

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 2 (1936)

**Artikel:** Etats limites de l'équilibre dans les masses de terre et de dépôt

**Autor:** Ritter, M.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2998>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## VIII 4

Etats limites de l'équilibre dans les masses de terre et de dépôt.

### Grenzzustände des Gleichgewichtes in Erd- und Schüttmassen.

Limits of Equilibrium of Earths and Loose Materials.

Dr. M. Ritter,

Professor an der Eidg. Technischen Hochschule, Zürich.

Dans ce rapport nous allons établir les conditions auxquelles doivent satisfaire les contraintes à l'intérieur d'une masse de terre ou de dépôt sans cohésion, lorsque la masse se trouve à l'état limite de l'équilibre. Nous limitons nos considérations aux états plans de tension, avec l'hypothèse fondamentale que les tensions varient d'une façon continue avec l'endroit considéré. La loi classique du frottement est valable; on a donc l'état limite d'équilibre en un point quelconque lorsque, par ce point, passe une surface de glissement, c'est-à-dire une surface dans laquelle la contrainte résultante  $q$  forme avec la normale à la surface l'angle de frottement  $\rho$ .

Avec les hypothèses que nous avons indiquées, *Rankine* a déjà analysé en 1857 ce qu'il a appelé l'état de tension classique à l'intérieur d'une masse de terre latéralement illimitée avec terrain horizontal; *Winkler*, *Mohr*, *Weyrauch*, *Lévi* et d'autres encore ont complété plus tard cette théorie. *Boussinesq* et *Résal*<sup>1</sup> ont étendu la théorie de Rankine à d'autres conditions de surface et ont essayé de donner l'état de tension derrière un mur de soutènement, lorsque la poussée des terres s'écarte de la direction exigée par la théorie de Rankine. Ce problème a suscité plus tard bien des discussions dans les revues techniques, spécialement dans ses relations avec la théorie de la poussée des terres de Coulomb. *F. Kötter* a donné en 1893 l'équation différentielle de la pression sur une surface de glissement incurvée.<sup>2</sup> Quoique beaucoup d'Ingénieurs aient traité plus tard les questions de la poussée des terres en admettant des surfaces de glissement incurvées, ces relations n'ont trouvé, à notre connaissance, aucune application pratique. Dans un travail très étendu, *H. Reissner*<sup>3</sup> a pris position en 1924 sur le problème de la poussée des terres et il a exposé les difficultés que présente l'analyse de l'état limite général en tenant compte du poids de la masse de terre. Dernièrement *A. Caquot*<sup>4</sup> a exposé la théorie dans son ensemble et l'a appliquée

---

<sup>1</sup> *J. Résal*: Poussée des terres, 2 vol., Paris 1903.

<sup>2</sup> *H. Müller-Breslau*: Erddruck auf Stützmauern, Stuttgart 1906.

<sup>3</sup> *H. Reissner*: Zum Erddruckproblem. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 1924.

<sup>4</sup> *A. Caquot*: Equilibre des massifs à frottement interne, Paris 1934.

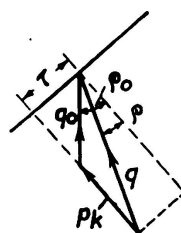
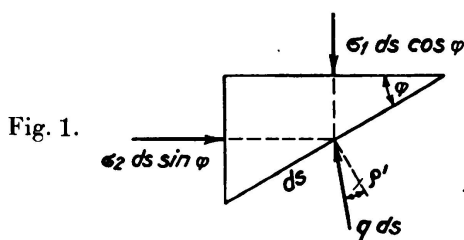
à une série de cas pratiques. Comme application la plus importante il faut citer, à côté du calcul des murs de soutènement, la détermination de la résistance des semelles de fondation à l'état limite de l'équilibre, problème dont Rankine avait déjà recherché la solution. Grâce à l'explication du principe de la cohésion, donnée par *K. Terzaghi*,<sup>5</sup> pour les masses de terre et de dépôt, le calcul peut être étendu dans certains cas à la masse de terre liée; c'est ainsi que Caquot étend la formule de la résistance des semelles de fondation au massif de terre avec cohésion apparente.

