

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Tuyaux de béton armé à parois épaisses: propositions en vue
d'améliorer leur rendement statique

Autor: Olszak, W.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-3101>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

VI 6

Tuyaux de béton armé à parois épaisses. Propositions en vue d'améliorer leur rendement statique.

Dickwandige Eisenbetonleitungen. Vorschläge zur Verbesserung ihres statischen Wirkungsgrades.

Thick-Walled Reinforced Concrete Pipes: Proposals for Increasing their Statical Efficiency.

Dr. Ing. Dr. techn. W. Olszak,
Zivilingenieur, Katowice (Pologne).

L'utilisation très défectueuse des matériaux est un fait caractéristique des constructions à parois épaisses — armées ou non — soumises à des forces normales, uniformément réparties sur tout le pourtour (fig. 1). Cela ressort clairement des formules connues de Lamé qui définissent l'état de tension dans ces ouvrages à parois épaisses, en admettant un comportement élastique-*isotrope*. On dimensionne la section d'un tuyau à paroi épaisse, d'un tunnel ou d'un puits du même genre, de façon que les *contraintes* maxima ne dépassent pas certaines valeurs considérées comme « admissibles »; cette méthode est encore prescrite dans la plupart des règlements officiels comme base du calcul statique. Par suite de la pointe que présente le diagramme des efforts tangentiels σ'_t sur le bord intérieur, pointe qui peut tout au plus atteindre la valeur admissible, $\sigma'_{t\max} = \sigma_{\text{adm}}$, on peut conclure que les autres parties de la section ne travaillent qu'à une très faible fraction de leur capacité¹ (fig. 2).

Si l'on ne base plus le dimensionnement sur les contraintes admissibles mais sur la valeur de la *sollicitation* encore admissible — procédé qui paraît préférable au premier du point de vue statique —, les conditions sont encore nettement plus défavorables dans certaines circonstances. La valeur de la sollicitation σ'_{red} (fig. 2) est donnée, dans les ouvrages soumis à une pression hydrostatique intérieure p , par une courbe plus raide que celle des contraintes tangentielles σ'_t . On le constate sans

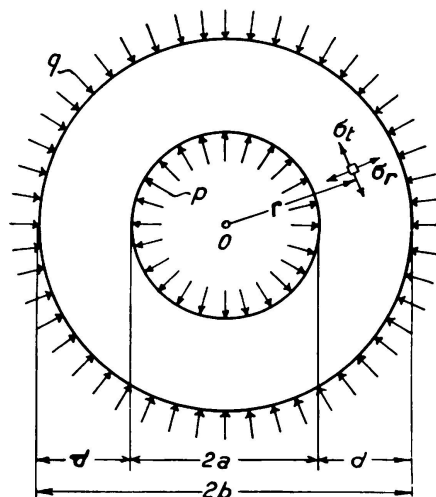


Fig. 1.

Disposition générale.

¹ Les contraintes radiales σ'_r sont ici laissées de côté et le seront souvent dans la suite, car elles sont moins intéressantes.

difficulté lorsqu'on se représente l'allure des contraintes radiales σ'_r . La pointe de sollicitation que l'on obtient ainsi sur le bord intérieur $\sigma'_{red\ max}$ est très désavantageuse, non seulement pour le comportement statique de la construction, mais, dans les conduites forcées spécialement, parce qu'elle peut engendrer des phénomènes très dangereux. Des fissures et autres détériorations peuvent partir de cette pointe si la charge admise est dépassée, par suite d'un coup de bélier ou de tout autre phénomène.

Nous trouvons de telles conditions dans les *tuyaux* non armés et les constructions analogues à parois épaisses, qui peuvent être considérés comme des ouvrages *isotropes*. Ces ouvrages sont également élastiques dans toutes les directions et rien

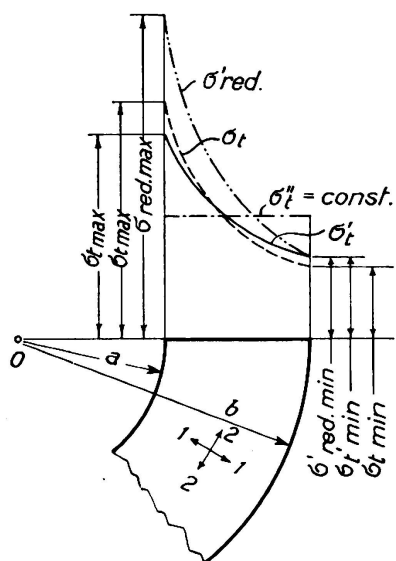


Fig. 2.

Distribution des contraintes tangentielles:

- σ'_t dans un matériau isotrope ($E_1 = E_2$)
- - - σ_t dans un matériau orthotrope (polairement ou cylindriquement) ($E_2 > E_1$)
- · - · - $\sigma''_t = \text{const.}$ pour une meilleure exécution (matériau inhomogène orthotrope) ($E_2 \text{ var.}$)
- · · · σ'_{red} sollicitation dans un matériau isotrope.

