

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 2 (1936)

**Artikel:** Massive Kuppeln, zylindrische Behälter und ähnliche Konstruktionen

**Autor:** Granholm, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2716>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## IVa 3

### Massive Kuppeln, zylindrische Behälter und ähnliche Konstruktionen.

### Coupoles massives, réservoirs cylindriques et constructions semblables.

### Solid Domes, Cylindrical Reservoirs and Similar Constructions.

Dr. techn. H. Granholm,

Dozent an der Königlichen Technischen Hochschule Stockholm.

Die exakte Berechnung der Biegungsspannungen in einer massiven Kuppel ist mit sehr großer Mühe verknüpft. In einer der Kgl. Technischen Hochschule zu Stockholm vorgelegten Doktorabhandlung<sup>1</sup> kommen diese Schwierigkeiten zum Vorschein, und man darf sich fragen, ob der in der Praxis tätige Ingenieur jemals Zeit und Gelegenheit hat, die Abmessungen einer Kuppel an Hand der exakten Theorien zu errechnen. Allein schon die Aufstellung der Grundgleichungen ist ziemlich verwickelt, und ihre ganze Integrierung führt zu Reihen, die häufig schwer zu handhaben sind und langsam konvergieren. Auch wenn ihre Konvergenz für manche Wandstärken befriedigend ist, kann eine Änderung der Wandstärke bewirken, daß die gute Konvergenz verloren geht. Selbst wenn der Ingenieur den mathematischen Apparat für die Behandlung des Problems vollkommen beherrscht, ist die für das Durchrechnen eines bestimmten Belastungsfalles erforderliche Arbeit viel zu groß. Überhaupt dürfte es unmöglich sein, auf dem von *Meißner, Bolle, Dubois, Honegger, Ekström* u. a. angewiesenen Wege zu praktischen Methoden zu kommen. Beispielsweise für sphärische Kuppeln ergeben sich beim Integrieren in den einfachsten Fällen hypergeometrische Reihen, die wegen ihrer langsam Konvergenz nicht das richtige Werkzeug des Ingenieurs bilden.

In Anbetracht dieser Tatsachen ist es vor allem wichtig, daß man sich für die weitere Entwicklung der Kuppeltheorie auf solche Lösungen einrichtet, die den Anforderungen der Praxis Genüge leisten, auch wenn man dabei gewisse Annäherungen einführt. Wie *Geckeler*<sup>2</sup> gezeigt hat, läßt sich auch mit verhältnismäßig einfachen mathematischen Hilfsmitteln eine Lösung finden, die sich von der exakten nur unwesentlich unterscheidet und die ganz besonders einfach und bequem anzuwenden ist, falls Wandstärke und Radius konstant sind. Die gute Übereinstimmung zwischen *Geckelers* Theorie und der exakten Theorie

<sup>1</sup> *John Erik Ekström*: Studien über dünne Schalen von rotationssymmetrischer Form und Belastung mit konstanter und veränderlicher Wandstärke. Stockholm 1932.

<sup>2</sup> Siehe z. B. Handbuch für Eisenbetonbau, Band 6. Berlin 1928.

kann dazu berechtigen, jene ausführlicher zu erörtern, falls man sich darüber klar ist, welche Annäherungen eingeführt werden. Noch einen Schritt näher kommt man dem exakten Resultat, wenn man *Blumenthals* und *Steuermanns* sogenanntes asymptotisches Integrationsverfahren benutzt, das auch bei beliebig variabler Wandstärke der Kuppel anwendbar ist. Mit diesem Verfahren kommt man tatsächlich weiter als mit den Methoden, die auf Lösungen in Form unendlicher Reihen aufgebaut sind, wobei man bisher immer annehmen mußte, daß die Wandstärke nach einer bestimmten Funktion veränderlich sei, damit sich die Lösung durchführen ließ.

Eine nähere Prüfung der von *Geckeler* angegebenen Schlußgleichungen zeigt, daß diese von genau derselben Art sind wie die Gleichungen für einen elastisch unterstützten Träger. Die physikalische Analogie ist auch nicht schwer zu erkennen. Den Meridian der Kuppel kann man nämlich als einen Träger betrachten, der von den Parallelkreisen oder Ringen unterstützt ist. Da diese sich zusammendrücken oder ausdehnen lassen, entsprechen sie in statischer Hinsicht einer elastischen Unterlage.

Durch diese Betrachtungsweise kann man sich die Statik der Kuppel mit ausreichender Genauigkeit klarmachen. Für die Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen braucht man dann auch nicht auf die *Meißnerschen* Differentialgleichungen zurückgreifen, sondern man kann alle erforderlichen Gleichungen direkt einfach mit Hilfe der Theorie des elastisch unterstützten Trägers aufstellen. Dies bedeutet für den in der Praxis tätigen Ingenieur, daß er nicht erst den Versuch zu machen braucht, die ziemlich komplizierte klassische Kuppeltheorie zu begreifen; vielmehr kann er auf eigene Faust die erforderlichen Gleichungen ableiten.

Aus den Arbeiten *Geckelers* geht hervor, daß er selbst die hohe Bedeutung der von ihm vorgeschlagenen Annäherungen nicht vollständig erkannt hat; d. h. er hat selbst nicht verstanden, daß die Kuppel im großen betrachtet wie eine stetige Reihe von Trägern auf federnder Unterlage wirkt. Die von mir hier vorgeschlagene Betrachtungsweise kann natürlich in der Weise erweitert werden, daß man den Meridian nicht als einen Träger, sondern als ein Gewölbe betrachtet, das elastisch von den Ringelementen der Kuppel unterstützt wird.

Durch Einführung dieser genaueren Betrachtungsweise bekommt man einen exakteren Einblick in die Statik der Kuppel, und die Gleichungen, die man dabei erhält, sind dieselben wie nach *Meißner*.

