi''^2 + F \varepsilon_m^2 + \frac{G}{E} J_d \varphi'^2 \right] dz \tag{21}$$

Hierin ist

$$J_d = \sum_i \frac{\beta_i^2 h_i}{\delta_i} \tag{21'}$$

Gl. (21) zeigt den gleichen Aufbau wie Gl. (10), nur hat J_d eine andere Bedeutung wie in Gl. (10). Ebenso bleibt Gl. (12), die für Stabilitätsprobleme in Betracht kommt, auch für geschlossene Stäbe in Geltung, wenn man J_d durch Gl. (21′) definiert.

Bei veränderlichem δ_i innerhalb einer Scheibe ist δ_i in allen Gleichungen der vorangehenden Untersuchung für Stäbe mit geschlossenem Querschnitt durch den Mittelwert $\delta_{im} = \frac{F_i}{h_i}$ zu ersetzen. Eine genauere Berücksichtigung der Veränderlichkeit von δ_i bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, doch würde die genauere Berechnung zu unhandlichen Formeln führen.

3. Ermittlung der Querschnittsfunktionen B_x, B_y und B_φ.

Die Berechnung der Querschnittsfunktionen B_x, B_y und B_φ wird beispielsweise an einem symmetrischen ⊓-Querschnitt vorgeführt. Die x-Achse wird als Symmetrieachse gewählt. Die drei Scheiben dieses Querschnittes werden mit 1, 2, 3 bezeichnet. Siehe Fig. 5. Wir nehmen an, daß die Scheiben 2 und 3 veränderliche Stärke haben. Demgemäß ist der Abstand $a \neq \frac{h}{2}$.

Wir gehen von den Gl. (5′) und (6′) aus, die im vorliegenden Falle, wenn wir bei Scheibe 2 beginnen und in positiver Zählrichtung von $x \longrightarrow y$ fortschreiten, lauten:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_2 + aK_2 &= \varepsilon_1 - bK_1 \\ \varepsilon_1 + bK_1 &= \varepsilon_3 - aK_3 \\ F_1\varepsilon_1 + F_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

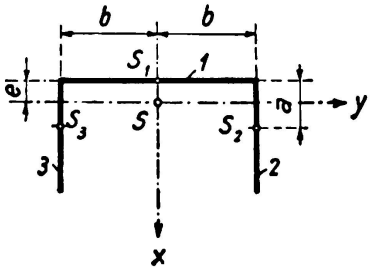


Fig. 5.

Drückt man ε_2 und ε_3 durch ε_1 aus, so gewinnt man die Beziehungen

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - bK_1 - aK_2, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + bK_1 + aK_3 \tag{b}$$

Die Einführung in die dritte Gl. (a) liefert, mit $F = F_1 + F_2 + F_3$

$$\varepsilon_1 = \frac{F_2 a}{F}(K_2 - K_3), \tag{c}$$

womit auch ε_2 und ε_3 als Funktionen der K_i festgelegt sind.

Nun berechnet man die Summe $\Sigma F_i \varepsilon_i^2$ in Gl. (7)

$$\sum_1^3 F_i \varepsilon_i^2 = \frac{3}{F}[F_2 a(K_2 - K_3)]^2 + F_2[2b^2K_1^2 + 2abK_1(K_2 + K_3) + a^2(K_2^2 + K_3^2)] \tag{d}$$

Die Krümmungen K_i sind nach Gl. (8′) zu berechnen, wobei für die Winkel ψ_i folgende Zahlenwerte einzuführen sind:

$$\psi_1 = \pi, \qquad \psi_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_3 = \frac{3\pi}{2}.$$

Mit diesen ψ_i-Werten erhält man bei Beachtung von Fig. 5

$$K_1 = y'' - e\varphi'' \qquad K_2 = x'' - b\varphi'' \qquad K_3 = -x'' - b\varphi''.$$

Damit ermittelt man die Summe

$$\sum_1^3 J_i K_i^2 = J_1(y'' - 2ey''\varphi'' + e^2\varphi''^2) + 2J_2(x''^2 + b^2\varphi''^2) \tag{e}$$

und unter Benützung der oben entwickelten Gl. (d) die Summe

$$\begin{aligned}\sum_1^3 F_i\varepsilon_i^2 = -\frac{4}{F}F_2^2 a^2 x''^2 + F_2[2b^2(y''^2 - 2ey''\varphi'' + e^2\varphi''^2) - 4ab^2(y''\varphi'' - e\varphi''^2) \\ + a^2(2x''^2 + 2b^2\varphi''^2)].\end{aligned} \tag{f}$$

Greift man die Beiwerte der Produkte $x''\varphi''$ bzw. $y''\varphi''$, die wir oben mit B_x und B_y bezeichnet haben, aus den Summen (e) und (f) heraus, so findet man

$$\left.\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= -2J_1 e - 4F_2 b^2(a + e) = -2e(J_x + Fb^2) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Mit J_x und J_y seien die Hauptträgheitsmomente, bezogen auf die x- bzw. y-Achse des ⊓-Querschnittes bezeichnet.

Faßt man alle Beiwerte von φ''^2 zusammen, so findet man in gleicher Weise

$$B_\varphi = J_1 e^2 + 2 J_2 b^2 + 2 b^2 F_2 \, (a + e)^2 = J_x e^2 + J_y b^2 + 3 F b^2 e^2. \qquad (23)$$

Nachfolgend sind die Querschnittsfunktionen B_x, B_y und B_φ für einige weitere im Stahlbau häufig vorkommende Querschnittsformen mit einer Symmetrieachse, die auf dem vorangegebenen Wege berechnet wurden, zusammengestellt.