n'empêche l'emploi des formules connues de Lamé, dont nous venons de parler. Ces phénomènes sont encore beaucoup plus défavorables lorsque l'on renforce la section par une *armature*. On prévoit une armature lorsque, par exemple, on veut avec certitude supprimer les contraintes de traction dans le béton des conduites forcées. Une armature est nécessaire lorsque la pression intérieure p ou la pression extérieure q ont une valeur élevée; on ne peut pas exagérer l'épaisseur des parois, pour des raisons simplement pratiques d'abord, car on aurait affaire à des éléments de construction trop lourds et trop peu maniables et ensuite parce que l'accroissement de résistance n'est pas proportionnel à l'accroissement d'épaisseur, au contraire, la résistance croît toujours plus lentement avec l'accroissement de l'épaisseur (par rapport au diamètre du tuyau). L'accroissement de la résistance aux forces normales internes ou externes ne serait proportionnel à l'épaisseur que si la distribution des efforts était telle que les contraintes tangentielles moyennes σ''_t gardaient la même valeur (en maintenant $\sigma'_{t\ max} = \sim \sigma_{adm}$) pour toutes les épaisseurs de parois ($\alpha = \frac{a}{b} = \text{valeur quelconque, en tenant compte des désignations introduites à la fig. 1}$). Mais nous savons que σ''_t décroît rapidement avec l'accroissement de l'épaisseur du tuyau. Pour l'exprimer numériquement, il suffit de faire le rapport de la contrainte moyenne de toute la section à la contrainte maxima de la section

$$\sigma''_t = \eta' \sigma'_{t\ max}. \quad (1)$$

Pour les tuyaux isotropes épais

$$\eta' = \frac{\sigma''_t}{\sigma'_{t \max}} = \left(\frac{ap}{b-a} \right) : \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} p \right) = \alpha \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha^2}, \quad (2)$$

lorsque, pour simplifier, on ne tient compte que de la pression normale interne p , c'est-à-dire lorsque $q = 0$.

Le « coefficient d'utilisation » ou le « rendement statique » η' d'une construction, ainsi que je désignerai cette valeur dans la suite, a été calculé au tableau I pour différentes relations $\alpha = \frac{a}{b}$:

Tableau I.

α	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
η'	0,00	0,23	0,48	0,60	0,71	0,88	1,00

Ce tableau montre que le matériau est d'autant moins bien utilisé que l'épaisseur est plus grande; l'économie d'une construction décroît donc avec l'augmentation de l'épaisseur. On voit que pour des parois d'épaisseur moyenne il y a déjà gaspillage de matériaux.

Il faut encore faire remarquer qu'une construction non armée est impossible dès que $p > \sigma_{adm}$ (resp. $q > \frac{\sigma_{adm}}{2}$) car, dans ce cas, il est impossible de réduire la pointe de tension au-dessous de $\sigma'_{t \max} = p$ (resp. $\sigma'_{t \max} = -2q$) même si l'épaisseur de la section est infinie ($\alpha = \frac{a}{b} = 0$).

On a donc recours dans la pratique à une armature d'acier que l'on répartit en plusieurs cercles concentriques (ordinairement au moins deux). On réduit ainsi la contrainte de traction (ou de compression) du béton dans le rapport $\frac{100}{100 + nF_2}$, si l'on désigne par F_2 le pourcentage d'armature périphérique et

par n le rapport des modules d'élasticité de l'acier et du béton $n = \frac{E_a}{E_b}$. Il se produit cependant un phénomène inverse, engendré par la moins grande compressibilité de l'élément dans ce sens tangentiel, c'est-à-dire par son *anisotropie*; la répartition des tensions devient encore plus irrégulière sur l'épaisseur de la paroi, la courbe des σ_t (fig. 2) devient donc plus inclinée. La pointe de tension sur le bord intérieur du tuyau devient plus grande et l'influence favorable de l'armature disparaît partiellement.

L'exposé mathématique de cette influence ne présente aucune difficulté. L'anisotropie (aeolotropie) introduite par l'armature peut être expliquée par le fait que le comportement élastique du matériau n'est pas le même dans les trois directions principales considérées dans les tuyaux à parois épaisses et autres constructions de béton armé du même genre. Ces trois directions sont données: 1° par la direction du rayon r (pourcentage d'armature F_1 , module d'élasticité E_1

et rapport m_1); 2° par la tangente t aux cercles concentriques, rapportée à l'axe du tuyau considéré comme origine (F_2 , E_2 , m_2) et 3° par la génératrice de la construction cylindrique (F_3 , E_3 , m_3). Par opposition à l'anisotropie linéaire-rectangulaire, que l'on appelle aussi « orthotropie », il règne dans notre tuyau une anisotropie curviligne que j'appellerai « *orthotropie polaire* » (pour les disques minces) et « *orthotropie cylindrique* » (pour les tuyaux ou cylindres de longueur finie ou infinie).²

Les modules d'élasticité de *Young* peuvent dans certains cas être fortement différents pour ces trois directions (E_1 , E_2 , E_3), de même que les nombres de Poisson ou coefficients de contraction (m_1 , m_2 , m_3). Ces constantes ne sont cependant pas indépendantes les unes des autres, au contraire, elles ont entre elles une relation très simple:

$$m_1 E_1 = m_2 E_2 = m_3 E_3 \quad (3)$$

La valeur de ce produit constant sera désignée dans la suite par l'abréviation M . Les modules d'élasticité transversale G n'ont pas d'importance dans ce qui suit.

Si les constantes d'élasticité ont des valeurs différentes dans les trois directions principales, il faut l'attribuer au mode d'exécution des tuyaux (méthode centrifuge) et avant tout au degré d'armature.

