

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 2 (1936)

**Artikel:** Einführung in die allgemeine Theorie der biegungsfreien Schalen

**Autor:** Aimond, F.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2714>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## IV a 1

Einführung in die allgemeine Theorie der biegungsfreien Schalen.

Etude des voiles minces courbes ne subissant pas de flexion.

Theory of Thin Curved Shells not Subjected to Bending.

Dr. ès sciences F. Aimond,

Ingénieur des Ponts et Chaussées détaché au Ministère de l'Air, Paris.

### 1. Hinweis auf die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Schalen in geradlinigen Koordinaten.

Die Gleichung der Oberfläche in geradlinigen, jedoch nicht unbedingt rechtwinkligen Koordinaten sei  $z = f(x, y)$ . Der Spannungszustand in einem Punkte  $m$  der Schale wird durch die Spannungen  $n_1, n_2, \Theta$  bestimmt, die auf die zu den Ebenen  $zox$  und  $zoy$  parallelen Schnitte  $mm_1$  und  $mm_2$  wirken. Auf den Schnitt  $mm_2$  wirkt  $n_1$  parallel zur Ebene  $zox$ , auf den Schnitt  $mm_1$  wirkt  $n_2$  parallel zu  $zoy$  und  $\Theta$  wirkt sowohl auf den Schnitt  $mm_1$  parallel zu  $zox$  als auch auf  $mm_2$  parallel zu  $zoy$ . Die Richtungskoeffizienten der Tangenten an die Schnitte  $mm_1$  und  $mm_2$ , also die in Richtung  $ox, oy, oz$  projizierten Einheitsvektoren jeder dieser Tangenten bezeichnen wir mit  $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1$  und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ . Wir denken uns nun die Schale beliebig belastet. Dann sind  $X \cdot dx \cdot dy$ ,  $Y \cdot dx \cdot dy$ ,  $Z \cdot dx \cdot dy$  die Komponenten der aufgebrachten Last, die in den Richtungen  $ox, oy, oz$  auf das Element  $mm_1 m' m_2$  wirken, das parallel zur Ebene  $zox$  durch  $mm_1$  und  $m_2 m'$  und parallel zur Ebene  $zoy$  durch  $mm_2$  und  $m_1 m'$  begrenzt wird. Die Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen für diese Schnitte führt zu folgenden Gleichungen:

$$\frac{\delta v_1}{\delta x} + \frac{\delta \theta}{\delta y} = X \quad (1)$$

$$\frac{\delta \theta}{\delta x} + \frac{\delta v_2}{\delta y} = Y \quad (2)$$

$$r \cdot v_1 + 2s\theta + t v_2 = \zeta \quad (3)$$

Dabei bedeutet

$$p = \frac{\delta f}{\delta x}; \quad q = \frac{\delta f}{\delta y}; \quad r = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}; \quad s = \frac{\delta^2 f}{\delta x \cdot \delta y}; \quad t = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2};$$

$$\zeta = Z - p \cdot X - q \cdot Y;$$

$$v_1 = n_1 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_2}; \quad v_2 = n_2 \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_1}.$$

2. *Geometrische Deutung der in den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen enthaltenen Größen.*

Die Größe  $\zeta$  im zweiten Glied der Gleichung (3) ist die schiefe Projektion des Vektors (X, Y, Z) auf oz, wobei diese Projektion parallel zu der an die Oberfläche gelegten Tangentialebene erfolgt. Zur Deutung der Größen  $v_1$ ,  $v_2$  und  $\Theta$ , die die Unbekannten in den Gleichgewichtsbedingungen sind, soll allgemein der Begriff der reduzierten Spannung definiert werden. Die an einem Bogenelement angreifende reduzierte Spannung ist die Projektion der an diesem Element angreifenden Kraft auf die xy-Ebene, dividiert durch die projizierte Länge des zugehörigen Elementes. Es läßt sich einfach feststellen, daß der Zusammenhang zwischen den in einem Punkt wirksamen reduzierten Spannungen denselben Gesetzen folgt wie bei den wirklichen Spannungen und im Besonderen, daß auch die *Mohr'sche* Darstellung auf sie anwendbar ist. Die Größen  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\Theta$  entsprechen den durch Parallelprojektion auf die x und y-Achse entstandenen reduzierten Spannungen, die zu den Schnitten gehören. Die Schubspannungen  $\Theta$  bleiben in der Projektion erhalten, während dies für die Spannungsgrößen  $n_1$  und  $n_2$  nicht der Fall ist.

3. *Geometrische Deutung der Gleichgewichtsbedingungen.*

Die Gleichungen (1) und (2) drücken augenscheinlich das Gleichgewicht in der Projektion auf die Tangentialebene aus. Die Gleichung (3) dagegen gibt das Gleichgewicht der normal zur Schale wirkenden Kräfte wieder. Um sie geometrisch zu deuten, legen wir den Ursprung O des Dreifächners oxzy auf die Oberfläche und richten ox und oy nach den Richtungen von zwei willkürlich gewählten Schnitten. Der Dreifächner oxzy wird nun vollends bestimmt, wenn man eine Annahme über die Richtung oz trifft. Die Gleichung (3) gibt den linearen Zusammenhang zwischen den Spannungen, welche auf die willkürlich gewählten Schnitte ox und oy wirken und der parallel zur Tangentialebene auf oz erfolgten Projektion  $\zeta$  der Dichte der aufgebrachten Last. Solange man bei festgehaltenem ox und oy die Richtung von oz ändert, ist nur jeder einzelne Ausdruck der linearen Gleichung mit demselben Faktor zu multiplizieren.