Symmetrischer Π-*Querschnitt* (Fig. 6).

$$\left.\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 2\,\{-J_1 e + 2 J_4 (h - e) - 2 F_2 b^2 (a + e) \\ &\qquad - 2 F_4 (b - c)\,[c\,(h - e) + b\,(h + e)]\} \\ B_\varphi &= J_1 e^2 + 2 J_2 b^2 + 2 J_4 (h - e)^2 + 2 b^2 F_2 (a + e)^2 \\ &\qquad + 2 F_4 [c\,(h - e) + b\,(h + e)]^2 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

J_1, J_2 und J_4 sind die Trägheitsmomente der Scheiben 1, 2 und 4, bezogen auf die zu ihrer Ebene winkelrecht stehenden Schwerpunktachse, F_1, F_2 und F_4 die Flächen der betreffenden Scheibenquerschnitte.[9]

Unsymmetrischer I-*Querschnitt* (Fig. 7).

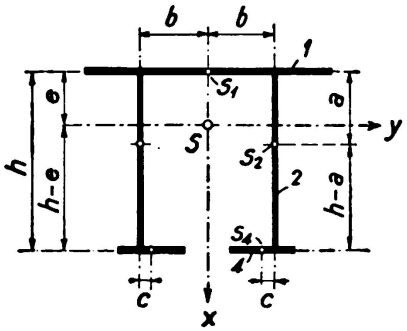


Fig. 6.

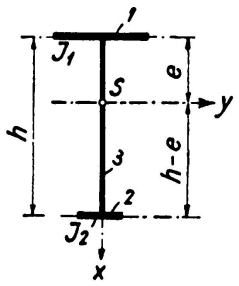


Fig. 7.

$$\left.\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_\varphi &= J_1 e^2 + J_2 (h - e)^2. \\ B_y &= -2\,[J_1 e - J_2 (h - e)] \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

J_1 und J_2 sind die Trägheitsmomente der Gurte 1 und 2, bezogen auf die x-Achse.

T-*Querschnitt* (Fig. 8).

$$\left.\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= -2 J_1 e \\ B_\varphi &= J_1 e^2. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

J_1 ist das Trägheitsmoment der Scheibe 1, bezogen auf die x-Achse.

[9] Liegen die Schwerpunkte der beiden Untergurte außerhalb der Stege, so ist c negativ einzuführen.

Gleichschenkliger Winkel (Fig. 9).

$$\left.\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 2\sqrt{2}\, e J_x \\ B_\varphi &= 2 e^2 \left(J_x - \frac{F b^2}{16}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \tag{27}$$

Hier ist J_x das auf die x-Achse bezogene Trägheitsmoment, F die Querschnittsfläche des Winkels.

Die den vorstehenden Berechnungen zugrunde gelegten allgemeinen Entwicklungen wurden ausdrücklich unter der Voraussetzung veränderlicher Scheiben-

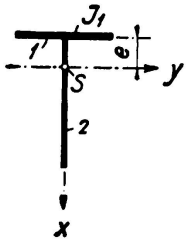


Fig. 8.

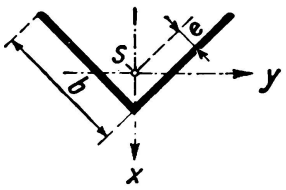


Fig. 9.

dicke abgeleitet. Die angeführten Formeln (22) bis (27) gelten daher auch für die üblichen genieteten Trägerquerschnitte, deren einzelne Wände stellenweise durch anliegende Winkelschenkel oder sonstige Auflagen verstärkt sind. Demgemäß sind die Schwerpunktsabstände a_i, die Trägheitsmomente J_i und die Flächen F_i für die eben erwähnten verstärkten Scheibenquerschnitte zu berechnen. Die Abstände a, b, c usw. sind immer auf die Mittelebene der Scheiben zu beziehen. Die Hauptträgheitsmomente J_x und J_y sind in der bekannten Weise zu ermitteln.

Geschlossener Querschnitt nach Fig. 10.

Die überstehenden Teile müssen hier als eigene Scheiben aufgefaßt werden, da sie sich hinsichtlich der Aufnahme der Schubkräfte anders verhalten als die

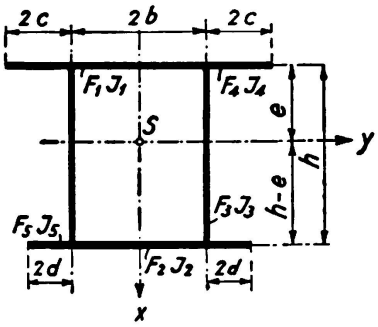


Fig. 10.

einen geschlossenen Scheibenring bildenden vier Wände des Kastenquerschnitts. Wir setzen Symmetrie zur x-Achse voraus.

Die Ermittlung von J_d im Ausdruck für die Arbeit A_i Gl. (21) erfordert zunächst die Bestimmung der Schubkräfte T_i. Diese Schubkräfte wirken nur in dem geschlossenen rechteckigen Scheibenring, der von den vier Wänden 1, 2, 3, 4

gebildet wird. Wegen der Erhaltung des Gleichgewichtes der Längsschubkräfte an den vier Kanten des Ringes müssen die Schubkräfte in diesen vier Scheiben untereinander gleich sein. Es ist daher nur eine Unbekannte zu bestimmen, die durch Gl. (17) als Funktion des Verdrehungswinkels φ festgelegt ist. Man erhält somit

$$\frac{T}{G}\left[\frac{b}{\delta_1}+\frac{b}{\delta_2}+\frac{2h}{\delta_3}\right]-2\,h\,b\,\varphi'=0$$

woraus

$$T=\beta G\varphi' \qquad \text{mit} \qquad \beta=\frac{2\,h\,b}{\frac{b}{\delta_1}+\frac{b}{\delta_2}+\frac{2h}{\delta_3}} \tag{28}$$

folgt. Nach Gl. (21′) ergibt sich damit

$$J_d=\frac{4\,h^2\,b^2}{\frac{b}{\delta_1}+\frac{b}{\delta_2}+\frac{2h}{\delta_3}}\,^{10} \tag{29}$$