Désignons par F_i le pourcentage d'armature dans une direction i ($i = 1, 2, 3$); nous pouvons dire (en accord avec le Prof. Dr. Ing. *M. T. Huber*),³ que le module d'élasticité du complexe est dans cette direction

$$E_i = E_b \lambda_i \quad \text{où} \quad \lambda_i = 1 + (n - 1) \frac{F_i}{100}, \quad (4)$$

n étant le rapport E_a/E_b que nous connaissons déjà. De cette façon, le complexe irrégulièrement anisotrope est remplacé par un modèle idéal, régulièrement orthotrope. Cette simplification, très importante pour la considération claire et l'exposé numérique simple de ce qui suit, est d'autant plus exacte que l'armature est plus dense par rapport aux autres dimensions du corps. Il faudra agir avec circonspection à ce point de vue en transposant à la réalité les résultats acquis de la sorte.⁴

Les coefficients de contraction m_i ($i = 1, 2, 3$) sont plus difficiles à concevoir, d'abord parce que les résultats d'essais y relatifs sont très peu nombreux. Nous avons montré ailleurs (WO 17) comment il fallait évaluer ces valeurs m_i qui,

² Nous avons pensé primitivement traiter ici toute la question des disques polairement orthotropes et des tuyaux cylindriquement orthotropes. Du fait que l'on a limité l'ampleur des différentes contributions, je me suis décidé à réserver pour une autre publication l'étude complète de cette question („Beiträge zur Statik von polarorthotropen Scheiben und zylinderorthotropen Rohren“, Der Bauingenieur 1936, No. 31/32). Dans la présente étude je me référerai souvent à cette publication que je désignerai par l'abréviation (WO 17).

³ *M. T. Huber*: Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten. Académie des sciences techniques, Varsovie 1929, p. 13.

⁴ Pour concevoir avec exactitude cette discontinuité du point de vue de la théorie de l'élasticité, il faudrait abandonner le modèle anisotrope, homogène, plus simple, pour traiter le problème comme un problème spatial (symétrique par rapport aux axes) de la liaison inhomogène de deux composants isotropes, un peu comme le Dr. Ing. *A. Freudenthal* a traité la question des colonnes frettées („Verbundstützen für hohe Lasten“, Berlin 1933). Pour ceux que la question intéresse et que le travail nécessaire n'effraie pas, ce serait une occupation du plus haut intérêt.

comme nous le verrons, sont importantes pour déterminer l'état de tension et le degré de sollicitation des constructions complexes anisotropes que nous considérons.

Les états de tension et de déformation d'une construction cylindrique, soumise à des pressions intérieure et extérieure constantes, ne dépendent pas de l'ordonnée z ; on se trouve donc en face d'un « problème plan » de la théorie d'élasticité. Nous avons admis ici une symétrie circulaire tant dans la disposition géométrique de la section que dans la répartition des forces extérieures, il en résulte que les états de tension et de déformation ne dépendent pas de l'angle au centre φ . La répartition des tensions n'est donc influencée que par une seule variable, le rayon r . Au lieu de dérivées partielles on a donc des différentielles totales.

Citons d'avance un résultat très important que nous avons obtenu: il ne faut pas confondre l'état plan de *déformation* avec l'état plan de *tension* dans un matériau anisotrope — ce qui est en opposition fondamentale avec les propriétés d'un matériau isotrope. Dans ce dernier cas, on peut souvent considérer indifféremment un disque prélevé à l'intérieur d'un cylindre infiniment long, de telle sorte que les surfaces avant et arrière d'une telle plaque ne peuvent se déformer qu'en elles-mêmes, sous l'effet de la contrainte exercée par les parties adjacentes, ou un disque semblable prélevé à l'extrémité libre du cylindre, c'est-à-dire qui peut se déformer en toute liberté. Dans ces deux cas, les rapports de tension sont toujours identiques dans les plans isotropes du disque (à l'exclusion des cas où les constantes du matériau sont à introduire dans la solution). On peut toujours traiter en même temps ces deux cas dans les milieux isotropes.⁵

Il n'en est plus ainsi dans un matériau anisotrope. Il faut tenir compte non seulement de la différence essentielle entre l'état plan de déformation et l'état plan de tension mais encore des écarts effectifs qui existent entre les différentes répartitions de tensions elles-mêmes.

Cependant dans la pratique on peut négliger cette différence sans hésitation parce que, comme nous le verrons bientôt, cette différence n'est donnée que par les « coefficients de structure » s et t , très peu différents l'un de l'autre, dans les équations des contraintes radiales et tangentielles, σ_r et σ_t . Le problème anisotrope plan doit être distinct pour des disques annulaires minces, pour des tuyaux de longueur finie et pour des tuyaux de longueur infinie. L'étude mathématique de ces problèmes doit également être différente.

Le manque de place ne nous permet pas d'exposer la méthode de calcul à adopter pour les différents cas et leurs variantes. Nous renvoyons le lecteur au travail (WO 17) cité à la note ²). Afin de mieux faire comprendre le résultat final, nous voulons montrer le chemin suivi pour le cas le plus simple du disque annulaire de faible épaisseur (profondeur).

Nous sommes partis de la condition d'équilibre

$$\sigma_t = \frac{d}{dr} [r\sigma_r] \quad (5)$$

⁵ cf. par ex. Olszak: „Der ebene Formänderungs- und Spannungszustand der Elastizitätstheorie“, Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines 1936, fasc. 15/16, où nous avons montré que ces deux cas limites plans pouvaient *toujours* être traités en même temps dans un matériau isotrope, même lorsqu'il s'agit de domaines fortement reliés entre eux ou lorsque les conditions aux appuis sont des déplacements (et non pas des contraintes).

d'un élément annulaire limité par deux coupes radiales voisines et deux cercles concentriques voisins.

Dans la plupart des cas de la pratique le disque annulaire est armé principalement dans la direction circulaire; le module d'élasticité dans cette direction, E_2 , est donc toujours plus grand que le module d'élasticité E_1 , dans le sens du rayon vecteur r , donc $E_2 > E_1$. Le calcul de E_2 se fait à l'aide de l'équation (4). (Les conditions peuvent être différentes, dans un volant par exemple où l'on peut avoir une armature radiale; dans ce cas la méthode reste en principe la même, les résultats numériques varient seulement d'une façon correspondante). Quant à l'influence des méthodes de préparation et de mise en oeuvre du béton, telles que la vibration et le procédé centrifuge, nous ne savons pas quelle est leur influence sur le rapport $\frac{E_2}{E_1}$ car aucun essai n'a été exécuté dans ce domaine.

En tenant compte du comportement élastique du matériau, différent dans les deux directions principales, curvilignes orthogonales « 1 » et « 2 », on peut écrire de la façon suivante les relations fondamentales entre les composantes de déformation et de tension que nous étudions et qui contiennent l'indétermination statique du problème élastique de tout milieu continu:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = + \frac{1}{E_1} \sigma_r - \frac{1}{m_2} \frac{1}{E_2} \sigma_t, \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r} = - \frac{1}{m_1} \frac{1}{E_1} \sigma_r + \frac{1}{E_2} \sigma_t, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

où u est l'agrandissement du rayon.

On voit que nous avons complètement négligé la composante de tension σ_z , $\sigma_z = 0$, ce qui est important et caractéristique pour le cas considéré de l'état plan de tension (ou état quasi plan de tension, comme le désignent bien des savants)⁶ de la plaque (disque) de faible épaisseur (profondeur). Cet état se réalise avec d'autant plus d'exactitude dans la pratique que l'épaisseur du disque est plus faible par rapport aux autres dimensions. Il faut encore remarquer que toutes les tensions (σ , τ) et les déformations (ε) restent des moyennes calculées sur l'épaisseur du disque.

La résolution des équations (6) par rapport aux composantes de tension conduit aux équations suivantes de tension et d'allongement:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{M}{m_1 m_2 - 1} \left[\frac{u}{r} + m_2 \frac{du}{dr} \right], \\ \sigma_t &= \frac{M}{m_1 m_2 - 1} \left[m_1 \frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Il ne reste plus qu'un pas à faire: introduire les valeurs ainsi obtenues (7) dans la condition d'équilibre (5); on obtient l'équation différentielle que voici pour le déplacement radial u :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{m_1}{m_2} \frac{u}{r^2} = 0. \quad (8)$$

⁶ cf. par ex. H. Reißner et Fr. Strauch: Ringplatte und Augenstab, Ing.-Archiv, 1933, p. 483.

L'intégrale de cette équation est:

$$u = Ar^s + Br^{-s}, \quad (9)$$

où

$$s = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \quad (10)$$

mais il faut encore l'adapter aux conditions aux bords:

$$\sigma_r = \begin{cases} -p \\ -q \end{cases} \quad \text{pour } r = \begin{cases} a \\ b \end{cases} \quad (11)$$

Après un long calcul, dans lequel on a introduit la coordonnée radiale « réduite » $\rho = \frac{r}{b}$ (sans dimensions), on arrive aux contraintes cherchées, qui ont la forme⁷

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{1 - \alpha^{2s}} \left\{ \rho^{s-1} [p\alpha^{s+1} - q] - \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{s+1} [p - q\alpha^{s-1}] \right\}, \\ \sigma_t &= \frac{s}{1 - \alpha^{2s}} \left\{ \rho^{s-1} [p\alpha^{s+1} - q] + \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{s+1} [p - q\alpha^{s-1}] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

α représente ici le rapport que nous avons introduit précédemment, $\alpha = \frac{a}{b}$, qui caractérise d'une manière parfaite l'aspect de la section.

On peut facilement contrôler qu'en posant $E_1 = E_2$, c'est-à-dire $s = 1$, on passe aux formules de Lamé, valables pour un corps isotrope; ces formules deviennent donc un cas particulier.

Le cas très intéressant d'une seule pression intérieure p , uniformément répartie, ($q = 0$), conduit aux expressions

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{1 - \alpha^{2s}} \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{s+1} [\rho^{2s} - 1], \\ \sigma_t &= \frac{s}{1 - \alpha^{2s}} \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{s+1} [\rho^{2s} + 1], \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

qui, avec $s = 1$ (c'est-à-dire $E_1 = E_2$), deviennent également les formules générales connues des tuyaux sous pression à parois épaisses isotropes.

Comme valeurs caractéristiques des composantes de tension que nous venons d'écrire, nous allons considérer les valeurs aux bords des contraintes tangentielles. Pour le bord intérieur, $r = a$, nous obtenons avec $\rho = \alpha$ la plus forte contrainte de la section

$$\sigma_{t, r=a} = s \frac{1 + \alpha^{2s}}{1 - \alpha^{2s}} p, \quad \left(\sigma'_{t, r=a} = \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} p \right); \quad (14)$$

cette expression est toujours positive, nous avons donc de la traction. Pour la fibre extrême extérieure, $r = b$, nous avons avec $\rho = 1$

$$\sigma_{t, r=b} = 2s \frac{\alpha^{s+1}}{1 - \alpha^{2s}} p, \quad \left(\sigma'_{t, r=b} = 2 \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} p \right). \quad (15)$$

⁷ On peut arriver aux mêmes résultats par une voie un peu différente, en introduisant une fonction de tension de laquelle on peut tirer toutes les composantes de tension par de simples différentiations.

Si l'on compare les résultats ainsi obtenus avec les contraintes aux bords, valables pour un matériau isotrope⁸ (valeurs que nous donnions entre parenthèses pour simplifier la comparaison), on constate que la fibre extérieure, avec ses environs, est déchargée dans un tuyau armé, donc orthotrope, par rapport à une construction non armée ($\sigma_{t,r=b} < \sigma'_{t,r=b}$); par contre la dangereuse pointe de tension au bord intérieur peut encore croître dans une proportion importante ($\sigma_{t,r=a} > \sigma'_{t,r=a}$) dans le cas le plus fréquent d'anisotropie ($E_2 > E_1$; $s > 1$).

Il en est ainsi dans le cas du disque annulaire de faible épaisseur (profondeur) que nous venons d'étudier, c'est-à-dire dans le cas de l'état plan de tension; les conditions sont encore plus défavorables pour un tuyau de longueur finie ($\epsilon_z = k = \text{const} \neq 0$) et de longueur infinie ($\epsilon_z = k = 0$). Sans vouloir entrer dans le détail du calcul des états de tension et de déformation de ces deux variantes — par suite du manque de place nous renvoyons le lecteur aux chapitres III et IV du travail déjà cité (WO 17) — nous voulons cependant en donner le résultat. Par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait précédemment, on arrive à la constatation très intéressante que la forme des composantes de tension σ_r et σ_t est exactement la même que celle des équations (12); la seule différence est que le nombre s (équ. 10) qui se présente en facteur et en exposant, est ici remplacé par l'expression:

$$t = \sqrt{\frac{m_1 m_3 - 1}{m_2 m_3 - 1}} \quad (16)$$

Par contre, au lieu de la valeur caractéristique $\sigma_z = 0$, on a ici la fonction:

$$\sigma_r = \frac{1}{m_3} (\sigma_r + \sigma_t + k M) \quad (17)$$

qui détermine les contraintes qui agissent dans le sens longitudinal et engendrent une déformation purement plane des différentes lamelles.

Dans la pratique on a toujours l'inégalité

$$t \geq s \geq 1. \quad (18)$$

On voit que dans le cas d'un élément de construction cylindrique (d'une longueur quelconque), c'est-à-dire lorsque l'on a un état plan de *déformation*, l'irrégularité dans la distribution des tensions est encore plus marquante (même dans une mesure pratiquement incontrôlable) que dans les disques annulaires minces, c'est-à-dire dans le cas d'un état plan de *tension*.⁹

⁸ Les valeurs données sans indice sont valables pour un matériau orthotrope tandis que celles caractérisées par un ' se rapportent à une structure isotrope. L'indice '' que nous avons déjà employé dans les équations (1) et (2) et que nous utiliserons souvent encore se rapporte au cas idéal G des contraintes tangentielles uniformément réparties sur toute section radiale.

⁹ Le cas spécial, où dans l'équation (18) le signe d'égalité est exceptionnellement valable, est traité avec plus de détails dans la publication (WO 17). Toutefois on constate que les valeurs s et t peuvent être considérées comme une mesure de l'écart par rapport à un matériau à structure isotrope — ce cas correspond à la valeur 1. Ces deux valeurs peuvent être en quelque sorte considérées comme des caractéristiques de la structure.

Les tableaux II et III donnent un aperçu des résultats acquis jusqu'à ce jour. Au tableau II nous indiquons les valeurs s et t pour une structure polairement et cylindriquement orthotrope; nous avons admis $n = \frac{E_a}{E_b} = 10$. [Pour la conception numérique de m_1 , m_2 et m_3 , voir (WO 17)]. On voit que la différence entre s et t est minime (même si, comme nous l'avons dit tout à l'heure, il est nécessaire *en principe* de faire une distinction).

Tableau II.

F_2 en %	λ_2	s	t
0	1,00	1,000	1,000
1	1,09	1,043	1,044
2	1,18	1,086	1,088
3	1,27	1,127	1,130
4	1,36	1,166	1,170
5	1,45	1,204	1,210
7	1,63	1,277	1,286
10	1,90	1,378	1,393

Tableau III.

s, t		1,00				1,20				1,50				G	
α	ρ	S'	$D^\circ/\%$	$A^\circ/\%$	$U^\circ/\%$	S	$D^\circ/\%$	$A^\circ/\%$	$U^\circ/\%$	S	$D^\circ/\%$	$A^\circ/\%$	$U^\circ/\%$	S''	$U^\circ/\%$
0,00	α 1	1,00 0,00	± 0	$\pm \infty$ ± 0	∞	1,20 0,00	± 20 ± 0	$\pm \infty$ ± 0	∞	1,50 0,00	± 50 ± 0	$\pm \infty$ ± 0	∞	0,00	± 0
0,25	α 1	1,13 0,13	± 0	± 239 $- 61$	300	1,29 0,12	± 14 $- 8$	± 287 $- 64$	351	1,55 0,10	± 37 $- 23$	± 365 $- 70$	435	0,33	± 0
0,50	α 1	1,67 0,67	± 0	± 67 $- 33$	100	1,76 0,64	± 5 $- 4$	± 76 $- 36$	112	1,93 0,60	± 16 $- 10$	± 93 $- 40$	133	1,00	± 0
0,75	α 1	3,57 2,57	± 0	± 19 $- 14$	33	3,62 2,56	± 1 $- 1$	± 21 $- 15$	36	3,69 2,53	± 3 $- 2$	± 23 $- 16$	39	3,00	± 0
0,90	α 1	9,54 8,54	± 0	± 6 $- 5$	11	9,56 8,54	$\pm 0,2$ $\sim 0,0$	± 6 $- 5$	11	9,58 8,51	$\pm 0,4$ $- 0,4$	± 7 $- 5$	12	9,00	± 0
1,00	α 1	∞	± 0	± 0	0	∞	± 0	± 0	0	∞	± 0	± 0	0	∞	± 0

Les relations rassemblées au tableau III sont très importantes. Ce tableau permet de comparer les contraintes existant dans un corps isotrope ($S' = \sigma'_t/p$) et les contraintes dans un corps orthotrope ($S = \sigma_t/p$); dans les dernières colonnes nous avons considéré le cas que nous allons traiter dans la suite et caractérisé par une répartition tout-à-fait uniforme des contraintes tangentielles

$S'' = \sigma''_t/p = \frac{a}{b-a} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ dans chaque section radiale. Nous avons admis que seule agissait une pression interne hydrostatique p , c'est-à-dire $q = 0$.

Au tableau III nous avons porté, pour différents types de section ($\alpha = \frac{a}{b} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}, 1$) les contraintes au bord intérieur ($\rho = \alpha$) et au bord extérieur ($\rho = 1$). A la colonne D, nous avons indiqué en pourcent la différence par rapport aux valeurs calculées d'après les formules de Lamé, c'est-à-dire pour un matériau isotrope. Nous donnons à la colonne A la différence positive (+) ou négative (—) par rapport au cas idéal d'une distribution parfaitement uniforme des contraintes S'' . En additionnant les différences A on obtient le coefficient d'inégalité U que nous avons indiqué dans la colonne correspondante; ce coefficient donne une idée très claire du degré de la mauvaise distribution des contraintes dans les constructions à parois épaisses exécutées de la façon usuelle. La distribution des contraintes est d'autant plus mauvaise que l'épaisseur des parois est plus grande (c'est-à-dire que α est faible) et que l'armature est forte (c'est-à-dire que s et t sont grands).

Avec l'accroissement de l'épaisseur et de l'armature, les contraintes internes se concentrent sur une zone de plus en plus étroite; le bord intérieur devient de plus en plus sollicité et les parties extérieures de la section ne travaillent plus.

Dans le cas limite d'une armature très forte (inextensible) ($\frac{E_2}{E_1} \rightarrow \infty$), la fibre intérieure, sollicitée au-dessus de toute limite, devrait à elle seule exercer toute la résistance.

La colonne D montre la faute que l'on commet en calculant et en dimensionnant les ouvrages orthotropes d'après les formules simples de Lamé, seules employées dans la pratique jusqu'à ce jour. Dans les constructions spéciales telles que les tuyaux de béton armé pour installations de remblayage hydraulique¹⁰ (pressions de 20 atmosphères et plus) les parois et l'armature doivent être très fortes; l'erreur de calcul peut atteindre dans certains cas 15, 20 et même 30 %. C'est une erreur, dans de tels cas, que de se baser sur des méthodes de calcul simples mais inexactes, car cette simplicité est acquise aux *dépens* de la *sécurité* à la fissuration et à la rupture.

Le rendement η des tuyaux armés et autres constructions du même genre en béton armé, est encore beaucoup plus mauvais que celui des ouvrages non armés. Les valeurs η sont toujours plus faibles que les valeurs η' données au tableau I.

Les considérations exposées jusqu'à présent nous poussent à étudier la construction de tuyaux à parois épaisses et autres ouvrages cylindriques identiquement sollicités desquels soit éliminée complètement la mauvaise répartition des contraintes (mauvaise utilisation du matériau, danger de fissuration et de rupture partant de l'intérieur, etc.).

En fait, est-il possible d'obtenir, par un moyen simple, de telles constructions possédant a priori l'élasticité désirée, de telle sorte que le but poursuivi soit

¹⁰ W. Olszak: „Eisenbetonrohre für Spülversatzzwecke“. Zement 1935, N°. 14, 15 et 16.

atteint, c'est-à-dire que l'on puisse exécuter suivant une méthode tout-à-fait nouvelle et parfaite des ouvrages à parois épaisses.

On serait tenté, à première vue, de déplacer l'armature vers la concentration de tensions, le long du bord intérieur. Ce serait absolument faux. Il est vrai que l'augmentation de la pointe de tension au bord intérieur, accompagnée d'un soulagement des parties extérieures du tuyau à paroi épaisse ce qui correspond donc à un accroissement de l'inclinaison de la courbe des contraintes tangentielles, produit un déplacement vers l'intérieur du centre de gravité de la surface des tensions. Ainsi que nous l'avons déjà exposé, ce déplacement est d'autant plus grand que l'armature du tuyau est plus forte.

Mais en voulant remédier à cette transformation défavorable des tensions en augmentant l'armature circulaire du côté intérieur de la section, c'est-à-dire en faisant coïncider le centre de gravité de l'armature avec le centre de gravité de la surface des tensions, on ne fait qu'augmenter la concentration des forces vers l'intérieur du tuyau et la pointe de tension, déjà défavorable, devient plus grande encore. En effet, tous les systèmes hyperstatiques travaillent de telle sorte que les parties les « plus fortes », c'est-à-dire les plus rigides, supportent la plus grande partie des forces.

Ce fait nous conduit à une disposition exactement opposée: à augmenter l'armature vers l'extérieur. En relevant le module d'élasticité E_2 dans les parties extérieures de la section nous voulons faire participer ces dernières à la transmission des efforts de telle sorte que — dans le cas idéal — chaque fibre du tuyau soit également sollicitée, c'est-à-dire soit également tendue pour une pression hydrostatique intérieure p .

Nous retournons donc le problème; jusqu'à présent nous avons calculé les états de tension et de déformation d'un corps dont les propriétés élastiques nous étaient connues a priori. Maintenant nous nous prescrivons un certain état de tension et nous voulons déterminer les propriétés élastiques encore inconnues compatibles avec la répartition choisie des contraintes.

Dans les constructions de béton armé il est relativement facile de modifier à volonté les propriétés élastiques du corps; on travaille en effet avec deux composants à structure fortement différente du point de vue élastique: le béton et l'acier. Le choix approprié des sections agissantes permet d'atteindre facilement le but poursuivi: la meilleure exécution du complexe.

Nous ne pouvons pas nous étendre sur les détails du calcul car plusieurs chemins conduisent au but. La résolution du problème dépend beaucoup moins des valeurs absolues d'élasticité que de leur rapport, c'est-à-dire de l'allure de E_2/E_1 . On peut soit maintenir E_1 fixe et modifier E_2 , soit au contraire faire varier E_1 tout en gardant E_2 constant, soit encore modifier réciproquement des deux valeurs. Le cas que nous avons considéré jusqu'à présent de l'orthotropie polaire et cylindrique (homogène) sera remplacé par celui de l'orthotropie inhomogène.

Pour plus de détails à ce sujet nous renvoyons le lecteur à un travail que nous allons publier sous peu et que nous citerons encore au moyen de l'abréviation (WO 19).¹¹ Nous ne voulons qu'indiquer le résultat obtenu pour le cas le plus

¹¹ Paru durant l'impression de ce volume dans la revue polonaise «Czasopismo Techniczne» 1937, N° 1, 2, 3, 4, 5, 6.

simple et le plus pratique où l'effet désiré est atteint en renforçant l'armature vers l'extérieur tout en maintenant $E_1 = E_b$ constant.

En partant du principe de l'égalisation complète des contraintes tangentielles le long de chaque section radiale, posons

$$\sigma''_t = \frac{d}{dr} [r \cdot \sigma''_r] = \text{const.} = C = \frac{ap - bq}{b - a}. \quad (19)$$

L'intégration de cette fonction nous donne la distribution des tensions radiales correspondantes

$$\sigma''_r = C + \frac{D}{r}, \quad (20)$$

où la constante d'intégration D doit satisfaire à la condition (11). Cette condition (11) est remplie avec

$$D = ab \frac{q - p}{b - a}. \quad (21)$$

Considérons maintenant la relation entre l'état de tension et l'état de déformation. Pour simplifier, considérons d'abord le cas du disque annulaire de faible épaisseur (profondeur), — c'est-à-dire le cas de l'état plan de *tension* —; le groupe d'équations (6) est tout-à-fait valable si nous considérons E_2 comme une fonction du rayon vecteur, $E_2 = E_2(r)$, et non plus comme une constante.

En nous servant en outre de la première des relations (3), — hypothèse *entièrement* satisfaite dans le cas traité précédemment de l'orthotropie polaire et cylindrique, dont la validité dans ce cas devrait être contrôlée, mais qui, provisoirement, sera admise comme satisfaisante et admissible, — nous pouvons déterminer la fonction de E_2 .

Nous avons simplement

$$E_2 = E_b \cdot \lambda''_P, \quad (22)$$

où

$$\lambda''_P = \frac{\rho}{A_P + \rho + \frac{1}{b} \frac{D}{C} \ln \rho}. \quad (23)$$

Si l'on considère par contre un tuyau de longueur infinie, on peut se baser sur un état plan de *déformation* et la solution devient

$$E_2 = E_b \cdot \lambda''_R, \quad (24)$$

où

$$\lambda''_R = \frac{\rho}{A_R + \rho + \frac{1}{b} \frac{D}{C} \left(1 - \frac{1}{m_1 m_3}\right) \ln \rho}. \quad (25)$$

Afin d'éviter une série infinie, les valeurs A_P et A_R seront déterminées par les expressions approximatives satisfaisantes [cf. (WO 19)]:

$$A_P = - \frac{(n-1) F''_2}{100 + (n-1) F''_2} \frac{1+\alpha}{2} - \frac{1}{b} \frac{D}{C} \ln \frac{1+\alpha}{2}, \quad (26)$$

$$A_R = - \frac{(n-1) F''_2}{100 + (n-1) F''_2} \frac{1+\alpha}{2} - \frac{1}{b} \frac{D}{C} \left(1 - \frac{1}{m_1 m_3}\right) \ln \frac{1+\alpha}{2}. \quad (27)$$

L'armature circulaire f''_2 doit se monter à

$$f''_2 = \frac{100}{n-1} (\lambda'' - 1) \quad (28)$$

ou λ'' , suivant le problème considéré, prend la valeur (23) ou (25). La relation suivante doit toujours être valable:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f''_2 \cdot dr = F''_2. \quad (29)$$

Naturellement, la fonction $E_2 = E_b \cdot \lambda''$ ne peut pratiquement pas être plus petite que E_b (donc λ'' ne peut pas être plus petit que 1) car nous ne pouvons qu'*augmenter* le module d'élasticité du complexe par rapport à E_b en renforçant l'armature; nous pouvons donc rendre le complexe « plus dense » alors qu'il nous est impossible de le rendre « moins dense ». La méthode est donc soumise à une limite pratique qui, à titre de renseignement est donnée par $\alpha = \frac{a}{b} \geq (0,6 \text{ à } 0,8)$, suivant l'armature F''_2 . Il est rare que l'on ait dans la pratique des constructions à parois plus épaisses que ne l'indique l'inégalité ci-dessus, c'est-à-dire plus épaisses que $(0,4 \text{ à } 0,2) b$. En cas de nécessité on peut toujours avoir recours au moyen plus compliqué de la variation de E_1 . On arrive donc à la conclusion qu'il est toujours possible d'obtenir une égalisation favorable des tensions dans tous les cas qui peuvent pratiquement se présenter.

Prenons comme exemple le cas d'une conduite forcée d'aspect $\alpha = \frac{a}{b} = 0,6$; on peut améliorer son rendement en répartissant d'une manière appropriée son armature circulaire.

On a

$$E_2 \cong \frac{\rho}{0,510 + \rho - \ln \rho},$$

$$f''_2 \cong \frac{100}{n-1} \left(\frac{\rho}{0,510 + \rho - \ln \rho} - 1 \right).$$

Ainsi que le montre la fig. 3, E_2 croît à peu près linéairement; au bord intérieur on a $E_{2,r=a} \cong E_b$ et la valeur maxima de E_2 est atteinte au bord extérieur, $E_{2,r=b} = 2,04 E_b$. La courbe de f''_2 est également à peu près linéaire avec les valeurs $f''_{2,r=a} = 0$ et $f''_{2,r=b} = 7,4 \%$ (en posant $n = 15$). La position du centre de gravité du diagramme de f''_2 divise l'épaisseur de la paroi en trois parties à peu près égales; le centre de gravité de l'armature doit se trouver à la distance $\frac{2}{3} d = \frac{2}{3} (b-a)$ du bord intérieur.

La répartition de l'armature sera choisie d'une façon semblable à celle que nous adoptons pour la répartition de l'armature de cisaillement tirée du diagramme des efforts de cisaillement dans les poutres de béton armé. Il est bon de

choisir un grand nombre de fers de petit diamètre afin d'obtenir ainsi une liaison aussi continue que possible. Les fers seront placés aux centres de gravité

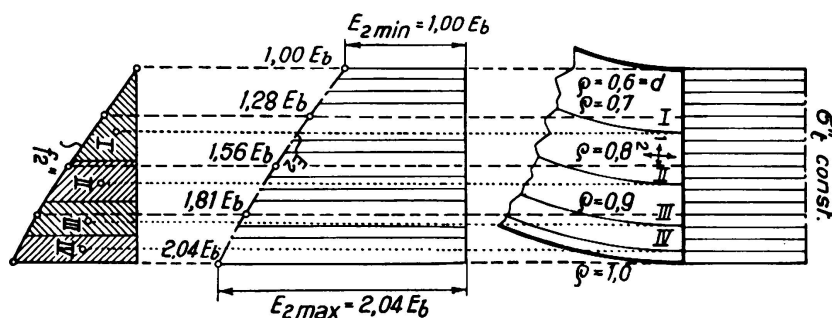


Fig. 3.

On a obtenu une répartition uniforme des contraintes tangentielles, $\sigma''_t = \text{const.}$ en modifiant d'une façon correspondante le module tangentiel E_2 . On en a tiré le diagramme d'armature f''_2 qui permet de déterminer la position des cercles d'armature I, II, III et IV.

de la surface de f''_2 divisée en un nombre correspondant de champs. C'est ce que nous avons fait à la fig. 3 pour 4 ronds de même diamètre. Pour plus de détails sur le pourcentage *total* d'armature F''_2 (29), voir (WO 19).

Nous pouvons maintenant faire un pas de plus. On sait que la contrainte admissible du complexe dépend entre autres du pourcentage d'armature. Celui-ci croît vers l'extérieur dans la solution améliorée que je propose. On peut donc admettre un certain accroissement de la contrainte admissible vers l'extérieur, correspondant au degré d'armature. Ce cas est analogue à celui que nous venons de traiter, il suffit de remplacer l'équation fondamentale (19) par la suivante:

$$\sigma_t''' = \sigma_{b \text{ adm}} \left[1 + n \frac{f_2'''}{100} \right] = \sigma_{b \text{ adm}} \frac{1}{n-1} \left[n \frac{E_2}{E_1} - 1 \right], \quad (30)$$

où

$$E_2 = E_b \cdot \lambda''', \quad f_2''' = \frac{100}{n-1} (\lambda''' - 1).$$

Nous ne voulons pas nous arrêter plus longtemps à ce problème spécial. Contrairement aux cas traités jusqu'à présent de la conservation des contraintes admissibles, il est plus important que la valeur de la *sollicitation* de la construction soit la même en chaque point, c'est-à-dire que l'ouvrage à parois épaisses présente en chaque point le même degré de sécurité vis-à-vis de la fissuration et de la rupture. Ce n'est ni par la condition (19), ni par la condition plus précise (30) que nous l'obtiendrons, il faut dans ce cas partir d'une hypothèse déterminée de sollicitation.

Nous pouvons nous servir ici soit de l'hypothèse de la contrainte de cisaillement de *Guest-Mohr*, soit de l'hypothèse de l'énergie de déformation de *Huber*. Au

lieu de (19) et (30) on a la condition que les contraintes « réduites » doivent avoir des valeurs invariables :

$$\sigma_{\text{red}}''' = \sigma_t''' - \sigma_r''' = \text{const}, \quad (31)$$

ou

$$\sigma_{\text{red}}''' = \sqrt{(\sigma_r''')^2 + (\sigma_t''')^2 + (\sigma_z''')^2 - \sigma_r''' \sigma_t''' - \sigma_t''' \sigma_z''' - \sigma_z''' \sigma_r'''} = \text{const}. \quad (32)$$

On obtient ainsi une solution idéale à tous points de vue; au point de vue statique (sécurité à la rupture), au point de vue pratique (sécurité à la fissuration), au point de vue économique (économie de matériau¹²). La place nous manque pour exposer ici pourquoi $\lambda''' = \frac{E_2}{E_1}$ et la répartition de l'armature (fonction f_2''') nous nous réservons de le publier ailleurs.

Le rendement statique η'' — contrairement aux maigres valeurs η et η' — se monte toujours à $\eta'' = 1 = 100\%$ dans les constructions améliorées suivant mes propositions, indépendamment de l'épaisseur des parois, ce qui explique l'économie de matériau que nous indiquons ci-dessous.

dimensions α et le pourcentage d'armature F_2) plus grand que dans les mêmes conduites exécutées suivant l'ancienne méthode est de 20, 50, 100 % et même plus (suivant le rapport des dimensions α et le pourcentage d'armature F_2) plus grand que dans les mêmes conduites exécutées suivant la méthode perfectionnée que je propose [cf. (WO 19)].