Man kann die Unbestimmtheit der Richtungen der Schnitte ox und oy zur Vereinfachung der Gleichung (3) benutzen. Richtet man nämlich diese Schnitte nach zwei konjugierten Richtungen der Oberfläche aus (konjugierte Richtungen im Verhältnis zur Indikatrix), so verschwindet der Koeffizient  $\Theta$  und die Gleichung (3) reduziert sich zu einer linearen Gleichung zwischen den Längsspannungen  $v_1$  und  $v_2$ . Man kann sich nun fragen, ob es nicht möglich ist, die Schnitte ox und oy so zu orientieren, daß in der Gleichung (3) überhaupt nur noch eine einzige Spannungsgröße verbleibt. Man sieht aber sofort, daß dies nicht möglich ist, solange die Oberfläche konvex ist, d. h. also, solange die Hauptkrümmungsradien von gleichem Sinn sind. Wenn die Oberfläche nicht konvex ist, wird dies im Gegensatz hierzu jedoch möglich.

Wenn wir uns mit der letzteren Annahme beschäftigen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob die in der Gleichung (3) verbleibende Spannung eine Längsspannung oder eine Schubspannung  $\Theta$  ist. Der erste Fall ist nur dann möglich, wenn die Oberfläche abwickelbar ist, d. h. also, wenn man sie als die

Umhüllende einer Gruppe von Tangentialebenen auffassen kann, die von einem Parameter abhängen. Legt man den Schnitt  $ox$  in die Richtung der geradlinigen Erzeugenden, die durch  $O$  geht, so vereinfacht sich die Gleichung (3) zu

$$r \cdot v_1 = \zeta \quad (4)$$

Der zweite Fall bezieht sich auf die Oberflächen mit gegensätzlichen Krümmungen. Legt man  $ox$  und  $oy$  in die Richtung der Asymptoten, so vereinfacht sich die Gleichung (3) zu

$$2 \cdot s \cdot \Theta = \zeta \quad (5)$$

Die Gleichungen (4) und (5) sind einfach zu deuten. Betrachten wir zunächst Gleichung (4). Man sieht sofort, daß von den an einem unendlich kleinen Element der Fläche angreifenden Schnittkräften nur  $v_1$  eine Komponente ergibt, die nicht in der Tangentialebene liegt, und Gleichung (4) drückt nur die Gleichheit zwischen den parallel zur Tangentialebene erfolgten Projektionen der Spannungen  $n_1$  auf  $oz$  und der unter den gleichen Bedingungen erfolgten Projektion der aufgebrachten Last aus.

Nun zur Deutung der Gleichung (5): Es genügt hierfür, ein viereckiges Element zu betrachten, von dem zwei Seiten durch Asymptotenlinien gebildet werden, die sich in  $O$  kreuzen. Die Resultierende der an dem Viereck angreifenden Längsspannungen  $n_1$  und  $n_2$  liegt in der Tangentialebene. Diese Resultierende ist ja nur die geometrische Summe der Spannungsresultanten  $n_1$  und  $n_2$ , und jede dieser Spannungsresultanten liegt notwendigerweise innerhalb der Berührungsfläche einer Asymptotenlinie, welche infolge der Definition der Asymptoten mit der Tangentialebene zusammenfallen muß. Die außerhalb der Tangentialebene liegende Komponente  $\zeta$  der auf die Oberfläche aufgebrachten Lasten hängt also nur von der Schubspannung  $\Theta$  ab und sie ist dieser auch direkt proportional. Der Proportionalitätskoeffizient hat den Wert  $2s$  und ist einfach geometrisch zu deuten. Er ist der Quotient aus dem doppelten Abstand der  $O$  gegenüberliegenden Ecke des Viereckes von der Tangentialebene durch  $O$ , parallel zur Richtung  $oz$  gemessen, dividiert durch das Produkt der Seitenlängen der Asymptotenlinien, welche das Viereck bilden.

#### 4. Einteilung der Schalen in Bezug auf ihre mechanischen Eigenschaften.

Die vorstehenden Betrachtungen führen zu einer Einteilung der Schalen in drei Gruppen. Die erste Gruppe umfaßt die abwickelbaren Oberflächen, wie Zylinder und Kegel. Die zweite Gruppe umschließt die konvexen Oberflächen, wie die Kugel, die elliptischen Paraboloiden, die Ellipsoide, die zweischaligen Hyperboloiden und ganz allgemein alle doppelt gekrümmten Flächen, die durch eine nach unten konkave Kurve erzeugt werden, wenn diese auf einer Leitlinie mit ebenfalls nach unten konkaver Krümmung gleitet. Die dritte Gruppe umgrenzt die gegensätzlich gekrümmten Flächen, wie die hyperbolischen Paraboloiden, die einschaligen Hyperboloiden, die Konoide, alle nicht abwickelbaren regelmäßigen Flächen und ganz allgemein alle Flächen, die durch eine nach oben konkave Kurve erzeugt werden können, wenn sie auf einer nach unten konkaven Leitlinie gleitet.

Zu dieser Einteilung wird man durch die geometrische Deutung der Gleichung (3) geführt. In der ersten Gruppe findet man jene Schalen, für welche die

Gleichung (3) in die Form der Gleichung (4) gebracht werden kann. Für die zweite Gruppe kann Gleichung (3) in folgende Form gebracht werden:

$$r \cdot v_1 + t \cdot v_2 = \zeta \quad (6)$$

wobei  $r$  und  $t$  vom gleichen Vorzeichen sind. Die Schalen der dritten Gruppe sind jene, für welche die Gleichung (3) in die Form (5) übergeführt werden kann.

Wir bemerken, daß für die Schalen der dritten Gruppe die Gleichung (3) ebenfalls in die der Gleichung (6) übergeführt werden kann; in diesem Falle sind jedoch  $r$  und  $t$  von verschiedenem Vorzeichen. Außerdem kann noch für die Schalen der zweiten Gruppe die Gleichung (3) die Form der Gleichung (5) annehmen, wobei wiederum  $\Theta$  die Schubspannung in den Asymptotenlinien bedeutet. In diesem Falle sind jedoch  $s$  und  $t$  imaginäre Ausdrücke und die Gleichung (5) stellt nicht mehr eine Bezeichnung zwischen reellen Größen dar.

Die Schalen der ersten Gruppe sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß die normal zu den geradlinigen Erzeugenden wirkende Komponente des Spannungszustandes in jedem Punkte proportional zur Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last ist. Die Schalen der zweiten Gruppe sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß der rein imaginäre Schubspannungszustand, der auf die in den imaginären Asymptotenlinien liegenden Elemente wirkt, in jedem Punkte proportional zur Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last ist. Die Schalen der dritten Gruppe zeichnen sich durch die Eigenschaft aus, daß der Schubspannungszustand, der auf die in den Asymptotenlinien liegenden Elemente wirkt, in jedem Punkte proportional zur Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last ist.

Zwischen den Schalen der zweiten und dritten Gruppe kann man noch folgenden Unterschied beobachten: Wenn man an einem beliebigen Punkte die an zwei konjugierten Schnitten angreifenden Längsspannungen betrachtet, so kann man die Normalkomponente der aufgebrachten Last, die ein linearer Ausdruck dieser Längsspannungen ist, als den durch diese Längsspannungen hervorgerufenen, nach außen wirkenden Druck betrachten. Dieser Ausdruck enthält bei den Schalen der zweiten Gruppe Koeffizienten gleichen Vorzeichens und bei den Schalen der dritten Gruppe Koeffizienten von verschiedenem Vorzeichen. Daraus folgt, daß man bei den Schalen der zweiten Gruppe sich die Tragfähigkeit durch die auf zwei konjugierte Schnitte wirkenden gleichsinnigen Längsspannungen erzeugt denken kann. Bei einer Schale der dritten Gruppe dagegen denkt man sich die Tragfähigkeit in analoger Weise durch die auf zwei konjugierte Schnitte wirkenden gegensinnigen Längsspannungen erzeugt.

Handelt es sich um eine Schale der zweiten Gruppe, so kann man immer jene konjugierten Schnitte auswählen, die symmetrisch im Verhältnis zu den Hauptrichtungen liegen. Die zugehörigen Längsspannungskoeffizienten, die in dem linearen Ausdruck die Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last darstellen, sind gleich. Man kann also sagen, daß bei den Schalen der zweiten Gruppe die Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last proportional zu der Summe der Längsspannungen ist, welche auf die zu den Hauptrichtungen symmetrisch liegenden konjugierten Schnitte wirken.

Die Verschiedenheit der Eigenschaften, welche, wie wir gesehen haben, die Schalen der drei Gruppen unterscheidet, hat einen entscheidenden Einfluß auf die Art der Stützung, welche man den Schalen an ihren Rändern geben kann, um die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen und desgleichen auch auf die Art der Berechnung der Spannungen, die wiederum eine Funktion der Randstützung sind.

### 5. Untersuchung der Schalen der ersten Gruppe.

Das Studium der Schalen der ersten Gruppe kommt einer Verallgemeinerung der Untersuchung des Zylinders gleich. Die Gleichung (4) gibt für einen beliebigen Punkt der Schale jene Komponente des Spannungszustandes an, die normal zu der an diesem Punkt getroffenen geradlinigen Erzeugenden steht. Zieht man also auf der Oberfläche eine Gruppe von geodätischen Linien, die die verschiedenen geradlinigen Erzeugenden unter einem konstanten Winkel schneiden, so kennt man die Längsspannungen, die parallel zu diesen geodätischen Linien auf die geradlinigen Erzeugenden wirken. Aus Gleichung (2) erhält man durch eine Integration sofort den Wert der Schubspannung an den Erzeugenden und geodätischen Linien und durch eine weitere Integration erhält man aus Gleichung (1) die Längsspannungen, die auf die geodätischen Linien parallel zu den Erzeugenden wirken.

Der auf diese Weise bestimmte Spannungszustand ist erst dann vollständig, wenn man auf einer bestimmten Kurve, die jede Erzeugende nur ein einziges Mal trifft, eine Annahme über die Werte der auf die Schnittlemente dieser Kurve wirkenden Spannungen trifft. Man kann übrigens auch auf zwei Kurven, von denen beide jede Erzeugende nur ein einziges Mal schneiden, eine Annahme über den Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungszustandes treffen, der auf jedes Schnittlement der beiden Kurven wirkt.

### 6. Studium der Schalen der zweiten Gruppe.

Wir betrachten nun eine Schale der zweiten Gruppe. Wir haben schon gesehen, daß die Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last an jedem Punkt proportional der Summe der Längsspannungen ist, die auf die zu den Hauptrichtungen symmetrisch liegenden konjugierten Schnitte wirken. Wir setzen nun voraus, daß diese Längsspannungen gleich seien. Dann ist ihr Wert in jedem Punkt durch die Größe der Normalkomponente der Dichte der Last bestimmt. Damit haben wir die Gleichung (3) erfüllt. Die Gleichungen (1) und (2), welche das Gleichgewicht in der Tangentialebene ausdrücken, sind allerdings erst dann erfüllt, wenn die Tangentialkomponente der Dichte der Last einen bestimmten Wert hat, welchen man dadurch erhält, daß man die Gleichgewichtsbedingungen parallel zur Tangentialfläche genau anschreibt. Wir wollen nun jedes Lastsystem mit „Grundsystem“ bezeichnen, das den vorgenannten Bedingungen entspricht, d. h. also, wenn gleich große Längsspannungen an den zu den Hauptrichtungen symmetrisch liegenden konjugierten Schnitten angreifen. Ein beliebiges Lastsystem kann man sich dann aus einem Grundsystem und einem zusätzlichen System zusammengesetzt denken, wobei das letztere nur Tangentialkräfte enthält und als das zu dem Grundsystem komplementäre Lastsystem bezeichnet wird.

Man wird dabei nun zu dem Studium der komplementären Systeme geführt, d. h. also jener Systeme, bei welchen die aufgebrachte Last tangential zur Oberfläche wirkt. Bei solchen Systemen sind die Längsspannungen, welche auf die symmetrisch zu den Hauptrichtungen liegenden konjugierten Schnitte wirken, gleich groß. Der Spannungszustand an einem beliebigen Schnitt hängt also nur von zwei Parametern ab, z. B. von den Komponenten des Spannungszustandes, die auf einen der beiden konjugierten Schnitte einwirken. Es ist augenfällig, daß man diese beiden Parameter beliebig wählen kann. Man sieht leicht, daß man zwei unbestimmte konjugierte Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  so bestimmen kann, daß die an einem beliebigen Element der Oberfläche angreifenden Kräfte eine lineare Form der Differentialausdrücke  $S_\varphi \cdot d\psi$  und  $S_\psi d\varphi$  ergeben, wenn man als Parameter zwei Größen wählt, die wir mit  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  bezeichnen wollen. Die Gleichgewichtsbedingungen in der Tangentialebene zeigen dann, daß die partielle Ableitung von  $S_\varphi$  nach  $\varphi$  und die partielle Ableitung von  $S_\psi$  nach  $\psi$  lineare Funktionen von  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  sind. Eliminiert man einen der beiden Parameter, z. B.  $S_\psi$  aus den beiden Gleichungen, so erhält man eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit unbestimmten Variablen, welcher Gleichung der noch enthaltene Parameter  $S_\varphi$  genügen muß.

Um eine Lösung dieser Gleichung zu erhalten, kann man den Wert von  $S_\varphi$  und einer Ableitung davon auf einer beliebig auf der Oberfläche gewählten Kurve annehmen, natürlich unter der Bedingung, daß gewisse analytische Bedingungen erfüllt sind, die damit zusammenhängen, daß es sich um eine Gleichung mit unbestimmten Variablen handelt. Da man mit Hilfe der längs einer Kurve angenommenen Werte von  $S_\varphi$  und einer Ableitung davon längs dieser Kurve  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  bestimmen kann und damit auch den gesamten Spannungszustand für ein beliebiges Element dieser Kurve, so sieht man, daß man den gesamten Spannungszustand in der Schale erhält, sobald man die Spannungen längs einer Kurve kennt, immer unter der Voraussetzung, daß gewisse analytische Bedingungen erfüllt sind.

Diese analytischen Bedingungen sind nicht nur eine reine Formsache, sie entsprechen folgender physikalischer Tatsache: Man weiß, daß bei allen Problemen, wo eine Gleichung mit unbestimmten Variablen durch die Werte bestimmt ist, welche eine diese Gleichung befriedigende Funktion und eine Ableitung davon längs einer gegebenen Kurve annimmt, die Lösung keine stetige Funktion der Anfangswerte ist. Wenn man die eingesetzten Werte nur wenig ändert, so kann man an beliebigen Punkten beliebig große Werte der Funktion erhalten. Daraus ergibt sich, daß bei einer konvexen Schale die zu den längs einer Kurve gegebenen Spannungswerten gehörigen Gleichgewichtszustände im Verhältnis zu diesen Spannungswerten nicht stabil sind.

Um zu stabilen Lösungen zu kommen, muß man andere Grenzbedingungen untersuchen als die bisher angenommenen. Statt daß man eine Annahme über den Spannungszustand längs einer Kurve trifft, nehmen wir auf einer bestimmten Kurve einen Zusammenhang zwischen den Komponenten des auf die Elemente dieser Kurve wirkenden Spannungszustandes an. In diesem Falle ist das Problem eindeutig und seine Lösung eine stetige Funktion der angenommenen Größen. Der zugehörige Gleichgewichtszustand wird ebenfalls stabil sein. Wir wollen z. B. annehmen, daß die Normalkomponente des Spannungszustandes längs der

gegebenen Kurve Null sei. Mit Hilfe der relativen Unbestimmtheit der Parameter  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  kann man diese so bestimmen, daß  $S_\varphi$  der Normalkomponente des Spannungszustandes längs der gegebenen Kurve entspricht. Die Theorie der Differentialgleichungen erlaubt eine Bestimmung der Funktion  $S_\varphi$  nach einer ähnlichen Methode, wie sie von *Fredholm* und seinen Nachfolgern zur Lösung ähnlich geformter Gleichungen mit unbestimmten Variablen angewandt wurde.

### 7. Studium der Schalen der dritten Gruppe.

Wir betrachten nun eine Schale der dritten Gruppe. Der Wert der Normalkomponente der Dichte der Last bestimmt in erster Linie den Schubspannungszustand für die in den Asymptotenlinien liegenden Schnitte. Wir wollen voraussetzen, daß der Spannungszustand in der Schale nur aus diesen Schubspannungen bestehe. Hierzu ist nur nötig und auch genügend, daß die Tangentialkomponente der an einem zwischen den Asymptotenlinien liegenden Viereck angebrachten Last in Gleichgewicht mit der Resultante der auf die Tangentialebene projizierten Tangentialbeanspruchungen steht. Wir wollen nun jedes Lastsystem, das den vorstehenden Bedingungen genügt, daß der an den Schnitt-Elementen der Asymptotenlinien angreifende Spannungszustand nur aus Schubspannungen besteht, als Grundsystem bezeichnen. Es ist nun leicht einzusehen, daß man sich jedes beliebige Lastsystem durch eine Superposition aus einem Grundsystem und einem anderen System, das wir Komplementärsystem nennen wollen, entstanden denken kann.

Wir werden hierdurch zum Studium der Komplementärsysteme geführt. Wir erinnern uns dabei, daß die an einem Schalenelement angreifende Schnittkraft als eine Linearkombination der Differentialausdrücke  $S_\varphi \cdot d\varphi$  und  $S_\psi d\varphi$  dargestellt werden kann, wobei  $\varphi$  und  $\psi$  jetzt zwei reelle Funktionen sind und  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  zwei reelle Parameter. Die Gleichgewichtsbedingungen in der Tangentialebene erlauben es nun, die partiellen Ableitungen von  $S_\varphi$  nach  $\varphi$  und von  $S_\psi$  nach  $\psi$  als lineare Funktionen von  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  auszudrücken. Die Elimination von  $S_\psi$  führt zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung von  $S_\varphi$  mit reellen Variablen. Die Variablen dieser Differentialgleichung stellen die Asymptotenlinien dar.

Um eine Lösung der vorstehenden Gleichung zu erhalten, die für den durch den Rand  $C$  begrenzten Bereich  $D$  gültig ist, zerlegen wir diesen Rand in zwei Folgen von Bogenstücken  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  derart, daß die von jedem Punkt des Bereiches  $D$  ausstrahlenden Asymptotenlinien  $\Gamma$  nur ein einziges Mal treffen. Jetzt unterteilen wir noch  $\Gamma$  in zwei Folgen von Bogenstücken  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  derart, daß jeder gebrochene Zug von Asymptotenlinien, der irgend einen Punkt von  $\Gamma_1$  mit einem Punkt von  $\Gamma'$  verbindet, seine dazwischenliegenden Ecken auf  $\Gamma_2$  oder  $\Gamma'$  hat und gleichzeitig noch die Bedingung erfüllt ist, daß kein gebrochener Zug von Asymptotenlinien möglich ist, der seine Enden auf  $\Gamma_1$  und seine dazwischenliegenden Ecken auf  $\Gamma_2$  hat. Man wird eine für den Bereich  $D$  gültige eindeutige Lösung erhalten, wenn man auf  $\Gamma_1$  den Wert des auf die Schnitt-Elemente  $\Gamma_1$  einwirkenden Spannungszustandes und auf  $\Gamma_2$  einen Zusammenhang zwischen den Komponenten des auf die Schnitt-Elemente  $\Gamma_2$  wirkenden Spannungszustandes annimmt. Diese Lösung erhält man durch eine wiederholte Anwendung der *Riemann'schen* Formel auf die verschiedenen Unterbereiche des

Bereiches D. Hierbei sind keine besonderen analytischen Bedingungen zu erfüllen und die erhaltene Lösung ist immer eine stetige Funktion der Anfangswerte. Im allgemeinen gibt es jedoch keine Lösung, die zu einem Zusammenhang zwischen den Komponenten des auf die verschiedenen Schnittelelemente der gegebenen Kurve C einwirkenden Spannungszustandes gehörte.

Ist die betrachtete Schale eine regelmäßige Fläche, so kann die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden, welche nur eine Ableitung enthält. Diese Gleichung kann integriert werden, da man sie als eine lineare Differentialgleichung auffassen kann. In dem Sonderfall der über einem Viereck errichteten regelmäßigen Flächen genügen zur Bestimmung der Parameter  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  zwei Quadraturen.

### 8. Wahl der Stützungsarten bei den Schalen der dritten Gruppe.

Die Wahl der Stützungsarten hängt bei einer Schale wesentlich davon ab, zu welcher Gruppe sie gehört. Wir unterscheiden zwei Stützungsarten: die einfache Stützung, bei welcher die Stützkräfte nur von einem Parameter abhängen, und die doppelte Stützung, bei welcher die Stützkräfte von zwei Parametern abhängen. Die Spannungs-Komponenten, welche die Schale auf eine einfache Stützung überträgt, müssen infolgedessen einem schon im Voraus bekannten Zusammenhang genügen, während die Spannungs-Komponenten, welche auf eine doppelte Stützung einwirken, unabhängige Werte annehmen können. Übrigens können gewisse Randpartien der Schale auch ungestützt bleiben, so daß man einen freien Rand erhält.

Wir wollen nun untersuchen, wie man über den Rand einer Schale freie Ränder, einfache Stützungen und doppelte Stützungen verteilen kann, um noch einen eindeutigen und stabilen Gleichgewichtszustand zu erhalten.

Wir beschäftigen uns zuerst mit einer Schale der ersten Gruppe. Man kann einen freien Rand für jede Randpartie annehmen, die keine geradlinige Erzeugende enthält, und einmal oder mehrmals von jeder Erzeugenden geschnitten wird. Wenn der freie Rand von allen Erzeugenden geschnitten wird, ist die Verteilung der Spannungen innerhalb der Schale bestimmt und die anderen Ränder müssen doppelte Stützung erhalten. Der zugehörige Gleichgewichtszustand ist stabil. Nun nehmen wir zwei Ränder an, von denen jeder nur einmal alle Erzeugenden schneidet und einfach gestützt ist. Auch hier erhält man einen stabilen Gleichgewichtszustand der Schale, wenn man die übrigen Randpartien, welche nur noch Erzeugende enthalten, doppelt stützt.

Nun zu einer Schale der zweiten Gruppe. Hier sind keine freien Ränder möglich, da der zugehörige Gleichgewichtszustand nicht stabil wäre. Man kann aber den ganzen Rand der Schale einfach stützen. Der zugehörige Gleichgewichtszustand ist eindeutig und stabil.

Wenn wir nun eine Schale der dritten Gruppe betrachten und ihren Rand in drei Gattungen von Bogenstücken  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  und  $\Gamma'$  unterteilen, die den Ausführungen des Abs. 7 entsprechen, so kann man längs  $\Gamma_1$  einen freien Rand, längs  $\Gamma_2$  einfache Stützung und längs  $\Gamma'$  doppelte Stützung annehmen. In diesem Falle erhält man einen eindeutigen und stabilen Gleichgewichtszustand.

## 9. Geometrische Eigenschaften und geometrische Berechnung der Schalen der dritten Gruppe.

Die Schalen der dritten Gruppe zeigen bemerkenswerte geometrische Eigenschaften, welche die Möglichkeit zu einer genauen graphischen Berechnung geben.

Es sollen zuerst die in Abs. 7 eingeführten Parameter  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  und die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  geometrisch gedeutet werden.  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  sind die Längsspannungen, die bei einem komplementären Lastsystem auf die Asymptotenlinien einwirken.  $\varphi$  und  $\psi$  sind krummlinige Koordinaten der Fläche, für welche die Koordinatenlinien die Asymptotenlinien darstellen.

Wir ersetzen nun die Schale durch ein windschiefes Netz, dessen Maschen jene schiefwinkligen geradlinigen Vierecke sind, welche die Asymptotenlinien umgrenzen. Dieses System verhält sich gleich wie die gegebene Fläche und solange die Maschen genügend klein sind, kann man die beiden Systeme miteinander vertauschen. Die Lasten müssen an den Ecken dieses Netzwerkes tangential zur Oberfläche angebracht werden.

Die an einer beliebigen Ecke des Netzwerkes angreifende Einzellast  $F$  kann man nach den zwei Stabrichtungen von zwei verschiedenen Asymptotenlinien zerlegen, die sich in der betrachteten Ecke schneiden. Man überträgt damit die Last  $F$  nach zwei anderen Knotenpunkten der Fläche, wo man in derselben Weise verfährt und so fort. Ist nun der Rand der Fläche in drei Gattungen von Bogenstücken  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  und  $\Gamma'$  entsprechend den im Vorstehenden angegebenen Bedingungen unterteilt und wählt man in passender Weise die beiden Anfangsstäbe, nach denen man die gegebene Kraft  $F$  zerlegt, so kann die Übertragung der Kraft  $F$  nach dem angegebenen Verfahren so erfolgen, daß kein freier Rand getroffen wird. Kommt man dabei zu einem einfach gestützten Rand  $\Gamma_2$ , so kann man hier die Zerlegung nach der Richtung des zweiten Stabes, welcher zu der auf  $\Gamma_2$  liegenden Ecke führt und nach der Richtung der Stützkraft vornehmen. Diesen Vorgang nennt man die Rückstrahlung an der einfachen Stützung. Wenn man in dieser Weise weiter fortfährt, überträgt man schließlich die Last  $F$  auf die doppelt gestützten Zonen. Man hat damit einen Gleichgewichtszustand des Systemes erhalten, der sich mit den Stützkräften verträgt, und damit also stabil ist. Wenn man in derselben Weise für jeden belasteten Knoten des Netzwerkes verfährt, bestimmt man durch eine einfache Zerlegung der Lasten nach der Parallelogrammregel den zu einem komplementären Lastsystem gehörigen Gleichgewichtszustand. Die zugehörige zeichnerische Darstellung kann leicht in der Projektion auf eine beliebige Ebene vorgenommen werden.

An Hand der eben besprochenen geometrischen Bestimmung des Kräfteverlaufes kann man sich das Gleichgewicht in einer Schale der dritten Gruppe als durch einen Kräftefluß in Richtung der Asymptotenlinien erzeugt denken, der von den freien Rändern ausstrahlt, an den einfachen Stützungen reflektiert wird, um an den doppelten Stützungen zu enden. Die gleiche Eigenschaft wird auch bei der Fortpflanzung von Wellen bei Erscheinungen beobachtet, die durch lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit reellen Variablen bestimmt sind und wie diese hängt sie hauptsächlich damit zusammen, daß die Variablen der Gleichungen, die das Gleichgewicht der Spannungen in der betrachteten Schale bestimmen, reell sind.

### 10. Einfache Beispiele für Schalen der dritten Gruppe.

Das einfachste Beispiel einer Schale der dritten Gruppe liefert das hyperbolische Paraboloid. Diese Schale zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, daß die Schubspannung längs der geradlinigen Erzeugenden, abgesehen von einem für die ganze Oberfläche nahezu konstanten Faktor, gleich der auf die Flächen-einheit der Projektion auf eine beliebige, nicht zur Achse parallele Ebene bezogenen Komponente der Last in Richtung der Achse des Paraboloids ist.

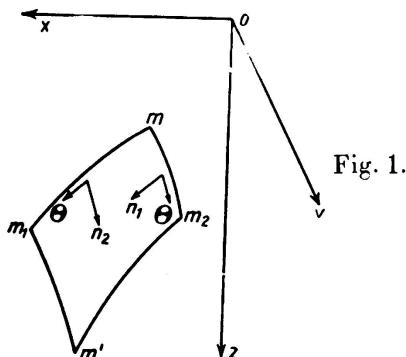


Fig. 1.

Andererseits pflanzen sich die aus dem Komplementärsystem der Lasten herrührenden Beanspruchungen längs der Erzeugenden fort, ohne andere Erzeugende in Mitleidenschaft zu ziehen. Die an einem kleinen Element der Schale angebrachte tangentiale Beanspruchung ist also nur in den durch die Erzeugenden gebildeten Streifen spürbar. Nach dem hyperbolischen Paraboloid ist die einfachste Schale der dritten Gruppe das einschalige Hyperboloid. Diese Schale hat mit dem Paraboloid die Eigenschaft gemein, daß die aus dem Komplementärsystem herrührenden Lasten sich längs einzelnen Erzeugenden fortpflanzen, ohne die anderen Erzeugenden in Mitleidenschaft zu ziehen. Sie unterscheidet sich von dem hyperbolischen Paraboloid nur durch den komplizierteren Faktor der Proportionalität zwischen der Schubspannung und der Dichte der aufgebrachten Last.

Nun zu den regelmäßigen, nicht abwickelbaren Flächen und in erster Linie zu den Konoiden. Für diese Flächen hat der Koeffizient der Proportionalität zwischen der Schubspannung auf die Asymptotenlinien und der Dichte der aufgebrachten Last eine bedeutend kompliziertere Form als für die zuerst betrach-

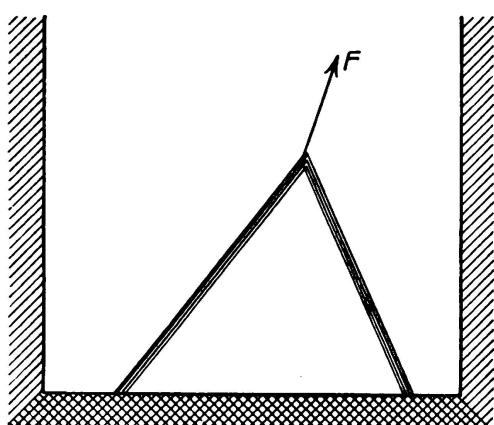


Fig. 2.

Fortpflanzungsart der Tangentialkräfte in einem Regelviereck.

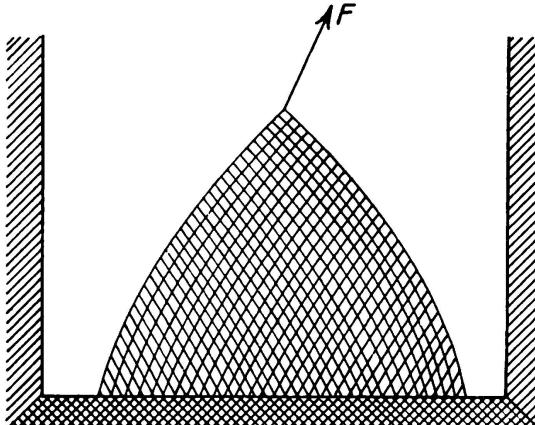


Fig. 3.

Fortpflanzungsweise der Tangentialkräfte in irgend einer Oberfläche der 3. Gruppe.

teten Flächen; sie zeichnen sich aber vor diesen Flächen dadurch aus, daß die aus dem Komplementärsystem herrührenden Kräfte sich bei der Fortpflanzung über die Oberfläche ausbreiten, wobei sich die krummen Asymptotenlinien auf die geradlinigen Erzeugenden der Fläche abstützen, so daß die an einem kleinen Element angreifende Tangentialkraft einen fächerförmigen Bereich der Oberfläche zur Mitwirkung heranzieht, genau wie bei den allgemeinsten Flächen der dritten Gruppe.

Die Fig. 2 und 3 zeigen den Unterschied zwischen den regelmäßigen über einem Viereck errichteten Flächen und den anderen Flächen der dritten Gruppe in Bezug auf den soeben besprochenen letzteren Punkt.

### 11. Schlußfolgerungen.

Wenn man von den regelmäßigen abwickelbaren Flächen, wie Zylinder und Kegel absieht, die für sich eine besondere Klasse von Schalen bilden, so scheidet sich die Gesamtzahl der übrigen doppelt gekrümmten Schalen je nach dem Vorzeichen der Krümmungen in zwei große Gruppen. Bei diesen beiden Gruppen von Schalen spielen die Asymptotenlinien die wesentliche Rolle bei der Übertragung der Tangentialkräfte und infolgedessen auch bei der Bestimmung der Art der zu einem eindeutigen und stabilen Gleichgewicht gehörigen Stützkräfte. Wenn die Asymptotenlinien imaginär sind, kann die Schale keine freien Ränder haben, sie kann jedoch am ganzen Umfang durch einfach gestützte Ränder begrenzt werden. Das einfachste Beispiel einer solchen Stützung bildet eine ebene Scheibe, die eine große Steifigkeit in Richtung der Ebene und keine nennenswerte Steifigkeit normal zu der Ebene aufweist. Sind die Asymptotenlinien jedoch reell, so kann man die Ränder der Schale in freie Ränder, einfach gestützte Ränder und doppelt gestützte Ränder, wie im Vorstehenden angegeben, nach bestimmten Regeln unterteilen. Da die doppelt gestützten Ränder vom konstruktiven Standpunkt aus Schwierigkeiten bieten können, ist es von Vorteil, ihre Bedeutung auf ein Minimum einzuschränken. Dies kann auf verschiedene Weise durch entsprechende Formung der Fläche erreicht werden.

Im Hinblick auf die einfachste Form der Berechnung der Schale kann man auf Grund der vorstehenden Betrachtungen ersehen, daß unter den doppelt gekrümmten Schalen besonders die über einem Viereck errichteten regelmäßigen Flächen zu ganz einfachen Rechenmethoden führen.

### Zusammenfassung.

Bei der Konstruktion von Schalengewölben in Eisenbeton handelt es sich zunächst um statisch bestimmte, von der Elastizitätstheorie unabhängige Probleme. Der Gesamtbereich dieser Fragen wird unter Ausschluß anderer Probleme behandelt, die bei der Ausführung von Schalen infolge der entstehenden Verformungen auftauchen, vor allem aber auch unter Ausschluß der Probleme der Verträglichkeit jener Verformungen, welche der auf statisch bestimmtem Wege errechnete Spannungszustand bedingt.

Die allgemein angenommene Hypothese einer gleichmäßigen Verteilung der Spannungen über die Querschnittsdicke wird benutzt, so daß man sich die Schale in ihrer Mittelfläche vereinigt denken kann.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide