

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Discussion relative à la plasticité

Autor: Baes, L

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-3001>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

I 1

Discussion relative à la plasticité.

Diskussion über die Plastizität.

Contribution to Discussion on Theory on Plasticity.

L. Baes,

Professeur à l'Université de Bruxelles.

1° — *Au point de vue de la théorie générale de la plasticité, du rôle des lignes de cession et de la frontière entre la région élastique et la région plastique.*

Les mémoires I1 et I2 appellent des approbations mais aussi quelques remarques.

1° — *Définition de la plasticité en général:*

Il est nécessaire de rappeler, pour éviter toute fausse interprétation, qu'on dit que dans une région du corps il y a *déformation plastique* ou que la matière est en plasticité, lorsque dans cette région la déformation n'est pas totalement élastique et que cependant la cohésion de la matière n'y est pas détruite, même s'il y a eu modification du réseau structural. Cette définition est générale, elle revient à rendre synonymes les expressions:

déformations plastiques et déformations permanentes sans destruction de la cohésion (il y a d'autre part des cas de déformation permanente criquée ou impliquant une destruction partielle de la cohésion).

2° — *Définition du phénomène d'écoulement plastique et des lignes de cession ou figures d'écoulement pour l'acier doux:*

Ce qui donne un intérêt tout particulier à l'étude de la plasticité est l'existence dans ce domaine d'une propriété très importante de l'acier doux, celui-ci essayé notamment par traction pure ou par compression pure, présente un phénomène d'écoulement plastique très particulier. Pour une valeur déterminée de la sollicitation, la déformation longitudinale grandit brusquement de manière très sensible.

Idéalisé, ce phénomène est parfois représenté par ce que l'on appelle le *palier* du diagramme de traction ou de compression.

Ce phénomène ne se prolonge pas à de très grandes déformations, mais au point de vue technique il a cependant comme conséquence de créer une déformation plastique appréciable, qui suit une phase ne comportant quasi que des déformations élastiques très petites.

C'est en réalité ce phénomène et ses conséquences qui ont déclenché les études modernes de la plasticité et dont on cherche à tirer parti au point de vue de

l'économie des constructions en acier doux. Il a d'ailleurs comme conséquence de constituer un modérateur très précieux à une élévation locale de tension.

C'est en partie ce phénomène, idéalisé par la notion du palier, qui a donné naissance à la notion de la *plasticité parfaite*: déformation croissante sous sollicitation constante.

Dans cette conception il y aura des cas d'états simples, doubles ou triples de tension ou de déformation de plasticité parfaite.

De là la justification et la nécessité pratique de l'introduction d'une *hypothèse de plasticité parfaite*, hypothèse qui est susceptible d'évoluer.

3° — *Signification des lignes de cession qui se produisent à la surface des pièces en acier doux déformées plastiquement.*

J'estime qu'on peut se rallier nettement à l'avis de MM. Takaba et Okuda cité dans le I 1:

« L'apparition des lignes de cession et du coude brusque de la courbe des déformations sont le résultat d'un seul et même processus, à savoir la déformation, *par groupes, de quantités importantes de grains cristallins.* »

Il y a donc une vraie discontinuité de la déformation, qui se fait d'ailleurs par zones et qui semble intéresser toute une région et non pas seulement des actions purement locales.

On peut se rallier à l'idée, qui fait bien image, que ce phénomène brusque est le fait d'une instabilité moléculaire analogue à un phénomène de retard à la déformation.

Celle-ci exige à ce moment un changement d'arrangement du réseau de structure, changement qui se fait par des glissements sensibles et irréversibles, c'est-à-dire plastiques, au cours desquels une augmentation de la dureté se produit, ainsi qu'un vrai phénomène de *blocage* des surfaces de cession (voir Moser).

De ce qui précède apparaît à toute évidence que la limite vraie entre la zone du corps restée à l'état élastique et celle passée à l'état plastique peut ne pas coïncider avec les lignes d'écoulement qui semblent liées à un phénomène de retard et intéresser toute une zone.

Les lignes d'écoulement peuvent être très larges lorsque la région du corps est soumise à un état de tension pur, elles sont au contraire souvent très fines lorsqu'il n'en est pas ainsi.