Die Berechnung der Größen B_x, B_y und B_φ erfolgt in der gleichen Weise wie bei offenen Querschnitten. Da der Ausdruck für die Krümmung $\overline{K}_i$ infolge der Biegung auch die Schubkräfte T_i enthält, so treten auch in den Querschnittsfunktionen B Glieder auf, die mit den Schubkräften T zusammenhängen. Man erhält mit den Bezeichnungen der Fig. 10

$$\left.\begin{aligned}
B_x &= 0\\
B_y &= 2\Big[-(J_1+2J_4)\,e+(J_2+2J_5)(h-e)+\frac{F_3}{4}b^2(h-2e)\\
&\qquad -\frac{F_4}{2}(b+c)^2e+\frac{F_5}{2}(b+d)^2(h-e)\Big]\\
B_\varphi &= (J_1+2J_4)\,e^2+(J_2+2J_5)(h-e)^2+2J_3\left(\frac{\beta}{\delta_3}-\frac{b}{2}\right)^2\\
&\qquad +\frac{F_3}{8}b^2(h-2e)^2+\frac{F_4}{2}(b+c)^2e^2+\frac{F_5}{2}(b+d)^2(h-e)^2
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Man beachte, daß F_1, J_1 bzw. F_2, J_2 die Flächen und Trägheitsmomente der Scheiben 1 und 2 von der Höhe 2b, F_4, J_4 und F_5, J_5 Flächen und Trägheitsmomente der abstehenden Scheiben 4 und 5 mit den Höhen 2c bzw. 2d sind.

Bei genieteten Trägern ist der Veränderlichkeit des Querschnittes innerhalb der einzelnen Scheiben derart Rechnung zu tragen, daß für δ_i in den Ausdrücken für β, J_d und B_φ ein Mittelwert $\delta_{im}=\frac{F_i}{h_i}$ einzusetzen ist. Im übrigen gilt hinsichtlich der F_i, J_i und a_i das oben bei den Stäben mit offenen Querschnitten Gesagte.

---

[10] Gl. (29) stimmt mit der aus der Elastizitätstheorie bekannten Formel für den rechteckigen Ring überein. Siehe *A.* und *L. Föppl:* Drang und Zwang, Bd. II, 2. Aufl. München und Berlin 1925.

4. Die Differentialgleichungen der Biegung und Verdrehung.

Sind p_x und p_y die stetige oder unstetige äußere Belastung in der Richtung der Hauptachsen x bzw. y und ist M_d das Verdrehungsmoment der äußeren Kräfte, wobei p_x, p_y und M_d als Funktionen der Koordinate z anzusehen sind, so gilt für die äußere Arbeit A_a der Ausdruck

$$A_a = \frac{1}{2} \int_0^l [p_x x + p_y y - M_d \varphi'] \, dz \tag{31}$$

A_a ist eine lineare Funktion der Verschiebungen x, y, φ.

Die Gleichgewichtsbedingung $\delta (A_i - 2 A_a)$, Gl. (3), lautet daher, wenn man A_i aus Gl. (10) einführt,

$$\left.\begin{aligned} \delta \int_0^l \Big[\frac{E}{2} (J_y x''^2 + J_x y''^2 + B_x x'' \varphi'' + B_y y'' \varphi'' + B_\varphi \varphi''^2) + \frac{G}{2} J_d \varphi'^2 - \\ - p_x x - p_y y + M_d \varphi' \Big] dz, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

wobei wir annehmen, daß die Längskraft $S = 0$ ist, weshalb auch $\varepsilon_m = 0$ gesetzt wurde. Die Durchführung der Variation liefert die drei simultanen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} & E J_y \frac{d^4 x}{dz^4} + \frac{E B_x}{2} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - p_x = 0 \\ & E J_x \frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{E B_y}{2} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - p_y = 0 \\ & \frac{E B_x}{2} \frac{d^4 x}{dz^4} + \frac{E B_y}{2} \frac{d^4 y}{dz^4} + E B_\varphi \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - G J_d \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{d M_d}{dz} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Durch eine Koordinatentransformation kann man die Gl. (33) wesentlich vereinfachen. Führt man die Transformation

$$x = \bar{x} - \frac{B_x}{2 J_y} \varphi, \qquad y = \bar{y} - \frac{B_y}{2 J_x} \varphi$$

durch, d. h. verlegt man die z-Achse parallel zur Schwerpunktachse um die Beträge

$$s_x = \frac{B_y}{2 J_x}, \qquad s_y = -\frac{B_x}{2 J_y} \tag{34}$$

und bezeichnet man das auf die neue Achse bezogene Drehmoment der äußeren Kräfte mit $\overline{M}_d$, so gehen die Gleichungen (33) über in

$$\left.\begin{aligned} & E J_y \frac{d^4 \bar{x}}{dz^4} - p_x = 0 \\ & E J_x \frac{d^4 \bar{y}}{dz^4} - p_y = 0 \\ & E \left[B_\varphi - \frac{B_x^2}{4 J_y} - \frac{B_y^2}{4 J_x} \right] \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - G J_d \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{d \overline{M}_d}{dz} = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{35}$$

Die beiden ersten Gleichungen sind unabhängig von φ und sind formal mit den Differentialgleichungen der *Navier*'schen Theorie identisch. Die dritte Gleichung ist unabhängig von $\bar{x}$ und $\bar{y}$. Die durchgeführte Hauptachsentransformation gestattet sonach in allen Fällen Biegung und Verdrehung gesondert zu behandeln und ermöglicht so einen klaren Einblick in die Verformungsvorgänge und in die Spannungsverteilung.

Aus der letzten der Gl. (35) erkennt man, daß für $\overline{M}_d = 0$ die Verdrehung φ Null wird. Wird anderseits $p_x = p_y = 0$, so verschwinden $\bar{x}$ und $\bar{y}$, die Stabachse bleibt gerade, der ganze Stab dreht sich um den Winkel φ. Hierbei ist die Achse mit den Schwerpunktkoordinaten s_x und s_y nach Gl. (34) die Drehachse bei der Torsion des Stabes. Wir wollen sie als *Torsionsachse* bezeichnen. Ihr Durchstoßpunkt mit dem Querschnitt heißt *Schubmittelpunkt* oder *Querkraftmittelpunkt*. Er wurde zum erstenmal beim [-Eisen festgestellt. Seine grundlegende Bedeutung für die Berechnung der hier in Rede stehenden Stabformen ist aber erst durch die voranstehend durchgeführte Transformation deutlich geworden.

Aus den Gleichungen (35) können wir bereits folgendes allgemeines Verhalten von schlanken Stäben, die aus dünnen Platten bestehen, feststellen: Gehen die äußeren Kräfte durch die Torsionsachse, die im allgemeinen nicht mit der Schwerpunktsachse zusammenfällt, so treten nur Biegungsspannungen, aber keine Torsionsspannungen auf. Die Berechnung der Formänderungen und Spannungen erfolgt auf Grund der ersten beiden Gl. (35), also so wie nach der *Navier*'schen Theorie bei Belastungen, die durch die Schwerpunktachse gehen. In allen anderen Belastungsfällen treten sowohl Biegungsspannungen als auch Verdrehungsspannungen auf, auch dann, wenn p_x und p_y verschwinden. Weist der Querschnitt eine Symmetrieachse auf, so liegt der Schubmittelpunkt in dieser Achse. Bei zwei Symmetrieachsen fällt die Torsionsachse mit der Schwerachse zusammen.

Die Gl. (34) und (35) gelten sowohl für Stäbe mit offenem als auch geschlossenem Querschnitt. Nur bei der Ermittlung der Querschnittsfunktionen J_d, B_x, B_y, B_φ ist darauf zu achten, ob es sich um einen einfach oder mehrfach zusammenhängenden Querschnitt handelt.

Für die üblichen Anwendungen können die Gl. (35) durch Integration auch auf die Form gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned} &EJ_y \frac{d^2x}{dz^2} + M_y = 0 \\ &EJ_x \frac{d^2y}{dz^2} + M_x = 0 \\ &E\left[B_\varphi - \frac{B_x^2}{4J_y} - \frac{B_y^2}{4J_x}\right]\frac{d^3\varphi}{dz^3} - GJ_d\frac{d\varphi}{dz} - \overline{M}_d = 0 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

M_x und M_y sind die Momente der äußeren Kräfte in den Ebenen zy bzw. zx.

φ ist somit durch die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} - \alpha^2\frac{d\varphi}{dz} - \frac{M_d}{\gamma} = 0 \tag{37}$$

definiert, wo $\alpha^2 = \frac{GJ_d}{\gamma}$ und $\gamma = E\left[B_\varphi - \frac{B_x^2}{4J_y} - \frac{B_y^2}{4J_x}\right]$ (37')

Die von der Belastungsweise und den Auflagerbedingungen abhängige Lösung der Torsionsgleichung (37) hängt nur durch die Parameter a und γ, die als Festwerte in die Lösung eingehen, von der Stabform ab. Die Lösungen der Gl. (37) können daher ebenso wie die Lösungen der *Navier*'schen Biegegleichungen unabhängig von der Stabform aufgestellt werden. Gl. (37) ist eine Verallgemeinerung der von *Timoschenko* aufgestellten Differentialgleichung der Verdrehung des symmetrischen I-Trägers.

Anschließend an die allgemeinen Erörterungen mögen noch einige Bemerkungen zu der eingangs gemachten wesentlichen Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Querschnittsform hinzugefügt werden. Vereinigt man drei Scheiben zu einem Stab, so überzeugt man sich leicht, daß jede dieser Scheiben beliebige kleine Verformungen in ihrer Ebene erfahren kann, ohne daß der Zusammenhang zwischen den Scheiben aufhört und ohne daß sich die Winkel, die je zwei Scheiben miteinander einschließen, ändern. Bei mehr als drei Scheiben, allgemein n Scheiben, ändern sich n — 3 Winkel, wenn den einzelnen Scheiben Verformungen in ihrer Ebene vorgeschrieben werden. Aus dieser Überlegung folgt, daß bei ⊥, L, [, I und ⅂-förmigen Stäben die Bedingung von der Erhaltung der Querschnittsform von Haus aus erfüllt ist, da bei den Verformungen, die die einzelnen Scheiben unter der Belastung erfahren, überhaupt kein Zwang besteht, die Querschnittsform zu ändern. Bei Stäben aber, die aus vier und mehr Scheiben zusammengesetzt sind, gleichgiltig ob der Querschnitt einfach oder mehrfach zusammenhängend ist, ist durch geeignete Maßnahmen Vorsorge zu treffen, daß die Querschnittsform erhalten bleibt. Es genügen in der Regel Querschotten in größeren Abständen. Sie sind, praktisch gesehen, natürlich nur dort notwendig, wo die Belastung bei nennenswerten Verdrehungswirkungen stärkere Winkeländerungen zwischen den einzelnen Scheiben erzwingen würde.

Verbindet man zwei Wände eines Stabes mit offenem Querschnitt durch Verstrebung, wie dies z. B. in Fig. 11 angedeutet ist, so kann ein solcher Stab als geschlossener Stab berechnet werden. Bei der Ermittlung der B-Werte nach den Formeln (30) ist für die Fachwerkscheibe im Falle Fig. 11a: $J_2 = 0$, $F_2 = 0$ zu setzen. Im Falle Fig. 11b ist für J_2 das Ersatzträgheitsmoment der zwischen

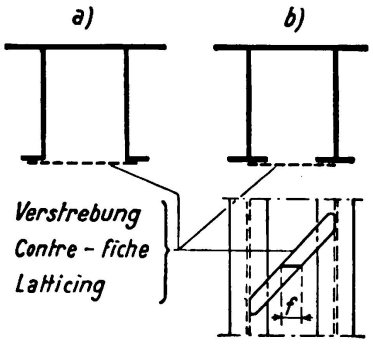


Fig. 11.

den beiden Stegen liegenden Fachwerkscheibe, für F_2 die Fläche der zwischen den Stegen befindlichen Plattenstreifen einzuführen. Bei der Berechnung der Schubkraft T mittels Formel (28) und J_d nach Formel (29) ist δ_2 gleich jener ideellen Blechstärke zu setzen, die man erhält, wenn man den Strebenquerschnitt f (Fig. 11b) auf die ganze Höhe 2b der Scheibe aufteilt.

5. Spannungsermittlung bei Biegung und Verdrehung.

Die von den Momenten M_x und M_y hervorgerufenen Randspannungen σ werden in der üblichen Weise, wie wenn die Lasten durch die Schwerachse des Stabes gehen würden, berechnet. Ist $\overline{M}_d$ von Null verschieden, d. h. gehen die Lasten nicht gerade durch die Torsionsachse, so ist die dritte der Gl. (35) bzw. Gl. (37) nach Einführung von $\overline{M}_d$ als Funktion von z unter Beachtung der Randbedingungen der Aufgabe zu integrieren. Ist φ als Funktion von z bekannt, so können die von der Verdrehung herrührenden zusätzlichen Randspannungen und Schubbeanspruchungen ermittelt werden. Zu diesem Zwecke berechnet man die Krümmung der einzelnen Wandscheiben des Stabes nach Gl. (8′) bzw. (20″), wobei x und y die Verschiebungen sind, die die Schwerachse erfährt, wenn sich der Stab um die Torsionsachse um den Winkel φ dreht. Es sind sonach in Gl. (8′) bzw. (20″) die Verschiebungen $x = s_y \varphi$ und $y = -s_x \varphi$ einzuführen, so daß allgemein

$$K_i = \left[s_y \sin \psi_i + s_x \cos \psi_i + \left(\frac{\beta_i}{\delta_i} - \rho_i\right)\right] \varphi'' \tag{38}$$

gilt. Bei Stäben mit offenem Querschnitt ist $\beta_i = 0$.

Die Randspannungen σ_i in der Scheibe i sind durch die Beziehungen

$$\sigma_i = E\,(\varepsilon_i + \eta K_i) \tag{39}$$

festgelegt, wo η die Entfernung der Randpunkte vom Scheibenschwerpunkt ist. η ist positiv im Sinne der positiven Zählrichtung von $x \longrightarrow y$ anzusetzen.

Führt man in Gl. (38) die Längen e, s_x, b usw. ziffernmäßig ein, so erhält man für die K_i Ausdrücke in der Form $K_i = \mu_i \varphi''$. Damit berechnet man mit Hilfe der Gl. (5′) die ε_i-Werte, die ebenfalls die Form $\varepsilon_i = \nu_i \varphi''$ annehmen. Damit sind alle Zahlenwerte bekannt, um mittels der Gl. (39) die Längsspannungen σ_i in den in Frage kommenden Randpunkten zu berechnen. Hierbei ist folgendes zu beachten: Während alle bisher in der Rechnung benützten Maße, das sind die Größen a, b, e, s_x usw., sich auf die Scheibenmittelebenen beziehen, sind die η auf die End- oder Außenflächen der Scheiben einzustellen. Bei einer Ecke nach Fig. 12 z. B. ist die Spannungsberechnung mit den Ab-

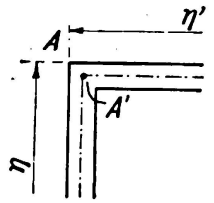


Fig. 12.

ständen η bzw. η' durchzuführen, je nachdem man die Spannung im Eckpunkte A in der lotrechten oder waagrechten Scheibe bestimmt. Die beiden so errechneten Spannungen stimmen natürlich nicht genau überein, da die Lösung des hier vorliegenden Problems von der Voraussetzung unendlich dünner Scheiben ausgegangen ist. Übereinstimmung würde die Rechnung nur für den Schnittpunkt A′ ergeben.

Die von der Verdrehung herrührenden Längsspannungen σ sind schließlich

mit den von den Momenten M_x und M_y hervorgerufenen Spannungen σ, die in der üblichen Weise berechnet wurden, zusammenzusetzen.

Die Verdrehungsschubspannungen sind bei Stäben mit *offenem Querschnitt* nach der Formel

$$\tau_i = G\,\varphi' \max \delta_i \tag{40}$$

für jede der Scheiben zu berechnen. $\max d_i$ ist die *größte Dicke* der betrachteten Scheibe. Bei Stäben mit *geschlossenem Querschnitt* ergeben sich die maßgebenden Schubspannungen aus den T_i nach der Formel

$$\tau_i = \frac{T_i}{\min \delta_i} \tag{41}$$

Hier ist $\min \delta_i$ die kleinste Dicke der betrachteten Scheibe.

Um die Richtigkeit der vorangehend entwickelten Theorie zu überprüfen, wurden die Spannungsmessungen, die *Bach* an einem [NP 30 vorgenommen hatte, mit den Spannungen, die die genaue Rechnung auf Grund der hier aufgestellten Gleichungen ergibt, verglichen. Der Versuchsträger hatte 3 m Stützweite und war in den Drittelpunkten mit je 1500 kg lotrecht belastet, wie dies Fig. 13 im Querschnitt zeigt. Die Größe und der Verlauf der Längsspannungen

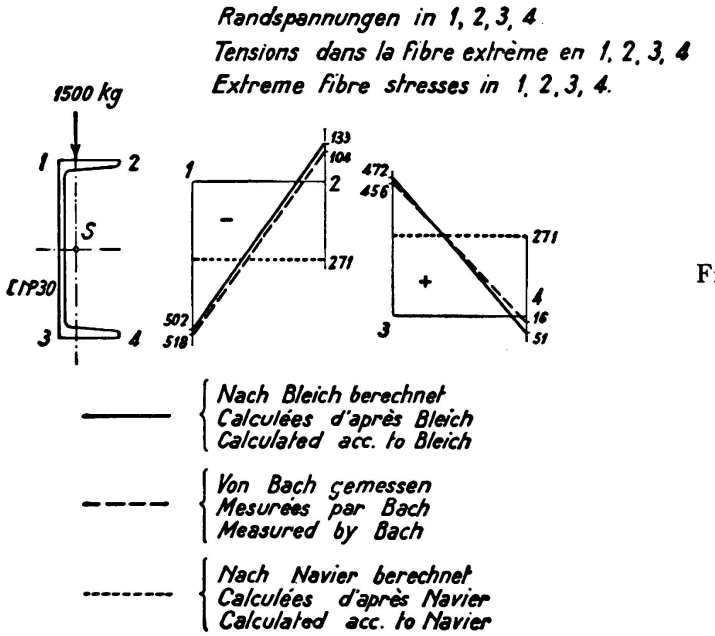


Fig. 13.

im oberen und unteren Flansch des [-Stahles sind in der gleichen Figur dargestellt. Die Übereinstimmung zwischen den gemessenen und gerechneten Spannungen ist befriedigend. In den Spannungsdiagrammen ist zum Vergleich auch die in der üblichen Weise errechnete gleichmäßige Biegespannung von 271 kg/cm² eingetragen. Es sei noch bemerkt, daß die Meßpunkte 1 bis 4 um 5 mm von den Außenflächen der beiden Flanschen abgerückt sind. Bei der Spannungsermittlung wurde diese Lage der Punkte berücksichtigt.[11]

[11] Der Bachsche Versuch wurde bereits von *C. Weber* mit Hilfe der von ihm für Stäbe mit zwei Gurten aufgestellten Formeln nachgerechnet.

6. Die Differentialgleichungen des Knickproblems.

Der gerade Stab sei mit einer in der Schwerpunktachse wirkenden Längskraft S belastet. Beachtet man, daß der Stab zunächst unter der Einwirkung von S um ε_m zusammengedrückt wird, um nach Erreichen der Stabilitätsgrenze auszubiegen, so ergibt sich für die äußere Arbeit A_a in bekannter Weise der Ausdruck

$$A_a = \int_0^l \left[\frac{1}{2} S \varepsilon_m + \frac{1}{2} S (x'^2 + y'^2)\right] dz$$

Bei den einfachen Knickproblemen, die wir in diesem Abschnitt im Auge haben, genügt es, als Ausdruck der inneren Arbeit Gl. (10) heranzuziehen, in der die Formänderungsgrößen höherer Kleinheitsordnung unterdrückt wurden. Die Variationsbedingung (3) lautet sonach, wenn man beachtet, daß das Glied $\frac{1}{2} S \varepsilon_m$ in A_a auch durch $\frac{E}{2} F \varepsilon_m^2$ wegen $S = E F \varepsilon_m$ ersetzt werden kann.

$$\delta \int_0^l \left[\frac{E}{2}\left(J_y x''^2 + J_x y''^2 + B_x x'' \varphi'' + B_y y'' \varphi'' + B_\varphi \varphi''^2 + \frac{G}{E} J_d \varphi'^2\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} S (x'^2 + y'^2)\right] dz = 0.$$

Die Durchführung der Variation liefert die drei Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} & E J_y \frac{d^4 x}{dz^4} + \frac{E B_x}{2} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + S \frac{d^2 x}{dz^2} = 0, \\ & E J_x \frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{E B_y}{2} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + S \frac{d^2 y}{dz^2} = 0, \\ & \frac{E B_x}{2} \frac{d^4 x}{dz^4} + \frac{E B_y}{2} \frac{d^4 y}{dz^4} + E B_\varphi \frac{d^2 \varphi}{dz^4} - G J_d \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

die nach zweimaliger Integration die Form annehmen

$$\left.\begin{aligned} & E J_y \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{E B_x}{2} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + S x = 0, \\ & E J_x \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{E B_y}{2} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + S y = 0, \\ & \frac{E B_x}{2} \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{E B_y}{2} \frac{d^2 y}{dz^2} + E B_\varphi \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - G J_d \varphi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Mit diesen drei simultanen Differentialgleichungen ist das Knickproblem des dünnwandigen Stabes in allgemeiner Form erledigt. Die Gl. (43) lassen bereits folgendes erkennen: Besitzt der Stabquerschnitt keine Symmetrieachsen, d. h. ist sowohl B_x als auch B_y von Null verschieden, so tritt eine Verdrehung des Stabes ein, da φ nicht verschwindet. Hat der Querschnitt eine Symmetrieachse, so knickt der Stab je nach den Steifigkeitsverhältnissen in der Richtung der Symmetrieachse oder senkrecht dazu aus. Ist das Letzte der Fall, dann verdreht sich auch der Stab. Der Stab kippt also aus, obwohl er mittig belastet ist.

Um einen weiteren Einblick in das Verhalten derartiger Stäbe zu gewinnen, untersuchen wir einen Stab von der Länge l, dessen Querschnitt Symmetrie zur x-Achse aufweist, und der für Ausknicken in Richtung der y-Achse an den Enden gelenkig gelagert und dort gegen Verdrehen um die z-Achse gesichert ist.

Mit dem Lösungsansatz

$$y = C_1 \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad \varphi = C_2 \sin \frac{n\pi z}{l} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

erhält man nach Einführung in die zweite und dritte Gl. (43) die Knickbedingung

$$\begin{vmatrix} \left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} EJ_x + S\right) & -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \frac{EB_y}{2} \\ -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \frac{EB_y}{2} & \left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} EB_\varphi + GJ_d\right) \end{vmatrix} = 0.$$

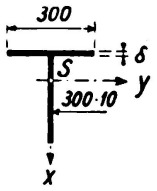
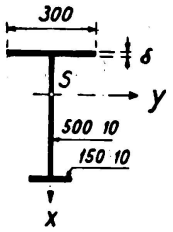
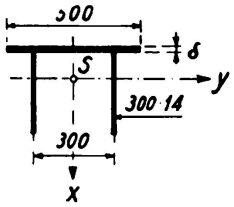
Mit der Abkürzung $S_E = \frac{n^2\pi^2 EJ_x}{l^2}$ gewinnt man nach Ausrechnung der Determinante die Knicklast S_K

$$S_K = S_E \left(1 - \frac{B_y^2}{4 J_x \left(B_\varphi + \frac{J_x G J_d}{S_E}\right)}\right) \tag{44}$$

Der kleinste Wert wird mit $n = 1$ erhalten, wenn also $S_E = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}$. *Die tatsächliche Tragfähigkeit für Ausknicken winkelrecht zur Symmetrieachse ist daher geringer als die Tragkraft nach Euler.* Untersucht man die Größenordnung des zweiten Gliedes in der Klammer, so findet man, daß bei bestimmten Querschnittsformen wie bei T- und unsymmetrischen I Querschnitten nennenswerte Abminderungen der in der üblichen Weise berechneten Tragkraft des Stabes eintreten.[12] In der folgenden Zusammenstellung ist S_K nach Gl. (44) für einige Querschnittsformen angegeben. Die Zahlen wurden unter der Voraussetzung berechnet, daß die nach *Euler* ermittelte Knickspannung σ_k gerade 2000 kg/cm² beträgt. Mit zunehmender Schlankheit des Stabes nähert sich S_K der Eulertragkraft. Der Einfluß des Drillungswiderstandes des Stabquerschnittes ist sehr bedeutend. Je größer derselbe ist umso größer wird die Tragkraft S_K. Sein Einfluß wächst mit zunehmendem Schlankheitsgrad. Bei geschlossenen Querschnitten ist wegen des großen Drillungswiderstandes der Unterschied zwischen S_K und S_E äußerst geringfügig.

Rückt die Last aus dem Stabschwerpunkt heraus und zwar gegen den Schubmittelpunkt, der z. B. beim T-Querschnitt im Schnittpunkt der beiden Scheiben liegt, so wächst, wie wir im folgenden Absatz noch nachweisen werden, S_K stetig an und erreicht den Größtwert S_E, wenn die Last gerade in der Torsionsachse wirkt. Für seitliches Ausknicken haben bei den hier betrachteten Stabformen Schwerpunktachse und Torsionsachse ihre Rollen vertauscht. Einseitig mit dem Flansch angeschlossene hochstegige ⊥-Stähle dürften daher nach diesen Über-

[12] Diese Abminderung der Tragfähigkeit hat bereits *Ostenfeld* festgestellt. Siehe die in Fußnote [5] angegebene Arbeit, S. 17.

Querschnittsform	Verhältnis der Tragkraft S_K bei Knicken in Richtung y zur Eulertragkraft S_E			
	$\delta^{mm} =$	10	20	30
	$\frac{S_K}{S_E} =$	0,699	0,930	0,974
	$\delta =$	10	20	30
	$\frac{S_K}{S_E} =$	0,691	0,724	0,883
	$\delta =$	10	20	40
	$\frac{S_K}{S_E} =$	0,534	0,703	0,942

legungen eine größere Tragfähigkeit aufweisen, als sie die übliche Rechnung unter Berücksichtigung des exzentrischen Krafteintrages ergibt.

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß die vorangehenden Entwicklungen und Schlußfolgerungen nur für den Fall des elastischen Knickens gelten.

7. Die Differentialgleichungen für Probleme des Kippens.

Unter Kippen versteht man den Eintritt eines labilen Gleichgewichtszustandes eines auf Biegung beanspruchten Stabes, der dadurch gekennzeichnet ist, daß mit Eintritt des unsicheren Gleichgewichtes der Stab unter gleichzeitiger Verdrehung seitlich, d. i. winkelrecht zur Ebene der Biegung, ausweicht. Um die Darstellung etwas zu vereinfachen, betrachten wir nur Stäbe mit einfach symmetrischem Querschnitt, die in der xz-Ebene belastet sind. Der Stab wird in der Richtung der y-Achse ausweichen, wenn J_x nennenswert kleiner als J_y ist, wie dies z. B. bei einem in der Stegebene belasteten I-Träger der Fall ist.

Es sei p_x die in der xz-Ebene wirkende Belastung, M_y das von dieser Belastung hervorgerufene Biegungsmoment, S eine in der Stabachse wirkende äußere Längskraft, a die Höhe des Angriffspunktes der Belastung p über dem Querschnittsschwerpunkt, siehe Fig. 14, wobei a auch negativ sein kann. Die gesamte Arbeit der äußeren Kräfte, d. i. die Arbeit im stabilen und unstabilen Gleichgewichtszustand ist durch den Ausdruck

$$A_a = \frac{1}{2}\int\left[\frac{M_y^2}{EJ_y} + S\varepsilon_m + Sy'^2 + a p_x \varphi^2\right] dz$$

festgelegt. Hinsichtlich der inneren Arbeit A_i müssen wir auf Gl. (12) zurückgreifen, da der Einfluß der Formänderungsglieder höherer Ordnung nicht mehr

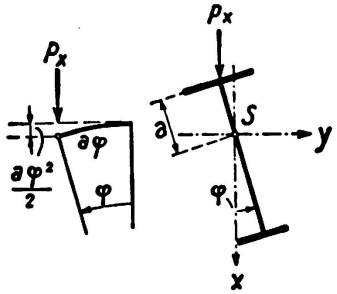


Fig. 14.

vernachlässigt werden darf. Demgemäß nimmt die Variationsbedingung (3), wenn man beachtet, daß wegen der vorausgesetzten Symmetrie $B_x = 0$ ist, die Gestalt an.

$$\delta \frac{1}{2} \int_0^l \Big[E \Big(J_y (x'' + y'' \varphi)^2 + J_x (x'' \varphi - y'')^2 + B_y (x'' \varphi - y'') \varphi'' + B_\varphi \varphi'^2 + F \varepsilon_m^2 + \\ + \frac{G}{E} J_d \varphi'^2 \Big) - \Big(\frac{M_y^2}{E J_y} + S \varepsilon_m + S y'^2 + a p_x \varphi^2 \Big) \Big] dz \tag{45}$$