Es ist offenkundig, daß man besonders bei sehr flachen Kuppeln, wo also die Gewölbewirkung in den Meridianelementen stark hervortritt, zur Einführung dieser letzteren Betrachtungsweise genötigt ist, um die erwünschte Genauigkeit zu erzielen. Je steiler die Tangente der Kuppel an der Auflage geneigt ist, um so genauer wird die angenähere Betrachtungsweise mit dem Meridian als einem Träger auf elastischer Unterlage, und in dem Sonderfall, daß die Tangente der Kuppel überall senkrecht ist, wenn also die Kuppel in einen Zylinder übergeht, ist die Betrachtungsweise vollkommen exakt.

Um näher zu erläutern, wie einfach das Kuppelproblem auf solche Weise behandelt werden kann, habe ich einige Probleme durchgerechnet und die Ergebnisse mit denjenigen verglichen, die man nach der exakten Theorie erhält. Die Übereinstimmung ist überall erstaunlich gut.

Als erstes Beispiel wählen wir eine sphärische Betonkuppel von gleichmäßiger Dicke, Wandstärke  $\delta = 16 \text{ cm}$ , Radius  $r = 1000 \text{ cm}$ , Öffnungswinkel  $40^\circ$ . Die Kuppel sei mit einem konstanten Flüssigkeitsdruck  $p = 1,0 \text{ kg/cm}^2$  belastet und sei rund um die Kante fest eingespannt (siehe Fig. 1).

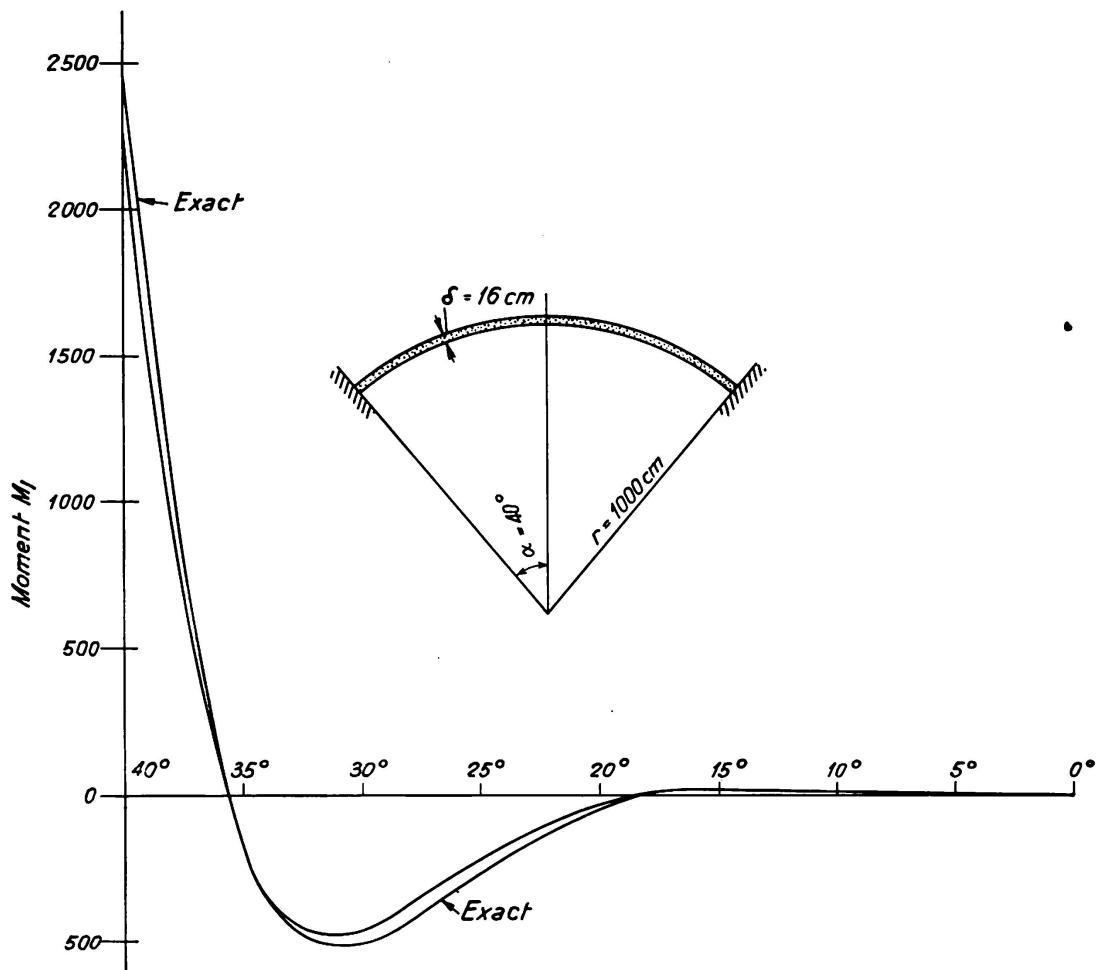


Fig. 1.

Vergleich zwischen der Größe des Meridianmomentes, berechnet erstens nach Gleichung 5 und zweitens nach der exakten Methode mittels hypergeometrischer Reihen. Die Abweichungen sind für praktische Fälle belanglos.

Berechnet man die Spannungen in dieser Kuppel nach der Membrantheorie, so ergibt sich eine Meridiandruckspannung  $T_1 = \frac{p r}{2}$  und eine Ringdruckspannung  $T_2 = \frac{p r}{2}$ . Diese Meridian- und Ringspannungen sind über die ganze Kuppel konstant, und die „membrantheoretische“ Lösung ist also sehr einfach. Unter Einwirkung dieser Druckspannungen  $T_1$  und  $T_2$  wird die Kuppel zusammengepreßt, sodaß sich ihr Radius um den Betrag  $= \frac{T \cdot r}{E \delta}$ , d. h.  $\frac{p r^2}{2 E \delta}$  verringert. Diese Verringerung des Radius ist nicht sehr groß, sie beläuft sich unter den gegebenen Voraussetzungen und bei  $E = 210\,000 \text{ kg/cm}^2$  auf nur  $0,15 \text{ cm}$ . Da die Kuppel rund um die Kante festgehalten wird, ist sie jedoch nicht imstande,

ihre Form frei zu verändern; die der Kante am nächsten gelegenen Teile werden den ursprünglichen Radius beibehalten, aber je weiter man sich von der Kante entfernt, umso größer wird die Bewegungsfreiheit der Konstruktion und umso freier kann die Formänderung vor sich gehen. Obgleich die Zusammendrückung des Radius in diesem Falle ziemlich geringfügig ist, entstehen nahe an den Kanten gewisse Störungen, die zu Biegungsmomenten von solcher Größenordnung führen, daß man sie nicht vernachlässigen darf.

Wir wollen nun untersuchen, wie große Momente in einem elastisch unterstützten Träger entstehen, wenn wir annehmen, er erhalte eine Ausbiegung entsprechend dem oben berechneten Werte  $\frac{p r^2}{2 E \delta}$ . Für den Zusammenhang zwischen Moment und Ausbiegung gilt die Gleichung

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_1 \quad (1)$$

und die Einwirkung der elastischen Unterstützung der Ringelemente wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} = \frac{E \delta}{r^2} \cdot y \quad (2)$$

Eliminiert man  $M_1$  aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + \frac{E \delta}{r^2} \cdot y = 0 \quad (3a)$$

oder, wenn die Biegssteifigkeit  $EI$  als konstant und gleich  $\frac{Em^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{\delta^3}{12}$  vorausgesetzt wird

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4k^4 y = 0 \quad (3b)$$

worin  $k^4 = \frac{3(m^2 - 1)}{m^2} \cdot \frac{1}{r^2 \delta^2}$

ist.

Das allgemeine Integral der Gleichung 3b kann man bekanntlich in folgender Form schreiben:

$$y = e^{-kx} (A \cos kx + B \sin kx) + e^{+kx} (C \cos kx + D \sin kx) \quad (4a)$$

d. h. die Ausbiegung kann man als die Summe zweier Sinusschwingungen betrachten, die eine mit gedämpften, die andere mit zunehmenden Amplituden. Bekanntlich kann man im allgemeinen die Koeffizienten C und D gleich 0 setzen, vorausgesetzt, daß der Träger nicht gar zu kurz ist und daß der Ursprung in den Punkt verlegt wird, von dem die Störung ausgeht. Für geschlossene Kuppeln kann man daher das Integral mit ausreichender Genauigkeit in folgender Form schreiben:

$$y = e^{-kx} (A \cos kx + B \sin kx) \quad (4b)$$

Hier bezeichnet x die Bogenlänge des Meridians, von dem Kuppelrand aus

gemessen. In diesem Falle sind die arbiträren Konstanten A und B leicht aus der Randbedingung bestimmbar, daß

$$y = -\frac{pr^2}{2E\delta} \quad \text{und} \quad y' = 0 \quad \text{bei} \quad x = 0 \quad \text{ist.}$$

Dies ergibt  $A = B = -\frac{pr^2}{2E\delta}$  und die Ausbiegung des Meridians ist also

$$y = -\frac{pr^2}{2E\delta} \cdot e^{-kx} (\cos kx + \sin kx).$$

Durch Einsetzen in Gleichung 1 erhält man den Ausdruck für das Meridianmoment

$$M_1 = \frac{\sqrt{3}}{12} pr\delta e^{-kx} (-\cos kx + \sin kx) \quad (5)$$

In diesem Ausdruck ist die Einwirkung der Querzusammenziehung des Materials vernachlässigt, d. h. die Poissonsche Zahl  $m$  ist gleich unendlich gesetzt.

Mit Hilfe der in Tabelle I angegebenen Werte der Funktionen  $e^{-kx} \cos kx$  und  $e^{-kx} \sin kx$  läßt sich Gleichung 5 leicht zeichnerisch wiedergeben. In Fig. 1 sieht man, wie das Meridianmoment  $M_1$  sich mit der Entfernung vom Kuppelrand verändert. Zum Vergleich sind die nach *Bolles* Methode mit hypergeometrischen Reihen berechneten exakten Werte angegeben.<sup>3</sup> Wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen den exakten Resultaten und den Annäherungswerten erstaunlich gut, weshalb kein Anlaß besteht, das Kuppelproblem zu einer verwickelten mathematischen Aufgabe zu gestalten. Bei Kuppeln mit größerem Öffnungswinkel als in diesem Falle,  $40^\circ$ , ist die Übereinstimmung zwischen den exakten und den angenäherten Werten noch besser. Nur bei Kuppeln, deren Neigungswinkel an den Auflagen sehr klein ist, erlangt der Einfluß der gemachten Annäherungen praktische Bedeutung. Nebenbei bemerkt sind solche Kuppeln unzweckmäßig wegen der sehr starken Randstörungen, die beim Anschluß der Kuppel an ihren etwaigen Auflagering auftreten.

Für die Berechnung der Spannungen in der Kuppel ist nicht nur das Meridianmoment  $M_1$  von Bedeutung, sondern auch die Ringmomente  $M_2$  und die Zuschüsse zur Meridiandruckspannung und Ringdruckspannung, die dadurch entstehen, daß die Randbedingungen nicht den Voraussetzungen der Membrantheorie entsprechen. Diese Größen,  $M_2$ ,  $\Delta T_1$  und  $\Delta T_2$  lassen sich direkt aus den nachstehenden Formeln berechnen. Die Übereinstimmung zwischen den nach der hier gezeigten Annäherungsmethode erhaltenen Werten und den exakten ist ebenfalls sehr gut, wie aus nachstehenden, in Tabelle 2 zusammengestellten Vergleichen hervorgeht.