4° — *Quelques caractères des lignes de cession:*

Dr. Ing. *Freudenthal* écrit que la propriété la plus importante des figures d'écoulement qui apparaissent à la surface est de coïncider avec les trajectoires des contraintes de cisaillement maximum.

Je fais remarquer que cela n'est vrai que pour autant que ces lignes de cession constituent un *réseau* de deux familles de lignes orthogonales entre elles, mais qu'il y a des cas où ces lignes ne constituent *qu'une seule famille de rides de cession*.

Ce cas, assez fréquent, *semble avoir été perdu de vue.*

Il est cependant nettement visible dans l'ancien mémoire descriptif de *Hartmann* et dans ceux de *Frémont*; il est facile à reproduire.

Dans ce cas, ces rides de cession ne sont évidemment pas confondues avec les trajectoires des contraintes de cisaillement maximum, elles sont tout au contraire confondues avec la trajectoire de l'une des deux tensions principales (ligne isostatique). Il est à remarquer qu'une ligne de cession peut s'amorcer et s'arrêter en pleine masse; si la sollicitation s'aggrave, cette ligne se propagera, en même temps que d'autres pourront naître.

Donc une ligne de cession ne naît pas nécessairement d'une seule fois, il est fréquent qu'une telle ligne se propage successivement au cours de l'élévation de la charge.

Il apparaît donc à toute évidence que des lignes de cession ne seront pas d'une manière générale des lignes frontières entre le domaine élastique et le domaine plastique.

C'est une évidence, car une ligne qui n'est pas apparue d'une seule fois mais qui se propage quand la sollicitation s'aggrave ne peut être une frontière, celle-ci devant être nécessairement fermée ou constituer courbe fermée avec une partie du contour de la pièce.

Cette conclusion du Dr. Ing. *Fréudenthal* est donc une évidence et se démontre par ce raisonnement élémentaire, mais de là à dénier tout intérêt mathématique aux lignes de cession il y a loin, surtout lorsqu'elles sont très déliées.

5° — La condition de plasticité:

Pour les métaux susceptibles de déformations plastiques avec ou sans limite d'écoulement nettement définie, les principales hypothèses qui ont été introduites concernant les conditions à satisfaire au point de vue des tensions à la frontière du domaine élastique et du domaine plastique sont les suivantes:¹

Hypothèse de Saint-Venant, de Maurice Lévy et de Guest:

$$\tau_{\max} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = k = \frac{R_e}{2}$$

R_e étant la limite d'élasticité de la traction pure.

Hypothèse de Beltrami et de Haigh:

Le critère est constitué par la valeur du travail spécifique de la déformation élastique.

La condition à satisfaire peut se traduire par:

$$(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - \frac{2}{3} (\sigma_{II} \cdot \sigma_{III} + \sigma_{III} \cdot \sigma_I + \sigma_I \cdot \sigma_{II}) = R_e^2$$

Ce critère donne lieu à une représentation dans l'espace par un ellipsoïde et dans les états doubles de tension par une ellipse.

¹ Voir: *L. Baes*: Résistance des matériaux et éléments de la théorie de l'élasticité et de la plasticité des corps solides. Tome I — Chapitre XI —

„Le problème des critères de la résistance des matériaux“ Bruxelles 1930—34.

Hypothèse de v. Mises et de Hencky:

Le critère est la valeur du travail spécifique de changement de forme par glissement²:

il se traduit comme suit:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2 R_e^2 = 8 k^2$$

ou, en fonction des contraintes tangentiellles maxima:

$$\tau_{I, II}^2 + \tau_{II, III}^2 + \tau_{III, I}^2 = \frac{1}{2} R_e^2 = 2 k^2$$

Ce critère donne lieu à une représentation par un cylindre de révolution, dans l'état double de tension il donne une ellipse.