### 1° Principes.

Avec l'hypothèse que les tensions à l'intérieur d'un massif de terre varient d'une façon continue d'un point à l'autre, l'angle  $\rho'$  que la tension  $q$  d'un élément quelconque de surface forme avec la normale à cet élément, est une fonction continue de l'angle  $\varphi$  de l'élément de surface par rapport à une direction fixe. Dans les surfaces de glissement, l'angle  $\rho'$  atteint la valeur maxima  $\rho$ ; les surfaces de glissement sont définies par la relation fondamentale

$$\frac{d\rho'}{d\varphi} = 0 \quad (1)$$

Cette relation suffit, en liaison avec les conditions d'équilibre, pour déterminer la position des surfaces de glissement par rapport à la direction des tensions principales, ainsi que pour donner le rapport des tensions principales, qui doit exister à l'état limite de l'équilibre.



Désignons par  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les tensions principales, les conditions d'équilibre d'un prisme de terre infiniment petit de longueur = 1 sont d'après la fig. 1:

$$\begin{aligned} q \sin \rho' &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi \\ q \cos \rho' &= \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{tg} \rho' = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{tg} \varphi}{\sigma_1 + \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad (2)$$

Le maximum  $\rho' = \rho$  se produit d'après l'éq. (1) pour

$$\frac{d\rho'}{d\varphi} = \frac{d \operatorname{tg} \rho'}{d \operatorname{tg} \varphi} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) (\sigma_1 - \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}{(\sigma_1 + \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} = 0; \quad (3)$$

il en résulte d'abord que

$$\sigma_1 = \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi \quad (3a)$$

et l'éq. 2 donne pour la surface de glissement

$$\operatorname{tg} \rho = -\operatorname{cotg} 2\varphi.$$

<sup>5</sup> *K. Terzaghi: Erdbaumechanik, Wien 1925.*

Nous avons ainsi  $\varphi = 45^\circ + \frac{\rho}{2}$ ; les surfaces de glissement forment avec la surface sur laquelle agit  $\sigma_1$  l'angle  $\pm \left(45^\circ + \frac{\rho}{2}\right)$ , mais elles se coupent sous l'angle  $90^\circ - \rho$ . La relation (3a) se transforme ainsi en

$$\sigma_2 = \sigma_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\rho}{2}\right); \quad (4)$$

ce rapport des deux tensions principales doit exister en chaque point qui appartient à une surface de glissement, c'est-à-dire qui se trouve à l'état limite de l'équilibre. La pression  $q$  à la surface de glissement peut être facilement exprimée au moyen de  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$ , elle est:

$$q = \sigma_1 \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\rho}{2}\right) \quad (5)$$

Les relations que nous avons établies sont faciles à appliquer à une *masse de terre avec cohésion*, en admettant que la cohésion apparente existe dans le sens indiqué par *Terzaghi*. Elle est produite par la pression de l'eau capillaire qui colle le matériau ensemble et qui le soumet à un état de tension spatial avec les tensions de compression  $p_k$ , dans tous les sens, qui dépassent les autres tensions. L'angle de frottement existe aussi longtemps que l'on tient compte de l'état de tension, y compris les pressions  $p_k$ . La loi du frottement s'exprime maintenant:

$$\tau = (\sigma + p_k) \operatorname{tg} \rho = p_k \operatorname{tg} \rho + \sigma \operatorname{tg} \rho. \quad (6)$$

Coulomb déjà avait en principe calculé avec cette loi, en ce sens qu'il avait introduit un module de cohésion et écrit la loi du frottement  $\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \rho$ .

Comme les contraintes de pression  $p_k$  sont des tensions propres et sont en équilibre dans une partie quelconque de la masse de terre, on doit exclure la pression  $p_k$  lorsque l'on veut établir une relation entre les tensions  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $q$  et les forces extérieures. La relation (4) s'écrit donc pour un matériau avec cohésion

$$\sigma_2 + p_k = (\sigma_1 + p_k) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\rho}{2}\right),$$

où

$$\sigma_2 = \sigma_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\rho}{2}\right) - p_k \left[1 - \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\rho}{2}\right)\right]. \quad (7)$$

La pression  $q$  à la surface de glissement se transforme d'après la fig. 2, après suppression de la tension normale  $p_k$  en

$$q_0 = q \frac{\sin \rho}{\sin \rho_0} \text{ d'où } \operatorname{tg} \rho_0 = \frac{\operatorname{tg} \rho}{1 - \frac{p_k}{q \cos \rho}} \quad (8)$$

Il existe donc à la surface de glissement un angle de frottement apparent (plus grand)  $\rho_0$ , tandis que l'angle  $45^\circ + \frac{\rho}{2}$  entre la surface de glissement et la tension principale est conservé.

On obtient de la façon la plus simple une appréciation sur les valeurs prati-



quement possibles de  $p_k$  en observant les parois verticales d'une fouille de fondation qui tiennent souvent, ainsi qu'on le sait, jusqu'à une hauteur importante  $h$ .

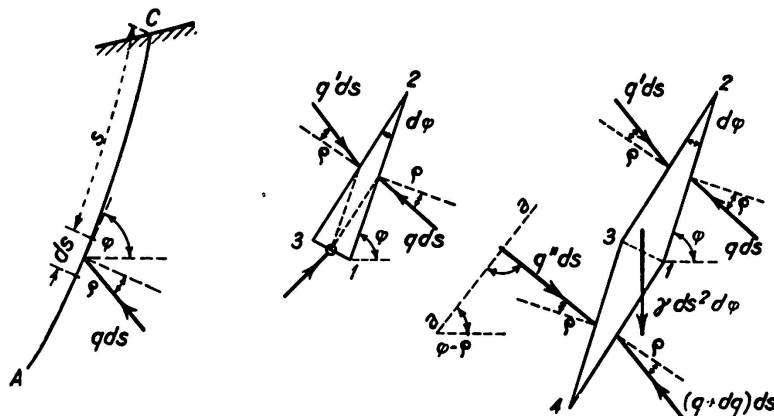


Fig. 3.

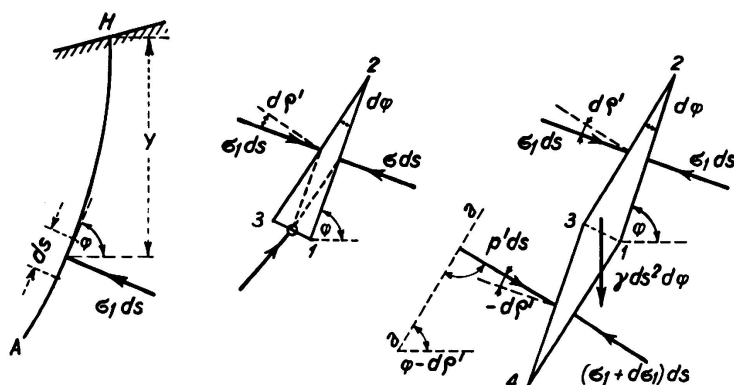


Fig. 4.

A la surface d'une telle paroi on a  $\sigma_1 = \gamma h$  et  $\sigma_2 = 0$ , c'est pourquoi le matériau doit posséder d'après l'éq. (7) une pression capillaire d'au moins

$$p_k = \gamma h \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) - 1} \quad (9)$$

On peut souvent observer des pressions  $p_k = 0,3$  à  $0,5 \text{ kg/cm}^2$  dans du gravier limoneux.

## 2° La pression à la surface de glissement.

Dans ce qui suit nous allons établir l'équation de *F. Kötter* pour la pression à une surface de glissement incurvée, dans une forme simple et spéciale pour l'Ingénieur.<sup>6</sup> Nous considérons un prisme de terre infiniment petit qui se trouve sur une surface de glissement incurvée AC, à la distance  $s$  de la surface C (cf. fig. 3). Le prisme a une longueur = 1 perpendiculairement au plan de la figure. Admettons qu'une surface 1 — 2 =  $ds \cdot 1$  se trouve sur la surface

<sup>6</sup> M. Ritter: „Zur Theorie des Erddruckes auf Stützmauern.“ Schweizerische Bauzeitung 1910. L'exposé d'alors ne s'étendait qu'aux matériaux sans cohésion.

de glissement et que l'autre surface 2 — 3 soit tournée d'un angle  $d\varphi$ . Sur la surface 1 — 2 agit la pression  $q \cdot ds$  sous l'angle de frottement  $\rho$  et sur la surface 2 — 3 la pression  $q' \cdot ds$  également sous l'angle de frottement  $\rho$  par suite de l'éq. (1). La condition d'équilibre contre une rotation autour de l'axe  $o$  dans la surface 1 — 3 s'exprime:

$$q \, ds \cdot \frac{ds}{2} \cos(\rho - d\varphi) = q' \, ds \cdot \frac{ds}{2} \cos(\rho + d\varphi);$$

d'où l'on tire

$$q' = q \frac{\cos(\rho - d\varphi)}{\cos(\rho + d\varphi)} = q \frac{\cos \rho \cos d\varphi + \sin \rho \sin d\varphi}{\cos \rho \cos d\varphi - \sin \rho \sin d\varphi}$$

ou avec  $\cos d\varphi = 1$  et  $\sin d\varphi = d\varphi$

$$q' = q (1 + 2 \operatorname{tg} \rho \cdot d\varphi) \quad (10)$$

Le poids propre du prisme de terre fournit un moment infiniment petit d'ordre supérieur et peut par conséquent être négligé. Nous ajoutons maintenant à la surface 1 — 3 le prisme congruent 1 — 3 — 4 avec la surface 1 — 4 dans la surface de glissement. La pression  $(q + dq)$  agit alors sur la surface 1 — 4 sous l'angle de frottement  $\rho$  et la pression  $q'' \cdot ds$  sur la surface 3 — 4, également sous l'angle  $\rho$  en tenant compte de l'éq. (1). Le prisme 1 — 2 — 3 — 4 a le poids  $\gamma ds^2 d\varphi \cdot 1$ , où  $\gamma$  désigne le poids de la terre par unité de volume. Nous pouvons facilement éliminer  $q''$  en posant la condition d'équilibre contre un déplacement dans la direction de l'axe  $a - a$  perpendiculaire à la tension  $q''$ ; elle s'exprime:

$$(q + dq) \, ds \, d\varphi - q (1 + 2 \operatorname{tg} \rho \, d\varphi) \, ds \, d\varphi = \gamma \sin(\varphi - \rho) \, ds^2 \, d\varphi$$

et fournit l'équation différentielle de *F. Kötter*

$$\frac{dq}{ds} - 2 q \operatorname{tg} \rho \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \gamma \sin(\varphi - \rho). \quad (11)$$

L'intégration donne

$$q = \gamma e^{2\varphi \operatorname{tg} \rho} \int_0^s e^{-2\varphi \operatorname{tg} \rho} \sin(\varphi - \rho) \, ds + C$$

où  $C$  désigne la pression  $q$  au point  $C$ . Dans le cas d'une surface de glissement plane  $d\varphi/ds$  disparaît et l'on obtient

$$q = \gamma s \sin(\varphi - \rho) + C. \quad (12)$$

Pour un matériau avec cohésion il est possible de calculer  $q_0$  et  $\rho_0$  en partant de  $q$  et  $\rho$  avec l'éq. (8) où il faut observer que  $\rho_0$  varie le long de la surface de glissement avec un rapport oscillant  $p_k/q$ ; l'application de l'équation devient ainsi beaucoup plus compliquée.

### 3° Les tensions principales.

Pour la tension principale  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$  il est possible d'établir, de la même manière que pour la pression  $q$  à la surface de glissement, une relation qui permette de calculer très facilement  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  à une profondeur quelconque au-dessous de la surface. A la fig. 4,  $AH$  est une surface de tension principale dont les tangentes doivent avoir la direction de la tension principale  $\sigma_2$ . Considérons le prisme de terre infiniment petit 1 — 2 — 3 de longueur = 1, dont une surface

1 — 2 = ds. 1 se trouve dans la surface principale A H et qui forme l'angle  $d\varphi$  avec la surface 2 — 3. Sur la surface 1 — 2 agit la tension principale  $\sigma_1$ , sur la surface 2 — 3 la tension  $p$  qui se distingue de  $\sigma_1$  par une grandeur infiniment petite du deuxième ordre. Comme les contraintes principales sont, ainsi qu'on le sait, des valeurs maxima, on a à la surface principale  $d\sigma/d\varphi = 0$ . Il faut remarquer que  $p$  n'agit pas normalement à la surface 2 — 3, mais sous un angle  $d\rho'$  qu'il est facile de calculer. Pour un prisme de terre avec un angle quelconque  $\varphi$  il résulte de l'éq. (2) que:

$$\frac{d\rho'}{d\varphi} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}{(\sigma_1 + \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^2},$$

si l'on tourne la surface ds. 1 dans le plan principal, c'est-à-dire si l'on pose  $\varphi = 0$ , on obtient:

$$\left(\frac{d\rho'}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 - \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\rho}{2}\right) \quad (13)$$

À la surface 1 — 3 nous adjoignons le prisme congruent 1 — 3 — 4 dont la surface 1 — 4 se trouve dans la surface principale A M et contient la tension principale  $\sigma_1 + d\sigma_1$ , tandis que sur la surface 3 — 4 agit la pression  $p$  ds sous l'angle  $-d\rho'$  (on voit aisément que  $d^2\rho'/d\varphi^2$  disparaît pour  $\varphi = 0$ ). Le poids propre du prisme 1 — 2 — 3 — 4 se monte à  $\gamma ds^2 d\varphi \cdot 1$ . La condition contre un déplacement dans la direction de l'axe a-a inclinée de l'angle  $\varphi - d\rho'$ , perpendiculaire à  $p'$  s'exprime:

$$\begin{aligned} (\sigma_1 + d\sigma_1) ds (d\varphi - d\rho') - \sigma_1 ds d\rho' - \sigma_1 ds (d\varphi - 2 d\rho') \\ = \gamma ds^2 d\varphi \sin (\varphi - d\varphi); \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{\gamma \sin \varphi}{1 - \frac{d\rho'}{d\varphi}} = \gamma \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\rho}{2}\right) \sin \varphi. \quad (14)$$

L'intégration à partir de la surface donne

$$\sigma_1 = \gamma \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\rho}{2}\right) \int_0^s \sin \varphi ds = \gamma \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\rho}{2}\right) \cdot y + \sigma_{a1}, \quad (15)$$

où  $\sigma_{a1}$  désigne la tension principale  $\sigma_1$  (engendrée par la surcharge) à la surface. L'éq. (15) indique que la tension principale  $\sigma_1$ , engendrée à la profondeur  $y$  par le poids, correspond à la pression d'un liquide de poids spécifique  $\gamma \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\rho}{2}\right)$ .

De la même façon on peut calculer la tension principale  $\sigma_2$ . La condition d'équilibre pour un prisme de terre infiniment petit est ici:

$$\frac{d\sigma_2}{ds} = \frac{\gamma \sin \varphi}{1 + \frac{d\rho'}{d\varphi}},$$

où il faut introduire

$$\left(\frac{d\rho'}{d\varphi}\right)_{\varphi=90^\circ} = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\rho}{2}\right) - 1.$$

On obtient par intégration

$$\sigma_2 = \gamma \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right) \cdot y + \sigma_{a2}, \quad (16)$$

où  $\sigma_{a2}$  représente la tension principale  $\sigma_2$  à la surface.

Pour de la terre avec cohésion l'éq. (15) s'écrit:

$$\sigma_1 + p_k = \gamma \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right) \cdot y + (\sigma_{a1} + p_k).$$

L'éq. (15), de même que l'éq. (16) sont conservées en ce sens que les pressions  $p_k$  disparaissent; l'influence de la cohésion s'exprime par la variation de  $\sigma_{a1}$  suivant l'éq. (7).

#### 4° Résistance de la semelle de fondation.

Les relations développées dans les paragraphes 2 et 3 permettent le calcul de la plus grande surcharge possible d'une semelle de fondation, compatible avec l'équilibre. C'est la surcharge pour laquelle la terre s'écoule latéralement par suite de la formation de lignes de glissement. Admettons que la surface de fondation se trouve à la profondeur  $h$  au-dessous de la surface, que sa largeur égale  $2b$  et que sa longueur est si grande que l'on puisse traiter le problème comme un problème plan de tension. A la fig. 5 nous avons esquissé le caractère approximatif de l'état de tension à l'état limite. Désignons par  $\sigma$  la pression spécifique de la fondation et admettons qu'il existe en dehors de la fondation une surcharge  $p$  à la surface.

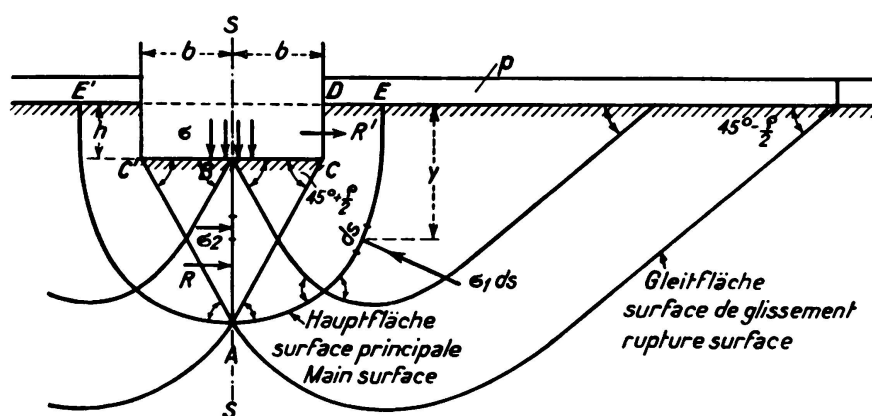


Fig. 5.

Le plan  $s - s$  est, pour des raisons de symétrie, une surface principale dans le sens donné au paragraphe 3; par conséquent à la profondeur  $y$  agit, d'après l'éq. (16), la tension principale horizontale:

$$\sigma_2 = \gamma \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right) \cdot y + \sigma \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right). \quad (17)$$

Les surfaces de glissement doivent former l'angle  $45^\circ - \frac{\rho}{2}$  avec le plan principal  $s - s$  et l'angle  $45^\circ + \frac{\rho}{2}$  avec la base de la fondation. Au-dessous de la fon-

dation règne donc à l'intérieur de la zone CAC' l'état de tension classique de Rankine avec surfaces de glissement planes et l'on a :

$$z = b \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right). \quad (18)$$

A l'extérieur des surfaces de glissement AC et AC' l'allure des tensions est plus compliquée; ainsi que l'on peut le voir d'après la fig. 5 il existe des surfaces de glissement incurvées dont un faisceau coupe la surface libre sous l'angle de  $45^\circ - \frac{\rho}{2}$  car la surface chargée de  $p$  représente une surface principale. La surface principale des tensions  $\sigma_1$  qui passe par A coupe ce faisceau de surfaces de glissement sous l'angle  $45^\circ + \frac{\rho}{2}$  et forme par conséquent en coupe avec le plan de la figure la courbe EAE' qui, par raison de symétrie, possède une tangente horizontale en A et coupe verticalement la surface en E et E'.

Quoique l'allure du plan principal EAE' ne soit pas exactement fixée, il est facile de calculer la tension principale  $\sigma_1$  en partant de l'éq. (15) car  $\sigma_1$  ne dépend pas de l'allure de la surface, mais seulement de la profondeur  $y$ . D'après l'éq. (4) on a à la surface la relation

$$p = \sigma_{a1} \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right),$$

d'où il faut tirer  $\sigma_{a1}$  pour l'introduire dans l'éq. (15). On a donc à la profondeur  $y$

$$\sigma_1 = \gamma \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) \cdot y + p \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right). \quad (19)$$

Nous décomposons la pression  $\sigma_1 ds \cdot 1$  en une composante horizontale  $\sigma_1 \cdot ds \cdot \sin \varphi = \sigma_1 \cdot dy$  et une composante verticale  $\sigma_1 \cdot ds \cdot \cos \varphi$ . La condition d'équilibre du massif de terre ABCDE contre le déplacement en direction horizontale fournit la pression  $\sigma$  de la fondation à l'état limite de l'équilibre. Cette condition s'exprime :

$$R + R' = \int_0^{h+z} \sigma_1 dy. \quad (20)$$

La résultante  $R$  dans la surface AB est, d'après l'éq. (17), après intégration

$$R = \frac{1}{2} \gamma z^2 \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right) + \sigma z \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right).$$

Pour la résultante  $R'$  il faut par contre utiliser l'éq. (18); elle fournit :

$$R' = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) + p h \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right).$$

La somme des forces horizontales à la surface principale incurvée AE est

$$\begin{aligned} \int_0^{h+z} \sigma_1 dy &= \int_0^{h+z} \gamma \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) y dy + \int_0^{h+z} p \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \gamma (h+z)^2 \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) + p (h+z) \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right). \end{aligned}$$

Si l'on introduit ces expressions dans l'éq. (20) et si l'on exprime  $z$  d'après l'éq. (18) en fonction de  $b$ , on obtient pour la pression  $\sigma$  de la fondation à l'état limite de l'équilibre

$$\sigma = \frac{1}{2} \gamma b \left[ \operatorname{tg}^5 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) - \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) \right] + (\gamma h + p) \operatorname{tg}^4 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right). \quad (21)$$

Le premier terme représente la résistance lorsque la fondation est placée directement sur une surface libre. Le second terme, qui exprime l'influence de la profondeur de la fondation lorsqu'existe une surcharge à la surface, a déjà été déduit par Rankine lui-même et se trouve dans bien des manuels.

Pour de la terre avec cohésion il faut introduire dans l'éq. (21)  $\sigma' + p_k$  à la place de  $\sigma$  et  $p + p_k$  à la place de  $p$ . On obtient ainsi la pression  $\sigma'$  relevée de la fondation pour l'état limite de l'équilibre,

$$\sigma' = \sigma + p_k \left[ \operatorname{tg}^4 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) - 1 \right]. \quad (22)$$

L'utilisation des surfaces principales pour le calcul de la résistance  $\sigma$ , resp.  $\sigma'$  présente l'avantage que l'allure des surfaces principales en dehors de la zone ACC' ne doit pas être connue exactement. On peut cependant aussi chercher à utiliser la surface de glissement AF passant par A pour la détermination des tensions. A. Prandtl, H. Reissner et A. Caquot (l. c.) ont déduit, pour  $h = 0$  et en négligeant le poids  $\gamma$ , la relation

$$\sigma = p \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) \cdot e^{\pi \operatorname{tg} \rho} \quad (23)$$

qui pour de la terre avec cohésion (où l'on a posé  $\sigma' + p_k$  à la place de  $p$ ) se transforme en

$$\sigma' = \sigma + p_k \left[ \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\rho}{2} \right) e^{\pi \operatorname{tg} \rho} - 1 \right]. \quad (24)$$

On arrive à ces relations en se basant sur l'état de tension esquissé à la fig. 6 pour lequel l'exigence de l'allure continue des tensions est satisfaite. Dans les zones ACC' et CFG on a admis les états de tension de Rankine avec surfaces de glissement planes, dans la zone ACF on se sert pour la transition continue

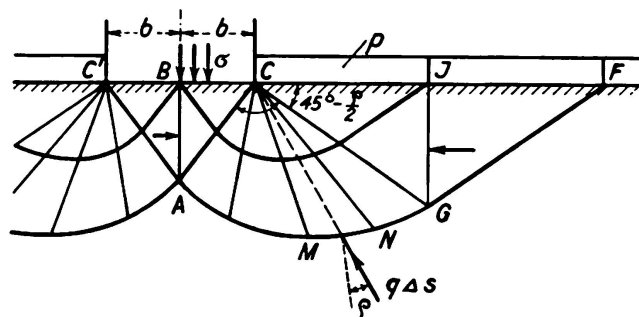


Fig. 6.

de l'état de tension donné par Résal dans lequel un faisceau de lignes de glissement est représenté par un faisceau de rayons et l'autre (croisant sous l'angle  $90^\circ - \rho$ ) par des spirales logarithmiques. On voit aisément que les pressions passent par le point C à la surface de glissement AG et que l'angle ACG est

un angle droit. L'équation des moments pour le point C sur le massif de terre ABCJG fournit sans autre les relations (23) et (24). En outre cette relation qui conduit à des charges limites beaucoup plus élevées que l'éq. (21) nous paraît très incertaine. D'une part il n'est absolument pas démontré que l'état de tension (en soi possible et sans contradiction) de la fig. 6 corresponde aux valeurs minima de  $\sigma$  et  $\sigma'$ . D'autre part un développement du calcul pour tenir compte du poids de la terre  $\gamma$  est impossible, car l'équilibre des forces sur l'élément CMN est détruit lorsque les pressions sur les surfaces CM et CN sont déterminées d'après l'éq. (12) et lorsque l'on tient compte du poids propre dans le calcul.

##### 5° Poussée des terres sur les murs de soutènement.

Les relations générales indiquées dans les paragraphes 2 et 3 permettent le calcul de la poussée des terres E qui agit sous un angle quelconque, c'est-à-dire dans le sens de l'angle d'incidence  $\rho'$  ( $\rho' < \rho$ ) donné par Coulomb sur la paroi AB d'un mur de soutènement (cf. fig. 7). Cette hypothèse de surfaces de glissement planes conduit, on le sait, lors d'une disposition arbitraire de la

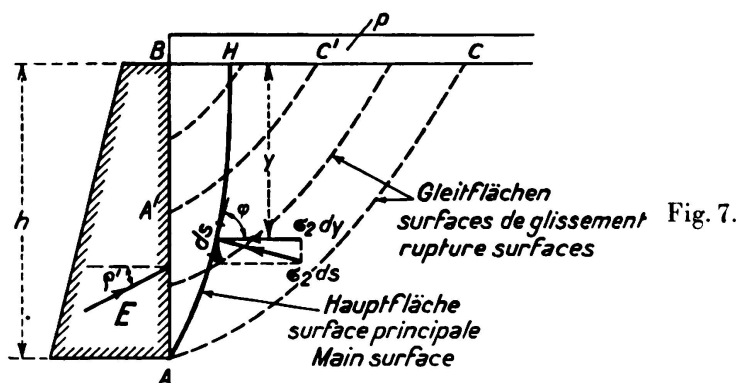


Fig. 7.

direction de E à des contradictions dans l'équilibre des forces qui agissent sur le prisme de terre glissant, c'est pourquoi H. Müller-Breslau et H. Reissner (l. c.) se sont vus contraints de calculer avec des surfaces de glissement incurvées. Le problème principal, détermination de l'allure de la surface de glissement, qui, pour assurer l'équilibre, exige la plus grande poussée des terres E, n'est à l'heure actuelle pas encore résolu.

Nous nous limiterons dans la suite à un sol horizontal et à une paroi verticale du mur. Les surfaces de glissement AC, A'C' de forme inconnue sont coupées sous l'angle  $\left(45^\circ - \frac{\rho}{2}\right)$  par la surface principale AH, sur laquelle agissent les tensions principales  $\sigma_2$  qu'il faut calculer à partir de l'éq. (16). A la profondeur y on a donc :

$$\sigma_2 = \gamma \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\rho}{2}\right) \cdot y + p \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\rho}{2}\right),$$

où p désigne une surcharge uniformément répartie. Nous décomposons  $\sigma_2 ds$  en la composante horizontale  $\sigma_2 \cdot ds \cdot \sin \varphi = \sigma_2 dy$  et la composante verticale  $\sigma_2 \cdot ds \cdot \cos \varphi$ . L'équilibre des forces sur le massif de terre ABH contre un

déplacement dans le sens horizontal fournit:

$$E \cos \rho' = \int_A^H \sigma_2 dy = \gamma \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right) \cdot \int_0^h y dy + p \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right) \cdot \int_0^h dy,$$

d'où

$$E = \left( \frac{1}{2} \gamma h^2 + p h \right) \frac{\operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right)}{\cos \rho'} \quad (25)$$

D'après cette formule qui repose sur la forme incurvée des surfaces de glissement on obtient des poussées de terre sensiblement plus élevées que d'après la formule de Coulomb de la poussée des terres, qui admet des surfaces planes de glissement.

S'il s'agit de terre avec cohésion, il faut écrire dans l'éq. (25)  $p + p_k$  à la place de  $p$  et introduire  $p_k h$  pour  $E' \cos \rho'$ . On obtient ainsi

$$E' = E - p_k h \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\rho}{2} \right)}{\cos \rho'}. \quad (26)$$

Les relations (25) et (26) partent de l'hypothèse que l'état limite de l'équilibre est atteint dans tous les points du massif de terre ABC. Nous ne pouvons pas dire si cet état fournit la plus grande poussée des terres ou si le cas où il ne se forme qu'une seule surface de glissement est plus défavorable.

### Résumé.

Pour l'état limite de l'équilibre, dans lequel chaque point du massif de terre appartient à une surface de glissement (incurvée), l'auteur déduit et intègre les équations différentielles de la pression à la surface de glissement et à la surface principale (tensions principales). Ces relations établies pour de la terre sans et avec cohésion, sont appliquées au calcul de la résistance d'une semelle de fondation, ainsi qu'à la détermination de la poussée des terres sur un mur de soutènement, en admettant des surfaces de glissement incurvées.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide