

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Répartition des pressions sous une semelle élastique chargée
uniformément et placée sur un sol élastique isotrope

Autor: Borowicka, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-3121>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

VIII 3

Répartition des pressions sous une semelle élastique chargée uniformément et placée sur un sol élastique isotrope.

Druckverteilung unter einem gleichmäßig belasteten, elastischen Plattenstreifen, welcher auf der Oberfläche des elastisch-isotropen Halbraumes liegt.

The Distribution of Pressure Under a Uniformly Loaded Elastic Strip Resting on Elastic-Isotropic Ground.

H. Borowicka,

Assistent an der Technischen Hochschule, Wien.

Dans l'étude mathématique de la répartition des pressions sous une semelle élastique, nous sommes contraints de faire des hypothèses tant pour la semelle que pour le terrain sur lequel elle repose. L'hypothèse la plus simple consiste à admettre que les affaissements sont proportionnels aux pressions (hypothèse de *Winkler*). Cette façon de procéder permettait de traiter assez simplement toutes les questions mathématiques. Cette hypothèse fut cependant rejetée, tout spécialement par les physiciens du sol, car, suivant cette théorie, l'affaissement est indépendant de la grandeur de la surface de charge et la charge ne produit un affaissement qu'au-dessous de sa surface d'application. Il était donc nécessaire d'étudier la répartition des pressions sous une semelle élastique reposant sur un sol élastique-isotrope. La théorie de *Boussinesq* ne tient que partiellement compte des propriétés d'un sol naturel, mais elle fournit d'excellents résultats aux points de vue physique et qualitatif. L'étude du problème à l'aide de fonctions finies conduit à des développements très compliqués résolubles que dans les cas les plus simples. Il faut donc chercher une issue dans les développements en séries.

Nous voulons étudier ici la répartition des pressions sous une semelle élastique reposant à la surface d'un sol élastique-isotrope. Il faut évidemment admettre qu'il n'y a aucun frottement entre la semelle et le terrain. Nous avons présenté un travail semblable pour la plaque circulaire au congrès de mécanique du sol tenu à Cambridge (16).

Nous avons introduit les notations suivantes:

- E_P : module d'élasticité de la semelle,
- E_B : module d'élasticité du sol élastique-isotrope,
- m_P : constante de Poisson de la semelle,
- m_B : constante de Poisson du sol,
- a : demi-largeur de la semelle,
- h : épaisseur de la semelle,
- N : rigidité de la dalle.

Désignons par ω la déformation verticale de la surface du sol; dans la région $x < a$ (fig. 1), ω doit en même temps représenter la flèche de la semelle. Il en résulte qu'à la surface du sol élastique-isotrope les relations suivantes doivent être satisfaites:

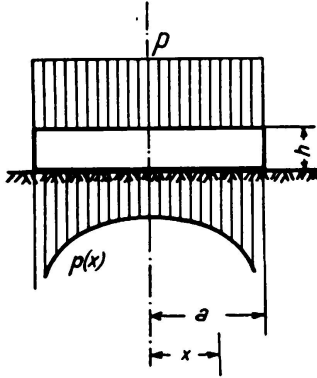


Fig. 1.

$$\left. \begin{array}{ll} x > a & \sigma_z = 0 \quad \omega \text{ quelconque} \\ x < a & \sigma_z = p(x) \quad \Delta\Delta\omega = \frac{1}{N} [p - p(x)] \end{array} \right\} \quad (1)$$

L'équation différentielle $\Delta\Delta\omega = \frac{1}{N} [p - p(x)]$ est généralement appelée équation de la plaque. L'opérateur de Laplace, appliqué deux fois à ω , fournit dans le cas considéré $\frac{d^4\omega}{dx^4}$.

Considérons d'abord la flèche de la plaque. La solution de l'équation différentielle homogène $\frac{d^4\omega}{dx^4} = 0$ peut s'écrire sous la même forme que celle de la poutre:

$$\omega_1 = C_0 + C_2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad (2)$$

On pose comme intégrale particulière de l'équation non homogène une série exponentielle à coefficients inconnus:

$$\omega_2 = \sum_{n=2}^{\infty} A_{2n} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} \quad (3)$$

La fonction inconnue $p(x)$ est également représentée par sa série exponentielle.

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} \quad (4)$$

L'équation de la plaque fournit la relation entre les coefficients A_{2n} et B_{2n} . En comparant les coefficients on obtient:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a^4}{24N} (p - B_0) \\ A_{2n+4} &= -\frac{a^4}{N} \frac{2n!}{(2n+4)!} B_{2n} \end{aligned} \quad (5)$$

La flèche de la plaque prend donc la forme:

$$\omega = C_0 + C_2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{pa^4}{24N} \left(\frac{x}{a}\right)^4 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^4}{N} \frac{2n!}{(2n+4)!} B_{2n} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+4} \quad (6)$$

Au point $x = a$ aucun moment d'encastrement n'agit, on doit donc avoir $\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)_{x=a} = 0$. Cette condition donne pour C_2 :

$$C_2 = -\frac{pa^4}{4N} + \frac{a^4}{2N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} B_{2n} \quad (7)$$

Dans l'équation (6), la flèche ω est exprimée en fonction de x , respectivement des coefficients inconnus B_{2n} . Ainsi que nous l'avons déjà dit, cette flèche est en même temps la déformation élastique de la surface du sol dans le domaine de $x < a$. Désignons les variables par ξ et ζ (fig. 2) on obtient pour l'affaissement au point x :

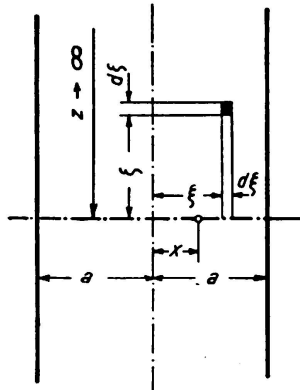


Fig. 2.

$$d\omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi r} p(\xi) \cdot 2 \frac{m_B^2 - 1}{m_B^2 \cdot E_B} d\xi d\zeta$$

$$\frac{m_B^2 E_B}{m_B^2 - 1} = M$$

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + \zeta^2}$$

$$d\omega = \frac{2}{\pi M} p(\xi) d\xi \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + \zeta^2}}$$

$$= \frac{2}{\pi M} p(\xi) d\xi (\ln [z + \sqrt{(\xi - x)^2 + z^2}] - \ln |\xi - x|)$$

Si on fait tendre $z \rightarrow \infty$, on obtient pour ω des valeurs infiniment grandes. On forme donc la différence entre ω_0 (flèche au milieu de la plaque) et ω

$$d\omega_0 - d\omega = \frac{2}{\pi M} p(\xi) d\xi \left\{ \ln \frac{z + \sqrt{\xi^2 + z^2}}{z + \sqrt{(\xi - x)^2 + z^2}} + \ln |\xi - x| - \ln |\xi| \right\}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \ln \frac{z + \sqrt{\xi^2 + z^2}}{z + \sqrt{(\xi - x)^2 + z^2}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{\xi}{z}\right)^2 + 1}}{1 + \sqrt{\left(\frac{\xi - x}{z}\right)^2 + 1}} = \ln 1 = 0$$

On obtient donc:

$$\omega_0 - \omega = \frac{2}{\pi M} \left\{ \int_x^a p(\xi) \ln (\xi - x) d\xi + \int_{-a}^x p(\xi) \ln (x - \xi) d\xi - 2 \int_0^a p(\xi) \ln \xi d\xi \right\}$$

Introduisons dans cette intégration suivant l'équation (4) $p(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \left(\frac{\xi}{a}\right)^{2n}$ et remplaçons y les fonctions logarithmiques par des séries exponentielles, on obtient:

$$\omega_0 - \omega = \frac{4}{\pi M} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{a}{2n+1} \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r-1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2r} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r} \left(\frac{x}{a}\right)^{2r} - \sum_{r=1}^n \frac{1}{2n-2r+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2r} \right\} \quad (8)$$

On peut encore transformer l'équation (8) en permutant les sommes:

$$\omega_0 - \omega = \frac{4a}{\pi M} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+2r} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r} \left(\frac{x}{a}\right)^{2r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n+1} - \sum_{r=1}^n \left(\frac{x}{a}\right)^{2r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n-2r+1)(2n+1)} \right\} \quad (9)$$

De l'équation (6) on tire pour $x = 0$, $\omega_0 = C_0$ et l'on obtient:

$$\omega_0 - \omega = -C_2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{pa^4}{24N} \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^4}{N} \frac{2n!}{(2n+4)!} B_{2n} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+4} \quad (10)$$

On peut encore ajouter la condition d'équilibre

$$p = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a B_{2n} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n+1} \quad (11)$$

Les équations (9) et (10) doivent être identiques. Cette condition est satisfaite lorsque les coefficients de chaque puissance de $\left(\frac{x}{a}\right)$ sont égaux dans les équations (9) et (10). On obtient de cette façon un nombre infini d'équations pour les infiniment nombreuses inconnues B_{2n} . Si par exemple il faut établir la même équation, il faut trier tous les termes avec $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m}$. Dans l'équation (10) il faut donc poser $2n+4=2m$ ou $n=m-2$. Dans l'équation (9) on a dans la première parenthèse $2n+2r=2m$ ou $r=m-n$. Le coefficient est donc $\sum_{n=0}^{m-1} \frac{B_{2n}}{(2n+1)(2m-2n-1)}$. Dans les deuxième et troisième termes entre parenthèses de l'équation (9) il faut poser $r=m$. On obtient ainsi pour les coefficients de $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m}$ (suivant l'équation (11)) $\frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n+1} = \frac{p}{2m}$ et $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n-2m+1)(2n+1)}$.

On obtient ainsi les équations suivantes en désignant par

$$K = \frac{2N}{Ma^3} = \frac{1}{6} \frac{m_B^2 - 1}{m_P^2 - 1} \frac{m_P^2 E_P}{m_B^2 E_B} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \quad (12)$$

et en remplaçant C_2 par sa valeur donnée par l'équation (7)

$$\left. \begin{aligned} p &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n+1} \\ \frac{p}{2} + \frac{p\pi}{8K} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n+1)(1-2n)} + \frac{\pi}{4K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n+2)(2n+1)} \\ \frac{p}{4} - \frac{p\pi}{48K} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n+1)(3-2n)} - \frac{\pi B_0}{48K} \\ \vdots & \\ \frac{p}{2m} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n+1)(2m-1-2n)} - B_{2m-4} \frac{\pi}{2K} \frac{(2m-4)!}{2m!} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Il est facile de constater que les équations (13) sont satisfaites pour $K = \infty$ par $B_{2n} = \frac{2}{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} p$. Ce sont cependant les coefficients de la série exponentielle de la fonction

$$p(x) = \frac{2}{\pi} \frac{p \cdot a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (14)$$

Pour $K = 0$ on a $B_0 = p$ alors que tous les autres coefficients sont nuls. La charge répartie se trouve donc immédiatement sur le sol élastique-isotrope.

Nous avons calculé les équations (13) pour $K = \frac{\pi}{3}$, $K = \frac{\pi}{10}$ et $K = \frac{\pi}{30}$ et $p = 1 \text{ kg/cm}^2$. Les résultats sont représentés à la fig. 3. Aux bords, les contraintes sont infinies pour des rigidités différentes de zéro. L'exactitude de ces résultats peut être illustrée par le raisonnement suivant: Dans une plaque de rigidité infinie la déformée de la plaque est un plan. La ligne représentant la déformée de la surface du sol présente un angle aigu sur les bords. Si par contre

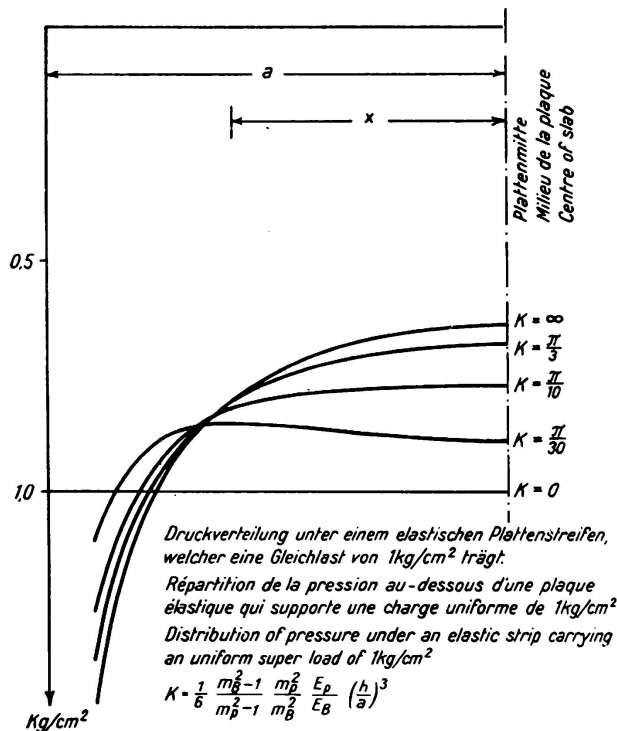


Fig. 3.

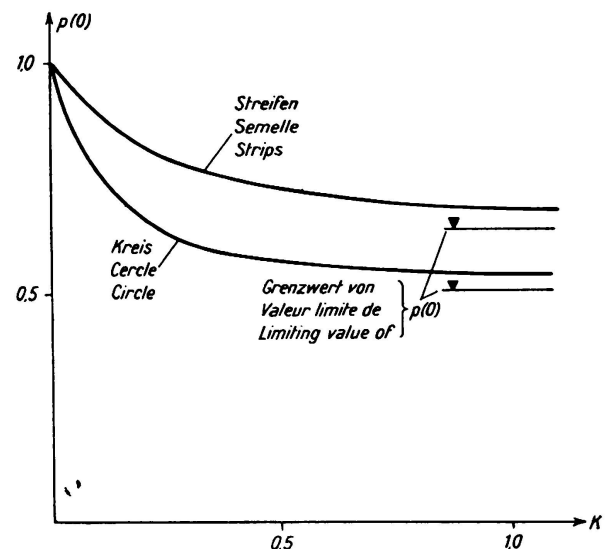


Fig. 4.

la plaque a une rigidité finie cet angle devient de moins en moins aigu sans cependant disparaître. Il en résulte que la pression aux bords devient également infinie — quoique plus lentement peut-être —. Si la plaque est soumise à une charge de $p \text{ kg/cm}^2$, au lieu de 1 kg/cm^2 , les ordonnées des courbes représentées à la fig. 3 sont à multiplier par p . La résolution des équations 13 est assez laborieuse, car il est nécessaire de résoudre un grand nombre d'équations. A la fig. 4 nous avons représenté la valeur de la pression au milieu de la plaque en fonction de K pour la semelle et la plaque circulaire (16). Les courbes sont également valables pour 1 kg/cm^2 . Pour la plaque circulaire et pour la semelle elles ont été calculées avec un coefficient de Poisson $m = 4$.

Boussinesq démontre dans son livre: Application des potentiels (Paris 1885), que la répartition des pressions sous une plaque circulaire absolument rigide s'obtient de la façon simple que voici: Imaginons que la charge agissant sur la plaque est uniformément répartie sur une demi-sphère dont le cercle de base

correspond au bord de la plaque, la projection sur la surface du sol de la charge ainsi répartie fournit la répartition cherchée des pressions. Monsieur *O.K.Fröhlich*, qui m'a proposé l'étude de ces questions, a transposé la construction de *Boussinesq* à la semelle rigide et a recommandé le contrôle pour un cas limite du calcul de la semelle élastique. Ainsi que le montre l'équation (14) la répartition des tensions pour la semelle rigide est justifiée par le procédé de *Boussinesq* employé pour le cas étudié.

Bibliographie.

- ¹ *Winkler*: Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prague 1867.
- ² *Zimmermann*: Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin 1888.
- ³ *Fröhlich*: Berechnung von Fundamenten unter Berücksichtigung der Elastizität des Baugrundes. „Beton und Eisen“ 1913, fasc. 15 et 16.
- ⁴ *Hayashi*: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage und ihre Anwendung auf den Tiefbau. Berlin 1921.
- ⁵ *Chwalla*: Die Stabilität eines elastisch gebetteten Druckstabes. Zeitschrift für angew. Math. 1927, fasc. 4.
- ⁶ *Schleicher*: Über Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Berlin 1925. Nochmals Kreisplattenfundamente. „Beton und Eisen“ 1925, fasc. 12.
- ⁷ *Scheidig*: Nochmals Kreisplattenfundamente. „Beton und Eisen“ 1926, fasc. 6. Die Berechnungsgrundlagen durchgehender Fundamente und die neue Baugrundforschung. „Bautechnik“ 1931, fasc. 19.
- ⁸ *Wieghardt*: Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. „Zeitschrift für angew. Math.“ 1922.
- ⁹ *Prager*: Zur Theorie elastisch gelagerter Konstruktionen. „Zeitschrift für angew. Math.“ 1927, fasc. 5.
- ¹⁰ *Fröhlich*: Die Bemessung von Flachgründungen und die neuere Baugrundforschung. „Beton und Eisen“ 1935, fasc. 12.
- ¹¹ *Melan*: Die Verteilung des Druckes durch eine elastische Schichte. „Österr. W. für den öffentl. Baudienst“ 1918, p. 394. Die Druckverteilung durch eine elastische Schichte. „Beton und Eisen“ 1919, fasc. 7/8. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbscheibe. „Zeitschrift für angew. Math.“ 1932, fasc. 6.
- ¹² *Schleicher*: Zur Theorie des Baugrundes. „Bauingenieur“ 1926, p. 931 et 949.
- ¹³ *Fröhlich*: Druckverteilung im Baugrunde mit besonderer Berücksichtigung der plastischen Erscheinungen. Vienne 1934.
- ¹⁴ *Wolf*: Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und im Halbraum bei anisotropem Material. „Zeitschrift für angew. Math.“ 1935, fasc. 5.
- ¹⁵ *Terzaghi et Fröhlich*: Theorie der Setzung von Tonschichten. Vienne et Leipzig 1936.
- ¹⁶ *Borowicka*: Influence of Rigidity of a Circular Foundation Slab on the Distribution of Pressures over the Contact Surface. Proceedings of the International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering 1936 Harvard University, Cambridge, Mass.