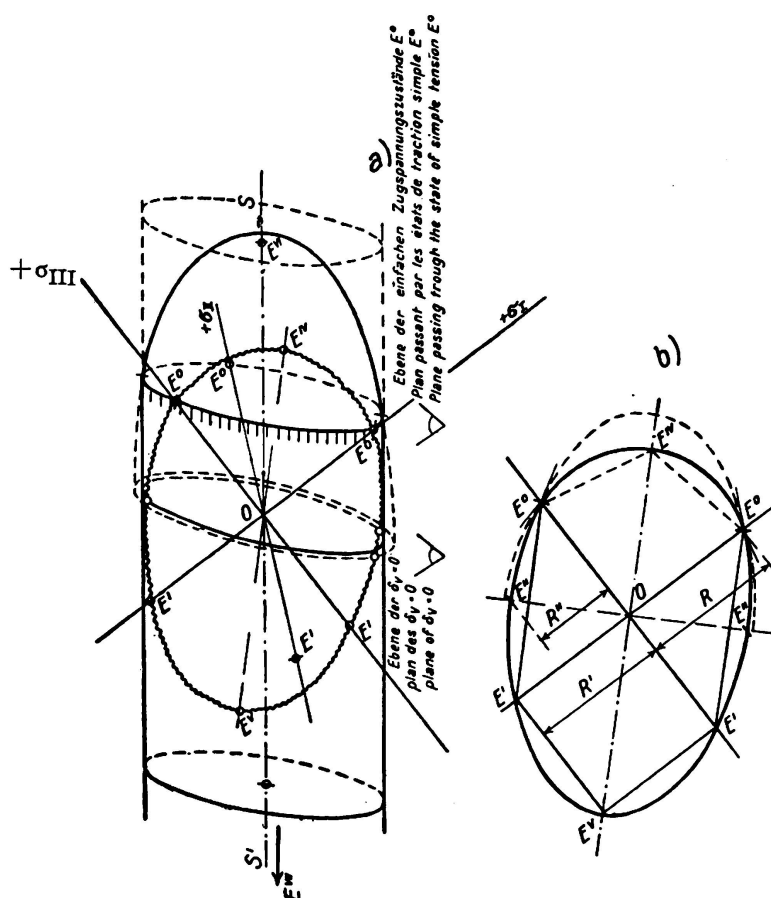


Fig. 1.

Théorie de Huber relative à l'équilibre limite d'élasticité (Interprétation graphique).

a) Etats triples de tension.

b) Etats doubles de tension.

Hypothèse de v. Mises et Hencky, modifiée par Huber:

Le critère est la valeur du travail spécifique de changement de forme par glissement, pour autant que la dilatation cubique ou la tension

$$\text{moyenne } \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}$$

soient négatives.

Si elles sont positives il y a lieu d'adopter comme critère celui de Beltrami.³

Ce critère donne lieu à une représentation graphique donnée par la fig. 1; dans l'état double de tension il donne une figure formée de deux ellipses et peu différente de celle de v. Mises-Hencky.

Il faut admettre que les expériences actuellement connues, notamment celles de MM. Roš et Eichinger, ont démontré que l'hypothèse de Huber est très satisfaisante pour l'acier doux ou analogue.

² Dans la traduction française du mémoire de Dr. Ing. Freudenthal il est dit:

„3° — Hypothèse du travail constant de déformation suivant la relation“

Il est dangereux d'écrire cela ainsi, il faut bien spécifier qu'il n'est question que d'une partie du travail de déformation, cette partie que l'on désigne par l'expression: travail de changement de forme par glissement. Cela est d'autant plus nécessaire que cette expression n'est pas très répandue en langue française.

³ Il est prudent d'énoncer tout au long le critère de Huber, car il n'est pas identique à celui de von Mises et Hencky. Il est beaucoup plus logique que lui. Cela est souvent perdu de vue.

Il est important de considérer spécialement deux cas particuliers devant lesquels on peut se trouver souvent :

Cas particulier de l'état plan de déformation, en plasticité parfaite :

La déformation plastique se fait alors dans les plans parallèles.

Supposons que ces plans soient ceux des tensions principales σ_I et σ_{III} et que σ_{II} leur soit perpendiculaire.

Dans le cas de plasticité parfaite on aura en tous points :

$$\text{donc} \quad \sigma_{II} = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}$$

$$\sigma_I < \sigma_{II} < \sigma_{III}.$$

La condition de plasticité entre les tensions, de *de St. Venant* et *Maurice Lévy*, s'écrit alors :

$$\sigma_I - \sigma_{III} = 2k = R_e$$

La condition de plasticité de *v. Mises-Hencky* s'écrit :

$$|\sigma_I - \sigma_{III}| = \frac{4}{\sqrt{3}}k = \frac{2}{\sqrt{3}}R_e.$$

On voit que dans ce cas ces deux conditions sont identiques à un coefficient $\frac{2}{\sqrt{3}}$ près et correspondent à une valeur particulière de τ_{\max} .

Il résulte de ce que σ_{II} est intermédiaire entre σ_I et σ_{III} , que les facettes sur lesquelles les glissements de plasticité se produisent sont perpendiculaires au plan I. III.

Les surfaces de glissement sont des cylindres dont les génératrices sont normales à ce plan.

Les glissements se produisent donc parallèlement à ce plan et se marquent dans celui-ci par deux familles conjuguées de lignes de glissement, constituant un réseau orthogonal, bissectant celui des isostatiques.

Tout le long de ces lignes, au fur et à mesure qu'elles se développent, la tension tangentielle atteint la valeur de criterium.

Cas particulier de l'état plan de tension, ou de l'état double de tension, en plasticité parfaite :

Ce cas est très fréquent, il se présente à la surface de la pièce. L'une des tensions principales est nulle, soit : $\sigma_{II} = 0$.

Si σ_I et σ_{III} sont de signes contraires, la condition de plasticité de *de St. Venant*, *Maurice Lévy* est :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \pm k = \pm \frac{R_e}{2}.$$

Si σ_I et σ_{III} sont de même signe, cette condition devient

$$\frac{\sigma_I}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_{III}}{2} = \frac{R_e}{2}.$$

La condition de plasticité de *v. Mises-Hencky* est alors :

$$\sigma_I^2 - \sigma_I \cdot \sigma_{III} + \sigma_{III}^2 = 4 k^2 = R_e^2$$

En coordonnées cartésiennes σ_I , σ_{III} elle est représentée par l'ellipse.

Donc les conditions de *de St. Venant* et de *v. Mises* ne semblent guère différer numériquement, lorsque les tensions principales σ_I et σ_{III} sont de signes différents. Mais cependant les deux conditions ne sont pas proportionnelles, comme elles l'étaient dans l'état plan de déformation.

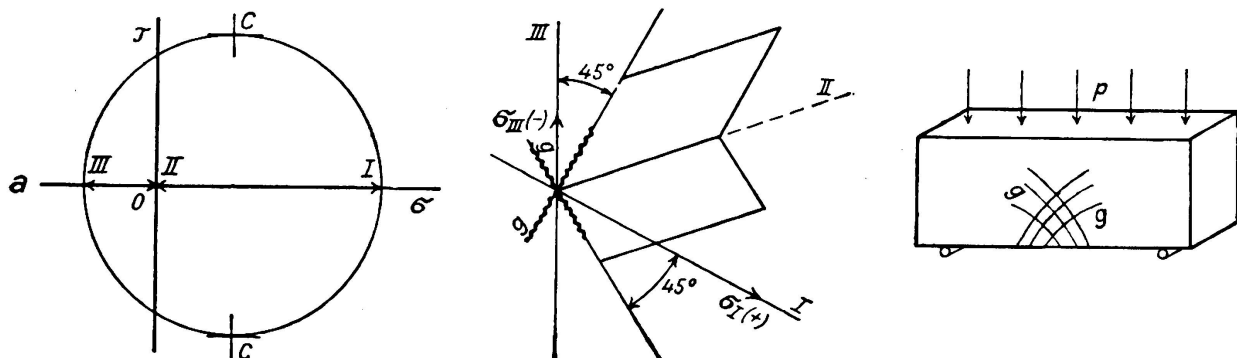


Fig. 2.

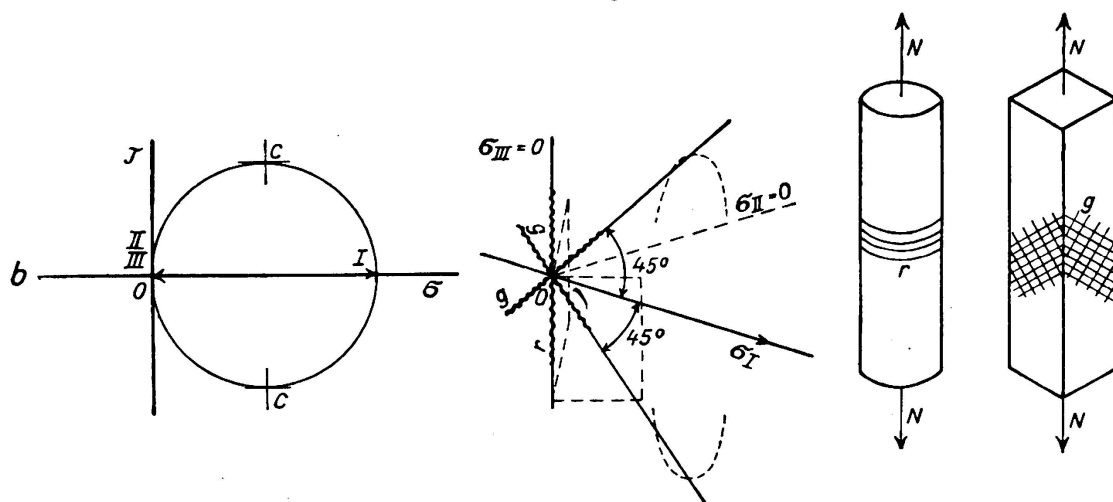


Fig. 3.

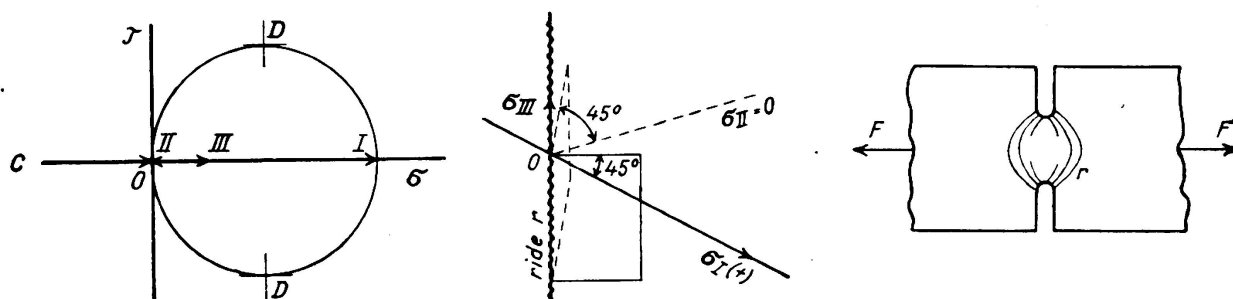


Fig. 4.

Fig. 2—4. Aspects des réseaux g ou des rides r de glissement apparaissant sur les faces extérieures des pièces, dans les parties en état plan de tension.

cas a : $\sigma_{II} = 0$, σ_I et σ_{III} de signe contraire,

cas b : $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$,

cas c : $\sigma_{II} = 0$, σ_I et σ_{III} de même signe.

Dans ce cas, lorsque les deux tensions principales σ_I et σ_{III} sont *de signes contraires*, Fig. 2, il se forme un réseau de lignes de glissement.

D'après l'hypothèse de *de St. Venant*, ce réseau bissecte le réseau des isostatiques et en chaque point de l'une des lignes du réseau, au moment où le glissement se produit en ce point, le τ_{\max} correspondant atteint la valeur du critère.

D'après l'hypothèse de *v. Mises*, il y a encore formation d'un réseau de deux familles de lignes, mais le long des lignes de glissement de ce réseau, le τ_{\max} n'atteint plus une valeur déterminée, c'est la condition de critérium qui est atteinte et qui n'est plus basée sur une valeur déterminée de τ_{\max} .

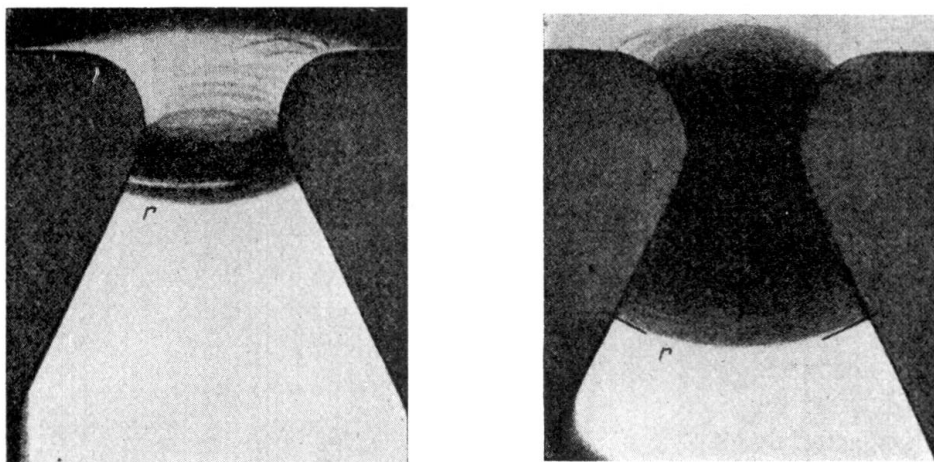


Fig. 5.

Eprouvette de tôle sollicitée par traction. L'éprouvette est successivement envahie par les rides de glissement r . (Figure extraite de „Mesure de la limite élastique des métaux“, Ch. Frémont, 1903.)

Dans le cas où les deux tensions principales σ_I et σ_{III} sont *de même signe*, Fig. 4, il ne se forme plus un réseau de deux familles de lignes orthogonales entre elles.

Les facettes de glissement ne sont plus normales à la surface libre, pour aucune des deux hypothèses.

Il se forme une *seule famille de rides de glissement*, trace commune des deux groupes de facettes de glissement (Fig. 5 et 6).

Dans l'hypothèse de *de St. Venant* chaque élément de ces rides coïncide, au moment de sa formation, avec l'élément d'isostatique correspondant à la tension principale la plus petite en valeur absolue et à ce moment, en cet endroit, la tension principale la plus grande atteint le double de la tension tangentielle critère.

Les anciens documents de *Hartmann* font nettement apparaître la distinction entre rides et entre réseaux de glissement. Voir Fig. 7. Toutefois *Hartmann* n'a pas expliqué cette différence.

Dans l'hypothèse de *v. Mises* les tensions atteintes en un point de la ride, au moment où elle se forme en cet endroit, répondent à la relation du critère, ce qui n'est plus tout-à-fait simple.

Cette circonstance de la formation des rides semble avoir été perdue de vue, elle est cependant assez fréquente et le problème est alors tout différent du cas de formation du réseau. Elle se produit souvent pour des pièces plates à encoches latérales (Fig. 6).

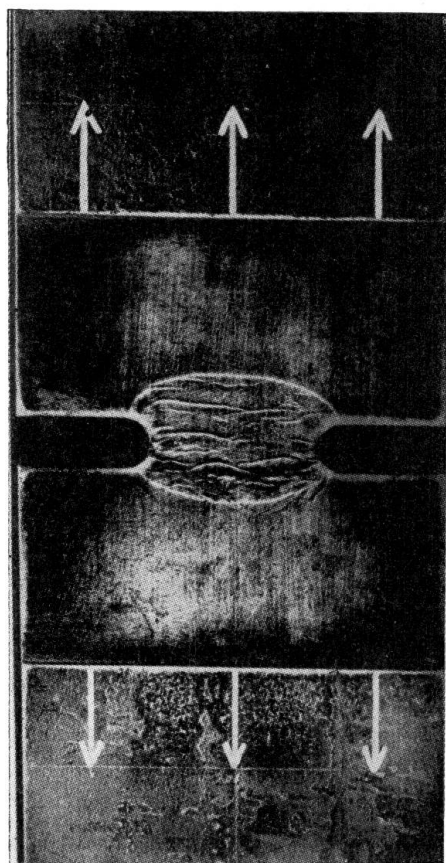


Fig. 6.

Rides de glissement dans une pièce d'acier doux entaillée.

propriétés des lignes de cession elles-mêmes conduira toujours à des résultats qui ne correspondent pas à la réalité».

Pour la seconde partie on doit faire des réserves, mais la première partie de cette affirmation est évidente d'une manière générale.

Il est en effet inexact que d'une manière générale, la frontière de la région plastique soit confondue avec une surface de glissement, quoique évidemment le long des surfaces de glissement dans la zone plastique la condition de plasticité est satisfaite comme sur la frontière.

Mais à la frontière il faut se raccorder à un état élastique.

D'une manière générale la surface frontière n'est pas formée par une surface de glissement, mais par des points de diverses surfaces de glissement.

Il est donc inexact de dire d'une manière générale, comme le dit au 4° le texte français :

«Ainsi que toutes les observations le montrent nettement, la forme de ces courbes n'a rien de commun avec les lignes de cession elles-mêmes, quoiqu'elles

Dans le cas où une seule des tensions principales est différente de zéro, théoriquement il y a possibilité de formation du réseau des lignes de glissement g , ou de la famille de rides r (fig. 3).

Pratiquement il est probable que ce sera le réseau des lignes de glissement g qui se formera.

Le long de ce réseau les deux hypothèses de tension de *de St. Venant* et de *von Mises* sont évidemment identiques.

D'autre part en pleine masse, l'hypothèse de *de St. Venant* conduit à des surfaces de glissement en tous les éléments desquelles au moment du glissement, le τ_{\max} atteint la valeur du critère.

D'autre part dans ce cas, avec l'hypothèse de *von Mises* il n'y a plus de liaison simple entre la condition de critérium et la tension tangentielle maximum.

6° — Frontière entre la région restée élastique et la région plastique:

Dr Ing. Freudenthal écrit:

«L'adoption des lignes de cession comme constituant la limite du domaine plastique et l'établissement de solutions à partir des

soient formées par celles de ces lignes qui correspondent aussi bien à l'état plastique qu'à l'état élastique des contraintes.»⁴

La surface frontière est évidemment, par définition, une surface de l'état élastique le long de laquelle la fonction prise comme critérium est constante.

Dans les cas d'une pièce plane, sollicitée en état plan de déformation, que l'on applique le critère de *de St. Venant* ou celui de *v. Mises*, la ligne frontière est donc une ligne isochromatique de l'étude photo-élastique.

Pour la même pièce, sollicitée en état plan de tension, elle n'est une isochromatique que pour l'hypothèse de *de St. Venant* et lorsque les deux tensions σ_I et σ_{III} sont de signe contraire ou lorsqu'une seule n'est pas nulle.

Pour la même pièce, sollicitée en état plan de tension, lorsque les deux tensions sont de même signe, et dans l'hypothèse de *de St. Venant*, la ligne frontière est une courbe d'égale valeur de la tension principale la plus grande en valeur absolue, cela n'est donc pas une courbe isochromatique de l'étude photo-élastique.

Dans l'hypothèse de *von Mises*, pour l'état plan de tension, la ligne frontière n'est pas une isochromatique.

On voit donc qu'il peut être fort important de distinguer les cas d'état double de tension et d'état plan de déformation. C'est essentiellement ce que j'ai tenu à faire remarquer.

Pour bien faire voir que

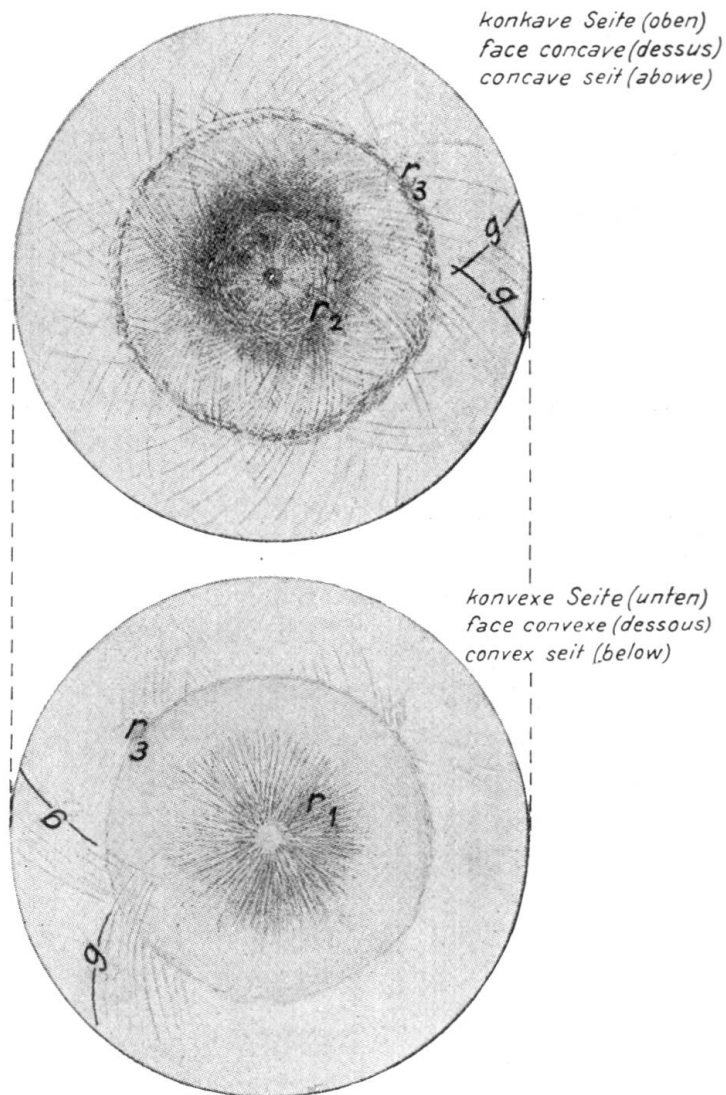


Fig. 7.

Tôle d'acier ayant été déformée par l'application d'un poinçon.

Lignes de glissement g et rides r .

(Figure extraite de „Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts“ L. Hartmann, 1896.)

⁴ Cette phrase a été mal traduite en français dans la Publication Préliminaire. Il faut lire: «Ainsi que toutes les observations le montrent nettement, la forme de ces courbes n'a rien de commun avec les lignes de cession elles-mêmes, mais ces courbes sont formées par les lignes qui correspondent aussi bien à l'état plastique qu'à l'état élastique des contraintes». (Note de la Rédaction).

la ligne frontière n'est pas en général une ligne de cession, il suffit de citer deux cas simples bien connus :

Le cas d'une enveloppe cylindrique épaisse soumise à une forte différence de pression, par raison de symétrie axiale, la surface frontière entre le domaine plastique et le domaine élastique est un cylindre concentrique au tube, tandis que sur chaque section transversale les traces des surfaces de cession sont des spirales logarithmiques.

Il n'y a rien de commun entre ces formes.

Le second exemple à citer est celui d'une plaque plane sollicitée sur sa tranche par une charge quasi-concentrée.

Les lignes de cession sur les flancs de la plaque sont des spirales logarithmiques, la ligne frontière est une ligne isochromatique c'est-à-dire une circonférence ayant son centre sur la ligne de charge et tangente à la ligne limite de la pièce.

Le cas d'un disque circulaire chargé par deux charges diamétralement opposées est tout aussi typique.

Le fait est donc bien flagrant, la ligne frontière du domaine plastique et du domaine élastique n'est en général pas une ligne de cession.

Il était je pense utile de le faire apparaître plus nettement et plus simplement que ne le montre l'auteur de la communication I 1, mais c'est là un fait classique.

Il reste de nombreuses et importantes questions à élucider dans le domaine de la plasticité, les théories actuelles ne constituent qu'un premier canevas simplifié et devront probablement évoluer.

D'ailleurs est apparue, depuis, la conception que traite spécialement le mémoire I 2 du Dr. tech. *J. Fritsche*, que la condition d'écoulement plastique est fonction non pas de l'état de tension local, mais de l'état de *tension de toute une région*.

Cette nouvelle condition d'écoulement est fort intéressante et assurément contient en elle des éléments nouveaux épaulés sur des faits expérimentaux indéniables, et dont j'ai eu nettement l'intuition lors d'essais à outrance que j'ai faits sur des poutrelles enrobées de béton.

II° — Au point de vue de l'application au calcul des constructions en acier :

Je tiens à marquer mon accord complet avec Dr. Ing. *Fr. Bleich*, lorsqu'il attire l'attention sur la nécessité d'une *grande prudence* dans l'utilisation actuelle de ces principes aux constructions.

Il dit bien que le nouveau procédé de calcul ne doit être appliqué ni aux systèmes dans lesquels il faut tenir compte de la résistance à la fatigue du matériau, ni aux poutres réticulées.

Il n'est donc à appliquer encore *aujourd'hui* en fait qu'à des systèmes simples, d'un degré d'hyperstaticité très peu élevé, constitués d'éléments fléchis dont les parties comprimées ne peuvent se dérober et n'entrant guère que dans la construction de poutres ou de charpentes de bâtiments, non soumis à des actions répétées fréquentes ni à des vibrations de machines.

Encore est-il prudent de calculer ces ensembles, dans l'hypothèse de l'équilibre plastique, à des tensions telles que la tension d'écoulement ne soit en fait pas atteinte et que la normalisation apportée par la plasticité constitue une véritable réserve.