Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Application des voiles minces en construction métallique

Autor: Lafaille, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-2973

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

V 11

Application des voiles minces en construction métallique.

Anwendung von Schalen im Stahlbau.

The Use of Shells in Steel Structures.

B. Laffaille,
Ingénieur des Arts et Manufactures, Paris.

Nous avons expliqué dans le Mémoire sur l'étude générale des surfaces gauches minces publié dans le troisième volume des Mémoires de 1935 de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes quels principes et quelles applications il était possible de tirer, dans le domaine du béton armé, de la considération des courbures en fonction des équilibres géométriques des surfaces minces.

A la fin de ce Mémoire nous indiquions que ces principes nous semblaient applicables aux constructions métalliques. Nous précisions encore que le vrai problème dans ce nouveau domaine était vraisemblablement un problème de flambage des surfaces à courbures.

C'est cette suite de considérations que nous entreprenons de développer ici.

Avant de décrire ce résumé de nos travaux nous considérons comme un devoir de signaler les collaborations qui nous ont été précieuses et nous voulons même préciser que, dans notre esprit, ces collaborations ont permis de créer ce climat-cet esprit d'équipe-propre à la mise au point d'une question qui nous paraît dépasser, pour l'intérêt de l'industrie sidérurgique, le point de vue un peu étroitement personnel que l'on serait tenté d'attacher à un simple problème de résistance de matériaux.

Tout d'abord l'entreprise Rouzaud de Paris nous a facilité toutes les questions d'essais préliminaires jusqu'aux premières constructions de réalisations, exécutées par les Etablissements Delattre et Frouard. Monsieur *L. Beschkine,* ingénieur des Arts et Manufactures, avec lequel depuis plusieurs années nous avons étudié ces questions générales, a personnellement contribué à l'élabaroration des calculs particuliers relatifs à ces surfaces à courbures.[1]

Lorsqu'il s'est agi d'envisager les considérations de flambage liés aux facteurs de courbures et de répartitions locales des contraintes, nous avons trouvé en Monsieur *F. Vasilesco,* docteur es sciences, un collaborateur éminent, dont la science mathématique a permis de résoudure des problèmes nouveaux envisagés sous l'angle le plus général.

---

[1] cf. le 4e vol. des Mémoires de L'A.I.P.C.

Enfin, et c'est là, personnellement, une des questions qui nous préoccupent le plus à cause des répercussions possibles sur le plan humain nous avons intéressé en méme temps à ces problèmes d'ingénieur Monsieur *R. Camelot,* Grand Prix de Rome, architecte des Monuments Civils et des Palais Nationaux. La formation classique et profondément humaine que donne le métier de l'art de construire nous a semblé un facteur essentiel à introduire dans cette recherche qui doit permettre de créer des formes nouvelles appliquées à un matériau relativement nouveau.

Revenons maintenant au point de vue de l'Ingénieur.

Il s'agit tout d'abord d'éxaminer attentivement un schéma de structures résistantes d'une construction métallique courante.

Nous discernons immédiatement deux types d'éléments: ceux résistants aux charges, comme les fermes, les pannes, les lisses, les poinçons, les contre-fiches — et les éléments proprement couvrants comme la tôle ondulée par exemple.

Déja dans la composition et l'organisation des éléments résistants nous sommes souvent frappés par la complexité et la diversité des pièces qui viennent se charger les unes les autres. Une latte fait travailler en flexion une panne, une panne fait travailler en flexion une fausse-ferme laquelle repose sur des poutres-pannes, qui enfin prennent appuis sur des fermes principales. Celles-ci par l'intermédiaire des poteaux transmettent au sol enfin les charges à équilibrer.

Dans un problème de construction il s'agit d'équilibrer les forces mises en jeu avec le minimum de matière, compte tenu des résistances de sécurité.

Il semble à première vue que la succession vraiment complexe des pièces portantes ne correspond pas à un schéma simple.

L'explication de cette manière de procéder, cependant courante, doit être cherchée dans le fait que les pièces métalliques unitaires fabriquées par les aciéries entrainent, quasi forcément, à cause de leurs dimensions, des modes d'assemblage et même des ensembles partiels portants figés une fois pour toutes dans les formes faciles et connues.

Si on tient compte encore des considérations de transport et de poids on justifie en fin de compte que ces schémas constructifs compliqués sont cependant pratiques dans le sens commun du mot.

Déjà la soudure, introduite comme technique d'assemblage montre des formes et des dispositifs résisstants plus simples. Si cette soudure peut être effectuée non plus en atelier mais directement sur le chantier, les dimensions des pièces à transporter n'entrent plus comme facteur de construction et les schémas résistants se rapprochent des tracés simplifiés et purement géométriques des équilibres des forces entre elles.

Mais on conçoit qu'il est possible, tout en bénéficiant de cette simplicité de conception dans les arrangement des dispositifs résistants, d'envisager la question de construction sous un aspect plus général et dire ceci:

Voici une surface à couvrir, voici le volume minimum à clore défini par les gabarits. Nous connaissons les conditions d'action des forces extérieures. Donnons-nous comme but de contenir ces efforts, d'amener simplement les réactions aux appuis par le moyen de l'enveloppe qui va clore le volume.

Problème général, mais seul problème intéressant en fin de compte.

Et cette même idée, déjà génératrice de solutions si simples et si neuves cependant dans le domaine du béton armé consacré aux surfaces minces à courbures présente aussi dans le domaine de la construction métallique une voie fructueuse.

Que faut-il pour qu'une surface mince à courbures soit stable pour un système de charges données?

Il faut tout d'abord que les conditions d'équilibres géométriques soient satisfaites, il faut en second lieu que des déformations locales dûes à des phénomènes considérés en dehors de la géométrie ne viennent pas apporter des perturbations élastiques dans le comportement de ces équilibres.

Pour le moment envisageons le problème de la façon suivante:

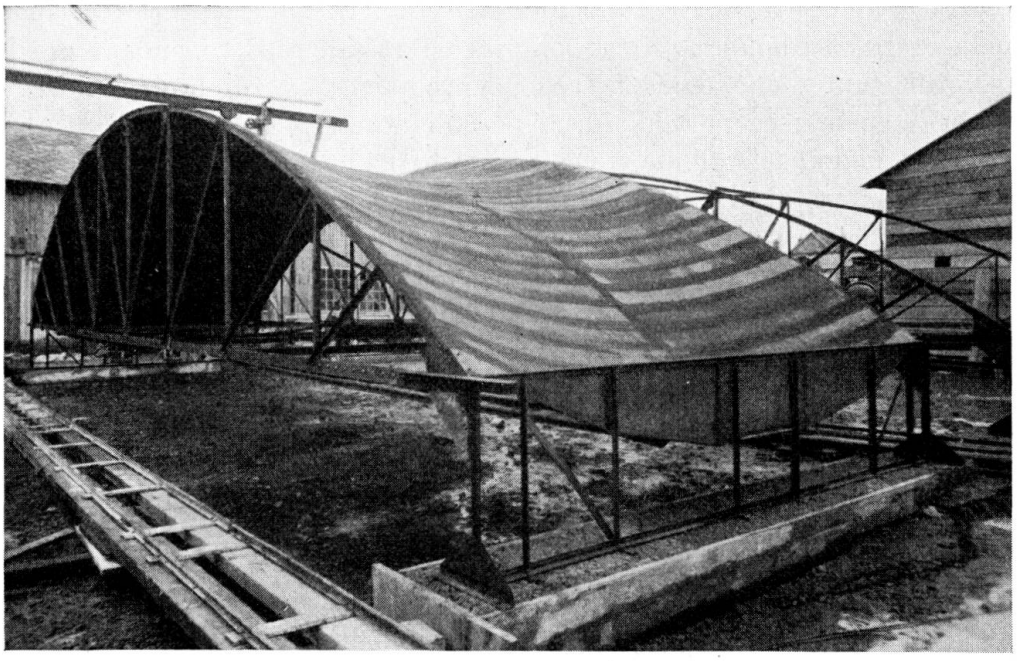


Fig. 1.

Voile mince en tôle. Hyperboloïde de révolution. Portée 14 m. Epaisseur de la tôle 12/10 mm. Dreux (France).

Une surface en tôle mince eu égard aux deux dimensions tangentielles est très «déformable». Elle se présente sous l'aspect d'une «toile» et la première idée qui vient à l'esprit consiste à considérer l'équilibre de cette «toile» en la tendant sur un cadre porteur.

C'est ce que nous avons tout d'abord réalisé (fig. 1).

Pratiquement cette façon de faire consistait à supprimer les pannes des constructions classiques. On reportait les forces en jeu directement sur les fermes par le moyen de la surface couvrante.

Premier résultat déjà générateur d'économie.

Quelques remarques sont intéressantes à signaler ici.

Tout d'abord nous avions imaginé de nous servir, dans ce cas plus systématiquement de surfaces à courbures inverses.

Ces surfaces présentaient l'avantage de permettre des conditions de travail

en traction dans le métal, même en cas de changement de signe des efforts, ce qui peut se produire pour des couvertures légères soumises à l'action du vent tantôt en pression, tantôt en dépression.

En second lieu, si nous avions simplement défini des surfaces tendues cylindriques par exemple, et non plus à courbures inverses, nous aurions eu, dans bien des cas de charges — donnant toujours cependant des tractions principales, en intensité — un «roulement» suivant la courbure lorsque le funiculaire de ces charges ne correspondait plus avec la ligne moyenne de l'élément résistant.

Ce «roulement» qui peut être tenu par des cisaillements lorsque la surface présente localement quelque résistance au flambage risquait ici d'entrainer purement et simplement des déformations et des plis.

Il faut d'ailleurs noter que Monsieur *F. Aimond,* dans une note publiée dans la revue du «Génie-Civil» en 1933 indiquait l'intéret qu'il y aurait à construire des surfaces en paraboloïdes hyperboliques en métal, sans cependant préciser le mode d'utilisation d'une telle surface par rapport aux réactions des rives. En fait une telle surface en paraboloïde hyperbolique est pratiquement peu utilisable dans la construction métallique à cause des difficultés de traçage et de montage qu'elle entrainerait et dès les premiers essais dont nous pârlons nous avons choisi une surface à courbures inverses de «révolution». De telle sorte que nous avions toujours un même élément constructif partiel se répétant un grand nombre de fois pour engendrer la surface totale.

Quoiqu'il en soit nous avions ainsi réalisé ce que nous appelons une surface couvrante semi-autoportante c'est à dire reportant sur des appuis les forces appliquées par l'intermédiaire de simples fermes. Nous avions gagné la suppression des pannes.

Il nous semblait alors que sous réserve d'un choix judicieux des courbures il devait être possible d'utiliser la surface mince de la tôle sans restrictions sur le sens des contraintes locales. A priori on devait se heurter à des phénomènes de flambage. Ces phénomènes devraient être étudiés plus spécialement et par le jeu des variations des courbures le long du profil de la section comprimée on devrait pouvoir réaliser des conditions d'équilibre stable.

Nous avons entrepris de mutiples essais sur maquettes. Ces essais ont mis en évidence le rôle important joué par les raidisseurs transversaux qui avec les rives constituaient des cadres (fig. 2 et 3).

Une même surface mince à courbures inverses travaillant réellement en voûte, sans aucun raidisseur est d'une tenue «molle» sous un système de charges. Le moindre déplacement de force la déforme. Si au contraire nous disposons des raidisseurs transversaux nous améliorons du tout au tout la rigidité de l'ensemble. L'espacement entre raidisseur a de plus une influence marquée.

A la suite de ces essais nous avions obtenu le mode de construction de surfaces minces en tôle entièrement autoportantes. Nous en avons fait faire immédiatement une première réalisation en reprenant les mêmes dimensions et les mêmes données que lors des essais de la surface semi-autoportante ne travaillant qu'à la traction (fig. 4 et 5).

On distingue bien sur ces photographies les raidisseurs-cadres transversaux qui sont de simples lames de tôle découpée.

Une telle surface de 14 m de portée pesait-tôles et raidisseurs compris —

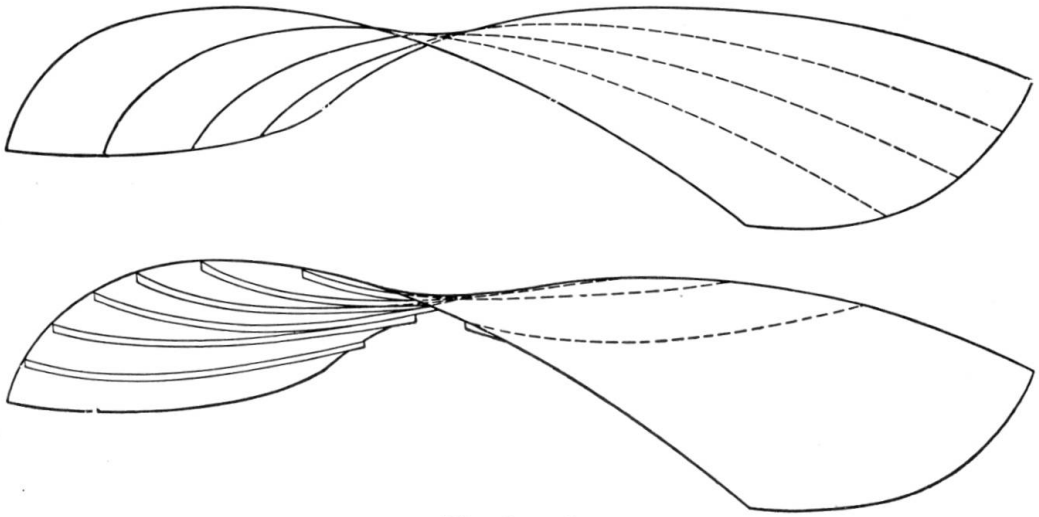
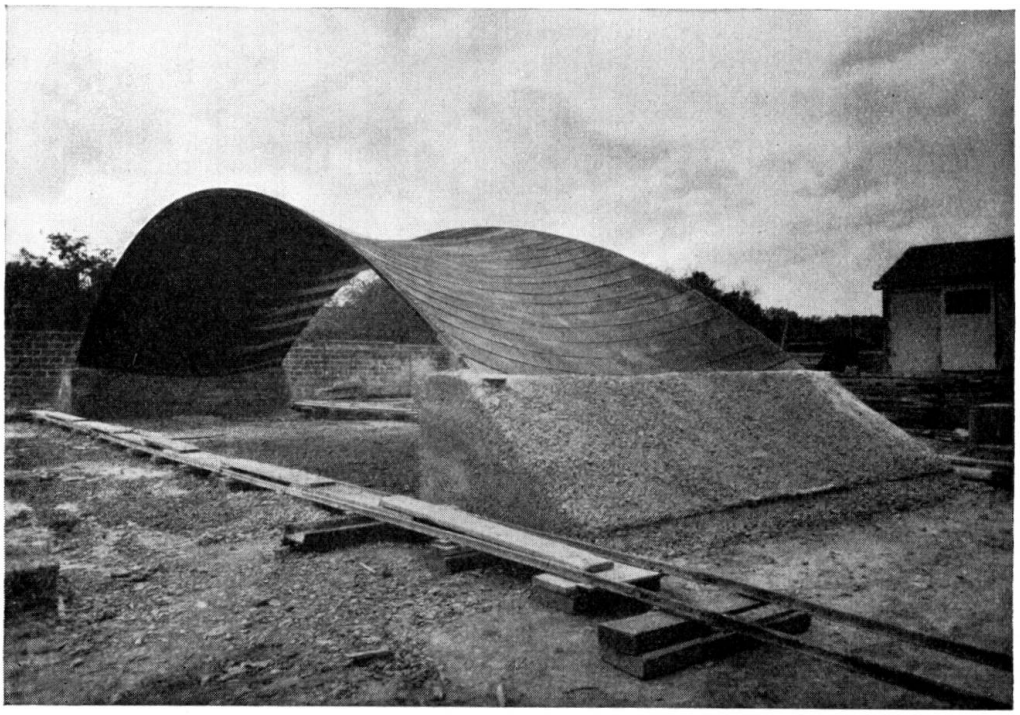


Fig. 2 et 3.
Voile mince à courbures inverses avec raidisseurs (surfaces à cadres). Hyperboloïde de révolution.



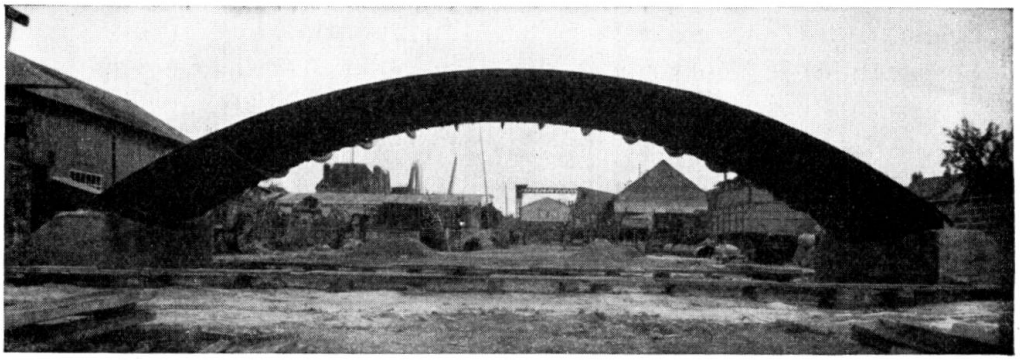


Fig. 4 et 5.
Voile mince en tôle. Surface à cadres. Hyperboloïde de révolution. Portée 14 m. Epaisseur de la tôle 12/10 mm. Dreux (France).

13 kg par mètre carré en plan. Elle a été chargée à 70 kg par mètre carré, aux essais, sans aucune déformation sensible.

On remarque que pour des portées relativement faibles comme celle définie ci-dessus les fatigues unitaires engendrées sont relativement très faibles. De l'ordre de quelques 3 ou 4 kg/mm^2. Pour des constructions plus importantes et c'est ce vers quoi nous tendions, il y avait lieu de pouvoir compter sur des taux de travail plus élévés si l'on voulait utiliser la tôle d'une façon intéressante et économique.

Nous avons eu à étudier à ce moment la question du flambage local d'une surface à courbures.

Nous avons fait faire des essais dans les ateliers des Aciéries de la Marine à St. Chammond, en comprimant, dans le sens des génératrices des portions de cylindres circulaires dont les rayons variaient d'un modèle à l'autre. Ces essais ont été suivis par nous mêmes et Monsieur *L. Beschkine* (fig. 6).

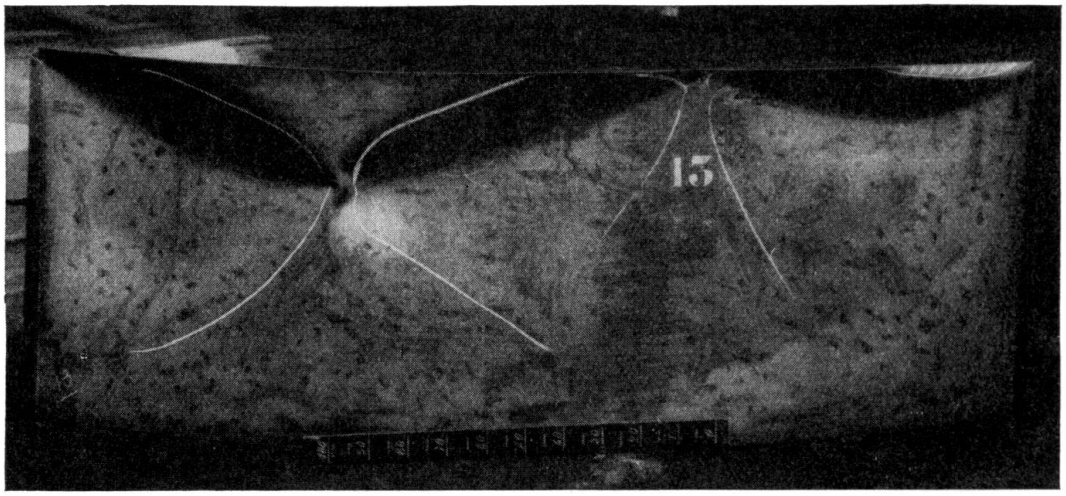


Fig. 6.

Elément de tôle 30/10 mm essayé au flambage par compression simple. St. Chammond.

Puis nous avons repris plus spécialement les essais au flambage de sections de surfaces minces non plus seulement entièrement comprimées, mais fléchies, ce qui, la plupart du temps est le mode courant de répartition des contraintes maxima dans une section résistante.

En même temps que ces essais étaient poursuivis nous avons établi, grâce à la collaboration de Monsieur *T. Vasilesco* quelques données mathématiques générales propres à résoudre quelques problèmes de flambage de surfaces minces à courbures.

Le travail mathématique qui nous parait essentiel si l'on veut pouvoir utiliser totalement le «matériau» tôle se poursuit encore actuellement; les premiers résultats acquis et contrôlés par les expériences nous ayant fourni suffisamment de données pour en profiter et faire exécuter quelques types de constructions.

Nous avons tout d'abord fait construire aux usines des Etablissements Delattre et Frouard à Dannemarie-les-Lys une poutre tube de 32 m de portée en tôle et de $^{30}/_{10}$ de mm d'épaisseur et une voûte en tôle de même épaisseur de 75 m

de portée. Les charges appliquées ont montré la parfaite tenue de ces systèmes à cadres et organisés au flambage (fig. 7, 8 et 9).

On remarque sur les figures qui représentent la voûte de 75 m en cours de montage la position des arcs raidisseurs. Ce sont de très légers treillis en cornières de 30 · 30.

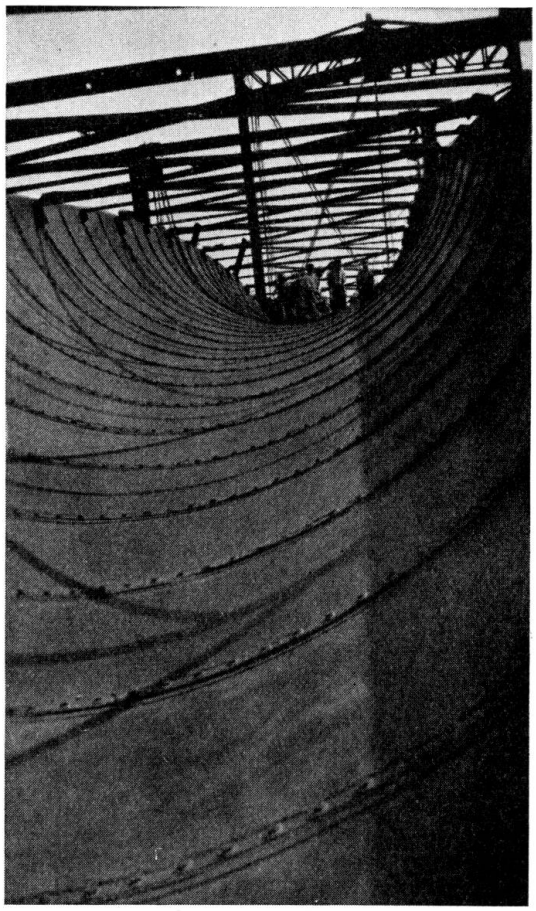


Fig. 7.
Vue de l'extrados en cours de montage.

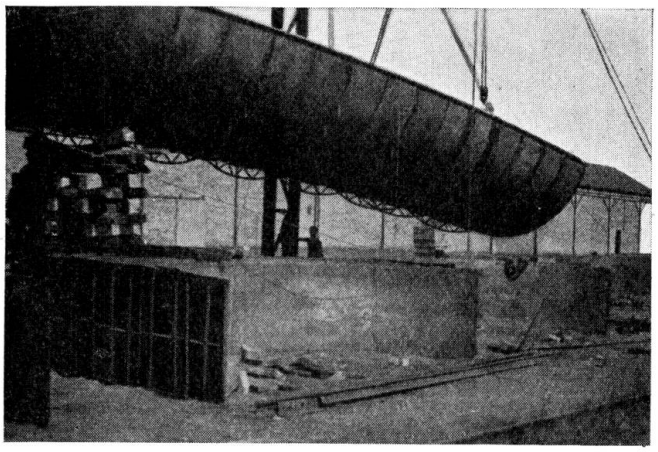


Fig. 8.
Voûte de 75 m de portée. Epaisseur de la tôle 30/10 mm. Surface torique à cadres. Montage des éléments, cadre par cadre. Dannemarie-les-Lys.

La fig. 9 montre l'intérieur de ce grand arc-voûte. Le système de treillis que l'on aperçoit à la partie supérieure est un montage provisoire qui permettait à l'élément de voûte de résister à la torsion au fur et à mesure de l'assemblage des tronçons entre eux.

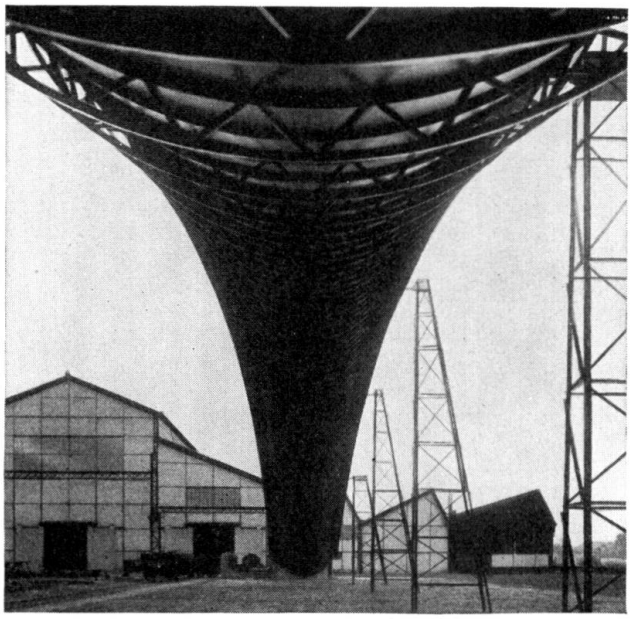


Fig. 9.

Arc de 75 m de portée. Vue de l'intrados avec les rédisseurs. (Etablissements Delattre et Frouard réunis.)

Nous indiquons dans une série de dessins quelques modes d'application de ces surfaces en tôle mince autoportantes. La plupart de ces schémas font l'objet de projets réunis en vue d'exécutions éventuelles (fig. 10).

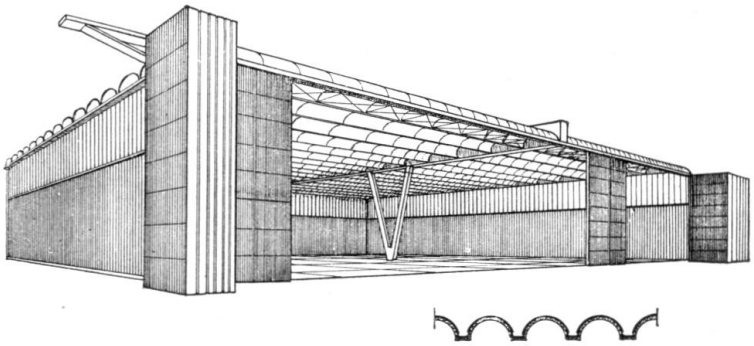


Fig. 10.

Hangar double 67,50 × 67,50 m. Epaisseur des tôles 30/10 mm. Poids mort au m²: 62 kg. Bâtiments en cours de construction à Dijon et à Casaux.

Ce schéma représente un hangar double constitué par deux cellules accolées suivant une poutre médiane. Cette poutre prend appuis à l'intérieur du hangar sur un seul poteau en retrait sur la façade.

La hauteur de la superstructure est très réduite.

Les caractéristiques d'un tel bâtiment sont les suivantes:

Largeur . . . . . 67,50 m
Profondeur . . . . . 67,50 m
Hauteur . . . . . 8,00 m
Appuis intérieurs: 1
Surface couverte: 4560 m²
Poids au m² couvert, y compris les longs pans: 62 kg.

Ce type de bâtiment a été construit par les Etablissements Delattre et Frouard pour le compte du Ministère de l'Air français à Dijon et à Cazaux (fig. 11).

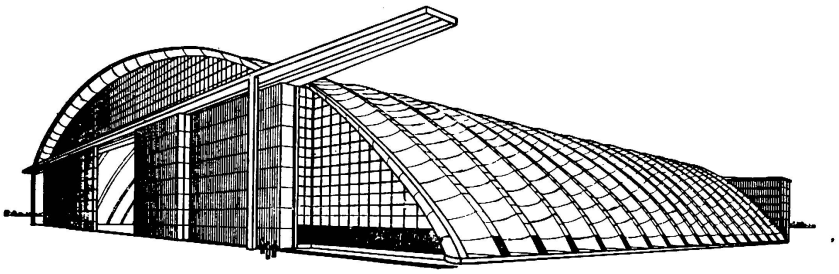


Fig. 11.

Hangar voûtes surface de révolution à cadres. Epaisseur des tôles 30/10 mm. Portée 90 m.

Ce schéma représente un hangar voûte. C'est un des types de couverture les plus économiques. Un élément de voûte ainsi constitué est semblable à celui réalisé à Dannemarie-les-Lys.

Les caractéristiques d'un tel bâtiment sont les suivantes:

Largeur . . . . . 90,00 m
Profondeur . . . . . 90,00 m (à volonté)
Hauteur . . . . . 20,00 m
Appuis intérieurs. . . . . néant
Surface couverte: 8100 m²
Poids au m² couvert, y compris les retombées: 80 kg (fig. 12).

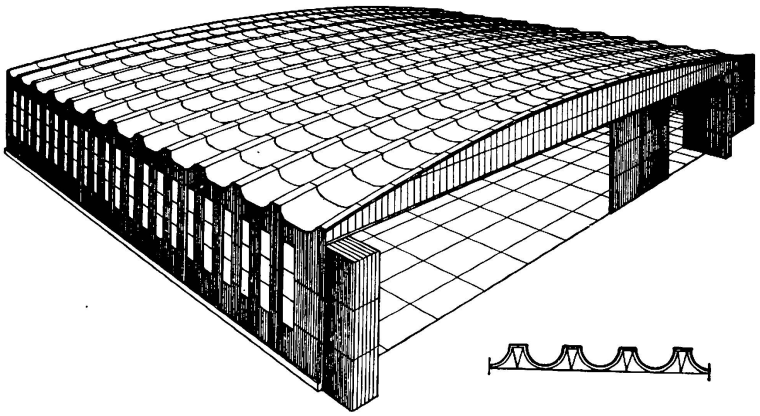


Fig. 12.

Hangars voûtes-surface de révolution à cadres. Voûte tendue à faible flèche. Portée 40 m. Poids au m²: 60 kg.

La couverte de ce bâtiment est une voûte tendue. On remarque sur la coupe schématique du dessin les éléments de cadre raidisseurs à la stabilité et au flambage.

Le poids d'une telle construction est de l'ordre de grandeur de 60 kg/m² (fig. 13, 14, 15 et 16).

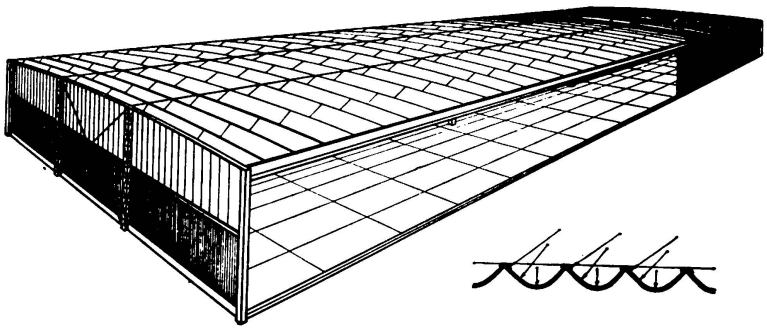


Fig. 13.

Voûte à double auvent. Eléments en tôle de 12/10 mm d'épaisseur. Sections à courbures variables à cadres. Portée d'un auvent 10 m. Poids au m² couvert: 45 kg. Vue en dessous.

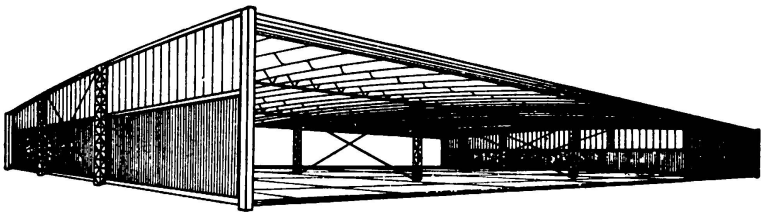


Fig. 14.

Voûte à double auvent. Eléments en tôle de 12/10 mm d'épaisseur. Sections à courbures variables à cadres. Portée d'un auvent: 10 m. Poids au m² couvert: 45 kg. Vue en dessous.

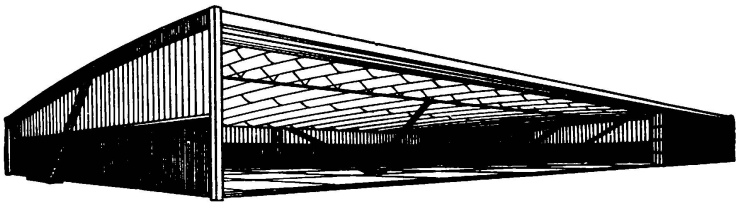


Fig. 15.

Voûte à simple auvent. Eléments en tôle de 14/10 mm d'épaisseur. Sections à courbures variables à cadres. Portée d'un auvent: 12 m. Poids au m² couvert: 48 kgs. Vue en dessous.

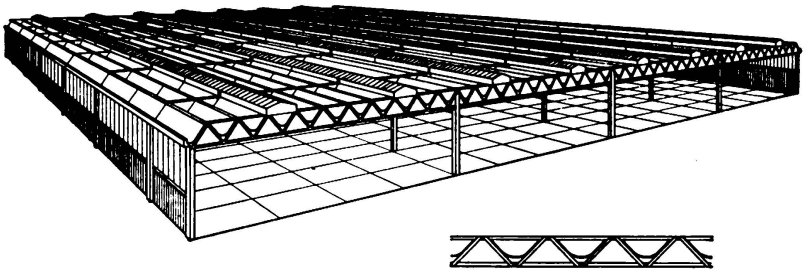


Fig. 16.

Couverture en tôle mince aux lanterneaux. Section en tôle de 12/10 mm d'épaisseur à courbures variables à cadres. Portée d'un élément 12 mètres. Poids au m² couvert: 40 kg. Vue en dessous.

Lorsque la répartition des contraintes se développe tout le long de la section en suivant une loi de flexion, il y a intérêt à réaliser cette section à courbures variables en disposant le plus faible rayon de courbure dans la zone la plus comprimée.

C'est ce qui est représenté sur le dessin schématique de la fig. 15.

On peut combiner différents arrangements des surfaces minces en tôle soit pour réaliser. de très grandes ouvertures libres de bâtiments sur une face, soit pour couvrir des ateliers avec éclairage par lanterneaux.

Ces différents types de bâtiments ont été étudiés en vue de travaux en Italie et ont déjà fait l'objet d'essais concluants (fig. 17 à 21).

Une façon assez curieuse d'utiliser des parois en tôle mince comme éléments portants et de remplissage consiste encore à couvrir le bâtiment à l'aide de tubes cylindriques circulaires fermés, un tel schéma conduit à usiner un nombre très

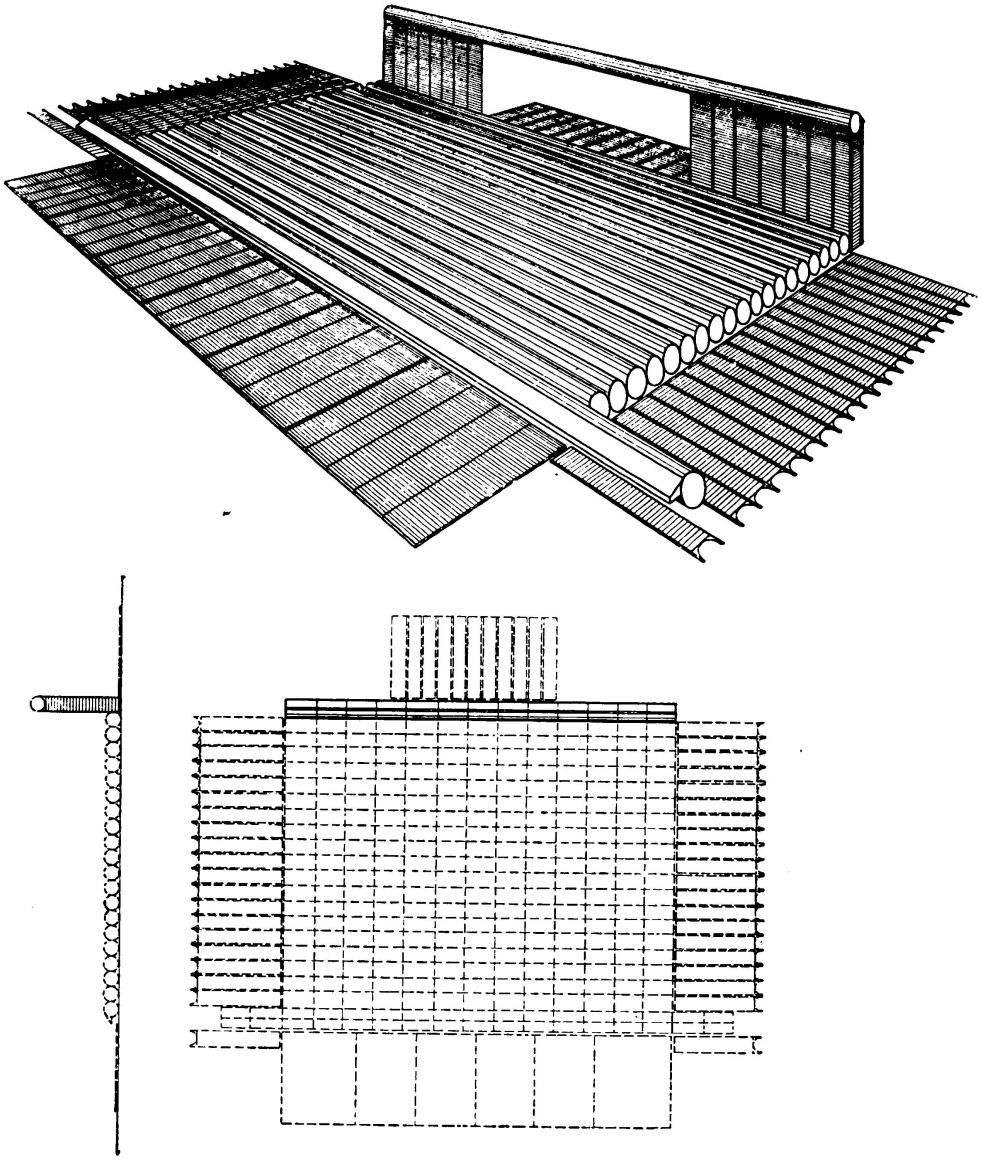


Fig. 17.

Hangar démontable. Schémas de montages à différents stades de la construction.

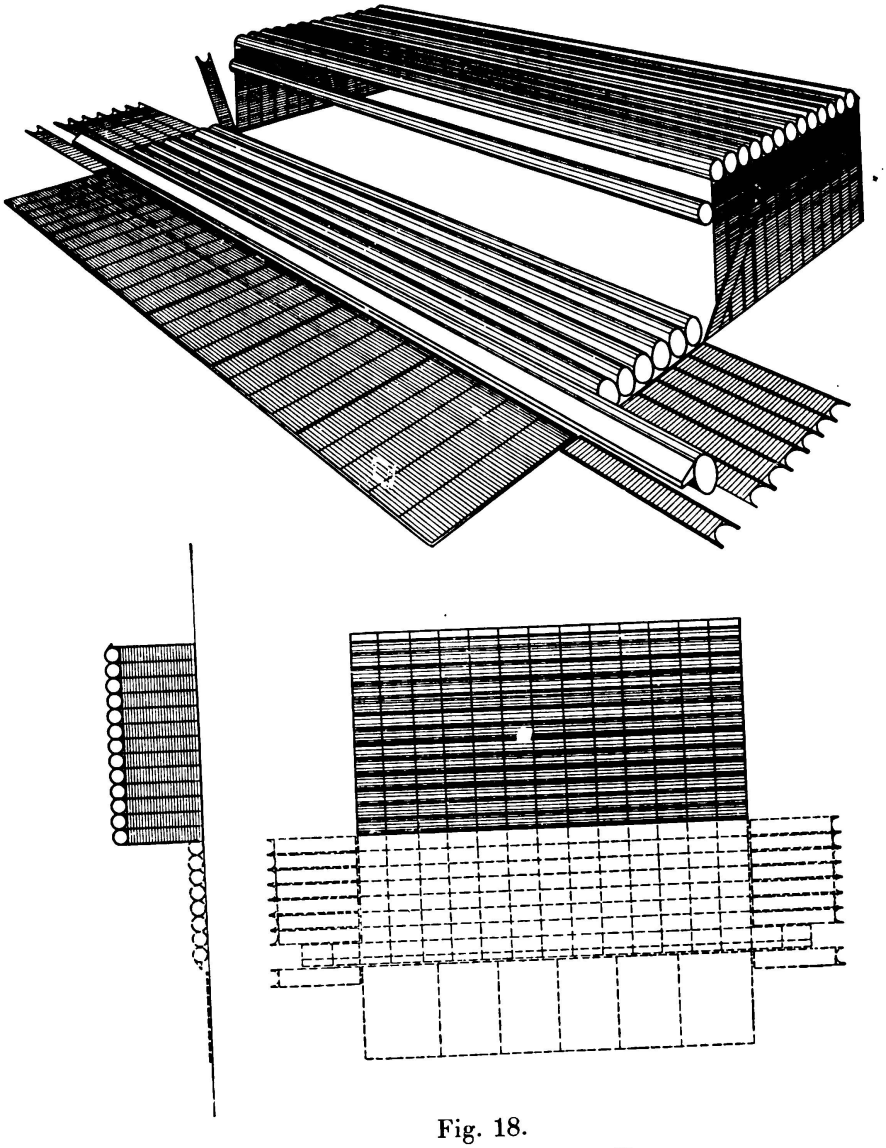


Fig. 18.
(voir le texte de la fig. 17)

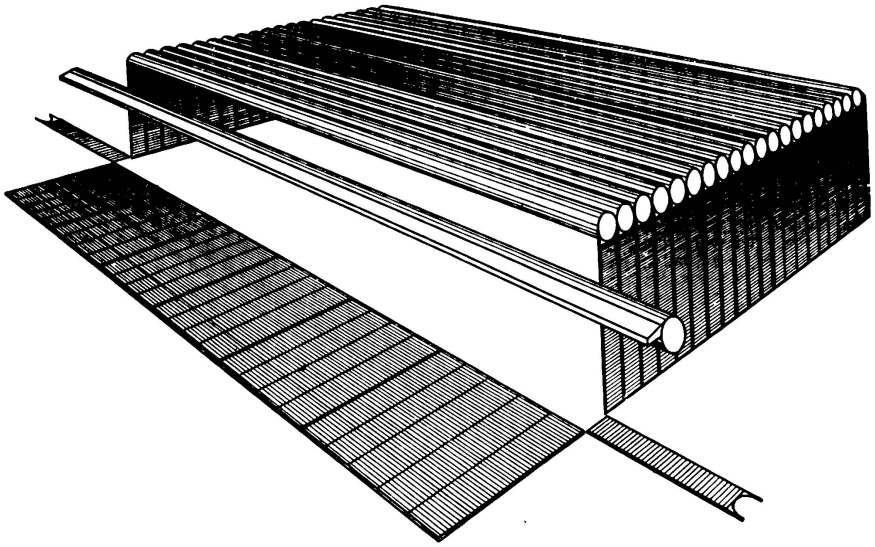


Fig. 19.
(voir le texte de la fig. 17)

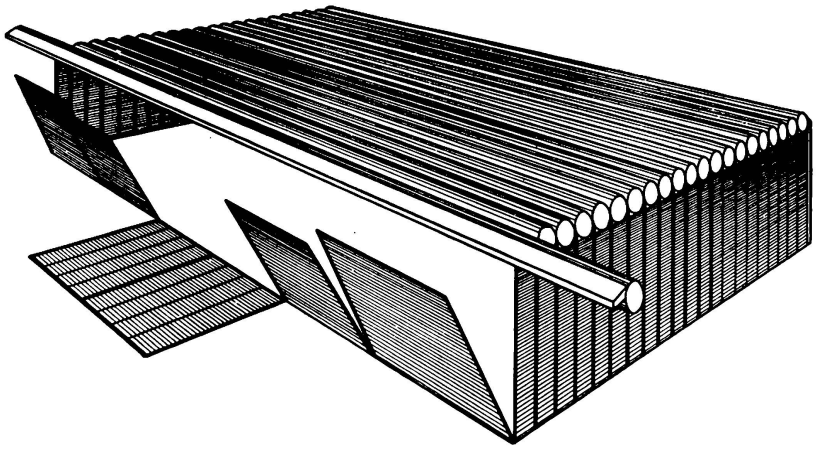


Fig. 20.
(voir le texte de la fig. 17)

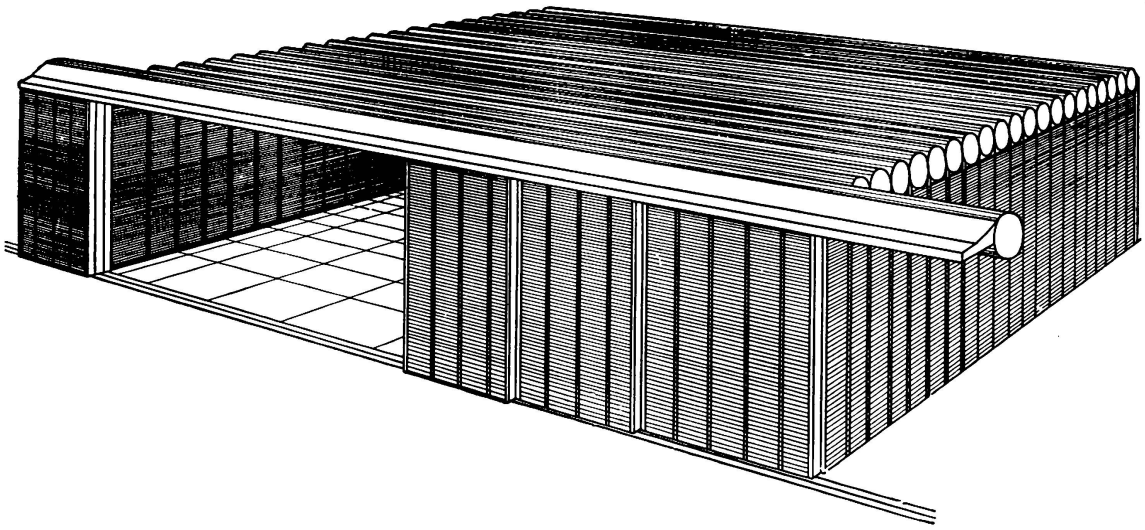


Fig. 21.
(voir le texte de la fig. 17)

réduit d'éléments de construction et permet des possibilités de transport et de montage tout-à-fait rapides.

Pour des portées de l'ordre de 25 m, une telle construction pèse 55 kg/m^2, y compris les portes et les longs pans de fermeture latérale.

En conclusion de ce très rapide exposé d'un essai d'utilisation systématique de la tôle mince dans la construction, nous croyons utile de préciser notre façon de penser:

A moins qu'il ne s'agisse de créer à un matériau comme la tôle un débouché commercial et industriel plus élargi et cela dans le sens le plus strictement utilitaire, on doit bien prendre garde que toutes ces tentatives et toutes ces réalisations, qui s'appuient la plupart du temps sur des données et des considérations purement techniques ou mathématiques, n'en créent pas moins des formes nouvelles, des lignes architecturales peu courantes, qui entrent de ce fait sous le signe de l'art de construire.

Je voudrais mettre en eveil l'esprit des architectes et des ingénieurs pour que devant des problèmes aussi nouveaux ils recherchent avec un grand souci de compréhension mutuelle les solutions parfaites aussi bien au point de vue aspect qu'au point de vue rigueur technique.

Sur ce plan, il y a de plus en plus à travailler. Les solutions mathématiquement ingénieuses, voire même quelques fois présentées sous une forme un peu hermétique risquent de faire prendre la rigueur mathématique pour un ensemble de dispositifs et de schémas immuables dans leurs formes. On conçoit que devant une équation différentielle, celui qui juge la construction dans ses rapports de volume et de surface, qui recherche les proportions pour en tirer un mode de présentation à l'echelle du sentiment humain, celui-là, qui est architecte, hésite, et rempli de crainte abandonne à l'ingénieur ce domaine réservé de la résistance des matériaux poussée jusqu'à une analyse très spéculative.

Ce serait dommage qu'un tel divorce se produise, car le fruit amer de la seul science mathématique ne peut être toujours goûté, et dans le domaine de l'art de construire, les exemples qui sont donnés ont une telle répercussion sur l'esprit collectif des hommes qu'ils ne doivent pas risquer de fausser cet esprit mais plutôt de l'instruire.

B. — Etude théorique sur les poutres et arcs en voiles minces en tôle.

Nous venons d'indiquer dans la première partie de notre mémoire les modes de raisonnements qui nous ont conduit à la réalisation des constructions en voiles minces à cadres.

Nous donnons ici quelques considérations théoriques et mathématiques sur ces mêmes questions.

Tout d'abord une justification du rôle des cadres, ce rôle ayant été particulièrement mis en évidence par des séries d'essais dont nous parlerons et ensuite quelques considérations sur le flambage.

Nous rappelons que pour l'étude mathématique des cadres nous avons eu, en *M. L. Beschkine* un collaborateur précieux et pour les études sur le flambage, que nous pour suivons d'ailleurs encore à l'heure actuelle *M. F. Vasilesco* nous apporte sa compétence incontestable.

Lorsque l'on réalise une voûte en voile mince comme la portion représentée par la fig. 3 on peut étudier les déformations générales sur cette voûte travaillant en arc en ayant recours au dispositif suivant:

Nous relions les retombées de la voûte construite en carton très léger sur des culées en bois, vissées sur une table. Suivant l'arc de gorge nous perçions la voûte de onze trous équidistants et nous faisions passer par ces trous des réglettes verticales graduées. De cette façon nous pouvions apprécier les déformations relatives de la ligne moyenne de la courbe de gorge, sous un système de charges données par rapport à un plan de comparaison qui était celui de la table d'expérience.

Nous donnons à titre d'exemple quelques résultats assez caractéristiques de ces essais: la fig. 22 représente en trait plein la ligne moyenne de la courbe de gorge (ordonnées amplifiées) non chargée, lorsqu'on plaçait une charge P entre

les points 5 et 6 la ligne moyenne prenait la forme définie par la courbe en traits mixtes.

Si la charge P au lieu d'être entre les points 5 et 6 se trouvait entre les points 3 et 4 on obtenait le graphique des déformations représenté par la fig. 23.

Une fois les charges enlevées la voûte reprenait sa forme première. L'examen de la voûte ayant atteint sa déformation maxima montrait que les sections transversales de la surface à double courbure se déformaient considérablement,

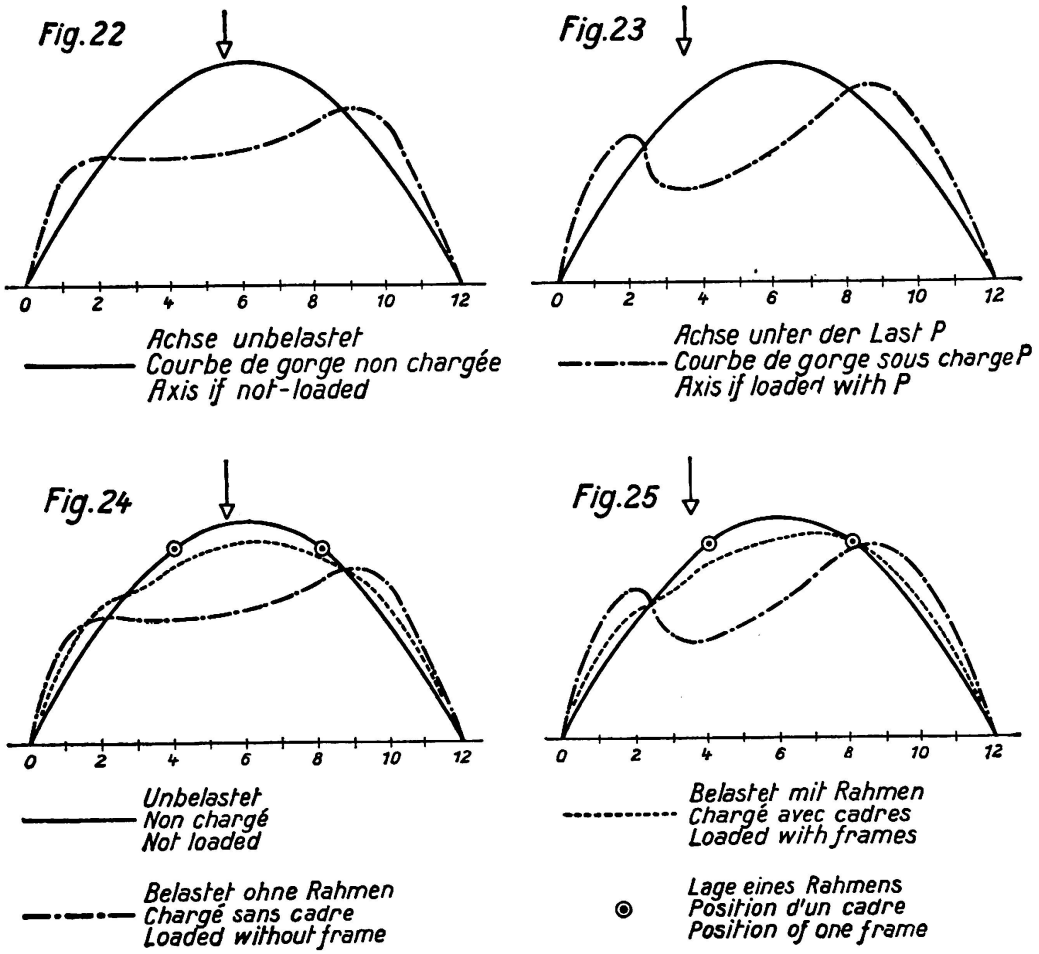


Fig. 22 à 25.

si par exemple nous avions à l'état de repos une courbe hyperbole tout le long de la courbe de gorge, sous l'effet d'une charge cette courbe se déformait, elle «s'ouvrait» ou se «fermait» d'où cette idée de rendre plus «raide» la surface totale sous des efforts de flexion en créant le long de la courbe moyenne de la voûte des plans capables de tenir de la flexion, ce sont les éléments de cadres.

Si nous reprenons les deux essais choisis précédemment nous verrons sur ces mêmes graphiques l'influence de deux éléments de cadres disposés symétriquement à l'aplomb des points 4 et 8 de la division de la courbe de gorge.

Sur la fig. 24 la courbe en pointillés montre la déformée de la courbe de gorge sous la charge P entre 5 et 6.

La fig. 25 montre la déformée de cette même courbe de gorge sous la charge P entre 3 et 4.

Dans les deux cas ce qu'il y a de caractéristique c'est l'influence considérable de ces cadres sur la tenue du voile mince.

Nous avons multiplié un très grand nombre de fois ces essais en faisant varier la position des charges P, la position des éléments de cadre et encore la définition de la courbe génératrice formant par exemple des hyperboles, des cercles, des ellipses, des cycloïdes, des paraboles et en notant chaque fois l'allure des déformations.

Nous pouvons résumer ainsi mathématiquement les conclusions de ces études:

Les poutres et arcs en voiles minces sont des solides engendrés par un profil défini par une ligne d'épaisseur faible par rapport à sa longueur. Le profil se déplaçant dans l'espace suivant une loi déterminée de manière que tous ses points restent dans des plans parallèles.

Un tel voile ne pouvant pas supporter d'efforts de flexion dans son épaisseur d'une part, et étant peu résistant à la compression d'autre part (flambage) des systèmes raidisseurs sont établis dans certaines sections du solide.

Ces systèmes raidisseurs peuvent être rangés en deux catégories:

1° Les raidisseurs proprement dits qui ne servent qu'à s'opposer au flambage.

2° Les raidisseurs-cadres qui, ayant un moment d'inertie suffisant, peuvent en plus de leur rôle de raidisseur servir à transmettre des efforts de flexion qui permettent au solide de se comporter comme un corps obéissant aux lois de la résistance des matériaux.

Considérons un tel solide soumis à des forces quelconques. Si nous faisons abstraction des efforts internes dans le plan d'une section droite, les théorèmes d'énergie interne nous définissent une répartition des fatigues en accord généralement convenable avec les résultats de la résistance des matériaux (distribution linéaire des efforts pour les solides rectilignes, distribution hyperbolique pour les solides curvilignes). Les efforts ainsi trouvés, sauf dans des cas de charge particuliers, ne peuvent être en équilibre avec les charges appliquées qu'en admettant des flexions dans les sections droites, ce qui est impossible eu égard à l'épaisseur de la section.

Considérons alors un panneau formé par le voile mince compris dans le cadre. Le voile ne travaillant pas en flexion dans son épaisseur, on peut écrire trois équations d'équilibre qui définissent entièrement les forces intérieures (efforts normaux et cisaillement) dans le voile à des fonctions arbitraires près, résultant de l'intégration des équations différentielles. Ces équations différentielles étant linéaires leur solution résulte de la superposition d'une solution particulière avec termes constants non nuls et de la solution générale avec termes constants nuls.

Un panneau, en général, peut être considéré comme formé par un élément de surface de révolution, le déplacement de la section droite pouvant être assimilé à une succession de rotations.

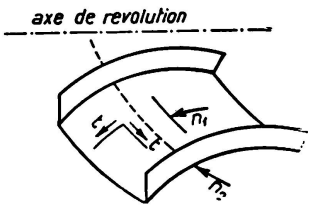


Fig. 26.

Dans ces conditions en appelant n_1 et n_2 les efforts normaux le long du méridien et du parallèle, t les cisaillements, r le rayon du parallèle, z (r) la cote axiale, α l'angle de la tangente au méridien avec l'axe, Θ la longitude et en posant:

$$\sigma_n = n_1 \cdot \sin \alpha = \frac{n_1}{\sqrt{1 + z'^2}}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{n_2}{\sin \alpha} = n_2 \sqrt{1 + z'^2}$$

$$\tau_{\Theta r} = t.$$

les équations différentielles sont:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r z' \sigma_r) + \frac{\partial}{\partial \Theta}(z' \tau_{\Theta r}) = Zr = \frac{Vr}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Theta}(\sigma_\Theta r) + \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{\Theta r}) = Tr^2$$

$$\sigma_r \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \sigma_\Theta \frac{z'}{r} = \frac{N}{\sin \alpha}.$$

Dans le cas de surfaces à courbures inverses et, en particulier dans le cas de surfaces réglées, ces équations peuvent être simplifiées et réduites à deux.[2]

Z et T étant les composantes parallèles à l'axe et tangentes au parallèle, de l'effort appliqué par unité de surface projetée sur un plan perpendiculaire à l'axe; V et N étant les composantes normales de l'effort par unité de surface vraie.

Si on considère un élément assez petit pour que entre les éléments de cadre, l'effort appliqué puisse être considéré comme indépendant de Θ la solution indépendante de Θ est fournie par les équations:

$$\frac{d}{dr}(r z' \sigma_r) = Zr$$

$$\frac{d}{dr}(r^2 \tau_{\Theta r}) = Tr^2$$

$$\sigma_r \frac{d^2 z}{dr^2} + \sigma_\Theta \frac{z'}{r} = \frac{N}{\sin \alpha}.$$

Ces équations du premier ordre s'intègrent sans difficultés.

Par exemple si on a une section symétrique par rapport à un plan parallèle, le rayon dans ce plan étant r_o, il vient:

$$1) \qquad t = \tau_{r\Theta} = \frac{1}{r^2} \int_{r_o}^{r} Tr^2 \, dr$$

$$2) \qquad \sigma_r = \frac{\int_{r_o}^{r} Zr \, dr}{r z'}$$

[2] Voir Comptes-rendus de l'Académie des Sciences Paris. M. Beschkine 18. novembre 1935.

d'où
$$n_1 = \frac{\int_{r_0}^{r} \frac{V r \, d r}{\sin \alpha}}{r \cos \alpha}$$

3) $$\frac{n_2}{R_2} = N - \frac{n_1}{R_1}$$

R_2 et R_1 étant les rayons de courbure principaux

$$R_1 = \frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''} = \frac{1}{z'' \sin 2\alpha}$$

$$R_2 = \frac{r}{\cos \alpha}$$

d'où
$$n_2 = r \left[\frac{N}{\cos \alpha} - n_1 z'' \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin^2 \alpha \right]$$

Pour que le problème soit entièrement résolu il faut pouvoir introduire arbitrairement des termes de flexion pure et de flexion avec cisaillement.

a) Flexion pure.

Posons $\sigma_\Theta = \sum u_n \cos n \Theta$

σ_Θ répondant aux lois de la résistance des matériaux du corps long pour $\Theta = 0$, il vient:

$$\sigma_r = - \frac{z'}{r z''} \sum u_n \cdot \cos n \Theta$$

Posant:

$$\tau_{\Theta r} = \sum V n \cdot \frac{\sin n \Theta}{n}$$

il vient

$$V n = \frac{1}{z'} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{z'^2 u_n}{z''} \right)$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r^2}{z'} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{z' u_n}{z''} \right) \right] = n^2 \cdot r u_n$$

avec
$$\sum u_n = (\sigma_\Theta)_{\Theta = 0} = \sigma_0$$

d'où
$$\sum n^2 u_n = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r^2}{z'} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{z'^2 \sigma_0}{z''} \right) \right] = \lambda_0.$$

Quand on se borne aux termes du premier degré en Θ on voit que dans aucune des contraintes σ_r, σ_Θ, $\tau_{r\Theta}$ ne figure n. Il en résulte que pour Θ petit (petit intervalle entre les cadres) il est inutile de chercher à définir les valeurs $n_1 \ldots n_n$ séparément. On pourrait le faire par utilisation du théorème du travail minimum en l'appliquant à un panneau cadre et rives comprises, les efforts introduits dans ces éléments étant fonction de n.

b) Flexion avec cisaillement.

Posons de même:

$$\sigma_\Theta = \sum S_n \frac{\sin n\Theta}{n} + \sum u_n \cos n\Theta$$

Le second terme ayant été étudié ci-dessus, reprenons le premier séparément.

$$\sigma_\Theta = \sum S_n \frac{\sin n\Theta}{n}$$

$$\sigma_r = -\frac{z'}{r z''} \sum S_n \frac{\sin n\Theta}{n}$$

Posant:

$$\tau_{r\Theta} = \sum t_n \cos n\Theta$$

il vient

$$t_n = \frac{1}{r^2} \int S_n r\, dr$$

d'où

$$n^2 \frac{1}{r^2} \int S_n r\, dr = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{z'^2}{z''} Sr\right)$$

Les mêmes raisonnements que pour la flexion pure peuvent s'appliquer ici. Au premier ordre

$$\tau_{r\Theta} = \sum t_n = \frac{1}{r^2} \int (\sigma_\Theta)_o\, r\, dr$$

équation où Θ ne figure pas, les termes d'ordre supérieur sont définis par le principe du travail minimum.

Le problème est donc entièrement résolu puisque l'on a défini

1° la répartition des efforts locaux.

2° La répartition des efforts d'ensemble si l'on connaît la répartition des efforts n_2 (ou σ_Θ).

La construction actuelle de ces voiles est telle que tous les efforts de la première catégorie, les efforts n, de la seconde catégorie et les fatigues dans les cadres raidisseurs donnent des termes de potentiel interne faibles par rapport aux efforts d'ensemble n_2 et t.

Il s'en suit que les résultats des calculs d'élasticité de pièces à deux dimensions (poutres et arcs sans épaisseur appréciable) sont applicables à ce cas. Donc les efforts n_2, à une approximation nettement inférieure à la valeur trouvée $\frac{n'_2}{n_2}$ (n'_2 efforts locaux) peuvent être considérés comme suivant les lois de la résistance des matériaux classique.

A partir de ces valeurs n_2 on détermine les efforts totaux n_1 et t (d'où les efforts sur les cadres et les rives (par les équations ci-dessus).

Le problème de la répartition des contraintes est donc entièrement défini. Il en résulte que l'étude des poutres et des arcs en voile mince peut être considérée comme se rattachant directement aux hypothèses classiques, les efforts secondaires étant introduits pour calculer les pièces raidisseuses.

Ici, dans le cadre de ce mémoire, se borne l'exposé de la théorie. Dans les constructions que nous avons fait réaliser et dont nous parlons dans la première partie de notre précédent mémoire nous avons fait appliquer ces théories.

Nous donnerons dans le volume des mémoires qui sera publié dans le courant de l'année 1937 quelques exemples numériques d'application pour montrer la manière pratique de se servir de ces systèmes d'équations.

Nous avons vu que parmi les raidisseurs introduits dans la surface mince un certain nombre d'entre eux ne servent qu'à s'opposer au flambage.

Ce phénomène de flambage nous a toujours paru être un élément essentiel de la connaissance de ces surfaces. Le fait que ce soient des surfaces «minces» suppose une inertie locale propre très faible et donc une tendance très marquée au flambage local ou au cloquage.

Aussi lorsque nous avons eu à réaliser des constructions avons nous fait tout d'abord exécuter sur des éléments de cadre grandeur nature des essais de flambage.

Ces essais ont été faits sur les presses à emboutir aux aciéries de la Marine à St-Chamond dans les premiers jours de juillet 1935.

Nous avons fait préparer une série de plaques cylindriques de diverses épaisseurs et de rayons de courbure variables, sur ces surfaces nous avons fait disposer des éléments raidisseurs formés par de simples cornières cintrées.

Les fig. 27 et 28 montrent l'un de ces éléments avant et après essai au flambage.

Parmi les différents essais que nous avons mesurés, certains portaient sur des efforts de compression s'exerçant sur une portion seulement de la section totale; cette catégorie d'essais était choisie en vue de se rapprocher du cas le plus courant de la répartition des contraintes n_2, dont nous parlons plus haut, suivant une loi de flexion. Ces mesures effectuées, nous avons considéré les résultats obtenus comme des limites utilisables à des coefficients de sécurité près.

Puis nous avons étudié théoriquement ces phénomènes. C'est un résumé de ces études que nous donnons ici:

Elles portent sur des portions de cylindre circulaire. Nous avons déjà poursuivi au delà ces calculs en considérant des cylindres non circulaires introduisant ainsi une variation de rayon de courbure tout le long de la section. Il paraît en effet souhaitable de se rapprocher des cas pratiques et d'application. Il y a évidemment intérêt à pouvoir augmenter localement les résistances au flambage en fonction de la distribution des efforts n_2 normaux dans une section fléchie.

On considère une plaque mince cylindrique circulaire d'ouverture Φ, de hauteur l, de rayon r et d'épaisseur $t = 2\,h$.

On suppose cette plaque soumise à une pression qui s'exerce sur les bords circulaires dans la direction des génératrices.

Le problème est de trouver la charge critique de flambage, c'est-à-dire la pression minima pour laquelle il existe un équilibre élastique de la plaque déformée.

La méthode utilisée est celle de Ritz-Rayleigh. Elle consiste à se donner à l'avance une forme de déplacement, dépendant de constantes arbitraires, à écrire l'énergie totale des forces intérieures et extérieures et à rendre extrême (minima

ou maxima) cette énergie au moyen des constantes arbitraires figurant dans le déplacement. Les conditions auxquelles doivent satisfaire aussi ces constantes peuvent permettre la détermination de la pression qui, rendue minima à son tour, donne la charge critique recherchée.

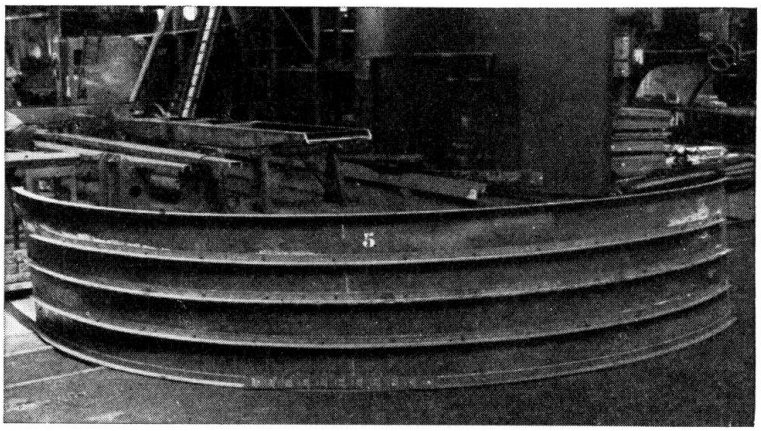


Fig. 27.
Plaque de tôle incurvée avec raidisseurs au flambage. Essais effectués à St. Chammond (France), juillet 1935.

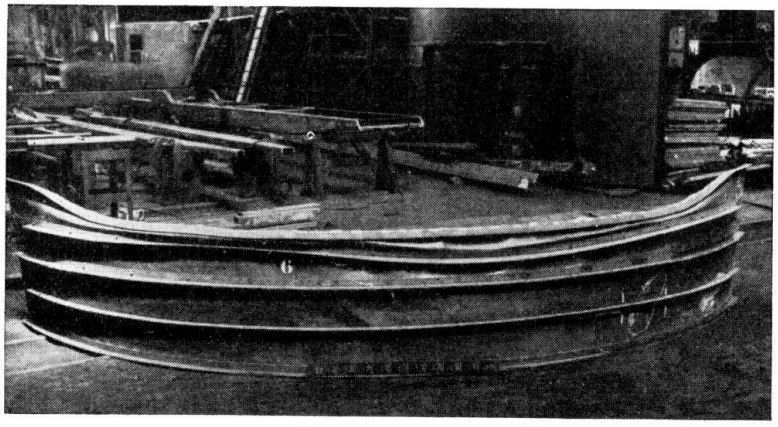


Fig. 28.
Plaque en tôle incurvée avec raidisseurs au flambage (plaque après flambage). Essais effectués à St. Chammond (France), juillet 1935.

M. Redshau dans un mémoire intitulé »Elastic instability of a thin curved panel» Aeronautical research Committee R J M N° 1565 London, a étudié cette question en caractérisant les déplacements sous la forme suivante:

$$u = A \cdot \sin \frac{\pi \Theta}{q} \sin \frac{kx}{r}$$

$$v = r \cdot \eta = o$$

$$w = C \cdot \sin \frac{\pi \Theta}{q} \cos \frac{kx}{r}$$

et en considérant une charge uniformément répartie tout le long de la section.

Pour nous nous avons cherché à écrire les déplacements sous une forme plus générale et à considérer la pression sous sa forme également la plus générale soit

$$p \cdot f\ (\Theta).$$

Les déplacements choisis sont les suivants:

$$u = u\,(\Theta, x)$$
$$v = r\eta = o$$
$$w = C \cdot \sin \frac{a\pi\Theta}{\varphi} \cdot \sin \frac{q\pi x}{l}$$

a et q étant entiers positifs.

Considérons la fonction u (Θ, x).

Par rapport à Θ, u (Θ, x) est périodique et de période φ et comme

$$u\ (\Theta, o) = -u\ (\Theta, l)$$

on conclut que par rapport à x, u (Θ, x) est une fonction périodique et de période 2 l.

Il en résulte que u doit avoir la forme générale donnée par son développement en série de Fourier

$$u = F\,(\Theta, x) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} a^{o}_{2s-1} \cos (2s-1) \frac{\pi x}{l} + \ldots$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos n \frac{2\pi\Theta}{\varphi} \sum_{s=1}^{\infty} a^{n}_{2s-1} \cos (2s-1) \frac{\pi x}{l} \right.$$
$$\left. + \sin n \frac{2\pi\Theta}{\varphi} \sum_{s=1}^{\infty} b^{n}_{2s-1} \cos (2s-1) \frac{\pi x}{l} \right].$$

C'est le calcul qui va nous déterminer les coefficients a^{o}_{2s-1}, a^{n}_{2s-1}, b^{n}_{2s-1} donc qui va déterminer u.

La contraction subie par la plaque par suite du déplacement qu'elle éprouve est donnée par l'expression

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$ [3]

Le travail de la pression p. f (Θ) a donc pour expression

$$w = 2\,h\,r\,p \int_{o}^{\varphi} \int_{o}^{l} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] f(\Theta)\, dx\, d\Theta$$

En effectuant les intégrations on trouve successivement

$$w = 2\,h\,p\,r \left\{ \int_{o}^{\varphi} f(\Theta)\, [u\,(\Theta, l) - u\,(\Theta, o)]\, d\Theta + \frac{1}{2} \int_{o}^{\varphi} f(\Theta)\, d\Theta \int_{o}^{l} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\}$$

$$= 2\,h\,p\,r \left\{ -2 \int_{o}^{\varphi} \left[\frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} a^{o}_{2s-1} f(\Theta) + \sum_{1}^{\infty} f(\Theta) \cos n \frac{2\pi\Theta}{\varphi} \sum_{1}^{\infty} a^{n}_{2s-1} + \sum_{1}^{\infty} f(\Theta) \right.\right.$$
$$\left.\left. \sin n \frac{2\pi\Theta}{\varphi} \sum_{1}^{\infty} b^{n}_{2s-1} \right] d\Theta + \frac{c^2}{2} \left(\frac{q \cdot \pi}{l} \right)^2 \int_{o}^{\varphi} f(\Theta) \sin^2 \frac{a\pi\Theta}{\varphi} \int_{o}^{l} \cos^2 \frac{q\pi x}{l}\, dx \right\}$$

[3] Applied Elasticity, J. Prescotte, p. 562.

La fonction f (Θ) étant de période φ, si l'on pose

$$\frac{2\pi\Theta}{\varphi} = \xi.$$

On a:

$$f(\Theta) = f\left(\frac{\varphi}{2\pi} \cdot \xi\right)$$

Cette dernière fonction étant de période 2π Si A_u et B_n sont des coefficients de Fournier on a:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\varphi}{2\pi}\xi\right)\cos n\xi\, d\xi$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\varphi}{2\pi}\xi\right)\sin n\xi\, d\xi$$

d'où

$$A_n = \frac{2}{\varphi}\int_0^{\varphi} f(\Theta)\cos n\frac{2\pi\Theta}{\varphi}\, d\Theta$$

$$B_n = \frac{2}{\varphi}\int_0^{\varphi} f(\Theta)\sin n\frac{2\pi\Theta}{\varphi}\, d\Theta$$

On en déduit que

$$w = -4hpr\frac{\varphi}{2}\left\{\frac{1}{2}A_o\sum_1^{\infty} a^o_{2s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_1^{\infty} a^n_{2s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_1^{\infty} b^n_{2s-1}\right\}$$
$$+ hpr\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2 c^2 \frac{l}{2}\frac{\varphi}{4}(A_o - A_a)$$

L'énergie par unité d'aire, des forces intérieures a pour expression:

$$v' = E'h\left[\alpha^2 + \beta^2 + 2\sigma\alpha\beta + \frac{1-\sigma}{2}c^2\right] + \frac{E'J}{2}\left[c_1^2 + c_2^2 + 2\sigma c_1 c_2 + 2(1-\sigma)(T-T_o)^2\right]$$

où $E' = \dfrac{E}{1-\sigma^2}$ σ coefficient de Poisson $\dfrac{2h^3}{3}$

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\beta = \frac{w}{r} + \frac{\partial n}{\partial \Theta}$$

$$c = r\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}$$

$$c_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$c_2 = \frac{1}{r^2}\left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2}\right)$$

$$T = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \Theta} - \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$T_o = o$$

Les expressions précédentes deviennent avec le déplacement choisi

$$v' = E'h\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}\sin^2\frac{a\pi\Theta}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi\pi x}{l} + 2\sigma\frac{c}{r}\frac{\partial F}{\partial x}\sin\frac{\alpha\pi\Theta}{\varphi}\sin\frac{q\pi x}{l}\right.$$
$$\left. + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\Theta}\right)^2\right\}$$
$$+ \frac{E'h^3}{3}\left\{c^2\left(\frac{q\pi}{l}\right)^4\sin^2\frac{a\pi\Theta}{\varphi}\sin^2\frac{q\pi x}{l} + \frac{c^2}{r^4}\left[1-\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right]\sin^2\frac{a\pi\Theta}{\varphi}\sin^2\frac{q\pi x}{l}\right.$$
$$-2\sigma\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2\left[1-\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right]\sin^2\frac{a\pi\Theta}{\varphi}\sin^2\frac{q\pi x}{l}$$
$$\left. + 2\left(\frac{1-\sigma}{r^2}\right)c^2\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2\cos^2\frac{a\pi\Theta}{\varphi}\cos^2\frac{q\pi x}{l}\right\}$$

L'énergie totale des forces intérieures et extérieures s'écrit

$$v = r\int_0^{\varphi}\int_0^{l} v'\,dx\,d\Theta - w$$

Elle aura donc pour expression d'après ce qui précède:

$$v = rE'h\left\{\int_0^{\varphi}\int_0^{l}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + 2\sigma\frac{c}{r}\frac{\partial F}{\partial x}\sin\frac{q\pi x}{l}\sin\frac{a\pi\Theta}{\varphi} + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\Theta}\right)^2\right]dx\,d\Theta\right\}$$
$$+ rE'hc^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{l}{2}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{h^2}{3}\left[\left(\frac{q\pi}{l}\right)^4 + \frac{1}{r^4}\left[1-\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right]^2\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2\sigma}{r^2}\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2\left[1-\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right] + 2\left(\frac{1-\sigma}{r^2}\right)\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2\right]\right\} - w$$

En explicitant cette expression on obtient une nouvelle forme de l'énergie totale générale qui peut s'écrire:

$$\frac{4}{\varphi l r E'h}V = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}(2s-1)^2(a^o_{2s-1})^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(2s-1)^2\left[(a^n_{2s-1})^2 + \right.$$
$$\left. + (b^n_{2s-1})^2\right] + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left[\left((a^n_{2s-1})^2 + (b^n_{2s-1})^2\right]\right. +$$
$$+ \frac{2\sigma}{r}c\left\{\begin{array}{lll} a \text{ impair} & \left\{\begin{array}{ll} -\frac{2q}{l}\left[\frac{a^o_q}{a} + a\sum_{n=1}^{\infty} - \frac{2a^n_q}{4n^2-a^2}\right] & q \text{ impair} \\ o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & q \text{ pair} \end{array}\right. \\ a \text{ pair} & \left\{\begin{array}{ll} -\frac{q\pi}{l}6^{1/2}_q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & q \text{ impair} \\ o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & q \text{ pair} \end{array}\right. \end{array}\right.$$
$$+ \frac{8p}{lE'}\left\{\frac{1}{2}A_o\sum_{s=1}^{\infty}a^o_{2s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sum_{s=1}^{\infty}a^n_{2s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}B_n\sum_{s=1}^{\infty}b^n_{2s-1}\right\}$$
$$+ c^2\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2\left\{\frac{l^2}{r^2q^2\pi^2} + \frac{h^2}{3}\left[\frac{q^2\pi^2}{l^2} + \frac{l^2}{q^2\pi^2r^4}\left[1-\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right]^2 - \frac{2\sigma}{r^2}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2}{r^2}\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right] - \frac{1}{2}(A_o - A_a)\frac{p}{E'}\right\}$$

Elle est une fonction des constantes

$$a^{o}_{2s-1}; \qquad a^{n}_{2s-1}; \qquad b^{n}_{2s-1}; \qquad c$$

Pourque l'énergie soit extrêmum, il y a qu'à annuler les dérivées partielles du premier ordre par rapport à ces constantes et tirer les valeurs de celles-ci des équations ainsi déterminées.

Le fait que l'on a une infinité de constantes donc d'équations n'est pas gênant, car on peut toujours n'en considérer qu'un nombre fini et passer à la limite ensuite. D'ailleurs les variables sont séparées de sorte que chaque équation donne la valeur d'une seule variable.

Voici les équations obtenues en annulant les dérivées partielles par rapport à:

$$a^{o}_{2s-1}; \qquad a^{o}_{q}; \qquad a^{n}_{2s-1}; \qquad a^{n}_{q}; \qquad b^{n}_{2s-1}; \qquad b^{n}_{q} \text{ et } c$$

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (2s-1)^2 a^{o}_{2s-1} + \frac{A_o}{2}\frac{8p}{lE'} = o$$

q impair, a impair

$$\frac{q^2\pi^2}{l^2} a^{o}_{q} + \frac{A_o}{2}\frac{8p}{lE'} - \frac{2\sigma}{r}\cdot\frac{2q}{a\cdot l} c = o$$

q impair, a pair

$$\frac{q^2\pi^2}{l^2} a^{o}_{2s-1} + \frac{A_o}{2}\frac{8p}{lE'} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (2s-1)^2 + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 n^2\right] 2a^{n}_{2s-1} + A_n\frac{8p}{lE'} = 0$$

q impair, a impair

$$\left[\frac{q^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 n^2\right] 2a^{n}_{q} + A_n\frac{8p}{lE'} + \frac{2\sigma}{r}\frac{4aq}{l}\frac{1}{4n^2-a^2} c = 0$$

q impair, a pair

$$\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 q^2 + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 n^2\right] 2a^{n}_{q} + A_n\frac{8p}{lE'} = 0$$

$$\left[\frac{\pi^2}{l^2}(2s-1)^2 + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 n^2\right] 2b^{n}_{2s-1} + B_n\frac{8p}{lE'} = 0$$

q impair, a pair

$$\left[\frac{\pi^2}{l^2} q^2 + \frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 \frac{a^2}{4}\right] 2b^{\frac{a}{2}}_{q} + B_{\frac{a}{2}}\cdot\frac{8p}{lE'} - \frac{2\sigma}{r} c\cdot\frac{q\pi}{l} = 0$$

etc.

Dans ces équations il ne faut pas perdre de vue la fonction p. f (Θ).

Nous pouvons nous borner à résoudre ce système pour le cas où la fonction f (Θ) est paire. Il n'y a pas plus de difficulté à le résoudre dans le cas général, le résultat seul est légèrement plus simple ici.

Si q pair on a immédiatement:

$$a^{o}_{2s-1} = -\frac{A_o}{2}\frac{8p}{lE'}\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\frac{1}{(2s-1)^2}$$

$$2\,a^{n}_{2s-1} = -A_n\frac{8p}{lE'}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2(2s-1)^2+\frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2 n^2}$$

$$b^{n}_{2s-1} = o.$$

Puisque C doit être différent de zéro, la dernière équation du système donne la pression qui s'écrit:

$$p = \frac{E}{1-\sigma^2}\cdot\frac{2}{A_o - A_a}\left\{\frac{l^2}{r^2q^2\pi^2}+\frac{h^2}{3}\left[\frac{q^2\pi^2}{l^2}+\frac{l^2}{\varphi^2\pi^2r^4}\left(1-\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right)^2-\frac{2\sigma}{r^2}+\frac{2}{r^2}\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right]\right\}$$

Elle dépend des constantes q et a. Cette détermination se fera de manière que p soit minimum donc soit égal à la charge critique recherchée.

On devra donc égaler à zéro les dérivées partielles de p par rapport à q et à a.

Les équations ainsi obtenues sont les mêmes que celles qui s'obtiennent en égalant à zéro les dérivées de l'énergie par rapport à q et a.

La première de ces expressions est:

$$\frac{h^2}{3}\frac{\pi^2 q}{l^2}-\left[\frac{l^2}{r^2\pi^2}+\frac{h^2}{3}\cdot\frac{l^2}{r^4\pi^2}\left(1-\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right)^2\right]\cdot\frac{1}{q^3}=0.$$

La seconde est inutile à écrire tant que l'on n'aura pas la valeur de A_a qui dépend de a, selon chaque cas déterminé par la fonction f (Θ).

L'expression ci-dessus donne

$$q_o = \frac{l\sqrt[4]{3}}{r\sqrt{rh}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{h^2}{3r^2}\left[1-\left(\frac{a\pi}{\varphi}\right)^2\right]^2}$$

et l'on doit prendre pour q, l'entier pair le plus voisin de q_o.

Avec ces valeurs on écrira la charge critique:

$$p = \frac{E}{1-\sigma^2}\cdot\frac{2}{A_o - A_a}\left\{\left[1+\frac{h^2}{3r^2}\left(1-\frac{a^2\pi^2}{\varphi^2}\right)^2\right]\frac{l^2}{r^2\pi^2}\cdot\frac{1}{q^2}\right.$$
$$\left.+\frac{h^3}{3}\frac{\pi^2}{l^2}q^2+\frac{2h^2}{3r^2}\left(-\sigma+\frac{a^2\pi^2}{\varphi^2}\right)\right\}.$$

Dans le cas particulier de la pression uniforme on a: f $(\Theta) = 1$.

On trouve alors $A_o = 2$ $A_u = 0$, u ne dépend pas de Θ et l'on a:

$$u(\Theta, o) = -u(\Theta, l) = -\frac{4pl}{\pi^2 E'}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(2s-1)^2}$$

Cela signifie que la pression s'exerce d'une façon rigide au moyen de deux panneaux compresseurs par exemple. C'est ce cas qui a fait l'objet de la plupart des essais au flambage suivis à St Chamond. Nous indiquons plus loin quelques résultats numériques.

On voit que p varie dans le même sens que a, donc on obtient son minimum par a = 1.

La charge critique est alors:

$$p = \frac{E}{1-\sigma^2}\left\{\left[1+\frac{h^2}{3r^2}\left(1-\frac{\pi^2}{\varphi^2}\right)^2\right]\frac{l^2}{r^2\pi^2}\cdot\frac{1}{q^2}+\frac{h^2\pi^2}{3l^2}q^2+\frac{2h^2}{3r^2}\left(-\sigma+\frac{\pi^2}{\varphi^2}\right)\right\}$$

Si q est impair et a impair on trouvera:

$$p = \frac{E}{1-\sigma^2}\cdot\frac{2}{A_o-A_a}\left\{\left[1+\frac{h^2}{3r^2}\left(1-\frac{a^2\pi^2}{\varphi^2}\right)^2\right]\frac{l^2}{r^2\pi^2}\cdot\frac{1}{q^2}+\frac{h^2\pi^2}{3l^2}q^2\right.$$

$$\left.+\frac{2h^2}{3r^2}\left(-\sigma+\frac{a^2\pi^2}{\varphi^2}\right)-\frac{\sigma^2}{r^2}\cdot\frac{1}{\frac{q^2\pi^2}{l^2}+\frac{1-\sigma}{2r^2}\left(\frac{2\pi}{\varphi}\right)^2\cdot\frac{a^2}{4}}\right\}$$

Actuellement, avec Monsieur *T. Vasilesco,* nous avons examiné ces mêmes problèmes dans le cas d'une section à courbures variables, l'exposé des calculs relatifs à ces questions fera l'objet d'une étude ultérieure, l'étude présente a été communiquée en résumé aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 201, 1935, p. 537 et 201, 1935, p. 642.

Considérons des plaques en tôle d'acier laminé avec les caractéristiques diverses, telles que nous les avions utilisées dans nos essais expérimentaux.

Ces essais ont été faits dans des conditions industrielles. Les résultats obtenus se trouvent légèrement au-dessous des valeurs théoriques obtenues en appliquant les formules trouvées dans le présent travail.

Etant donné le peu d'écart enregistré et qui s'explique par les défauts mêmes constatés sur les plaques avant les essais, ainsi que par la rusticité des expériences faites à l'aide de grandes presses à emboutir on peut conclure que nous retrouvons bien dans les applications de nos formules les résultats expérimentaux.

Soit une plaque cylindrique circulaire ayant les caractéristiques suivantes:

$$2\,h = 0{,}003\ \text{m};\ r = 2{,}1;\ \varphi = 160^0 = 2{,}795_G;\ l = 0{,}8.$$

On trouve:

$$\sin\frac{\varphi_1}{4} = \sin 40^0 = 0{,}643$$

$$\sin\frac{\varphi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0{,}643 = 0.455.$$

Ces constantes caractérisant les zones de répartition des contraintes de compression variables le long de la section dans le cas d'une flexion simple

$$\frac{A_o-A_1}{2} = 1 - 2{,}415 + 2{,}265$$

$$= 0{,}85$$

$$\frac{2}{A_o-A_1} = 1{,}176.$$

Examinons le cas d'une pression uniforme

$$q_0 = \frac{1\sqrt[4]{3}}{\pi\sqrt{rh}} = \frac{0{,}8\sqrt[4]{3}}{\pi\sqrt{2.1 \cdot \frac{3}{2 \cdot 10^3}}}$$

$$q_0 = 5{,}8$$

$$p = 2{,}2 \cdot 10^{10} \left\{ \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10^6} \cdot \frac{1}{2{,}1^2} \left(1 - \left(\frac{\pi}{2{,}795} \right)^2 \right)^2 \right] \frac{8^2}{10^2 - 2{,}1^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{36} + \frac{3}{4 \cdot 10^6} \cdot \frac{\pi^2 \cdot 10^2}{8^2} \cdot 36 + \frac{3}{4 \cdot 10^6} + \frac{2}{2.1^2} \left(-0{,}3 + \frac{\pi^2}{2.795^2} \right) \right\}$$

$$p = 2{,}2 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}000825$$
$$= 18{,}15 \text{ kg/mm}^2.$$

Les essais sous presses ont donné des valeurs moyennes de l'ordre de 15 kg/mm².

Il est intéressant de noter que dans le cas de la flexion simple, la fatigue critique maxima théorique serrait de

$$p_f = p \cdot \frac{2}{A_0 - A_1}$$
$$= 18{,}15 \cdot 1{,}176$$
$$= 21{,}35 \text{ kg/mm}^2.$$

Dans le cas de flexion en effet les ruptures par flambage se produisent pour des fatigues de compression dans le métal légèrement supérieures à celles résultant de compressions uniformément réparties.

Conclusions.

Le présent mémoire est une contribution à l'emploi de la tôle dans la construction, emploi qui doit donner à ce matériau une place importante tant à cause de l'économie qui en résulte que des formes nouvelles qui peuvent être trouvées.

Le matériau «tôle» est essentiellement différent du matériau «profilé-laminé».

Les laminés, qu'il s'agisse de fer U, I, ou cornières seront toujours des éléments d'ossature, des carcasses résistantes qui porteront des remplissages.

Ils risquent, comme malheureusement cela se voit si souvent, de traduire un vaste domaine des constructions dans lequel tout effort dans l'art de construire est perdu depuis longtemps.

C'est le domaine propre de la technique qui semble souvent méconnaître la recherche patiente des proportions, des volumes, des contrastes qui sont cependant la façon de rendre humain les bâtiments édifiées. On peut dire, en manière d'excuse, que les assemblages de cornières, définis sous le signe de la résistance des matériaux peuvent difficilement engendrer les volumes parfaits.

Notre effort tend à donner à la tôle, matériau plus nouvellement introduit, un plan de départ plus relié à l'art de construire.

Il y aura de belles constructions en tôle et le jeu des surfaces à courbures qui sont le fruit d'équations différentielles, pourra être organisé et dirigé aussi en fonction des rapports et des modules plus humains.

Résumé.

L'auteur montre par des essais le comportement des voiles minces métalliques pour différentes surcharges.

Il traite ensuite mathématiquement le problème et montre que les résultats ainsi obtenus concordent avec les résultats des essais avec de petits écarts engendrés par le matériau lui-même.

Sur la base des ouvrages déjà exécutés, l'auteur expose toutes les possibilités qu'offrent ces voiles pour la construction d'ouvrages économiques et cependant esthétiques.

Leere Seite
Blank page
Page vide