Die Änderungen der Größen x und ε_m beim Auskippen sind klein gegenüber den Verschiebungsgrößen y und φ, die erst beim Kippen auftreten. Wir betrachten daher die Größen x und ε_m für die Variation als unveränderlich; sie behalten jene Werte $x'' = -\frac{M_y}{E J_y}$ und $\varepsilon_m = \frac{S}{EF}$, die sie knapp vor Eintritt des labilen Zustandes erreicht haben, auch während des Auskippens bei. Führt man in Gl. (45) diese Werte für x und ε_m ein, so erhält man die folgende Bedingungsglei,chung, in der aber alle Glieder von höherer als von der zweiten Kleinheitsordnung unterdrückt wurden:

$$\delta \frac{1}{2} \int_0^l \Big[E J_x y''^2 - E B_y y'' \varphi'' + E B_\varphi \varphi''^2 + G J_d \varphi'^2 - 2 \Big(1 - \frac{J_x}{J_y} \Big) M_y y'' \varphi - \\ - a p \varphi^2 - S y'^2 \Big] dz.$$

Variiert man nach y und φ, so gelangt man zu den beiden simultanen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} & E J_x \frac{d^4 y}{dz^4} - \frac{E B_y}{2} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \Big(1 - \frac{J_x}{J_y} \Big) \frac{d^2}{dz^2} (M_y \varphi) + S \frac{d^2 y}{dz^2} = 0, \\ & - \frac{E B_y}{2} \frac{d^4 y}{dz^4} + E B_\varphi \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \Big(1 - \frac{J_x}{J_y} \Big) M_y \frac{d^2 y}{dz^2} - G J_d \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - a p_x \varphi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

womit die allgemeine Kippaufgabe für Stäbe, die wenigstens eine Symmetrieachse aufweisen, grundsätzlich gelöst ist.[13]

Für den einfachsten Sonderfall, S und M_y konstant, $p_x = 0$, findet man für einen Stab von der Länge l, der an den Enden gegen Verdrehen um die z-Achse

[13] Setzt man $B_y = 0$, d. h. nimmt man an, daß der Querschnitt zwei Symmetrieachsen besitzt, so läßt sich in dem Sonderfall $S = 0$ die Funktion y eliminieren und man erhält die von *Timoschenko* für das Kipproblem des I-Trägers aufgestellte Differentialgleichung dritter Ordnung.

festgehalten ist, sich aber um die x-Achse frei drehen kann, mit dem Lösungsansatz

$$y = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}, \qquad \varphi = C_2 \sin \frac{\pi z}{l}$$

die Stabilitätsbedingung

$$\left(EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} - S\right)\left(EB_\varphi \frac{\pi^2}{l^2} + GJ_d\right) - \left[\frac{EB_y}{2} \frac{\pi^2}{l^2} - \left(1 - \frac{J_x}{J_y}\right) M_y\right]^2 = 0 \tag{47}$$

Aus dieser Gleichung kann S oder M_y bestimmt werden. Denkt man sich die Momente M_y dadurch hervorgerufen, daß die Kraft S nicht im Schwerpunkt, sondern im Abstande $e = \frac{M_y}{S}$ davon angreift, so liegt ein Fall von Knickung unter exzentrischem Druck vor. Mit $S_E = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}$ und $\left(1 - \frac{J_x}{J_y}\right) \approx 1$ nimmt Gl. (47) die einfachere Gestalt

$$(S_E - S)\left(EB_\varphi \frac{\pi^2}{l^2} + GJ_d\right) - \left(\frac{B_y}{2J_x} S_E - Se\right)^2 = 0 \tag{48}$$

an. Nun ist $\frac{B_y}{2J_x} = s_x$, der Abstand des Querkraftmittelpunktes vom Schwerpunkt. Wählt man $e = s_x$, d. h. läßt man die Längskraft S im Querkraftmittelpunkt angreifen, so wird $S = S_E$, ein Maximum und gleich der Eulerknickkraft, womit die im vorangehendem Absatz aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Zusammenfassung.

Die übliche Theorie der Biegung und Verdrehung gerader Stäbe stützt sich auf zwei Voraussetzungen: 1. Die bei der Biegung auftretenden Längsspannungen sind lineare Funktionen der Querschnittkoordinaten x und y. 2. Bei bloßer Verdrehung sind die Längsspannungen, wenn man von kleinen Größen zweiter Ordnung absieht, Null. Diese Voraussetzungen sind bei Stäben, die aus dünnen Platten zusammengesetzt sind, nicht immer erfüllt. Von der Annahme ausgehend, daß in jeder Platte, die den Stab zusammensetzt, die Grundlagen der *Navier*'schen Biegungstheorie in Geltung bleiben, werden die Differentialgleichungen der Biegung und Verdrehung prismatischer Stäbe mit Hilfe eines Variationsprinzipes abgeleitet. Die Gleichungen gelten allgemein, sowohl für Stäbe mit offenem als auch für Stäbe mit geschlossenem, zwei- oder mehrfach zusammenhängendem Querschnitt. Durch eine zweckmäßige Koordinatentransformation gelingt es, die Behandlung von Biegung und Verdrehung zu trennen. Diese Transformation legt auch die Bedeutung des Querkraftmittelpunktes dar.

Nach der allgemeinen Darstellung der Spannungsermittlung bei Biegung und Verdrehung werden die Differentialgleichungen des Knickproblems für die hier in Betracht gezogenen Stabformen in allgemeinster Form entwickelt und der einfache Knickfall eines Stabes mit einfach symmetrischem Querschnitt behandelt. Es erweist sich, daß ein zentrisch belasteter Stab u. U. eine Knicktragkraft aufweist, die oft um einen nennenswerten Betrag unterhalb der Eulerlast liegen kann. Zum Schlusse werden die Differentialgleichungen des Kippens für Stäbe, deren Querschnitte mindestens eine Symmetrieachse haben, aufgestellt. Hier wird nachgewiesen, daß bei Belastung des Stabes durch eine in der Symmetrieachse wirkende Längsdruckkraft S die kritische Last S_K einen Größtwert erreicht, wenn S durch den Querkraftmittelpunkt hindurchgeht.