Die Ableitung der mathematischen Ausdrücke für die Zuschußkräfte  $\Delta T_1$  und  $\Delta T_2$  erfolgt am einfachsten unter Anwendung der Analogie, daß der Meridian ein Träger mit elastischer Unterlage ist. Den Zuschuß in der Meridiandruckspannung,  $\Delta T_1$ , kann man also betrachten als die Scherkraft im Träger, multipliziert mit  $\cot \alpha$ , wo  $\alpha$  der Neigungswinkel des Meridians zur Horizontalen ist. Hierbei erhält man

$$\Delta T_1 = \cot \alpha \cdot EJ \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (6)$$

<sup>3</sup> Siehe *Ekström*, a. a. O., S. 124.

T a b e l l e I.

Werte der Funktionen  $e^{-kx} \cos kx$ ,  $e^{-kx} \sin kx$ ,  $e^{-kx} (\cos kx - \sin kx)$  und  $e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$ .

$kx$	$e^{-kx} \cos kx$	$e^{-kx} \sin kx$	$e^{-kx} (\cos kx - \sin kx)$	$e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$
0	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000
$\frac{\pi}{8}$	0.6239	0.2584	0.3655	0.8823
$\frac{\pi}{4}$	0.3225	0.3225	0.0000	0.6450
$\frac{3\pi}{8}$	0.1179	0.2845	-0.1665	0.4024
$\frac{\pi}{2}$	0.0000	0.2079	-0.2079	0.2079
$\frac{5\pi}{8}$	-0.0536	0.1297	-0.1833	0.0761
$\frac{3\pi}{4}$	-0.0671	0.0671	-0.1342	0.0000
$\frac{7\pi}{8}$	-0.0592	0.0245	-0.0837	-0.0347
$\pi$	-0.0432	0.0000	-0.0432	-0.0432
$\frac{9\pi}{8}$	-0.0269	-0.0112	-0.0157	-0.0381
$\frac{5\pi}{4}$	-0.0139	-0.0139	0.0000	-0.0279
$\frac{11\pi}{8}$	-0.0051	-0.0123	0.0072	-0.0174
$\frac{3\pi}{2}$	0.0000	-0.0090	0.0090	-0.0090
$\frac{13\pi}{8}$	0.0023	-0.0056	0.0079	-0.0033
$\frac{7\pi}{4}$	0.0029	-0.0029	0.0058	0.0000
$\frac{15\pi}{8}$	0.0026	-0.0011	0.0037	0.0015
$2\pi$	0.0019	0.0000	0.0019	0.0019
$\frac{17}{8}\pi$	0.0011	0.0005	0.0006	0.0016
$\frac{9}{4}\pi$	0.0006	0.0006	0.0000	0.0012
$\frac{19}{8}\pi$	0.0002	0.0005	-0.0003	0.0007
$\frac{5}{2}\pi$	0.0000	0.0004	-0.0004	0.0004
$\frac{21}{8}\pi$	-0.0001	0.0003	-0.0004	0.0002
$\frac{11}{4}\pi$	-0.0001	0.0001	-0.0002	0.0000
$\frac{23}{8}\pi$	-0.0001	0.0001	-0.0002	0.0000
$3\pi$	-0.0001	0.0000	-0.0001	-0.0001

Der Zuschuß in der Ringdruckspannung,  $\Delta T_2$ , ist ein Maß für die elastisch unterstützende Wirkung der Unterlage, und  $\Delta T_2$  ist infolgedessen direkt proportional der Durchbiegung  $y$  des Meridians, also

$$\Delta T_2 = \frac{E\delta}{r} \cdot y \quad (7)$$

Das Ringmoment  $M_2$  schließlich ergibt sich am einfachsten durch Bestimmung der Krümmungsänderung der Ringe,<sup>4</sup> und man erhält bei Vernachlässigung des Einflusses der Querzusammenziehung

$$M_2 = \cot \alpha \cdot \frac{EJ}{r} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (8)$$

Setzt man in die Gleichungen 6, 7 und 8 die Gleichung für die Durchbiegung des Meridians ein:

$$y = -\frac{pr^3}{2E\delta} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$$

so erhält man folgende Ausdrücke für  $\Delta T_1$ ,  $\Delta T_2$  und  $M_2$

$$\Delta T_1 = -\cot \alpha \frac{pr^2 \delta^2}{6} k^3 e^{-kx} \cos kx \quad (6a)$$

$$\Delta T_2 = -\frac{pr}{2} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx) \quad (7a)$$

$$M_2 = \cot \alpha \cdot \frac{pr \delta^2}{12} k e^{-kx} \sin kx \quad (8a)$$

Tabelle 2 enthält die so errechneten Werte der Meridian- und Ringspannungen und Ringmomente, verglichen mit den exakten Werten.

Tabelle 2.

Vergleich zwischen den angenäherten und exakten Werten der Meridian- und Ringspannungen und Ringmomente.

Neigungs-winkel $\alpha$ des Meridians	$T_1 + \Delta T_1$ angenähert kg/cm	$T_1 + \Delta T_1$ exakt kg/cm	$T_2 + \Delta T_2$ angenähert	$T_2 + \Delta T_2$ exakt	$M_2$ angenähert kg cm/cm	$M_2$ exakt
40°	443	439	0	0	0	0
35°	474	481	215	193	99	113
30°	503	504	437	427	62	73
25°	506	508	517	520	12	17
20°	503	504	518	523	-8	-10
15°	501	501	511	510	-9	-14
10°	499	499	501	501	-5	-9
5°	499	498	499	498	0	-3

Das oben durchgerechnete Problem entspricht den denkbar einfachsten Randbedingungen. Um die Anwendbarkeit der Methode auch bei komplizierteren

<sup>4</sup> Siehe z. B. Föppl: Drang und Zwang, Band 2. Berlin 1928.

Randbedingungen nachzuweisen, habe ich eine Kuppel durchgerechnet, die an einen umgebenden kreisrunden Zylinder gemäß Fig. 2 angeschlossen ist. Um das Problem einigermaßen zu vereinfachen, wurde der Wasserdruk auf die Kuppel als konstant angenommen. Dieses Problem ist von *Ekström* unter den gleichen Annahmen ausführlich behandelt worden. Tabelle 3 enthält für das Meridianmoment  $M_1$  und für die Ringspannung  $T_2$  die berechneten Werte verglichen mit den exakten.

Für alle Konstanten der Kuppel wird nachstehend der Index 1 benutzt, für die Konstanten des Zylinders der Index 2.

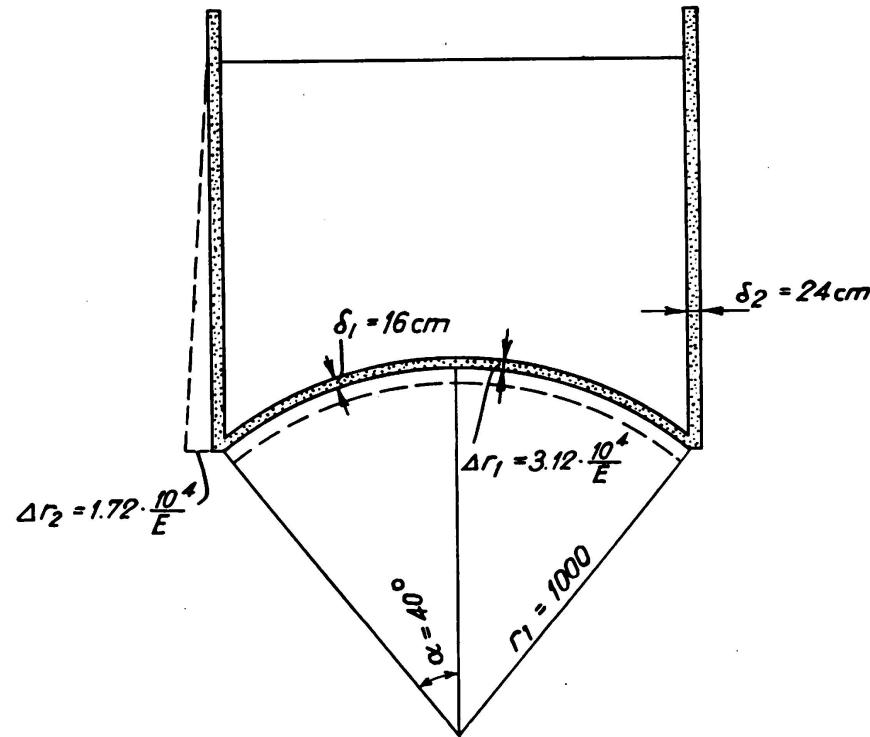


Fig. 2.

Die Berechnung dieser Kuppelkonstruktion wird in folgender Weise durchgeführt. Wenn die innere Kuppel und der Zylinder voneinander befreit werden und sich unter Einwirkung der Belastung unbehindert deformieren dürfen, ergibt sich nach der Membrantheorie

$$\text{eine Abnahme des Kuppelradius um } \frac{pr_1^2}{2E\delta_1} = \frac{p \cdot 10^4}{E} \cdot 3,12 \text{ cm}$$

$$\text{und eine Zunahme des Zylinderradius um } \frac{pr_2^2}{E\delta_2} = \frac{p \cdot 10^4}{E} \cdot 1,72 \text{ cm.}$$

Die Zylinderwand bildet dabei einen kleinen Winkel zur Senkrechten  $= \frac{10}{E} \cdot 1,72$ . (Siehe Fig. 2.)

Da dieser Deformationszustand mit den tatsächlichen Auflagerverhältnissen unvereinbar ist, müssen gewisse Zuschußkräfte und Zuschußmomente eingeführt werden, um den Stetigkeitsbedingungen Genüge zu leisten. Diese Stetigkeitsbedingungen sind folgende:

Zylinder und Kuppel sollen dieselbe Ausbiegung und Winkeländerung im Vereinigungspunkte haben, und der Vereinigungspunkt soll außerdem hinsichtlich der Momente und angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Dies bedeutet vier Randbedingungen, die mittels vier Gleichungen ausgedrückt werden können, wodurch sich alle unbekannten Formänderungen, Momente usw. bestimmen lassen.

Um die Aufstellung der Gleichungen zu erleichtern, folgen hier die allgemeinen Ausdrücke für die Ausbiegung und ihre Ableitungen. Man hat

$$\begin{aligned} y &= e^{-kx} [A \cos kx + B \sin kx] \\ y' &= k e^{-kx} [(B - A) \cos kx - (A + B) \sin kx] \\ y'' &= 2k^2 e^{-kx} [-B \cos kx + A \sin kx] \\ y''' &= 2k^3 e^{-kx} [(A + B) \cos kx + (B - A) \sin kx] \end{aligned} \quad (9)$$

Die erste Bedingung, daß die Ausbiegungen des Zylinders und der Kuppel am Rande selbst gleich groß sein sollen, läßt sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$-A_1 \sin 40^\circ + A_2 = \frac{p \cdot 10^4}{E} (3,12 \sin 40^\circ + 1,72).$$

Damit die Winkeländerungen gleich groß werden, muß

$$k_1 (B_1 - A_1) = k_2 (B_2 - A_2) = \frac{10}{E} \cdot 1,72$$

sein, und für das Momentengleichgewicht gilt außerdem

$$k_1^2 E J_1 B_1 = k_2^2 E J_2 B_2.$$

Die restliche Bedingung soll ausdrücken, daß die horizontale Reaktion wegen Belastung der inneren Kuppel von der Scherkraft im Zylinder sowie von der Scherkraft und der Meridianspannung in der Kuppel aufgenommen werden soll, d. h.

$$-2k_1^3 E J_1 (A_1 + B_1) \cdot \frac{1}{\sin 40^\circ} - 2k_2^3 E J_2 (A_2 + B_2) = p \cdot 500 \cdot \cos 40^\circ.$$

Durch Elimination aus diesen vier Bedingungsgleichungen erhält man für  $p = 1 \text{ kg/cm}^2$  folgende Werte der Konstanten:

$$A_1 = -15,35 \cdot \frac{10^4}{E} \quad B_1 = -7,16 \cdot \frac{10^4}{E}$$

$$A_2 = -6,13 \cdot \frac{10^4}{E} \quad B_2 = 2,05 \cdot \frac{10^4}{E}.$$

Das Problem ist damit vollständig gelöst; die Momente usw. kann man nun ohne Schwierigkeit für jeden beliebigen Punkt des Zylinders und der Kuppel berechnen. In Tabelle 3 sieht man einen Vergleich der berechneten und der exakten Werte für Meridianmoment und Ringspannung der Kuppel. Die Übereinstimmung ist in allen Punkten befriedigend.

Tabelle 3.  
Meridianmomente und Ringdruckspannungen der Kuppel nach Fig. 2.

Neigungs- winkel $\alpha$ des Meridians	$M_1$ angenähert kgcm/cm	$M_1$ exakt kgcm/cm	$T_2 + \Delta T_2$ angenähert kg/cm	$T_2 + \Delta T_2$ exakt kg/cm
40°	— 5280	— 5560	— 1950	— 1930
35°	1450	2250	— 800	— 540
30°	1980	2200	401	613
25°	597	764	618	639
20°	— 6	9	572	593
15°	— 99	— 141	520	526
10°	— 54	— 80	498	498
5°	— 8	— 15	495	493

Diese zwei Beispiele lassen also erkennen, daß die hier gezeigte Methode für die Behandlung des Problems praktisch brauchbare und auch leicht zu findende Resultate ergibt.

Wie eingangs erwähnt, kommt die Annäherungslösung den exakten Werten umso näher, je steiler die Kuppel und auch je geringer ihre Wandstärke wird. Besonders dieser letzte Umstand ist, wie u. a. *Steuermann*<sup>5</sup> nachgewiesen hat, von großer Bedeutung. Die exakte Gleichung für die Ausbiegung des Meridians enthält nicht wie Gleichung 3b nur Ausdrücke vierter und nullter Ordnung, sondern auch Ausdrücke mit Derivaten erster, zweiter und dritter Ordnung, die aber alle mit Polynomen von  $\cot\alpha$  multipliziert sind. Mit zunehmendem  $\alpha$  verringert sich die Bedeutung dieser Ausdrücke, und für  $\alpha = 90^\circ$ , also beim Zylinder, fallen sie ganz weg, d. h. Gleichung 3b gilt exakt. Die Verringerung der Kuppelwandstärke hat ähnlichen Einfluß auf die vollständige Differentialgleichung. Warum dies der Fall sein muß, sieht man auch leicht direkt ein. Es kommt einfach daher, daß bei geringer Wandstärke die Bedeutung der Zusammendrückung des Meridians neben dem Einfluß der Krümmungsänderung klein wird. Dies bedeutet mit anderen Worten, daß man die Arbeit der Normalkräfte infolge Zusammendrückung des Meridians neben der Arbeit des Meridianmoments und der Ringspannungen bei dünnen Kuppeln vernachlässigen kann.

In den bisher behandelten Problemen wurde die Wandstärke überall als konstant angenommen. Wenn die Wandstärke  $\delta$  veränderlich ist, kann man nicht von Gleichung 3b ausgehen, sondern muß Gleichung 3a anwenden. Da die einfache Theorie des elastisch unterstützten Trägers in obigen Fällen, d. h. bei konstanter Wandstärke, hinlänglich genaue Resultate ergab, besteht Grund zu der Annahme, daß dies auch bei veränderlicher Wandstärke der Fall sein wird.

Die Theorie des elastisch unterstützten Trägers mit veränderlichem Trägheitsmoment und veränderlicher Unterstützung wurde bisher von verschiedenen Forschern<sup>6</sup> hauptsächlich mit Hilfe von Reihen studiert. Die dabei zutage gekom-

<sup>5</sup> *E. Steuermann*: Some Consideration on the Calculation of Elastic Shells. Internationale Tagung für technische Mechanik. Stockholm 1930.

<sup>6</sup> Siehe z. B. *B. Hayashi*: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Berlin 1921.

menen Ergebnisse sind für die Praxis leider mehr oder weniger unbrauchbar. Wegen der nahen Verwandtschaft der Gleichungen 3a und 3b ist es jedoch recht natürlich, daß die Lösungen beider Gleichungen im großen ganzen den gleichen mathematischen Aufbau haben. Deshalb liegt die Annahme nahe, daß man die Lösung der Gleichung 3a beispielsweise in folgender Form schreiben kann:

$$y = ue^{\pm z} (A \cos z + B \sin z) \quad (12)$$

worin  $u$  und  $z$  gewisse Funktionen von  $x$  sind. Unter Anwendung des *Blumenthalschen* sog. asymptotischen Integrationsverfahrens kann man die Funktionen  $u$  und  $z$  bestimmen, sodaß Gleichung 12 mit sehr guter Annäherung wirklich ein Integral der Gleichung 3a darstellt.

Wenn wir wie oben die Biegungssteifheit des Trägers  $EJ = \frac{E \delta^3}{12}$  einführen, ergeben sich für die Funktionen  $u$  und  $z$  folgende Ausdrücke:

$$u = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \quad (13)$$

$$\text{und} \quad z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r\delta}} \quad (14)$$

Dieses Resultat erhält man in folgender Weise. Führt man die Ableitung der Gleichung 3a aus, dann ergibt sich nach Vereinfachung die Gleichung

$$y^{IV} + p_1 y''' + p_2 y'' + p_3 y' + p_4 y = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{worin} \quad p_1 &= 6 \frac{\delta'}{\delta} \\ p_2 &= 3 \left( \frac{\delta'^2}{\delta^2} + \frac{\delta''}{\delta} \right) \\ p_3 &= 0 \\ p_4 &= \frac{12}{r^2 \delta^2} \end{aligned}$$

ist. Multipliziert man die Gleichungen

$$\begin{aligned} v &= f(z) \\ v' &= f' z' \\ v'' &= f' z'' + f'' z'^2 \\ v''' &= f' z''' + 3 f' z' z'' + f''' z^3 \\ v^{IV} &= f' z^{IV} + f'' (4 z' z''' + 3 z''^2) + 6 f''' z'^2 z'' + f^{IV} z'^4, \end{aligned}$$

worin  $f'$  soviel wie  $\frac{df}{dz}$  und  $z'$  soviel wie  $\frac{dz}{dx}$  bedeutet, der Reihe nach mit den Faktoren  $Q_4, Q_3, Q_2, Q_1$ , und 1 und addiert sie, so erhält man, wenn das linke Glied gleich Null gesetzt wird, erstens die Gleichung

$$v^{IV} + v''' Q_1 + v'' Q_2 + v' Q_3 + v Q_4 = 0 \quad (16)$$

und zweitens, wenn die Faktoren  $f'$ ,  $f''$  und  $f'''$  jeder für sich gleich Null gesetzt werden

$$\begin{aligned} z^{IV} + z''' Q_1 + z'' Q_2 + z' Q_3 &= 0 \\ (4 z' z''' + 3 z''^2) + 3 z' z'' \cdot Q_1 + z''^2 Q_2 &= 0 \\ 6 z''^2 z'' + z'^3 Q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Aus diesen Gleichungen kann man  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $Q_3$  lösen, während die Funktion  $f(z)$  durch die übrige Bedingung

$$f^{IV} z'^4 + Q_4 \cdot f = 0 \quad (18)$$

bestimmt wird.

Wählt man den Faktor  $Q_4$  gleich  $4 z'^4$ , dann verwandelt sich die Gleichung 18 in

$$\frac{d^4 f}{dz^4} + 4 f = 0$$

d. h.

$$f(z) = e^{\pm z} (A \cos z + B \sin z) \quad (19)$$

worin  $z$  durch die Bedingung

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt[4]{\frac{Q_4}{4}} \quad (20)$$

bestimmt wird.

Wenn man in Gleichung 15 nun  $y = uv$  einführt, erhält man beim Einsetzen und nach Division durch  $u$

$$\begin{aligned} v^{IV} + v''' \left( \frac{4 u'}{u} + p_1 \right) + v'' \left( \frac{6 u''}{u} + \frac{3 u'}{u} p_1 + p_2 \right) \\ + v' \left( \frac{4 u'''}{u} + \frac{3 u''}{u} p_1 + \frac{2 u'}{u} p_2 + p_3 \right) + v p_4 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Durch Gleichstellen der Koeffizienten für  $v$  und  $v'''$  in den Gleichungen 16 und 21 kann man die unbekannten Funktionen  $Q_4$  und  $u$  bestimmen. Man erhält demnach  $Q_4 = p_4$  und folglich nach Gleichung 20

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[4]{\frac{p_4}{4}} dx \\ \text{oder, mit } p_4 &= \frac{12}{r^2 \delta^2}; \quad z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r \delta}} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{Aus der Bedingung} \quad \frac{4 u'}{u} + p_1 = Q_1$$

erhält man unter Anwendung der letzten der Gleichungen 17

$$\begin{aligned} \frac{4 u'}{u} &= -p_1 - \frac{3}{2} (\log p_4)' \\ \text{oder} \quad u &= \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \end{aligned} \quad (13)$$

Faßt man das Ergebnis obiger Rechnungen zusammen, so kann man die Lösung der Gleichung 3a unter Vernachlässigung der Ausdrücke, die den Faktor  $e^z$  enthalten, also in folgender Form schreiben:

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} e^{-z} (A \cos z + B \sin z) \quad (12a)$$

worin  $z$  durch die Bedingung  $z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r\delta}}$

bestimmt wird.

Beim ersten Anblick erscheint vielleicht die Gleichung 12a umständlich und wenig geeignet für praktischen Gebrauch wegen des verwickelten Aufbaues der

Funktion  $z$  und des zusätzlichen Faktors  $\frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}}$ . In der Praxis aber stellt sich der

Fall einfacher. Die Funktion  $z$  braucht nämlich nie anders als zahlenmäßig angegeben zu werden und läßt sich deshalb leicht aus Gleichung 14 z. B. nach der Trapezregel berechnen. Bei Berechnung der Ableitungen von Gleichung 12a ergeben sich, wenn man keine Annäherungen einführt, ziemlich komplizierte Ausdrücke. Beachtet man aber, daß die Ableitungen  $z''$ ,  $z'''$ ,  $u''$  und  $u'''$  bei den in der Praxis vorkommenden Abmessungen klein sind und daher vernachlässigt werden können, erhält man die Ableitungen von  $y$  in folgender Form

$$\begin{aligned} y &= u e^{-z} (A \cos z + B \sin z) \\ y' &= u z' e^{-z} [(B - \mu A) \cos z - (A + \mu B) \sin z] \\ y'' &= 2 u z'^2 e^{-z} [-(\mu B + \gamma A) \cos z + (\mu A - \gamma B) \sin z] \\ y''' &= 2 u z'^3 e^{-z} [(A + \mu_1 B) \cos z + (B - \mu_1 A) \sin z] \end{aligned} \quad (9a)$$

worin  $v = \frac{u'}{u z'}$

$$\mu = 1 - v$$

$$\mu_1 = 1 - 3v.$$

Für den Fall, daß die Wandstärke konstant ist, wird  $\gamma = 0$  und  $\mu = \mu_1 = 1$ , wobei obige Gleichungen genau dieselben werden wie die Gleichungen 9.

Die Gleichungen 9a sind also in derselben Weise aufgebaut wie die in den Gleichungen 9 angegebenen Ableitungen für einen Träger mit konstanter Biegssteifigkeit. Die Berechnung einer Kuppel mit veränderlicher Wandstärke läßt sich demnach in gleicher Weise und mit wenig mehr Mühe durchführen wie bei gleichmäßiger Wandstärke. Die oben durchgerechneten Beispiele (siehe Fig. 1 und 2) sind also auch für den Fall vorbildlich, daß  $\delta$  veränderlich ist, und die Gleichgewichtsgleichungen sind ebenso aufzustellen, nur mit den Abänderungen, die durch den Unterschied zwischen den Gleichungen 9 und 9a bedingt sind.

Bisher haben wir bei der Behandlung des Kuppelproblems nicht berücksichtigt, daß sich die Meridianträger nach oben hin verjüngen und im Scheitel der Kuppel die Breite Null haben, vielmehr haben wir bei ihnen eine konstante Breite angenommen. Dies entspricht der Wirklichkeit nur dann, wenn die Kuppel zylindrisch ist, aber bei Kuppeln im allgemeinen liegt in jener Annahme ein gewisses Annäherungsverfahren. Wenn wir die Verjüngung berück-

sichtigen, können wir bei sphärischer Kuppel das Trägheitsmoment des Meridianträgers in gewissem Winkelabstand  $\alpha$  vom Scheitel folgendermaßen schreiben:

$$J = \frac{\delta^3}{12} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} \quad (21)$$

Mit diesem Ausdruck für das Trägheitsmoment erhalten wir für die Funktionen  $u$  und  $z$

$$u = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{\sin \alpha}}$$

und

$$z = \sqrt[4]{3} \int \frac{1}{\sqrt{r\delta}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha}} dx.$$

Die obigen Ableitungen, die sich hauptsächlich auf das Kuppelproblem beziehen, lassen sich natürlich auch auf zylindrische Behälter und ähnliche Konstruktionen anwenden, die als Sonderfälle der Kuppel aufzufassen sind. Die für Berechnung solcher Behälter üblichen Methoden,<sup>7</sup> denen Reihenentwicklungen zugrunde liegen, lassen sich vorteilhaft durch die oben angegebene Methode ersetzen. Einen interessanten Sonderfall dieses Problems begegnet man bei der Berechnung von massiven Gewölbedämmen. Bisher ging man bei Behandlung derartiger Probleme von Gleichung 3 b aus und führte einen Mittelwert der Wandstärke ein.<sup>8</sup>

Bei Behandlung der Gleichung 3 a nach obiger Methode kann man ohne Schwierigkeit die in verschiedenen Richtungen und an verschiedenen Punkten vorkommende Anisotropie der Konstruktion berücksichtigen. Es kann sich dabei um eine reine Materialerscheinung oder um eine rein konstruktive Anisotropie handeln. Beispielsweise durch das Einlegen verschiedener Mengen von Armierungseisen in verschiedenen Richtungen wird der scheinbare Elastizitätsmodul des Baustoffes in verschiedenen Richtungen verschieden, was als Materialanisotropie bezeichnet werden darf; und eine gewisse konstruktive Anisotropie kann man in einem zylindrischen Behälter oder einer Kuppel zuwege bringen, indem man in der Richtung der Generatrix oder des Meridians Verstärkungsträger anbringt (Rippenkuppel). Unter solchen Umständen kann Gleichung 3 a nicht in der Form geschrieben werden, die sie in Gleichung 15 erhalten hat, vielmehr bekommen die Koeffizienten  $p_1$  bis  $p_4$  folgendes Aussehen

$$p_1 = \frac{2(E_1 J)'}{E_1 J}$$

$$p_2 = \frac{(E_1 J)''}{E_1 J}$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \frac{E_2 \delta}{r^2 E_1 J}$$

<sup>7</sup> Siehe *Lorenz*: Technische Elastizitätslehre. Berlin 1913. *H. Reißner*: Beton und Eisen 7, 150, 1908. *T. Pöschl* und *K. Terzaghi*: Berechnung von Behältern. Berlin 1913.

<sup>8</sup> *N. Royen*: Tvärdamman vid Norrfors kraftverk (Der Damm von Tvärdö am Kraftwerk Norrfors). Zeitschrift Betong, Heft 2, 1926.

und die Funktionen  $z$  und  $u$  erscheinen demnach in folgender Form

$$z = \int \sqrt[4]{\frac{E_2 \delta}{4 r^2 E_1 J}} dx$$

und

$$u = \sqrt[8]{\frac{r^6}{E_1 J \cdot E_2^3 \delta^3}}$$

Da man weder für  $u$  noch für  $z$  einen mathematischen Ausdruck benötigt, bringt die Einführung der Gleichungen 22 und 23 keine Erschwerung der Berechnungen mit sich.

### Zusammenfassung.

Durch die Aufteilung der Schale in zwei Scharen von einander kreuzenden Trägern können wir ein klares Verständnis der statischen Wirkungsweise der Konstruktion erhalten. Die auftretenden Momente und Spannungen können wie bei dem Balken auf elastischer Unterlage berechnet werden. Da die strenge Theorie zu Lösungen in Form von unendlichen Reihen führt, die unter gewissen Bedingungen nur langsam konvergieren, sind durch die angegebene Methode praktische Vorteile zu gewinnen.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide