Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Calcul exact de la poutre en treillis rhomboïdal

Autor: Krabbe, Fr.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-2972

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

V10

Calcul exact de la poutre en treillis rhomboïdal.

Genaue Berechnung des Rautenträgers.

Girders with Rhombic Arrangement of Members.

Dr. Ing. Fr. Krabbe,
Reichsbahnoberrat, Reichsbahnzentralamt München.

I. — Caractéristiques particulières de la poutre en treillis rhomboïdal.

Grâce à son aspect esthétique, la poutre en treillis rhomboïdal a été fréquemment employée, au cours de ces dernières années et l'une des plus importantes réalisations dans ce domaine est le pont sur la Vistule, à Dirschau. La méthode de calcul généralement employée était celle du Professeur *Mehrtens*, de Dresde, méthode dans laquelle la poutre considérée est décomposée en deux systèmes élémentaires représentant chacun une poutre à diagonales simples. Des investigations ultérieures précises, effectuées en particulier par *Müller*-Breslau d'après la méthode cinématique, ont cependant montré que la poutre en treillis rhomboïdal, considérée comme poutre en treillis admettant des articulations dénuées de frottement aux endroits des noeuds, accuse en particulier en ce qui concerne les diagonales, des lignes d'influence dont l'allure diffères sensiblement de celle qui a été antérieurement indiquée par *Mehrtens*, sur la base des procédés d'investigations utilisés par lui. Ces lignes d'influence présentent une forme en zig-zag, passant alternativement, de noeud en noeud, du domaine positif au domaine négatif et vice-versa. La fig. 1a représente l'allure d'une telle ligne d'influence déterminée d'après la méthode de *Mehrtens*, tandis que la figure 1b indique 1a forme relevée d'après la méthode cinématique et qui est sans aucun doute la forme exacte *dans l'hypothèse d'articulations dénuées de frottement* dans les noeuds, suivant la théorie courante du treillis. Les courbes de flexion sous l'influence d'une charge concentrée, telles qu'elles sont obtenues par la méthode cinématique, accusent également une forme en zig-zag (fig. 2a). Ces formes des lignes d'influence et des courbes de flexion, qui sont nettement défavorables, ont conduit à éviter l'emploi des poutres en treillis rhomboïdal comme poutres principales, dans la construction des ponts.

La ligne d'influence de la fig. 1b n'est toutefois pas sans prêter à de notables critiques, lorsque l'on la considère d'une manière plus étroite et lorsque l'on tient compte de ce fait que les lignes d'influence représentent des courbes de flexion et en particulier les courbes de flexion que l'on obtient pour les éléments de membrure en charge lorsque l'on prolonge d'une longueur «unité» les barres considérées. La courbe de flexion représentée sur la fig. 2a fait naturellement l'objet des mêmes objections. Il est évident qu'en adoptant à priori

de telles formes pour des membrures de construction continue, on s'expose à la mise en jeu d'efforts tranchants considérables qui peuvent exercer une influence notable sur la forme de la courbe de flexion. Il n'a toutefois pas été tenu compte de ces efforts tranchants dans les calculs. Par suite de ces considérations, le choix du système porteur principal à adopter pour la reconstruction, en 1926/1927, des superstructures du pont de chemin de fer sur le Rhin, à Wesel,[1] s'est à nouveau porté sur la poutre en treillis rhomboïdal, que l'on évitait d'adopter depuis déjà longtemps, faisant ainsi table rase des objections élevées contre ce système. Après l'achèvement de la construction, on a vérifié, par une mise en charge à l'aide d'une charge concentrée de 80 tonnes, la courbe de flexion telle qu'elle avait été déterminée par le calcul (fig. 2a); on a pu ainsi obtenir, par des mesures précises, la forme exacte de la courbe de flexion que représente la fig. 2b. On est ainsi arrivé directement à cette conclusion que la courbe de flexion de la membrure chargée, obtenue par prolongement d'une barre, présente également, en fait une forme sensiblement différente de celle de la fig. 1b. C'est ce que confirmèrent par la suite les observations rigoureuses effectuées avec le plus grand soin par le Dr. *Christiani*, sur la ligne d'influence d'une petite poutre en treillis rhomboïdal (fig. 3), considérée comme système 72 fois statiquement indéterminé et en tenant compte de la rigidité des membrures et des diagonales.[2] Les recherches successives de *Christiani* montrèrent en outre que l'influence de la rigidité des membrures et des diagonales, dans les poutres en treillis rhomboïdal, était telle que l'élément dit de stabilité qui est nécessaire pour assurer

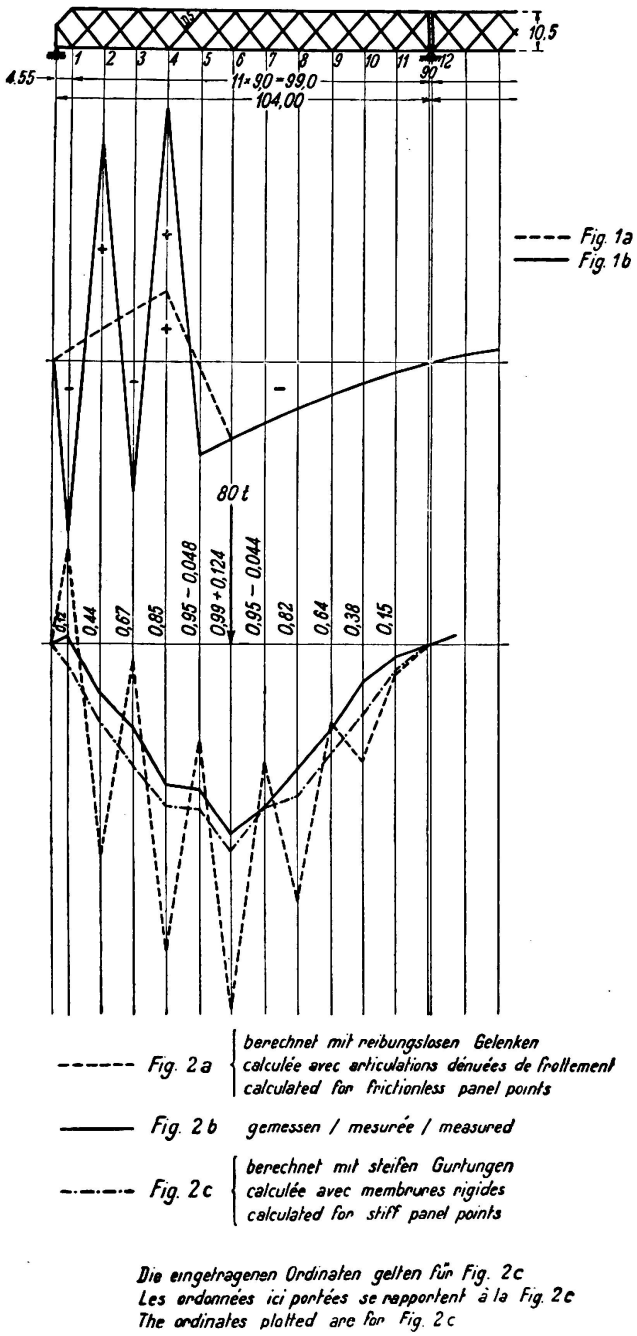

Fig. 1—2.

[1] Die Bautechnik, 1927, Nr. 46/47.

[2] *Christiani:* Strenge Untersuchung an Rhomben-Fachwerken. Berlin, 1929, Julius Springer, éditeur.

la stabilité des treillis avec articulations aux endroits des noeuds, n'est en général pas nécessaire pour assurer la stabilité du système porteur et qu'en outre, cet élément de stabilité ne peut en général exercer une influence sensible que sur les panneaux qui lui sont immédiatement voisins.[3]

Les considérations et résultats de mesures et de recherches statiquement rigoureuses qui viennent d'être exposés montrent nettement que la poutre en

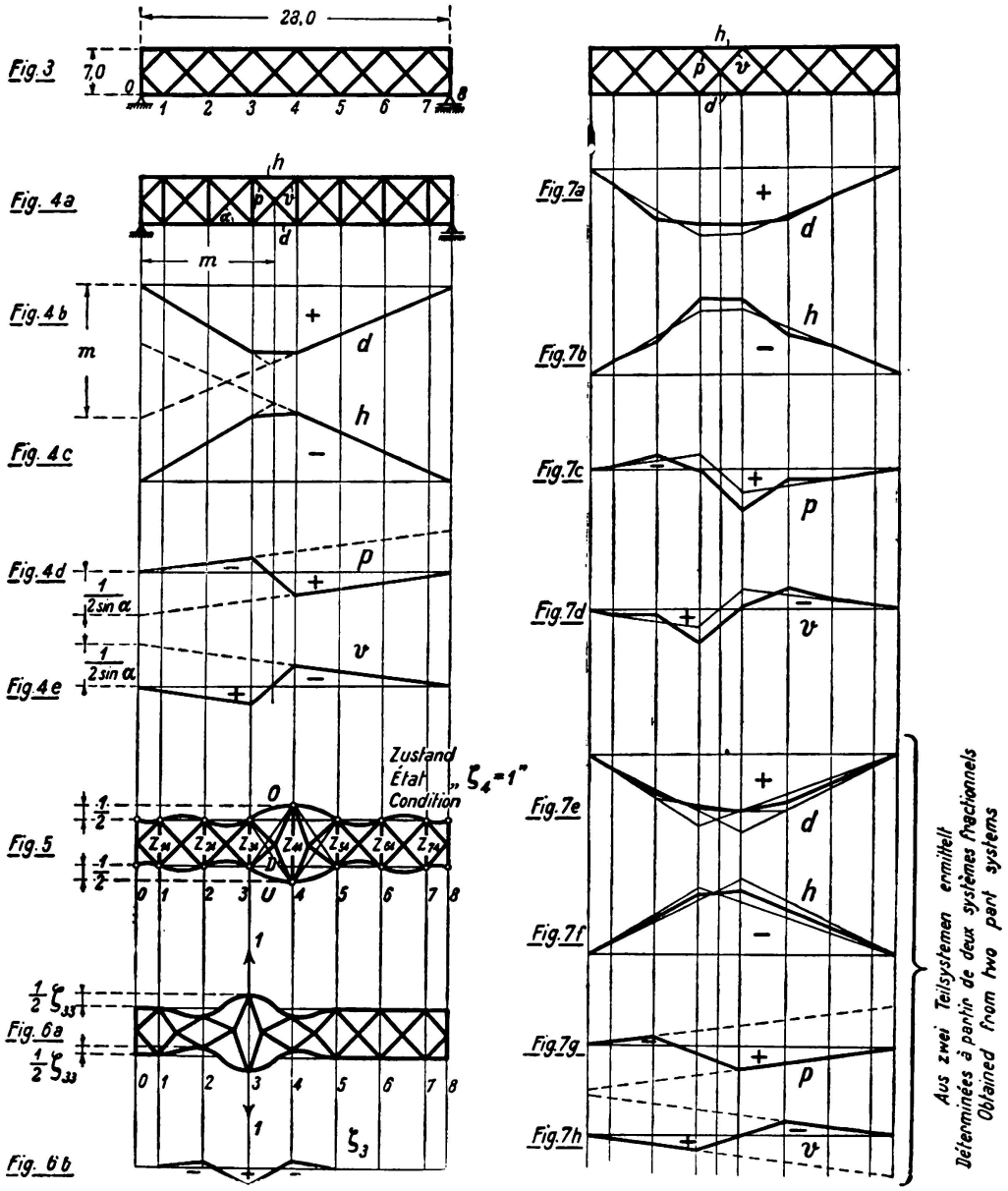

Fig. 3—7.

treillis rhomboïdal ne doit pas être considérée comme une poutre en treillis proprement dite au sens habituel du mot; il faut plutôt considérer que les particularités de ses lignes d'influence et de ses courbes de flexion, telles q'uelles sont obtenues sur la base de la théorie des treillis, la rejettent en dehors du domaine des poutres en treillis proprement dites et que cette poutre ne peut

[3] *Christiani:* Über die angebliche Labilität von Fachwerken. Der Stahlbau, 1931, nº 2.

être calculée qu'en faisant intervenir la rigidité dans les noeuds, si l'on veut obtenir un résusltat correspondant effectivement à la réalité. On a été ainsi amené à envisager la nécessité de mettre au point un procédé de calcul précis, même pour le pont sur le Rhin à Wesel, pont qui avait d'ailleurs été terminé entre temps. Ceci n'a toutefois été possible que par la mise au point d'une méthode plus simple que celle qui avait été employée par *Christiani*, car le système constitué par le pont sur le Rhin à Wesel représente, en tenant compte de la rigidité propre et des assemblages rigides de toutes les barres, un système 208 fois statiquement indéterminé. Le degré d'indétermination est d'ailleurs encore de 57 lorsque l'on néglige la rigidité propre des barres et celle de leurs assemblages. Il est en effet certain que le calcul de système présentant un degré d'indétermination statique aussi élevé, par les méthodes habituellement employées, est pratiquement impossible.

II. — Influence remarquable de la rigidité des membrures dans les poutres en treillis rhomboïdal.

Dans mon étude «La poutre en treillis rhomboïdal et son calcul exact simple»,[4] je me suis limité à l'influence de la rigidité de la membrure de la poutre en treillis rhomboïdal et j'ai considéré les diagonales elles-mêmes comme articulées sur des membrures de construction continue; faisant, j'ai également négligé la rigidité conférée au système par les rivures aux points de croisement des diagonales.

Dans la présente étude, je me proposerai simplement d'exposer les résultats obtenus au cours des recherches ci-dessus. Afin d'être en mesure de tirer des conclusions comparatives, j'ai également fait porter mes investigations sur le système de poutre en treillis rhomboïdal traité par *Christiani* comme système 72 fois statiquement indéterminé. Mes recherches ont été effectuées d'après la méthode des grandeurs des déformations. J'ai constitué le système principal par adjonction dans chaque losange élémentaire (fig. 4a) d'un montant vertical rigide, articulé aux noeuds. J'ai obtenu, d'après des considérations cinématiques simples, les formes de lignes d'influence représentées sur les fig. 4b à e. J'ai ensuite obtenu successivement les états «$\zeta_m = 1$» en prolongeant chacun de ces montants rigides de la longueur unité, ces états ayant pour conséquences des contraintes déterminées O, U et D dans les barres des deux panneaux voisins (fig. 5) et en outre la mise en charge de tous les montants rigides sous des efforts Z. En annulant les différentes contraintes dans ces barres auxiliaires rigides, suivant le système de charges, représenté sur la fig. 6a, j'ai ainsi obtenu les déformations initiales de la poutre sous la charge considérée après la suppression des montants rigides, c'est-à-dire l'allongement de ces barres ζ_m qui implique l'annulation des charges des différentes barres auxiliaires.

Un calcul portant sur une série d'exemples a ainsi montré que dans tous les cas qui se présentent dans la pratique, une mise en charge de la poutre suivant la fig. 6a, aux points m_o et m_u ne provoque qu'un déplacement vertical appréciable des points m_o et m_u et des couples de points voisins $(m+1)_o$, $(m+1)_u$ et $(m-1)_o$, $(m-1)_u$ les uns par rapport aux autres et que par suite toutes les valeurs de ζ,

[4] Der Stahlbau, 1931, n° 15.

à l'exception de ζ_{m-1} ζ_m et ζ_{m+1} ne diffèrent qu'insensiblement de zéro. Il en résulte la possibilité extrêmement intéressante de déterminer toutes les déformations qui résultent d'une mise en charge à la manière de celle de la fig. 6d par des systèmes d'équations ne comportant que trois inconnues. La déformation de la membrure chargée, en l'occurence la membrure inférieure, sous l'influence de la mise en charge suivant fig. 6a, représente naturellement la ligne d'influence qui correspond à l'écartement ζ_m; elle ne s'étend que du noeud ζ_{m-2} au noeud ζ_{m+2} (fig. 6b). Comme maintenant tout ζ_m provoque des efforts déterminés dans les barres des deux panneaux voisins, on peut très simplement obtenir les lignes d'influence additionnelles pour ces barres en superposant les lignes d'influence correspondant aux différentes valeurs de ζ_m qui sont à ajouter aux lignes d'influence pour le système principal. On obtient ainsi pour les lignes d'influence définitives les formes de fig. 7a à d. On observera que les lignes d'influence établies par moi de cette manière coïncident d'une manière absolument surprenante avec les lignes d'influence déterminées par *Christiani* [comparer avec la figure 16 de l'article faisant l'objet du renvoi (4)].

On arrive ainsi aux résultats suivants qui ne s'appliquent d'ailleurs pour le moment qu'à la poutre considérée:

1° — La poutre (fig. 3) est stable, même sans barres «de stabililité»; pour toutes ses barres, on obtient des lignes d'influence exemptes de toute ambiguité et absolument normales.

2° — L'action exercée par une barre de stabilité verticale insérée dans la poutre en treillis rhomboïdale, ne s'étend que sur deux panneaux de chaque côté de cette barre.

3° — Les lignes d'influence des barres et en particulier des diagonales, ne passent pas à angles vifs, d'un panneau à l'autre, entre des valeurs alternativement positives et négatives, mais présentent une allure entièrement normale.

4° — La forme des lignes d'influence diffère notablement de celle des lignes d'influence déterminées dans l'hypothèse d'articulations dénuées de frottement; par contre, les lignes d'influence que l'on obtient par décomposition en treillis élémentaires sont sensiblement exactes (fig. 7e à h).

5° — L'influence de la rigidité des barres du treillis elles-mêmes et de leurs assemblages est négligeable (bonne correspondance entre les lignes d'influence).

6° — Les contraintes de flexion déterminées dans les barres des membrures sous l'influence du train de charges N atteignent la valeur maximum de 420 kg/cm².

On peut toutefois élever ici cette objection d'ailleurs fondée que la poutre qui a fait l'objet des études ci-dessus ne correspond en aucune façon à une poutre courante; ses membrures sont en effet très hautes (60 cm pour une portée de 28 m). J'ai donc effectué également des études sur une poutre semblable, mais comportant des membrures ayant la hauteur normale de 30 cm. Je n'ai ainsi obtenu aucune différence importante en ce qui concerne les lignes d'influence pour les efforts dans les barres; par contre, les contraintes de flexion

dans les membrures présentaient des valeurs plus faibles d'environ 30 %. J'ai ainsi été amené à la conclusion suivante, intéressante pour la conception pratique de la poutre en treillis rhomboïdal:

7° — La rigidité des membrures que l'on obtient couramment par ailleurs dans les poutres en treillis suffit entièrement à assurer la stabilité, sans qu'il soit nécessaire de prévoir des barres de stabilité. Des membrures trop rigides ne sont pas à préconiser, car elles provoquent la mise en jeu de contraintes de flexion plus élevées dans les membrures.

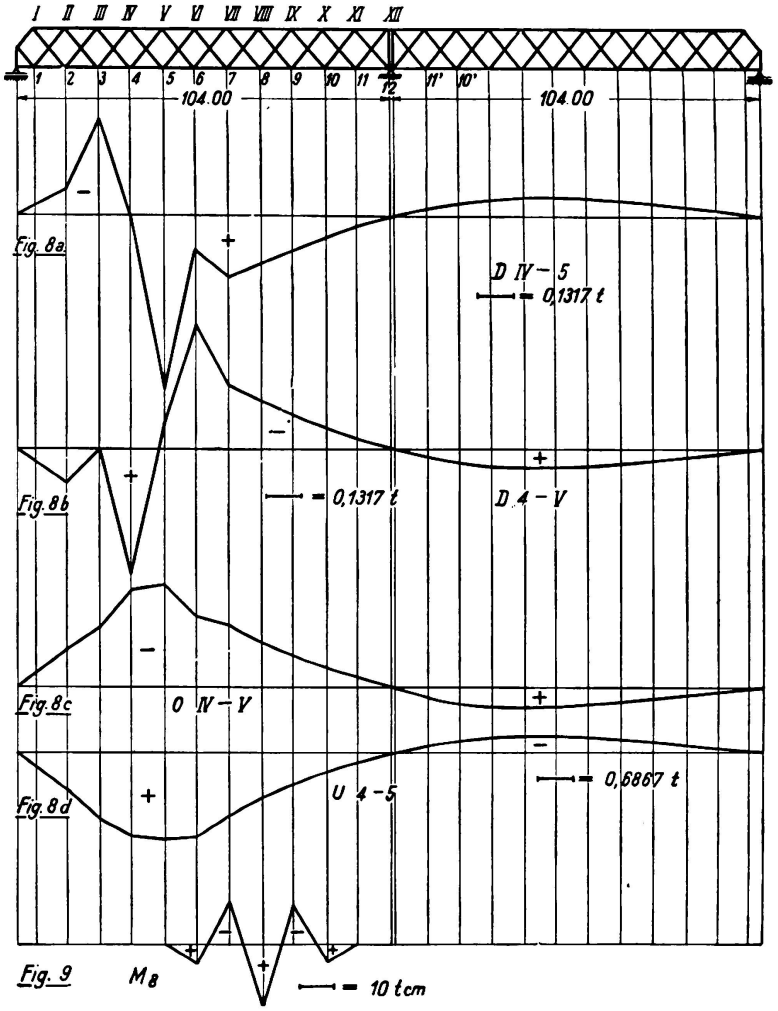

Fig. 8—9.

Sur la base des résultats ainsi obtenus, et d'après le procédé ici indiqué, j'ai fait effectuer le calcul précis du système porteur principal du pont sur le Rhin à Wesel.[5] Il s'agit ici de poutres parallèles s'étendant sans articulation sur deux travées ayant chacune 104 m de portée, avec hauteur de membrure de 90 cm absolument normale pour les treillis.[6] En ce qui concerne la conduite du calcul, je renverrai à l'étude qui fait l'objet du renvoi (5) et je me limiterai par suite ici à indiquer les résultats principaux fournis par ces calculs effectués

[5] *Krabbe:* Einfluß der Gurtsteifigkeit in ebenen Tragwerken. Leipzig, 1933, pages 12—17, Robert Noske, éditeur.

[6] Bautechnik, 1927, n° 45/46.

après coup. On trouvera sur la fig. 8 les lignes d'influence correspondant à chaque barre de membrure inférieure et supérieure, de même qu'à chaque barre de treillis travaillant à la traction ou à la compression; on trouvera en outre sur la fig. 2 la ligne d'influence qui correspond au moment de la barre de membrure inférieure, à l'endroit d'un noeud. Si l'on compare la ligne d'influence de la diagonale D_{4-V} avec la ligne d'influence déterminée sur la fig. 1a par le procédé cinématique et avec la ligne d'influence déterminée suivant la fig. 1b par décomposition en treillis élémentaires, il ressort sans aucun doute que la ligne d'influence suivant fig. 1b se rapproche beaucoup plus nettement de la réalité que celle de la fig. 1a. J'en arrive donc à cette conclusion que le procédé cinématique avec hypothèse de noeuds articulés ne peut pas être employé dans le cas des poutres en treillis rhomboïdal, mais que la décomposition en treillis élémentaires donne une bonne approximation; il est nécessaire toutefois de faire un calcul précis en tenant compte de la rigidité des membrures.

La ligne d'influence qui correspond au moment fléchissant dans la barre de membrure inférieure donne naissance, dans le cas le plus défavorable du train de charges N, à des contraintes de flexion de l'ordre de 260 kg/cm². Pour la superposition avec les lignes d'influence et les contraintes dans les barres, on n'a toutefois obtenu que des contraintes de flexion additionnelles de l'ordre de 10 kg/cm², que l'on doit donc pratiquement considérer comme tout à fait négligeables.

Enfin, j'ai en outre calculé la courbe de flexion déterminée cinématiquement suivant la fig. 2a et mesurée suivant la fig. 2b, dans le cas d'une charge concentrée et en faisant intervenir la rigidité des membrures. Le résultat obtenu est reproduit sur la fig. 2c. On observa la concordance absolument remarquable avec la courbe de flexion mesurée dans le cas d'une charge concentrée, particulièrement en ce qui concerne les coudes des deux courbes.

III. — Influence additionnelle de la rigidité de flexion des diagonales et de leurs assemblages rigides aux noeuds.

1° — *Généralités.*

Si la méthode développée plus haut permet d'obtenir d'une manière simple des résultats se rapprochant visiblement assez bien de la réalité, on conçoit toutefois, en considérant de plus près la poutre en treillis rhomboïdal, par exemple celle du pont sur le Rhin à Wesel, que de tels systèmes porteurs, avec leurs diagonales généralement assemblées aux points de croisement par de forts goussets, se rapprochent beaucoup plus qu'un treillis proprement dit d'un système de barres rigidement assemblées. Le procédé doit donc ici être également étendu à la rigidité des diagonales elles-mêmes. On devra également tenir compte des inégalités des sections et des moments d'inertie des membrures. Nous sommes ainsi également en mesure de déterminer exactement les contraintes de flexion qui se manifestent dans les diagonales. Le procédé est appliqué à la poutre en treillis rhomboïdal de la fig. 10a. Pour cette application, il est en principe indifférent que les montants indiqués en traits discontinus existent effectivement ou non dans un ou plusieurs panneaux. De même, il est sans importance pour l'application du procédé que la poutre se termine à ses deux extrémités soit

par un losange complet (fig. 10b), soit par un demi-losange (fig. 10a). Ainsi d'ailleurs que l'a montré le calcul ultérieur du pont du Rhin à Wesel, la deuxième terminaison ci-dessus est incontestablement à préférer du point de vus statique. Nous adopterons comme système principal la poutre de la fig. 11a,

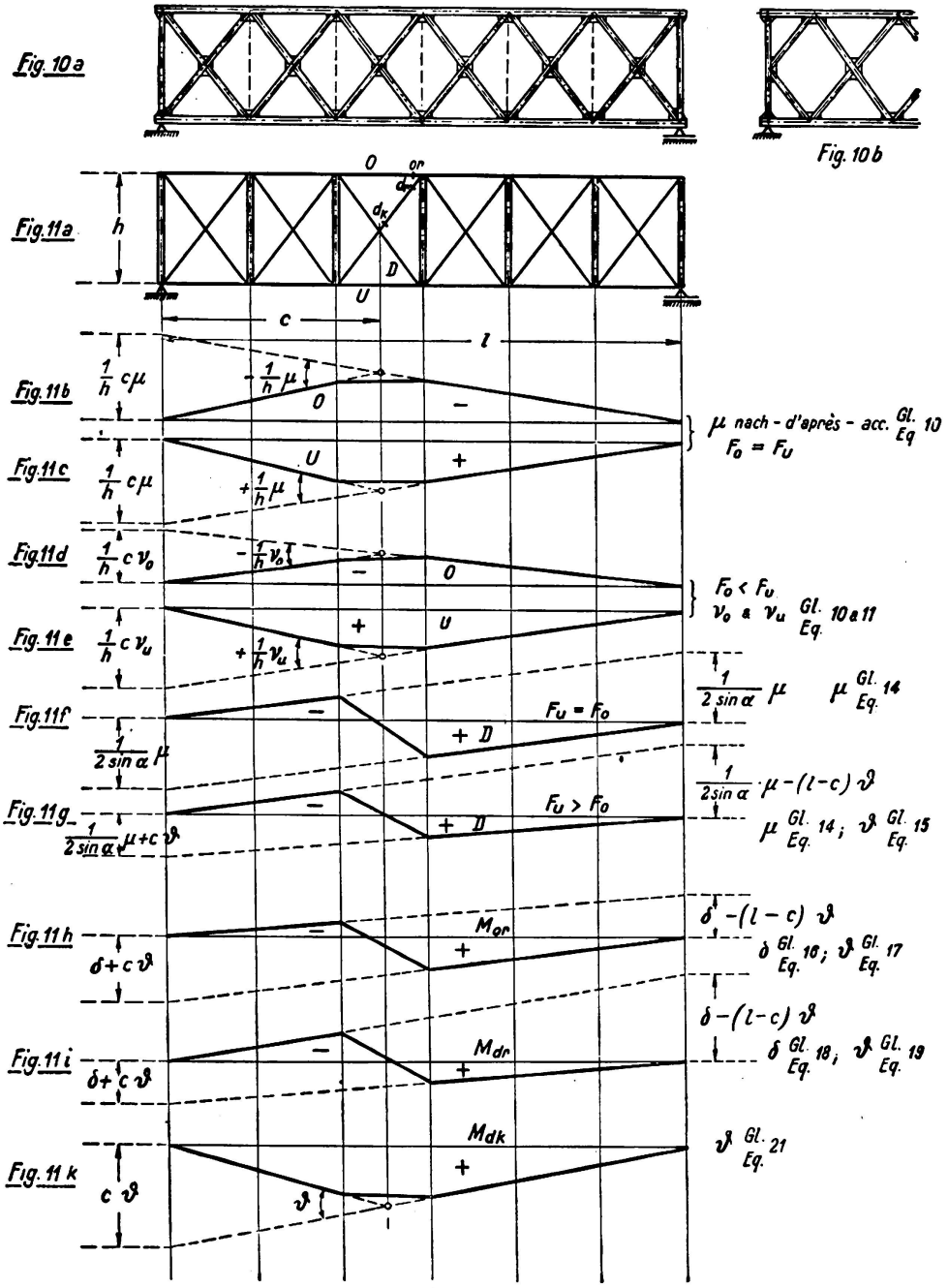

Fig. 10—11.

qui comporte un montant rigide sur chaque losange, ce montant étant assemblé d'une manière rigide avec les éléments des membrures et avec les diagonales.

Il importe de préciser tout d'abord certaines notions qui sont importantes pour la suite de l'étude. La poutre ici considérée possède, comme toute poutre en

treillis, un moment d'inertie J_t, qui varie de panneau en panneau et est composé comme il est indiqué ci-dessous:

1° — Moment d'inertie J_f du treillis proprement dit, dont les barres sont considérées comme dénuées de masse.

2° — Une partie correspondant aux moments d'inertie des barres des membrures $J_o + J_u$.

3° — Une partie correspondant aux moments d'inertie des barres du réseau du treillis J_g.

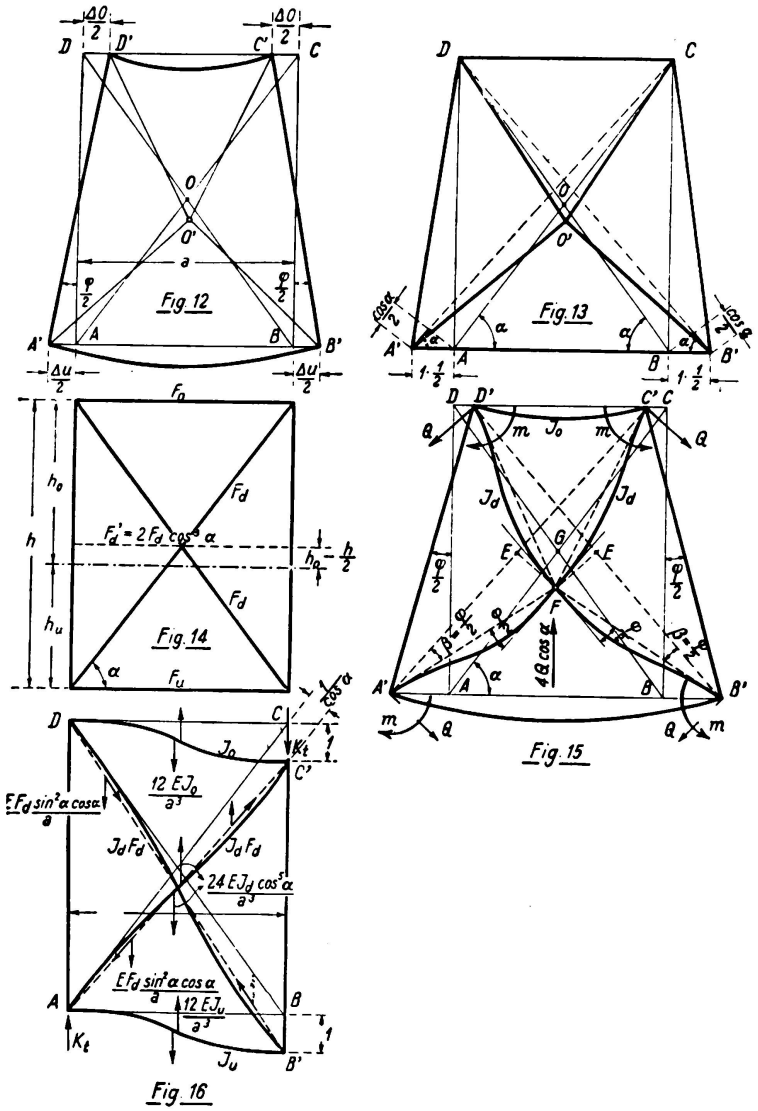

Fig. 12—16.

En ce qui concerne la fraction 1 ci-dessus, les membrures supérieure et inférieure ont la même section, de telle sorte que dans le cas des contraintes de flexion pure, la barre de membrure inférieure s'allonge de la même quantité que se raccourcit la barre de membrure supérieure (fig. 12). Les longueurs des diagonales supposées denuées de masse ne subissent de ce fait pas de modification; ces diagonales restent libres de toute contrainte et ne

fournissent par suite aucune contribution à la valeur effective du moment d'inertie J_f. L'axe de gravité se trouve au centre et on a la relation simple:

$$J_f = \frac{h^2}{4}(F_o + F_u) \tag{1}$$

Si l'on admet que les sections des membrures sont différentes, la somme des variations de longueur des deux barres de membrures est alors différente de zéro. Ceci implique des allongements et des contraintes dans ces diagonales. Elles viennent ainsi à participer également au moment d'inertie J_f. D'après la fig. 13, à chaque allongement d'une barre de membrure d'une unité, correspond un allongement des deux diagonales de $\frac{1}{2}\cos\alpha$ et il est ainsi mis en jeu dans chaque diagonale un effort donné par:

$$D = \frac{1}{2}\,\frac{E F_d}{a}\cos^2\alpha.$$

Les efforts latéraux horizontaux correspondants sont donnés par:

$$D' = \frac{1}{2}\,\frac{E F_d}{a}\cos^3\alpha.$$

Nous pouvons donc, en ce qui concerne leur participation au moment d'inertie J_f, supposer les deux diagonales remplacées suivant la fig. 14 par une barre horizontale passant par le point d'intersection des deux diagonales et ayant pour section la valeur suivante:

$$F'_d = 2\,F_d\cos^3\alpha \tag{2}$$

La position de l'axe de gravité horizontal est alors donnée par la relation suivante, dans laquelle sont employées les notations de la fig. 14:

$$h_o = \frac{h}{2}\,\frac{2F_u + F'_d}{F_o + F_u + F'_d}$$

$$h_u = \frac{h}{2}\,\frac{2F_o + F'_d}{F_o + F_u + F'_d}$$

et l'écartement entre le centre de figure et le centre de gravité est donné par:

$$h_o = \frac{h}{2} = \frac{h}{2}\,\frac{F_u - F_o}{F_o + F_u + F'_d}$$

On obtient ainsi pour le moment d'inertie:

$$J_f = \frac{h^2}{4}\left[F'_d + \frac{4F_oF_u + F'^2_d}{F_o + F_n + F'_d}\right]. \tag{3}$$

Pour $F_o = F_u$ la relation (3) redevient identique à la relation (1).

En ce qui concerne la fraction 2 du moment d'inertie J_t et indépendamment de la position de l'axe de gravité, les barres de membrures apportent un moment d'inertie additionnel égal à $J_o + J_u$.

En ce qui concerne la fraction 3 du moment d'inertie J_t, et dans le cas d'une distorsion suivant fig. 15, d'un angle φ, le point d'intersection des diagonales ne peut pour des raisons cinématiques venir qu'en F, point d'intersection des perpendiculaires élevées en E à A'C' et B'D'. On a ainsi:

$$EG = \frac{AA' + CC'}{2} \qquad \sphericalangle EFG = \alpha.$$

Le triangle EFG est donc semblable au triangle CAB et l'on a par suite:

$$\frac{EG}{EF} = \frac{h}{d} = \frac{AA' + CC'}{2\,EF}$$

ou:

$$\frac{EF}{d} = \frac{AA' + CC'}{2\,h}$$

d'où l'on déduit: $\sphericalangle \beta = \frac{\varphi}{2}$.

Les tangentes aux extrémités des diagonales déformées doivent donc être les droites C'F et D'F.

La déformation des diagonales se produit donc suivant les lignes tracées en traits pleins, avec angles de torsion:

$$\frac{\varphi}{2} = \beta.$$

Ces déformations se manifestent sur la poutre elle-même aux points A', B', C' et D' sous forme d'efforts tranchants q et de moments $\mathfrak{M}$. Le moment total ainsi exercé par les diagonales déformées sur la poutre elle-même est donné par:

$$M = -2\,q\,\frac{d}{2} + 2\,\mathfrak{M}$$

et comme l'on a:

$$q = \frac{4 \cdot 6 \cdot EJ_d}{d^2} \cdot \frac{\varphi}{2} \qquad \mathfrak{M} = \frac{2 \cdot 2\,EJ_d}{d} \cdot \frac{\varphi}{2}$$

on en déduit:

$$M = -\frac{8\,EJ_d}{d} \cdot \varphi = -\frac{8\,EJ_d \cos\alpha}{a} \cdot \varphi.$$

Les diagonales contribuent donc au total à la rigidité de flexion, c'est-à-dire au moment d'inertie de ce système, suivant:

$$J'_d = 8\,J_d \cos\alpha = J_g \tag{4}$$

Cette valeur représente le quadruple de la résistance que fourniraient deux diagonales croisées non assemblées au centre.

On a donc pour le moment d'inertie total du système:

$$J_t = J_f + J_o + J_u + 8\,J_d \cos\alpha \tag{5}$$

expression dans laquelle J_f est à déterminer d'après la relation (1) ou (3).

Nous arrivons à des notions correspondantes en ce qui concerne les efforts tranchants.

A la déformation des deux montants rigides d'une unité (fig. 16), l'ensemble du système porteur oppose une résistance K_t. L'allongement des deux diagonales est donc donné par:

$$\Delta = \pm 1 \cdot \sin \alpha.$$

On a donc pour l'effort dans les diagonales:

$$D = \pm 1 \frac{EF_d \sin \alpha \cos \alpha}{a}.$$

La composante verticale pour les deux diagonales est donc donnée par:

$$K_f = 1 \frac{2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \, EF_d}{a} \tag{6}$$

ce qui représente la résistance au cisaillement du treillis dans l'hypothèse de barres dénuées de masse. Les barres des membrures restent exemptes de contraintes.

Par suite de la déformation des deux barres de membrure, on a en outre:

$$K_o + K_u = 1 \frac{12 (J_o + J_u) E}{a^3} \tag{7}$$

La déformation des deux diagonales dont les extrémités ont subi une distorsion de $\frac{d}{1 \cos \alpha}$ par rapport à l'axe de barre, fournit une résistance aux efforts tranchants donnée par:

$$K_d = 1 \frac{24 \, EJ_d \cos^5 \alpha}{a^3}. \tag{8}$$

On a donc pour la résistance totale du système porteur aux efforts tranchants:

$$K_t = K_f + K_o + K_u + K_d \tag{9}$$

ou:

$$K_t = 1 \frac{2E}{a} \left[F_d \sin^2 \alpha \cos \alpha + 6 \frac{J_o + J_u + 2 J_d \cos^5 \alpha}{a^2} \right].$$

Il est à remarquer ici que dans les réalisations normales, telles que le pont sur le Rhin à Wesel, par exemple et par suite de la rigidité de flexion des barres des membrures et des diagonales, la résistance aux efforts tranchants de l'ensemble du système porteur se trouve augmentée d'environ 13 %. Il n'est donc pas indiqué d'admettre simplement que dans le cas considéré la rigidité des barres soit à négliger. L'élévation du moment d'inertie de l'ensemble de l'ouvrage qui résulte de la résistance à la flexion des barres est toutefois faible et reste inférieure à 1 %.

2° — *Lignes d'influence concernant le système principal.*[7]

a) Lignes d'influence des barres des membrures.

La ligne d'influence de la membrure supérieure est déterminée par la courbe de flexion de la membrure en charge (membrure inférieure), qui résulte de

[7] En ce qui concerne les notations généralement adoptées dans la présente étude pour les lignes d'influence, se reporter à l'étude publiée par l'auteur dans Stahlbau, 1933, n° 2.

l'allongement d'une unité de la barre de membrure supérieure. Nous réalisons cet allongement d'une unité de la barre de membrure supérieure (fig. 17), en la coupant en son milieu et en appliquant un effort X qui provoque un écartement d'une unité. Si nous négligeons tout d'abord la résistance à la flexion des barres, nous nous trouvons en présence des efforts dans les barres qui sont indiqués sur la figure. Sous l'influence de l'effort X, qui pour des sections identiques raccourcit dans les mêmes proportions la barre de membrure supérieure et la barre de membrure inférieure, les deux montants subissent l'un par rapport à l'autre une distorsion suivant l'angle $-\frac{1}{h}$. On pourrait ainsi déterminer la ligne d'influence pour O pour le cas du treillis pur.

Comme toutefois les barres de membrure et diagonales déformées mettent en jeu des réactions réciproques, l'angle de torsion est en fait inférieur à $\frac{1}{h}$; nous supposerons qu'il est égal à $\frac{1}{h}\mu$.

On en déduit directement, en se reportant aux relations 1, 3 et 5:

$$\mu = \frac{J_f}{J_t} \tag{10}$$

La ligne d'influence correspondant à la barre de membrure supérieure O est donc caractérisée par l'angle de torsion

$$\frac{1}{h}\mu$$

et affecte la forme représentée sur la fig. 11b; on obtient d'une manière tout à fait analogue la ligne d'influence qui correspond à la barre de membrure supérieure U, suivant fig. 11c.

Si les barres de membrure supérieure et inférieure présentent par contre des sections différentes, l'angle de torsion n'est plus indépendant de X car si les membrures inférieure et supérieure sont en fait soumises aux mêmes efforts dans les barres X, les allongements qui en résultent sont toutefois différents.

Comme l'effort externe X tend à séparer d'une unité les lèvres de la coupure effectuée sur la barre de membrure supérieure, on a d'après le théorême de *Clapeyron*:

$$1 \cdot X = \frac{X^2 a}{EF_o} + \frac{X^2 a}{EF_u} + 2\frac{X^2 a}{EF_d \cos^3 \alpha}.$$

Comme la valeur $\chi = 0$ qui satisferait à cette équation n'a aucune signification, on a:

$$X = 1 \frac{EF_o F_u}{a\left[F_o + F_u + \frac{2 F_o F_u}{F_d \cos^3 \alpha}\right]}$$

On a par suite pour l'allongement total de la barre de membrure supérieure:

$$\Delta_o = 1 - \frac{X a}{EF_o}$$

et pour le raccourcissement de la barre de membrure inférieure:

$$\Delta_u = -\frac{X a}{E F_u}.$$

On a ainsi pour l'angle de torsion:

$$\vartheta_o = \frac{\Delta_u - \Delta_o}{h}$$

ou:

$$\vartheta_o = -\frac{1}{h}\left[1 - \frac{F_o - F_u}{F_u + F_o + \frac{2 F_u F_o}{F_d \cos^3 \alpha}}\right] \tag{10}$$

Nous désignerons l'expression entre les parenthèses par ν_o et nous aurons ainsi:

$$\vartheta_o = -\frac{1}{h} \cdot \nu_o \tag{11}$$

Pour la membrure inférieure, en procédant de la même manière, nous poserons:

$$\nu_u = 1 + \frac{F_o + F_u}{F_u + F_o + \frac{2 F_u F_o}{F_d \cos^3 \alpha}} \tag{12}$$

et nous aurons:

$$\vartheta_u = +\frac{1}{h} \nu_u \tag{13}$$

Les deux lignes d'influence sont représentées sur les fig. 11d à e; la membrure la plus forte admet naturellement les plus gros efforts dans les barres.

b) *Lignes d'influence des diagonales.*

Nous déterminerons la ligne d'influence de la diagonale CB (fig. 18) en la considérant comme courbe de flexion de la membrure inférieure résultant de l'allongement d'une unité de la diagonale. Dans l'hypothèse de barres dénuées de masse, l'effort qui écarte d'une unité les lèvres de la coupure de la diagonale, soit X produit dans les barres les efforts indiqués sur la figure. Indépendamment de cet allongement d'une unité, les deux diagonales se raccourcissent dans la même proportion, ce qui provoque une déformation verticale réciproque de $\frac{1}{2 \sin \alpha}$ des montants rigides; on obtient ainsi la courbe de flexion représentée sur la fig. 11f et par suite la ligne d'influence des diagonales. Sous l'influence de la rigidité de flexion des barres de membrure et des diagonales, la déformation verticale des montants se trouve toutefois réduite; nous supposerons qu'elle répond à:

$$\frac{1}{2 \sin \alpha} \cdot \mu.$$

Nous aurons ainsi:

$$\mu = \frac{K_f}{K_t} \quad \text{(équations 6—9).} \tag{14}$$

On obtient ainsi la ligne d'influence représentée sur la fig. 11f.

Si maintenant les barres de membrure supérieure et inférieure ont des sections différentes et par suite des inégalités d'allongements, on a pour un même effort dans les barres $+ X \cos \alpha$, une torsion des montants rigides l'un par rapport à l'autre de l'angle qui dans ce cas, d'après la relation (10) bis, est donné par:

$$\vartheta = -\frac{1}{h} \frac{F_u - F_o}{\left[F_u + F_o + \frac{2 F_u F_o}{F_d \cos^3 \alpha}\right] \cos \alpha} \tag{15}$$

On en déduit la ligne d'influence représentée par la fig. 11g.

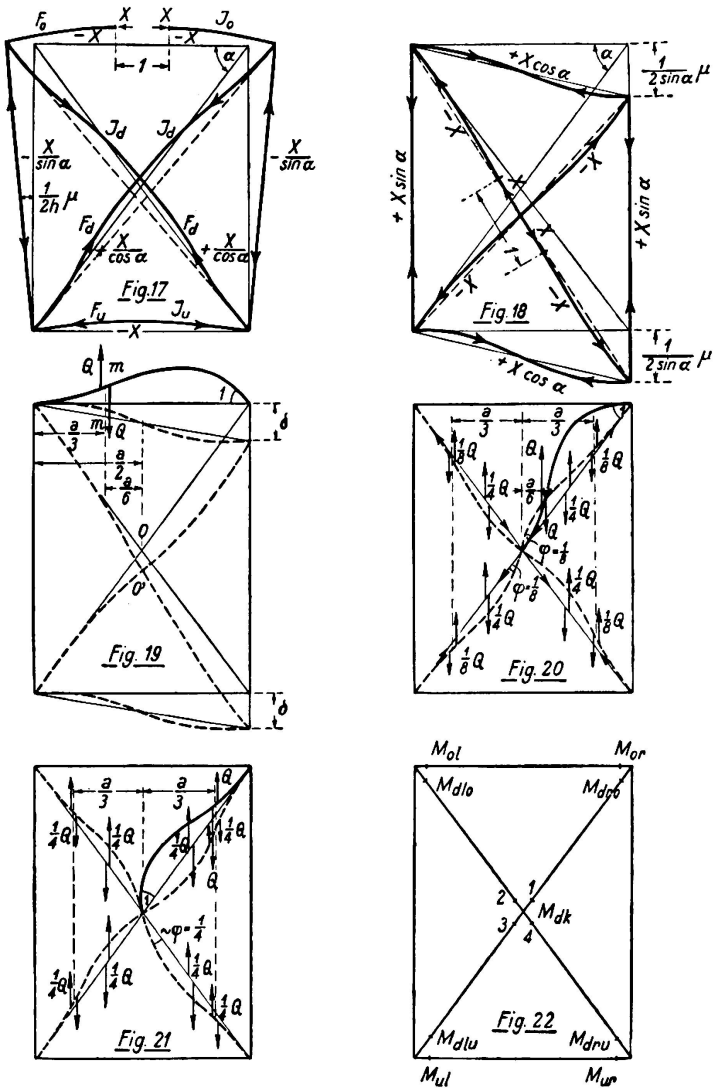

Fig. 17—22.

c) *Lignes d'influence correspondant aux moments d'extrémité des barres.*

Nous déterminerons la ligne d'influence correspondant au moment de l'extrémité droite de la barre de membrure supérieure (fig. 19) en la considérant comme courbe de flexion de la membrure en charge résultant de l'effet de compression axiale de la barre, qui se traduit à l'extrémité droite par une

déformation d'un angle égal à l'unité. Par suite de cet effet de flambage, il se trouve mis en jeu dans la barre un effort tranchant donné par:

$$Q = + \frac{6\,E J_o}{a^2}$$

Cet effort tranchant implique un déplacement vertical des montants rigides, l'un par rapport à l'autre, donné par:

$$\delta_{or} = 1 \frac{Q}{K_t} \qquad \text{(pour } K_t \text{ voir relation 9)}$$

$$\delta_{or} = + 1 \frac{6\,E J_o}{a^2 K_t} \tag{16}$$

En outre, il s'exerce dans la section verticale directement à droite de O un moment en sens contraire des aiguilles d'une montre donné par:

$$M = - \frac{E J_o}{a}$$

de même dans la section qui se trouve immédiatement à gauche de O, se manifeste le moment inverse:

$$M = + \frac{E J_o}{a}.$$

Il en résulte pour la poutre une torsion positive réciproque des deux montants rigides, qui est donnée par:

$$\vartheta_{or} = \frac{M \cdot a}{E J_t}$$

ou:

$$\vartheta_{or} = + \frac{J_o}{J_t} \tag{17}$$

La ligne d'influence conditonnée par la déformation δ et la distorsion ϑ, pour M_{or}, est représentée sur la fig. 11h.

Nous déterminerons *la ligne d'influence correspondant au moment sur l'extrémité supérieure de la diagonale qui monte vers la droite,* soit M_{dro}, en la considérant comme courbe de flexion de la membrure en charge, résultant d'une déformation d'un angle unité par suite de l'effet de flambage de cette barre à son extrémité supérieure (fig. 20).

Sous cette influence, le croisement des diagonales en O se trouve tout d'abord soumis à un moment donné par:

$$- \frac{4\,E J_d \cos \alpha}{a}.$$

Sous l'influence de ce moment, il se produit une distorsion en sens contraire d'horloge suivant un angle de $\frac{1}{8}$ et les diagonales subissent de ce fait un fléchissement additionnel indiqué en traits discontinus. Le point O ne se trouve

alors plus soumis à un moment, car chacune des quatre demi-diagonales infléchies exerce sur lui un effort égal à:

$$+\frac{E J_d \cos \alpha}{a}.$$

Sous cette influence et aussi bien dans une section située à droite qu'à gauche de O, c'est-à-dire dans le panneau tout entier, se trouvent mis en jeu des efforts tranchants qui sont indiqués sur la fig. 20, soit:

$$Q = \frac{24 E J_d \cos^3 \alpha}{a^2}$$

On a en particulier à droite:

$$Q - 2\frac{Q}{8} - \frac{2Q}{8} = \frac{Q}{4}$$

et à gauche:

$$2\frac{Q}{4} - 2\frac{Q}{4} = \frac{Q}{4}$$

$$= \frac{6 E J_d \cos^3 \alpha}{a^2}$$

Ceci implique un déplacement des montants rigides l'un par rapport à l'autre de:

$$\delta_{dro} = + \frac{6 E J_d \cos^3 \alpha}{a^2 K_t} \tag{18}$$

En outre, vient s'appliquer sur la section verticale située immédiatement à droite de O, en O, un moment en sens inverse d'horloge et donné par:

$$M = -\frac{4 E J_d \cos \alpha}{a} + 2\frac{E J_d \cos \alpha}{a} = -2\frac{E J_d \cos \alpha}{a}$$

et sur la section verticale située immédiatement à gauche de O:

$$M = +2\frac{E J_d \cos \alpha}{a}.$$

A ce moment doit venir s'opposer un moment en sens contraire résultant du fléchissement de la poutre tout entière; pour cela, une distorsion de la poutre est nécessaire, suivant un angle donné par:

$$\vartheta_{dro} = \frac{M a}{E J_t} = -\frac{2 J_d \cos \alpha}{J_t} \tag{19}$$

La ligne d'influence conditionnée par le déplacement δ et par la torsion ϑ pour $M_{d\,ro}$ est représentée sur la fig. 11i.

Nous déterminerons la ligne d'influence pour le moment d'extrémité de cette même diagonale directement à droite de O en la considérant comme courbe d'influence de la membrure en charge, résultant d'un effet de flambage en K se traduisant pour cette barre par une déformation suivant un angle unité

(fig. 21). Dans des conditions analogues aux précédentes, la charge du point de croisement en O par:

$$+\frac{8\,EJ_d \cos\alpha}{a}$$

a pour résultat une distorsion additionnelle de ce point de croisement représentée en traits discontinus, suivant un angle $\frac{1}{4}$, de telle sorte qu'à nouveau, le point de croisement en O ne se trouve plus soumis à l'action de moments. Dans des conditions semblables à celles qui précèdent, on a ici:

$$Q = O \qquad \text{d'où:}$$

$$\delta_{dK} = O \tag{20}$$

Immédiatement à droite et à gauche de O, s'appliquent maintenant les moments:

$$M = \pm\frac{4\,EJ_d \cos\alpha}{a}.$$

A ce moment, doit s'opposer un moment résultant de la flexion de la poutre tout entière; à cet effet, est nécessaire une distorsion de la poutre donnée par:

$$\vartheta_{dK} = +\frac{4\,J_d \cos\alpha}{J_t} \tag{21}$$

On arrive ainsi à ce résultat très intéressant que l'angle de distorsion ϑ qui conditionne la ligne d'influence correspondant à M_{dK} et qui est donné par la relation (21) est deux fois plus grand, en sens opposé, que celui qui conditionne la ligne d'influence correspondant à M_{dro} et qui est donné par la relation (19). Ceci correspond exactement au fléchissement des diagonales par torsion pure, c'est-à-dire par charges constituées uniquement par des moments suivant fig. 15. En outre, il résulte directement de la fig. 16 que pour un déplacement purement parallèle des montants rigides, il ne se manifeste aucun moment M_{dK}; par suite, et inversement (d'après la loi de *Maxwell*), un effet de flambage des diagonales directement à droite de O, suivant fig. 21, ne peut provoquer la mise en jeu d'aucun effort tranchant susceptible de déplacer les montants parallèlement, ce qui se trouve confirmé par la relation (20).

Il n'est pas nécessaire d'effectuer une détermination spéciale des lignes d'influence qui correspondent aux autres extrémités des barres, car avec les désignations de la fig. 22, on obtient directement, d'après la fig. 15 (contrainte due aux moments) et la fig. 16 (contrainte due aux efforts tranchants) le signe des valeurs δ et ϑ: on a ainsi:

pour	or	ol	ur	ul	d_{ro}	d_{lo}	d_{ru}	d_{lu}	d_K
δ	+	−	+	−	+	−	+	−	0
ϑ	+	+	+	+	−	−	−	−	+

(22)

On a ainsi déterminé toutes les lignes d'influence pour le système porteur (fig. 11a) choisi comme système principal et comportant des montants auxiliaires rigides, assemblés rigidement dans les noeuds.

Du point de vue de ces lignes d'influence, on a étudié des dispositions variées en ce qui concerne les sections et moments d'inertie des membrures supérieure et inférieure. Pour les corrections à apporter à ces lignes d'influence et qui doivent être déterminées dans ce qui suit, on a toutefois renoncé à ces variantes et admis la symétrie par rapport à l'axe horizontal de la poutre, afin de ne pas compliquer outre mesure la méthode indiquée (pour des raisons particulières, nous adoptons comme base, pour les deux membrures, la dimension de la membrure éloignée du tablier). Nous indiquerons, à la fin de la présente étude, une méthode approchée qui permet de faire intervenir d'une manière simple, les corrections qu'exige la dissymétrie.

3° — *Passage des assemblages rigides des montants auxiliaires à des assemblages articulés.*

Si les montants auxiliaires incorporés au système porteur (fig. 11a) ne sont pas rigides, mais articulés aux noeuds, les noeuds subissent des torsions suivant certains angles par rapport à l'axe des montants rigides, sous l'influence des différents fléchissements de la poutre (lignes d'influence); ces torsions se produisent en général dans le même sens, c'est-à-dire antisymétriquement par rapport à l'axe horizontal de la poutre. Il peut également se manifester, d'ailleurs indépendamment de ce qui précède, une distorsion des noeuds des membrures supérieure et inférieure en sens opposé, c'est-à-dire symétriquement par rapport à l'axe de la poutre.

a) *Torsion antisymétrique des noeuds des membrures supérieure et inférieure.*

Si nous provoquons la torsion des noeuds om et um d'un angle φ (fig. 23) dans le même sens, par rapport à l'axe du montant auxiliaire m et si nous supposons tout d'abord que les noeuds sont indéformables dans le sens vertical, il se produit tout d'abord une déformation suivant fig. 23a, dans laquelle nous maintenons tout d'abord fixes, sans torsion, les points médians de croisement O_m et O_{m+1} des diagonales. Il en résulte une mise en charge de ces croisements, par un moment à gauche égal à:

$$-2\frac{2\,E\,J_d}{\frac{d}{2}}\varphi.$$

Ce moment est alors compensé par une rotation à gauche du noeud, d'amplitude $\frac{1}{4}\varphi$. Les noeuds subissant ainsi une torsion de $\frac{1}{4}\varphi$, il en résulte la déformation représentée sur la fig. 23b.

Si nous comparons cette fig. avec les fig. 19—20, nous constatons que dans les deux panneaux, la double déformation des deux fig. 19—20 considérées ensemble se manifeste, avec sens opposés dans le panneau m + 1. Il en résulte directement, en ce qui corcerne les relations 16 à 20, que pour la compensation

des moments et efforts tranchants mis en jeu par suite de la déformation, les nouvelles déformations ci-après sont nécessaires:

Panneau m:

$$\delta_m = +1 \left[\frac{6\,E\,(J_o + J_u)_m}{a^2\,K_{tm}} + \frac{12\,E\,J_{dm}\cos^3\alpha}{a^2\,K_{tm}} \right] \cdot \varphi$$

$$= +1\,\frac{6\,E\,(J_o + J_u + 2\,J_d\cos^3\alpha)_m}{a^2\,K_{tm}} \cdot \varphi$$

$$\vartheta_m = +\frac{(J_o + J_u + 2\,J_d\cos\alpha)_m}{J_{tm}} \cdot \varphi.$$

Panneau m + 1:

$$\delta_{m+1} = -1\,\frac{6\,E\,(J_o + J_u + 2\,J_d\cos^3\alpha)_{m+1}}{a^2\,K_{t\,(m+1)}} \cdot \varphi$$

$$\vartheta_{m+1} = -\frac{(J_o + J_u + 2\,J_d\cos\alpha)_{m+1}}{J_{t\,(m+1)}} \cdot \varphi.$$

Cette déformation de la poutre est représentée sur la fig. 23c. A gauche de m — 1 et à droite de m + 1, les autres panneaux se raccordent normalement sur les montants et les points d'appui A et B viennent en A′ et en B′. Après restauration des conditions d'appui suivant la droite A′ B′ on obtient le fléchissement de la membrure inférieure conditionné par l'angle de torsion $\varphi_m = 1$ c'est-à-dire par l'état «$\varphi_m = 1$».

Sous cet état, les noeuds om, um, o (m — 1), u (m — 1), o (m + 1), u (m + 1) sont soumis à des moments, ces moments étant en fait égaux pour les neouds supérieurs et inférieurs, puisque nous admettons l'hypothèse de la symétrie.

Nous trouvons ainsi pour la charge de chacun des noeuds om et um:

à partir de la fig. 23a:

$$M'_{mm} = -\frac{4\,E\,(J_{om} + J_{o(m+1)})}{a} - \frac{4\,E\,(J_{dm} + J_{d(m+1)})}{a} - \frac{6\,E\,J_o}{h}$$

à partir de la fig. 23b:

$$M''_{mm} = +\frac{(J_{dm} + J_{d(m+1)})\cos\alpha}{a}$$

à partir de la fig. 23c (en se reportant aux fig. 15 et 16):

$$M''' = \frac{E}{a}\Big[J_{om}\,\vartheta_m + J_{o(m+1)}\,\vartheta_{m+1} - 4\,J_{dm}\cos\alpha\,\frac{\vartheta_m}{2}$$

$$- 4\,J_{d(m+1)}\cos\alpha\,\frac{\vartheta_{m+1}}{2} + 6\,J_{om}\,\frac{\delta_m}{a} + 6\,J_{o(m+1)}\,\frac{\delta_{m+1}}{a}$$

$$+ 6\,J_{dm}\,\frac{\delta_m}{a}\cos^3\alpha + 6\,J_{o(m+1)}\,\frac{\delta_{m+1}}{a}\cos^3\alpha\Big].$$

Pour la charge de chacun des noeuds o (m — 1) et u (m — 1) nous trouvons:

à partir de la fig. 23a:

$$M'_{(m-1)\,m} = -\frac{2\,E\,J_{om}}{a}$$

à partir de la fig. 23b:

$$M''_{(m-1)m} = + \frac{E J_{dm} \cos \alpha}{a}$$

à partir de la fig. 23c:

$$M'''_{(m-1)m} = + \frac{E}{a} \left[- J_{om} \vartheta_m + 4 J_{dm} \cos \alpha \frac{\vartheta_m}{2} + 6 J_{om} \frac{\delta_m}{a} + 6 J_{dm} \frac{\delta_m}{a} \cos^3 \alpha \right].$$

Enfin, pour la charge de chacun des noeuds o (m + 1) et u (m + 1), nous trouvons:

à partir de la fig. 23a:

$$M'_{(m+1)m} = - \frac{2 E J_{o\,(m+1)}}{a}$$

à partir de la fig. 23b:

$$M''_{(m+1)m} = + \frac{E J_{d\,(m+1)} \cos \alpha}{a}$$

à partir de la fig. 23c:

$$M'''_{(m+1)m} = \frac{E}{a} \left[- J_{o\,(m+1)} \vartheta_{m+1} + 4 J_{d\,(m+1)} \cos \alpha \frac{\vartheta_{m+1}}{2} + 6 J_{o\,(m+1)} \frac{\delta_{m+1}}{a} + 6 J_{d\,(m+1)} \frac{\delta_{m+1}}{a} \cos^3 \alpha \right].$$

La charge totale des noeuds supérieurs et inférieurs est ainsi donnée par:

$$M_{mm} = 2 (M'_{mm} + M''_{mm} + M'''_{mm}) \tag{23}$$

$$M_{(m-1)m} = 2 (M'_{(m-1)m} + M''_{(m-1)m} + M'''_{(m-1)m}) \tag{24}$$

$$M_{(m+1)m} = 2 (M'_{(m+1)m} + M''_{(m+1)m} + M'''_{(m+1)m}) \tag{25}$$

Si nous considérons maintenant, sur les fig. 17—18, les déformations qui ont donné lieu aux lignes d'influence du système principal, considérées en tant que courbes de flexion de la membrure chargée, nous constatons qu'à ces déformations correspond une charge de base des noeuds du panneau déformé, charge que nous désignerons par M_{om}. Cette charge est égale sur les noeuds supérieurs et sur les noeuds inférieurs; on a d'après la fig. 17 (ligne d'influence correspondant à la barre de membrure supérieure):

$$M_{o\,(m-1)} = \frac{2 E}{a h} [J_o + J_u + 2 J_d \cos \alpha] \quad (\text{avec } J_o = J_u) \tag{26}$$

$$M_{om} = - M_{o\,(m-1)} \tag{27}$$

Pour la déformation suivant fig. 18 (ligne d'influence pour la diagonale), on a:

$$M_{o\,(m-1)} = M_{om} = \frac{6 E (J_o + J_u)}{a} \cdot \frac{1}{2 \sin \alpha} \mu + \frac{12 E J_d}{a} \cos^3 \alpha \frac{1}{2 \sin \alpha} \mu \tag{28}$$

$$= \frac{3 E}{a \sin \alpha} \mu (J_o + J^u + 2 J_d \cos^3 \alpha) \quad (\text{avec } J_o = J_u).$$

Par suite de la substitution des articulations, aux encastrements rigides des montants, il ne peut pas se manifester de moments dans ces articulations; on a donc dans chaque cas, pour chaque couple de points, la relation:

$$M_m = 0 = M_{om} + M_{m(m-1)}\,\varphi_{m-1} + M_{mm}\,\varphi_m + M_{m(m+1)}\,\varphi_{m+1} \qquad (29)$$

Cette relation ne peut pas comporter d'autres termes. Pour n noeuds, nous avons donc toujours un système d'équations à n angles de torsion inconnus φ_m de la forme de l'équation de *Clapeyron*; par exemple, pour la poutre 11a et pour la ligne d'influence de la diagonale D, nous avons:

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	
1	M_{11}	M_{12}						
2	M_{21}	M_{22}	M_{23}					
3		M_{32}	M_{33}	M_{34}				M_{03}
4			M_{43}	M_{44}	M_{45}			M_{04}
5				M_{54}	M_{55}	M_{56}		
6					M_{65}	M_{66}	M_{67}	
7						M_{76}	M_{77}	

(29a)

A chacun de ces angles de torsion φ_m correspond maintenant une courbe de flexion déterminée de la membrure en charge (voir fig. 23c), à savoir la courbe de flexion que l'on a obtenue pour l'état $\varphi_m = 1$ et multipliée par φ_m. Ces 7 courbes de flexion doivent dont être ajoutées aux courbes de flexion de la membrure en charge déterminées sur la fig. 18 et nous obtenons ainsi la ligne d'influence se rapportant à la *poutre avec montants auxiliaires articulés.*

Pour la détermination de la ligne d'influence pour la barre de membrure O suivant fig. 17—11b, nous utilisons le même système d'équations: il faut alors introduire comme termes indépendants, dans les colonnes 3 et 4, les valeurs de M_{o3} et de M_{o4} d'après les relations 26—27.

b) *Torsion symétrique des noeuds des membrures supérieure et inférieure.*

S'il s'agit maintenant de corriger les lignes d'influence conditionnées par les déformations suivant fig. 19, 20 et 21, nous remarquerons que les noeuds des membrures supérieure et inférieure sont ici soumis à des moments inégaux.

Sous l'influence de ces déformations, et dans les trois cas considérés, il y a encore lieu de considérer ici, outre la charge égale des noeuds des membrures supérieure et inférieure m — 1 et m que nous désignerons par $M_{o(m-1)}$ et M_{om}, une charge particulière sur les noeuds supérieurs, à savoir:

fig. 19:

$$M_{m-1} = -\frac{2\,EJ_o}{a} \qquad (30)$$

$$M_m = -\frac{4\,EJ_o}{a}$$

fig. 20: $$M_m = -\frac{8\,E\,J_d \cos\alpha}{a} \tag{31}$$

fig. 21: $$M_m = +\frac{4\,E\,J_d \cos\alpha}{a} \tag{32}$$

Nous décomposerons cette charge en charges antisymétrique et symétrique sur les noeuds des membrures supérieure et inférieure et nous aurons ainsi, pour la charge $-\frac{2\,E\,J_o}{a}$ de la fig. 19:

1. — en haut: $-\frac{E\,J_o}{a}$ en bas: $-\frac{E\,J_o}{a}$

(fraction antisymétrique de la charge)

2. — en haut: $-\frac{E\,J_o}{a}$ en bas: $+\frac{E\,J_o}{a}$

(fraction symétrique de la charge)

On a ainsi au total:

en haut: $\frac{2\,E\,J_o}{a}$

en bas: 0

Les déformations qui résultent des fractions antisymétriques des charges doivent être déterminées d'après le procédé indiqué en a. Aux fractions symétriques de la charge, il correspond toutefois également, si nous voulons considérer dans leur ensemble les noeuds des membrures supérieure et inférieure, une *torsion symétrique* des noeuds supérieurs et inférieurs (fig. 24). Nous désignerons l'angle de torsion correspondant par ψ. Contrairement à la fig. 23a, la fig. 24 montre que les noeuds médians O_{m-1} et O_m ne sont pas chargés, c'est-à-dire qu'ils ne subissent pas de torsion et en outre que les efforts tranchants et les moments dans les deux panneaux s'équilibrent, c'est-à-dire qu'il ne se manifeste pas d'autres déformations.

Dans ce cas, nous considérerons les torsions et les charges dues aux moments comme positive lorsqu'elles provoquent des torsions ou des charges positives sur le noeud de la membrure supérieure. Nous obtenons ainsi directement:

$$M_{mm} = -\frac{8\,E}{a}\left[J_{om} + J_{o\,(m+1)} + 2\,(J_{om} + J_{d\,(m+1)}) \cos\alpha\right] - 2\,\frac{E\,J_o}{h} \tag{33}$$

$$M_{(m-1)\,m} = -\frac{4\,E\,J_{om}}{a} \tag{34}$$

$$M_{(m+1)\,m} = -\frac{4\,E\,J_{o\,(m+1)}}{a} \tag{35}$$

La déformation qui résulte de la charge symétrique des noeuds des membrures supérieure et inférieure est donc donnée par un système d'équations de la

forme de l'équation de *Clapeyron,* correspondant à la relation 29. On a par exemple pour la déformation suivant fig. 19:

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	
1	M_{11}	M_{12}						
2	M_{21}	M_{22}	M_{23}					
3		M_{32}	M_{33}	M_{34}				$-\frac{EJ_0}{a}$
4			M_{43}	M_{44}	M_{45}			$-\frac{2EJ_0}{a}$
5				M_{54}	M_{55}	M_{56}		
6					M_{65}	M_{66}	M_{67}	
7						M_{76}	M_{77}	

(36)

Les coefficients correspondants seront déterminés d'après les relations 33 à 35 et les termes indépendants d'après la relation (30).

Nous obtenons ainsi, dans le cas considéré, 7 angles ψ de torsion symétriques; par contre, et il y a là une grande différence avec les angles de torsion φ, il ne se produit aucune déformation des noeuds de la membrure en charge. On ne constate donc aucune action des lignes d'influence (tout au moins si nous admettons que les charges sont appliquées seulement aux noeuds).

Les résultats ainsi obtenus seront utilisés dans le prochain chapitre. Nous sommes maintenant en possession des lignes d'influence exactes pour le système comportant des montants auxiliaires rigides, assemblés par articulation.

4° — *Suppression des montants auxiliaires rigides.*

Prolongeons l'un des montants rigides m, tout d'abord en conservant son encastrement rigide sur les deux membrures, de la quantité η c'est-à-dire vers le haut de $\frac{1}{2}\eta$ et vers le bas de la même quantité; nous obtenons ainsi la déformation de la fig. 25. Comme il se manifeste une traction dans les deux diagonales, il se manifeste par voie de conséquence une compression dans toutes les barres de membrures; ces barres se raccourcissent donc des quantités γ et γ'. Le fléchissement des diagonales n'exerce naturellement aucune influence notable tant sur les contraintes longitudinales qui se manifestent dans les diagonales et dans les barres de membrures que sur les déformations γ et γ'. La valeur de γ a été déjà déterminée dans l'étude mentionnée dans le renvoi (4) (équation 7). On a ainsi:

$$\gamma = \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha\, F_{dm}}{2\,(\cos^3\alpha\, F_{dm} + F_{om})} \tag{37}$$

Pour l'établissement de cette formule, voir l'étude mentionnée. On a d'une manière correspondante:

$$\gamma' = \frac{\sin\alpha \cos^2\alpha \, F_{d\,(m+1)}}{2\,(\cos^3\alpha \, F_{d\,(m+1)} + F_{o\,(m+1)})} \tag{37a}$$

On en déduit, d'après la fig. 25, la déformation des points de croisement des diagonales:

$$\delta = \frac{\gamma}{2} + \frac{h}{4\,a} \cdot \eta$$

ou:

$$\delta = \frac{(2\,F_{dm} \cos^3\alpha + F_{om})\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4\,(F_{om} + F_{dm} \cos^3\alpha)} \tag{38}$$

On obtient d'une manière tout à fait semblable la valeur de δ' avec les sections de barres correspondantes, dans le panneau $m + 1$.

De ce qui précède, on déduit maintenant la déformation des noeuds des tangentes d'extrémité, perpendiculairement aux axes des barres:
Pour les demi-diagonales intérieures dans le panneau m, on a:

$$\delta \sin\alpha + \frac{\eta}{2} \cos\alpha$$

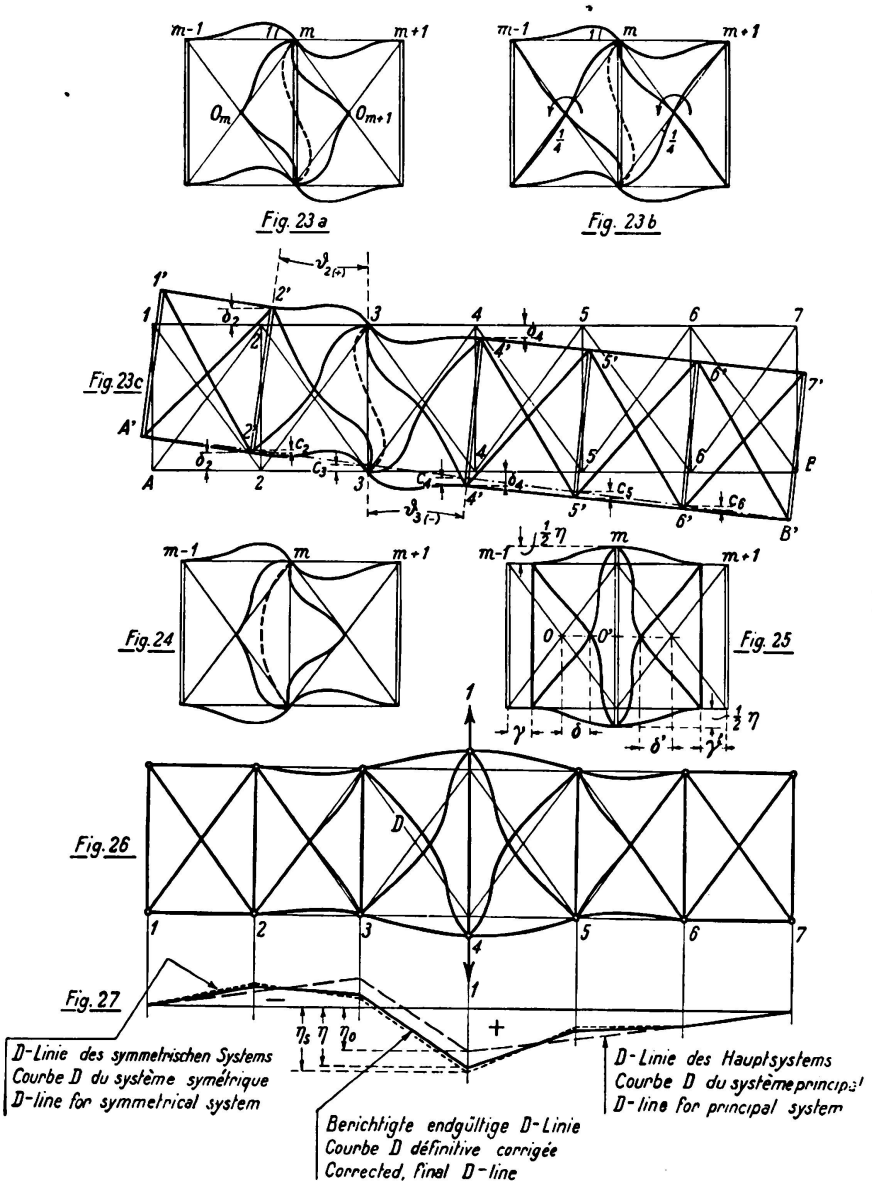

Fig. 23—27.

et dans le panneau m + 1, on a:

$$\delta' \sin \alpha + \frac{\eta}{2} \cos \alpha.$$

Pour les demi-diagonales extérieures, on a respectivement:

$$(\delta - \gamma) \sin \alpha \qquad \text{et} \qquad (\delta' - \gamma') \sin \alpha.$$

On en déduit maintenant tous les moments fléchissants mis en jeu par la déformation (fig. 25), à savoir, pour le panneau de gauche:

$$\left.\begin{aligned}
M_{or} &= -\frac{\eta}{2} \cdot \frac{6\,E\,J_{om}}{a^2} = -3\,\frac{E\,J_{om}}{a^2} \cdot \eta \\
M_{ol} &= +3\,\frac{E\,J_{om}}{a^2} \cdot \eta \\
M_{ur} &= +3\,\frac{E\,J_{um}}{a^2} \cdot \eta \\
M_{ul} &= -3\,\frac{E\,J_{um}}{a^2} \cdot \eta \\
&\text{Pour les désignations, voir fig. 22} \left\{\begin{aligned}
M_{dro} &= -\frac{24\,E\,J_{dm} \cos^2 \alpha}{a^2} \left(\delta \sin \alpha + \frac{\eta}{2} \cos \alpha\right) \\
M_{dK_1} &= -M_{dro} \\
M_{dru} &= -M_{dro} \\
M_{dK_4} &= +M_{dro}
\end{aligned}\right. \\
M_{dlo} &= M_{dK_3} = +\frac{24\,E\,J_{dm} \cos^2 \alpha}{a^2} (\delta - \gamma) \sin \alpha \\
M_{dlu} &= M_{dK_2} = -\frac{24\,E\,J_{dm} \cos^2 \alpha}{a^2} (\delta - \gamma) \sin \alpha
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Les moments aux extrémités des barres dans le panneau de droite ont des valeurs qui correspondent aux valeurs des moments d'inertie dans le panneau m + 1; on obtient ainsi pour la charge symétrique due aux moments, dans les couples de noeuds m, m — 1 et m + 1, les valeurs suivantes pour l'état $\eta = 1$, en faisant $\eta = 1$ dans a relation 39:

$$M_m = \frac{2\,E}{a^2} \left[3\,(J_{o\,(m+1)} - J_{om}) + 24\,J_{d\,(m+1)} \cos^2 \alpha \left(\delta' \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha\right) - 24\,J_{dm} \cos^2 \alpha \left(\delta \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha\right)\right] \quad (40)$$

$$M_{m-1} = -\frac{2\,E}{a^2} \left[3\,J_{om} + 24\,J_{dm} \cos^2 \alpha\,(\delta - \gamma) \sin \alpha\right] \quad (41)$$

$$M_{m+1} = \frac{2\,E}{a^2} \left[3\,J_{o\,(m+1)} + 24\,J_{d\,(m+1)} \cos^2 \alpha\,(\delta' - \gamma') \sin \alpha\right] \quad (42)$$

Si maintenant nous reportons dans la relation 36 ces valeurs de moments suivants les relations 40 à 42, à titre de termes indépendants, c'est-à-dire de

termes de charge, nous obtenons les angles de distorsion des noeuds, ψ_1 à ψ_7, qui se manifestent après remplacement des montants auxiliaires par des articulations. Pour différencier cet état de déformation de l'état $\eta_m = 1$ (fig. 25), nous le désignerons par état $\zeta_m = 1''$ (fig. 26).

Pour l'obtention de l'état $\zeta_4 = 1$, nous aurions ainsi à introduire les valeurs M_3, M_4 et M_5 suivant équations 40 à 42 dans les lignes horizontales 4, 3 et 5 de la relation schématisée 36, sous forme de termes indépendants. Ces états correspondent exactement à la déformation désignée par «état $\zeta_4 = 1$» dans l'étude ayant fait l'objet du renvoi 4 (fig. 4). Les efforts R_{mn} qui s'exercent sur les montants auxiliaires maintenant articulés, peuvent être obtenus comme suit:

On obtient d'abord, d'après la fig. 25, en posant m = 4 pour simplifier, comme surcharge des montants 3, 4 et 5:

Montant 4:

$$\underset{o}{R_{44}} = -(D_4 + D_5)\sin\alpha - \frac{6\,E\,(J_{o4} + J_{o5})}{a^2}\cdot\frac{1}{2\,a}$$
$$- \frac{48\,E\,J_4\cos^3\alpha}{a^2}\left(\delta_4\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)$$
$$- \frac{48\,E\,J_5\cos^3\alpha}{a^2}\left(\delta_5\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right).$$

Les valeurs D_4 et D_5 ci-dessus sont données par la relation 10 de l'étude déjà mentionneé; on a ainsi:

$$D_4 = +\frac{\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sin\alpha\cos^3\alpha\,F_{d4}}{2\,(\cos^3\alpha\,F_{d4} + F_{o4})}}{a}\cdot E\,J_{d4}\cos\alpha.$$

Montant 3:

$$\underset{o}{R_{34}} = -D_4\sin\alpha + \frac{6\,E\,J_{o4}}{a^2}\cdot\frac{1}{2\,a} + \frac{48\,E\,J_4\cos^3\alpha}{a^2}(\delta_4 - \gamma_4)\sin\alpha$$

Montant 5:

$$\underset{o}{R_{54}} = -D_5\sin\alpha + \frac{6\,E\,J_{o5}}{a^2}\cdot\frac{1}{2\,a} + \frac{48\,E\,J_5\cos^3\alpha}{a^2}(\delta_5 - \gamma_5)\sin\alpha$$

S'il existe au point 4 un montant élastique, la valeur de R_{o44} se trouve encore augmentée de la valeur de la tension de ce montant soit:

$$-1\,\frac{E\,F_v}{h}.$$

Il se manifeste toutefois encore sur ces montants d'autres charges par suite de la torsion suivant l'angle ψ; il suffit toutefois, dans tous les cas, de tenir compte de la charge des barres m — 1, m et m + 1, c'est-à-dire dans le cas qui nous occupe, de R_3, R_4 et R_5.

On a ainsi d'une manière générale:

$$R_m = \frac{6\,E}{a^2}\Big[J_{o\,(m+1)}(\psi_m + \psi_{m+1}) - J_{om}(\psi_{m-1} + \psi_m) \qquad (43)$$
$$+ 4\,J_{d\,(m+1)} - J_{dm})\cos^3\alpha\,\psi_m\Big]$$

donc:

$$\underset{4}{R_{44}} = \frac{6\,E}{a^2}\left[J_{o5}(\psi_4 + \psi_5) + J_{o4}(\psi_3 + \psi_4) + 4\,(J_{d5} - J_{d4})\cos^3\alpha\,\psi_4\right]$$

$$\underset{4}{R_{34}} = \frac{6\,E}{a^2}\left[J_{o4}(\psi_3 + \psi_4) + J_{o3}(\psi_2 + \psi_3) + 4\,(J_{d4} - J_{d3})\cos^3\alpha\,\psi_3\right]$$

$$\underset{4}{R_{54}} = \frac{6\,E}{a^2}\left[J_{o6}(\psi_5 + \psi_6) + J_{o5}(\psi_4 + \psi_5) + 4\,(J_{d6} - J_{d5})\cos^3\alpha\,\psi_5\right].$$

On a maintenant:

$$R_{44} = \underset{0}{R_{44}} + \underset{4}{R_{44}}$$

$$R_{34} = \underset{0}{R_{34}} + \underset{4}{R_{34}}$$

$$R_{54} = \underset{0}{R_{54}} + \underset{4}{R_{54}}$$

Nous obtenons ainsi, après élimination de très faibles charges, uniquement des valeurs de R dont les indices ne diffèrent pas entre eux de plus d'une unité.

Si maintenant nous appliquons à la poutre, aux points m_o et m_u, un couple de charges égales à l'unité (fig. 26), que nous devons naturellement ajouter à la charge nulle $\underset{o}{R_m}$, les déformations ζ provenant de ce couple de charges égales à l'unité sont données par la relation:

$$R_m = 0 = R_{m\,(m-1)}\,\zeta_{m-1} + R_{mm}\,\zeta_m + R_{m\,(m+1)}\,\zeta_{m+1} \tag{44}$$

On a donc dans le cas qui nous occupe, avec charges au points 4_o et 4_u:

	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5	ζ_6	ζ_7	
1	R_{11}	R_{12}						
2	R_{21}	R_{22}	R_{23}					
3		R_{32}	R_{33}	R_{34}				
4			R_{43}	R_{44}	R_{45}			1
5				R_{54}	R_{55}	R_{56}		
6					R_{65}	R_{66}	R_{67}	
7						R_{76}	R_{77}	

(44 a)

Le système d'équations (44) est à nouveau un système de relations de la forme de *Clapeyron*. En introduisant successivement la valeur indépendante + 1 dans les lignes horizontales 1 à 7, ce système donne les valeurs de ζ résultant de la mise en charge des couples de points 1 à 7 par les couples de charges égales à l'unité.

Les sept courbes de flexion ainsi obtenues pour la membrure en charge (membrure inférieure) constituent les lignes d'influence pour les sept valeurs ζ_1 à ζ_7. Comme à chacune de ces valeurs de ζ et suivant fig. 26, correspondent des grandeurs nettement déterminées pour les contraintes axiales des barres

et les moments d'extrémité dans les barres des panneaux voisins (nous pouvons à ce sujet nous limiter aux deux panneaux immédiatement contigus, à droite et à gauche, à la valeur de ζ considérée), on obtient pour tous les efforts dans un panneau m des lignes d'influence additionnelles dont les ordonnées sont fournies par la relation:

$$\eta_m = \mu_{m-1}\,\zeta_{m-1} + \mu_m\,\zeta_m \tag{45}$$

Ces lignes d'influence complémentaires doivent être ajoutées aux lignes d'influence déterminées d'après la fig. 11 et déjà corrigées par l'intervention des courbes de flexion obtenues d'après la fig. 23C; nous obtenons ainsi les courbes d'influence définitives pour toutes les valeurs d'efforts.

Une remarque est encore à faire ici au sujet des lignes d'influence déterminées sur la base des déformations des fig. 19 à 21. On a obtenu, ainsi que l'on sait, non seulement la charge antisymétrique du noeud de membrure supérieure et inférieure, mais encore une charge symétrique additionnelle ne provoquant pas immédiatement une déformation des noeuds chargés, tant que les montants auxiliaires articulés existent. L'angle de torsion ψ mis en jeu par cette charge symétrique, suivant la relation 36, provoque toutefois la mise en jeu d'efforts sur les montants auxiliaires articulés, suivant la relation 43, efforts qui introduits dans le système d'équations 44 sous forme de termes indépendants, donnent les valeurs pour ζ_1 à ζ_7. Les courbes de flexion qui en résultent pour la membrure en charge sont encore à ajouter aux lignes d'influence déjà considérées. Par contre, une charge antisymétrique due à des moments et qui produit l'angle de torsion φ a pour résultat un fléchissement de l'ensemble de la poutre, suivant fig. 25, mais il n'en résulte aucune charge sur les montants, donc aucun écartement.

5° — *Rectification des lignes d'influence dans le cas de la poutre dissymétrique.*

Nous avions dans ce qui précède déterminé les lignes d'influence du système principal en faisant intervenir différentes sections ou moments d'inertie de la membrure supérieure et de la membrure inférieure; au cours de l'étude de ces lignes d'influence, nous n'avons toutefois pas envisagé le cas de la poutre dissymétrique et notre étude a porté, dans chaque cas, sur la membrure éloignée du tablier; c'est dans ces hypothèses que nous avons déterminé la courbe de flexion de la membrure de tablier, en la considérant comme ligne d'influence.

Si, dans la fig. 27, la courbe en traits discontinus représente la ligne d'influence du système principal, qui a été déterminée en tenant compte de la dissymétrie et si la courbe en pointillé représente la ligne d'influence définitive obtenue sans tenir compte de la dissymétrie, nous pourrons ainsi déterminer l'écart entre les moments d'inertie J_t de la poutre réelle es J_s de la poutre supposée symétrique.

Supposons maintenant que l'on fléchisse une poutre ayant un moment d'inertie $J_t - J_s$ et accusant par suite tendance à épouser la courbe de flexion du système principal, de manière à l'amener à la position de la courbe en pointillé. Il en résultera pour cette courbe de flexion de membrure la tendance à un retour à la position initiale de la courbe de flexion du système principal. Si l'on désigne par η_o les ordonnées de la ligne d'influence du système principal, par η_s celles

du système symétrique et par η celles du système définitif, on aura sensiblement pour les ordonnées exactes:

$$\eta = \eta_o + (\eta_s - \eta_o) \frac{J_s}{J_t} \tag{46}$$

Comme la différence entre J_s et J_t sera toujours très faible, il en résulte que l'erreur commise dans l'hypothèse de la symétrie sera en général toujours faible, de telle sorte que l'on peut parfaitement admettre la rectification suivant la méthode d'approximation ci-dessus indiquée.

6° — *Résumé synoptique du procédé.*

1° — Détermination des lignes d'influence du système principal pour les efforts suivant fig. 11 des lignes d'influence, résultant de l'application de la déformation égale à l'unité sous l'influence des efforts correspondants.

2° — Détermination des charges sous forme de moments que cette déformation provoque aux endroits des noeuds et groupement de ces charges en moments antisymétriques et moments symétriques sur les noeuds des membrures supérieure et inférieure (équations 26 à 28 et 30 à 32).

3° — Représentation des différents (7) états $\varphi_m = 1$ et $\psi_m = 1$ (fig. 23—24).

4° — Détermination des coefficients M_{mn} à partir de ces différents états (équations 23 à 25 et 33 à 35).

5° — Etablissement des systèmes d'équations de *Clapeyron* 29a et 36 à partir des termes de charges indépendants déterminés suivant le paragraphe 2 ci-dessus et des coefficients déterminés d'après le paragraphe 4 ci-dessus pour les termes non indépendants.

6° — Résolution de ces systèmes d'équations, d'où l'on déduit les angles de torsion aux noeuds φ_m et ψ_m. On obtient ainsi également, suivant fig. 23c, les courbes de flexion de la membrure en charge qui correspondent à chacun des angles φ_m trouvés, qui sont à superposer aux lignes d'influence déterminées suivant la fig. 11, tandis que les angles symétriques de torsion ψ_m ne provoquent aucune déformation des noeuds de la membrure en charge.

7° — Représentation des différents états «$\eta_m = 1$» (fig. 25); détermination des charges de moments, qui ne sont ici que symétriques, qui en résultent pour les noeuds; introduction de ces valeurs, à titre de termes indépendants, dans le système d'équations 36; résolution de ce système, ce qui permet d'obtenir tous les angles de torsion aux noeuds ψ_m pour chacun des différents états $\eta_m = 1$ et ainsi les états $\zeta_m = 1$.

8° — Détermination des charges sur les montants auxiliaires qui résultent des différents états $\zeta_m = 1$.

9° — Application de couples de charges particuliers aux différents noeuds m, à titre de charges de base du système.

10° — Etablissement du système d'équations 44 pour les différents couples de charges particuliers, en utilisant les termes indépendants déterminés d'après les paragraphes 8 et 9 ci-dessus et les coefficients des termes non indépendants.

11° — Par résolution des 7 systèmes d'équations 44, on obtient les déformations qui correspondent aux différents couples de charges, après la suppression des montants auxiliaires et par suite les lignes d'influence pour ζ_1 à ζ_7.

12° — Toutes les valeurs des efforts sont représentées, pour chaque panneau, comme fonctions linéaires des deux valeurs de ζ qui englobent le panneau considéré et leurs lignes d'influences complémentaires sont établies à partir des lignes d'influence de ces deux valeurs de ζ.

13° — En ce qui concerne les lignes d'influence des moments aux extrémités des barres, dont les déformations donnent également les charges symétriques aux noeuds, sont également déterminées, d'après les relations 44; les valeurs de ζ correspondantes et les fractions de ζ relatives au fléchissement de la membrure en charge sont superposées aux lignes d'influence déjà déterminées.

14° — Dans les poutres dissymétriques, la relation (46) permet d'apporter des corrections aux lignes d'influence précédemment établies (fig. 27).

Résumé.

Après une introduction sur les caractéristiques de la poutre en treillis rhomboïdal et sur l'influence remarquable de la rigidité des membrures dans ces poutres, l'auteur étudie fondamentalement le difficile problème consistant à traiter la poutre en treillis rhomboïdal comme système porteur constitué par des barres assemblées d'une manière rigide, en n'utilisant que trois systèmes très simples d'équations de la forme de *Clapeyron;* il importe d'ailleurs d'observer que dans tous les cas, seuls les termes indépendants varient, mais non pas les coefficients des termes non indépendants de ces systèmes d'équations.

Leere Seite
Blank page
Page vide