

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 2 (1936)

**Artikel:** Dimensionnement des âmes renforcées horizontalement dans les  
poutres à âme pleine

**Autor:** Chwalla, E.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2967>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## V5

Dimensionnement des âmes renforcées horizontalement dans les poutres à âme pleine.

Die Bemessung der wagerecht ausgesteiften Stegbleche vollwandiger Träger.

Design of Horizontally Stiffened Web Plates of Plated Girders.

Dr. Ing. E. Chwalla,

Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn.

### I. Introduction.

Nous étudions l'âme dans un des champs du milieu d'une poutre à âme pleine (fig. 1a) dont la surcharge est supportée par l'ossature du tablier et le poids propre est remplacé, d'après la méthode usuelle, par un système de forces concentrées agissant aux points d'aboutissement des entretoises. L'effort tranchant  $Q$  a alors dans le champ  $a$  une valeur constante et le moment de flexion  $M$  croît linéairement à partir de la valeur de gauche  $M_1$  pour atteindre à droite la valeur  $M_r = M_1 + Q \cdot a$ .

La section de la poutre, dans la travée considérée, se compose des deux sections des membrures  $F_{Go}$  et  $F_{Gu}$  et de la section de l'âme  $F_{St} = 1 \cdot h$  (fig. 1b). Elle a le moment d'inertie  $J_o$  par rapport à l'axe principal de flexion; les contraintes maximales de flexion aux fibres extérieures de l'âme sont  $\max \sigma = M_r v_2 / J_o$  et les contraintes minimales  $\min \sigma = -M_r v_1 / J_o$ . Des forces horizontales de cisaillement sont transmises des membrures à l'âme, ces éléments étant assemblés soit par des rivures soit par des soudures; dans le champ considéré, nous répartissons ces forces uniformément le long de la soudure; l'intensité de cette répartition a alors la valeur  $\tau_o \cdot t = Q \cdot S_{Go} / J_o$  et  $\tau_u \cdot t = Q \cdot S_{Gu} / J_o$  où  $S_{Go}$  et  $S_{Gu}$  désignent les moments statiques des sections des membrures  $F_{Go}$  et  $F_{Gu}$  par rapport à l'axe neutre des contraintes de flexion. La répartition des contraintes de cisaillement  $\tau$  sur la hauteur de l'âme  $h$  est dans toutes les sections du champ la même (fig. 1b).  $\tau$  atteint son maximum dans l'axe de la poutre;  $\tau_{\max} = c \cdot Q / t \cdot h$ , où  $c$  est donné par l'expression

$$c = \frac{h}{J_o} \left( S_{Go} + \frac{t v_1^2}{2} \right), \text{ c varie entre 1,00 et 1,50.}^1$$

Si nous voulons éviter une plastification locale de l'âme sous une charge donnée, et si nous nous basons pour cette étude sur l'hypothèse de la plasticité

<sup>1</sup> E. Chwalla: Der Bauingenieur, 17<sup>e</sup> année, 1936, p. 81.

et celle de la constance de l'énergie de déformation, il nous faut alors calculer la contrainte fictive maximale dite de comparaison  $\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$  qui se produit dans le champ examiné, et dimensionner l'âme de telle manière que  $\sigma_v$  ne dépasse pas la limite apparente d'élasticité  $\sigma_F$  de l'acier de construction utilisé. Si les contraintes de flexion sont grandes par rapport à celles de cisaillement, la contrainte de comparaison — répartie suivant la courbe de la fig. 1b — atteint alors son maximum aux lignes de rivets ou aux cordons de soudure. Si toutefois les contraintes de flexion sont petites par rapport à celles de cisaillement,

$$\sigma_{v_{\max}} = \max \tau \cdot \sqrt{3} = c \sqrt{3} \cdot \frac{Q}{t \cdot h}.$$

Dans le cas d'une surcharge mobile (poutres de ponts et ponts roulants) la contrainte de comparaison maximale correspondant à un élément examiné de l'âme dépend de la position de la charge roulante. La ligne d'influence de la valeur  $\sigma_v^2 = (\sigma^2 + 3\tau^2)$  que l'on obtient à partir des lignes d'influence connues de  $M_r$  et  $Q$  permet de déterminer la position la plus défavorable de la surcharge.

La question de la *stabilité* a une importance fondamentale quant au dimensionnement de l'âme. En outre il faut éviter des plastifications locales et des

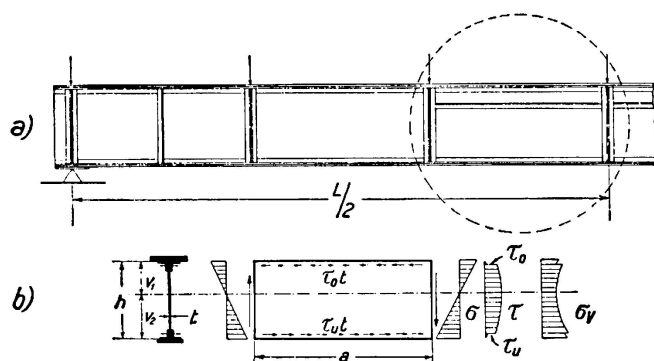


Fig. 1.

La sollicitation d'une âme dans un panneau median de poutre.

pressions inadmissibles contre les parois des trous de rivets reliant les cornières à l'âme (cette dernière condition peut être écartée dans les champs du milieu, car les efforts de cisaillement y sont relativement petits. Afin d'éviter la répétition de trop grandes fatigues dans la poutre, ou dans ses assemblages rivés ou soudés, il faut pouvoir exclure avec certitude un gondolement de l'âme sous l'effet de la charge utile. Nous ne pouvons déterminer théoriquement la limite de stabilité qu'en idéalisant l'âme dans de grandes proportions quant à ses propriétés géométriques et mécaniques, son mode d'appui et sa surcharge; nous sommes ainsi obligés d'introduire dans le calcul un coefficient de sécurité au gondolement  $v_b$  qui tienne compte de la différence inévitable entre l'hypothèse et la réalité. Ce coefficient de sécurité au gondolement se rapporte aux contraintes brutes (composantes des contraintes sans tenir compte de l'amoindrissement de la section par les trous de rivets). Lorsque l'exécution est soignée, on peut évidemment le choisir de telle manière qu'il soit inférieur au coefficient moyen de sécurité au flambage  $v_k$  de barres comprimées, car la résistance de tôles appuyées sur leur pourtour dépasse de beaucoup la limite de stabilité, par suite du fort allongement

du plan médian dont dépend le gondolement. Afin d'élever la limite de stabilité, on renforce l'âme soit par des éléments raidisseurs verticaux, horizontaux ou obliques soit encore par un système entrecroisé de ces éléments. Dans les champs situés près des appuis, où les contraintes de cisaillement sont relativement grandes, on appliquera de préférence des raidisseurs verticaux (en ce qui concerne la théorie de la stabilité de l'âme dans ces champs, voir le mémoire mentionné dans la note<sup>1</sup>); dans les champs du milieu, des raidisseurs horizontaux, situés du côté comprimé se montrent selon les circonstances fort utiles. Les épaisseurs des tôles et les raidisseurs des poutres à âme pleine de grande portée construites ou projetées ces dernières années ont été donnés clairement par Karner<sup>2</sup> dans un tableau récapitulatif; en ce qui concerne la littérature très riche au sujet de la théorie de la stabilité des tôles minces nous renvoyons le lecteur aux mémoires cités aux notes <sup>1</sup>, <sup>4</sup> et <sup>5</sup>.

## II. L'idéalisation du panneau d'âme pour l'étude de la stabilité.

Nous nous basons sur un panneau d'âme avec épaisseur constante  $t$ , possédant une surface parfaitement plane et constitué d'un matériau homogène isotrope.

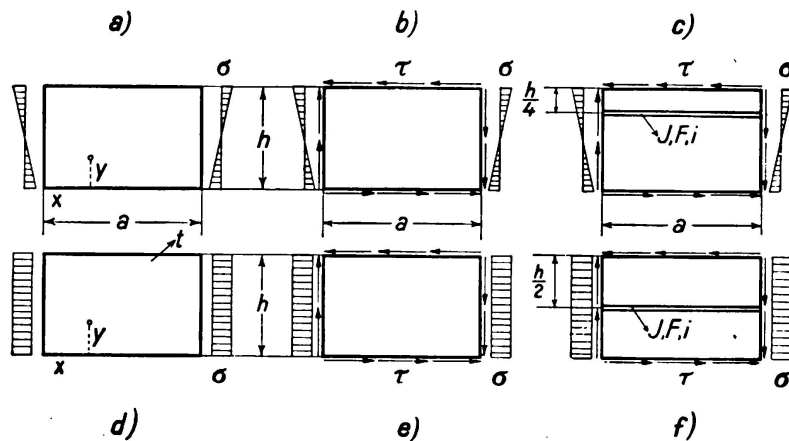


Fig. 2.

Différents cas de la surcharge idéalisée d'une plaque.

Nous décomposons le moment de flexion agissant sur l'âme variable linéairement à l'intérieur du panneau de longueur  $a$  par un moment de flexion constant et nous substituons aux efforts de cisaillement différemment grands suivant les circonstances agissant sur les membrures supérieure et inférieure les forces de cisaillement  $\tau \cdot t$  également grandes des deux côtés, que nous voulons supposer agissant directement sur les deux bords longitudinaux du panneau d'âme. L'axe neutre du moment de flexion se trouve donc à la demi-hauteur et le panneau d'âme est sollicité à la flexion pure et au cisaillement pur (fig. 2b), où  $\sigma$  et  $\tau$  sont à calculer sans tenir compte de l'affaiblissement dû aux trous de rivets. La plus grande contrainte de comparaison  $\max \sigma_v$  à l'intérieur du panneau étudié doit se trouver, sous la charge critique cherchée, au-dessous des limites de pro-

<sup>2</sup> L. Karner: Mémoires de l'Association internationale des Ponts et Charpentes, 1<sup>er</sup> vol. 1932, p. 297.

portionnalité et d'élasticité de l'acier employé, de telle manière que le changement de stabilité s'opère encore à l'intérieur du domaine de *Hooke*. La stabilité du panneau d'âme se monte donc à

$$D = \frac{E t^3}{12 (1 - \mu^2)} \quad (1)$$

où  $\mu$  représente le rapport du raccourcissement transversal à l'allongement longitudinal; pour  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$  et  $\mu = 0,3$  on a  $D = 192,3 \cdot t^3$  en tcm.

Aux bords  $x = 0$  et  $x = a$  nous supposons que le panneau d'âme est maintenu latéralement par les raidisseurs verticaux, mais peut cependant subir librement une rotation car la rigidité à la torsion des raidisseurs verticaux est relativement petite et parce que l'âme voisine ne peut produire aucun encastrement important (car elle se trouve elle-même sous la charge considérée aux environs de sa propre limite de stabilité). D'ailleurs l'influence d'un encastrement du côté le plus petit n'a pratiquement pas d'importance, ainsi que l'a montré *Schleicher*,<sup>3</sup> dans les plaques dont le rapport des côtés  $a/h$  est grand.

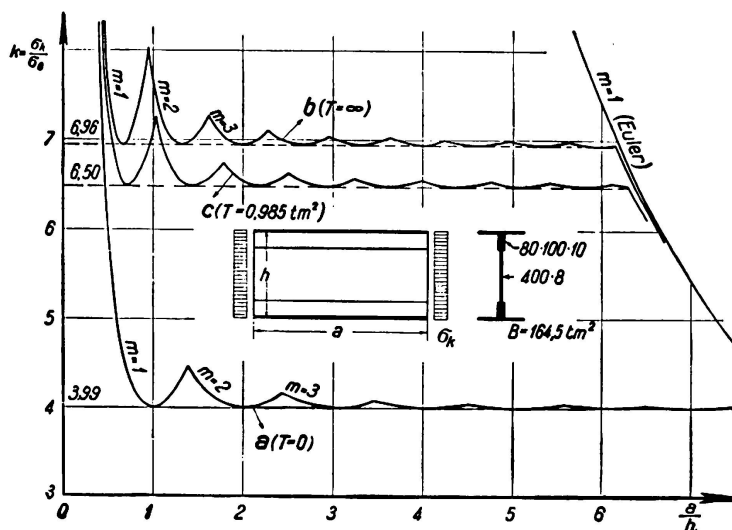


Fig. 3.

Le gondolement de plaques comprimées, raidies par des cornières (barres de compression totale).

Aux bords  $y = 0$  et  $y = h$  le panneau d'âme est maintenu par les membrures rigides à la flexion et à la torsion. Pour mettre au clair l'influence qu'un tel genre d'appui a sur la grandeur de la résistance au gondolement, l'auteur a étudié la stabilité d'une plaque rectangulaire uniformément comprimée ayant deux cornières rigides à la flexion et à la torsion sur les bords.<sup>4</sup> On a constaté qu'à l'intérieur du domaine de *Hooke* la rigidité latérale à la flexion  $B$  des membrures est toujours suffisamment grande pour agir pratiquement comme un soutien latéral du bord de la plaque ( $B = \infty$ ). Nous pouvons observer cela sur les fig. 3 et 4, sur lesquelles (comme d'ailleurs aussi sur les fig. 5 et 6) nous avons reporté

<sup>3</sup> F. Schleicher: Mitteilungen aus den Forschungsanstalten des Gutehoffnungshütte-Konzerns, 1<sup>er</sup> vol., fasc. 8, Nürnberg 1931.

<sup>4</sup> E. Chwalla: Ingenieur-Archiv, 5<sup>e</sup> vol. 1934, p. 54.

sur l'axe des abscisses le rapport des côtés  $a/h$  de la plaque et sur l'axe des ordonnées le chiffre de gondolement  $k$  qui est le rapport de la contrainte de compression critique à la grandeur de référence

$$\sigma_0 = \frac{\pi^2 D}{h^2 t} \quad (2)$$

(contrainte de flambage de *Euler* d'une bande de plaque de largeur «un» et de longueur  $h$  qui se monte pour  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$  et  $\mu = 0,3$  à  $\sigma_e = 1898 \text{ (t/h)}^2$  en  $\text{t/cm}^2$ ). Les courbes «a», «b» et «c» de la fig. 3, qui se rapportent au cas d'une membrure avec une rigidité latérale à la flexion relativement petite ( $B = 164,5 \text{ tm}^2$ ), ne se trouvent que très peu au-dessous des courbes correspondantes de la fig. 4, qui se rapportent au cas limite  $B = \infty$ . La rigidité à la

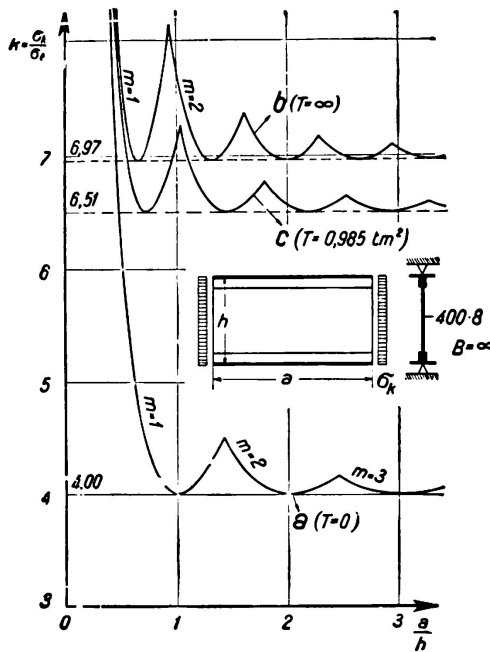


Fig. 4.

Le gondolement de plaque reposant sur leur pourtour et raidies par des cornières.

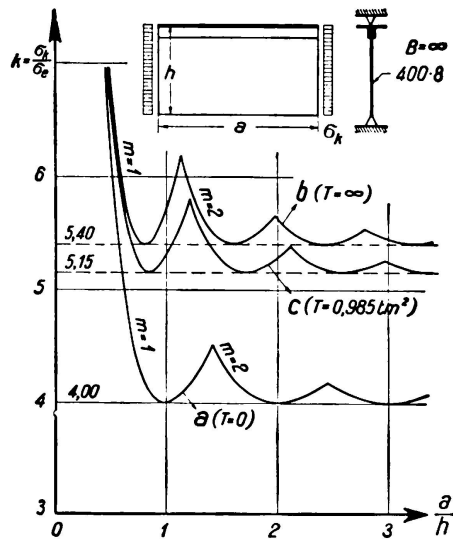


Fig. 5.

Le gondolement de plaque reposant sur leur pourtour et raidies par une seule cornière.

torsion  $T$  des membrures est aussi en général suffisamment grande pour provoquer à l'intérieur du domaine de *Hooke* un encastrement relativement fort. Nous constatons cela sur les fig. 3, 4 et 5 dans lesquelles les courbes «c» se rapportent au cas d'une membrure avec une rigidité à la torsion relativement petite ( $T = 0,985 \text{ tm}^2$ ) et qui malgré cela ne sont que peu en dessous des courbes «b» qui appartiennent au cas limite d'une rigidité à la torsion infiniment grande  $T = \infty$ . Cette forte influence d'encastrement des membrures avec rigidité à la torsion relativement faible est à attribuer à la longueur relativement petite des demi-ondes sinusoïdales qui se produisent lors du gondolement de l'âme (aux fig. 3, 4, 5 et 6  $m$  désigne le nombre de ces demi-ondes). A ces gondolements qui se suivent dans le sens longitudinal de l'âme gondolée correspond un angle de torsion alternativement positif et négatif, de telle sorte que les mem-

brures doivent se tordre lors du gondolement de l'âme à l'intérieur des points de torsion nuls qui se suivent, alternativement d'un et de l'autre côté.

L'influence que prend un encastrement, à l'intérieur du domaine de *Hooke*, sur la limite de stabilité d'une plaque est cependant beaucoup plus petite que l'influence que peut prendre un encastrement sur une barre comprimée à la charge de flambage de *Euler*. Ainsi que nous pouvons le déterminer dans les fig. 3, 4 ou 5 par comparaison des courbes «a» (appui sans encastrement des bords de la plaque) et «b» (encastrement total des bords longitudinaux), on obtient pour une sollicitation à la compression ou à la flexion, même dans le cas idéal d'un encastrement complet et d'une validité illimitée de la loi de *Hooke*, un relèvement moyen de la limite de stabilité de 1,7 fois; une valeur moyenne identique s'obtient aussi dans le cas d'une charge de pur cisaillement.<sup>5</sup> Pratiquement, le relèvement de la résistance au gondolement, que l'on peut obtenir par l'encastrement de

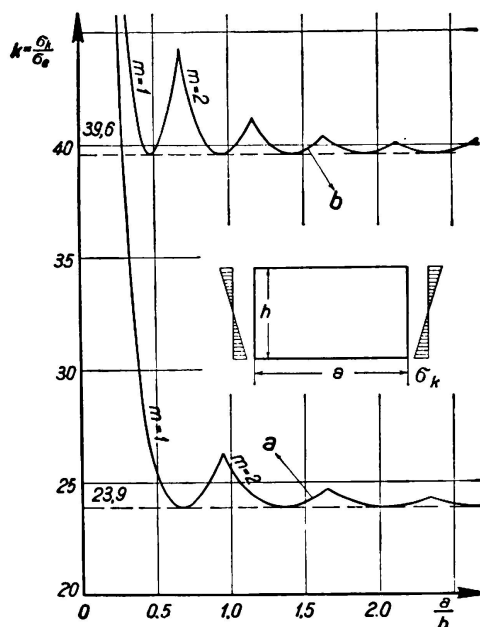


Fig. 6.

Le gondolement des plaques sollicitées à la flexion dans leur plan.

l'âme, est beaucoup plus faible car  $v_1$  fois la charge utile est déterminant pour l'étude de la stabilité et les rapports qui se produisent sous cette charge sont en général très éloignés du cas idéal. On peut par conséquent recommander d'admettre pour l'étude de la stabilité de l'âme des bords longitudinaux maintenus latéralement *mais appuyés de telle sorte qu'une rotation soit toujours possible*. Comme hauteur de l'âme il faut introduire dans le calcul non pas une hauteur idéale (déterminée par la distance respective des axes de torsion des deux membrures) mais la hauteur effective et, dans les poutres rivées, souvent aussi la hauteur mesurée entre les lignes de rivets.

Si maintenant on étudie la stabilité élastique d'une plaque rectangulaire appuyée sur ses quatre bords sans encastrement dans le cas d'une sollicitation à la pure flexion (fig. 2a), la solution donnée par *Timoshenko*<sup>6</sup> et représentée à la fig. 6 par la courbe «a» est valable. Sur l'axe des abscisses nous avons

<sup>5</sup> cf. le résumé de O. S. Heck et H. Ebner: Luftfahrtforschung, 11<sup>e</sup> vol., 1935, p. 211.

<sup>6</sup> S. Timoshenko: Der Eisenbau, 12<sup>e</sup> année, 1921, p. 147.

reporté ici, comme nous l'avons déjà indiqué plus haut, le rapport des côtés  $a/h$  et sur l'axe des ordonnées le chiffre de gondolement  $k$  (qui est le rapport de la plus petite contrainte critique dans la fibre extrême  $\sigma_k$  à la grandeur de référence  $\sigma_e$  suivant l'éq. 2). La courbe représentée forme l'enveloppe inférieure d'un faisceau de courbes disposées d'après le paramètre  $m$  (qui est le nombre des demi-ondes sinusoïdales qui se forment dans la direction longitudinale). La valeur minima de la contrainte critique dans la fibre extrême se monte à  $\min \sigma_k = 23,9 \cdot \sigma_e$  et est atteinte dans les plaques avec rapport des côtés  $a/h = 0,667 \cdot m$ ;  $m = 1, 2, 3 \dots$ . Pour une plaque carrée dont la contrainte critique dans la fibre extrême a la grandeur  $\sigma_k = 25,54 \cdot \sigma_e$ , le cas  $m = 2$  est déterminant. La surface ondulée correspondant à cette limite de stabilité est représentée à la fig. 7 sous forme d'un plan avec courbes de niveau. Les cotes inscrites à côté des différentes courbes de niveau représentent des rapports et sont à imaginer infiniment petits à la limite de stabilité. Au point  $x = a/2$  il se forme une « ligne de noeuds » sur laquelle sont placés tous les points de la surface moyenne de la plaque qui ne subissent aucun fléchissement latéral lors de l'ondulation.

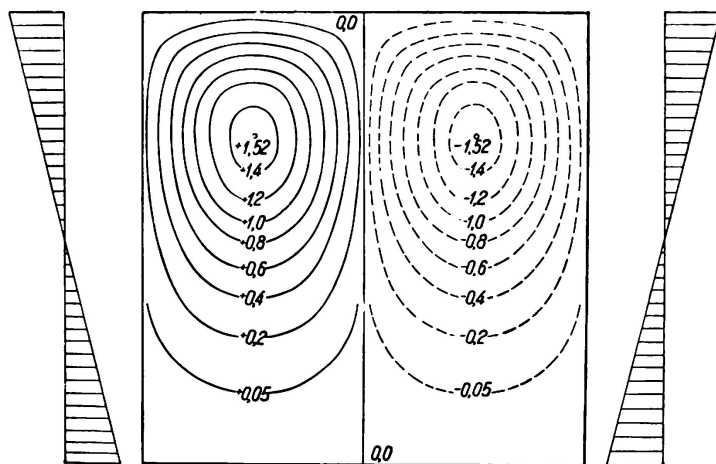


Fig. 7.

Surface d'ondulation d'une plaque carrée sollicitée à la flexion.

La courbe «b» de la fig. 6 se rapporte au cas d'un encastrement rigide des bords longitudinaux, cas qui fut résolu par *Noelke*.<sup>7</sup> Le chiffre de gondolement  $k$  et le nombre des demi-ondes  $m$  sont ici plus grands qu'auparavant; la valeur minima de la contrainte critique dans la fibre extrême se monte à  $\min \sigma_k = 39,6 \cdot \sigma_e$  et est atteint dans une plaque avec le rapports des côtés  $a/h = 0,475 \cdot m$ ;  $m = 1, 2, 3 \dots$

Les courbes solutions de la fig. 6 permettent de voir que les raidisseurs verticaux ne représentent même dans ce cas aucun moyen approprié pour le relèvement de la limite de stabilité. Lorsque ils sont assez rigides pour engendrer à leur point d'application une « ligne de noeuds » verticale. *Timoshenko*<sup>6</sup> et d'autres spécialistes<sup>8</sup> ont proposé de relever la résistance au gondolement des âmes qui

<sup>7</sup> K. Nölke: Der Bauingenieur, 17<sup>e</sup> année, 1936, p. 111.

<sup>8</sup> cf. F. Schleicher: Der Bauingenieur, 15<sup>e</sup> année, 1934, p. 505; — F. Wansleben: Der Stahlbau, 8<sup>e</sup> année, 1935, p. 110; „Stahlbau-Kalender 1936“, Editions W. Ernst & Sohn, Berlin, p. 380 et d'autres encore.

sont principalement sollicitées à la flexion à l'aide de raidisseurs horizontaux disposés du côté de la compression par flexion. Comme ces raidisseurs sont assemblés à l'âme par rivetage ou soudage, ils supportent à peu près la même contrainte de compression que celle qui agit dans l'âme à l'endroit du raidisseur. Lors du dimensionnement du raidisseur nous devons tenir compte dans le calcul de cette contrainte de compression qui influence beaucoup le mode d'agir du raidisseur. Par contre, on ne peut conseiller la considération du raidisseur longitudinal dans la détermination de la *rigidité à la flexion de la poutre* (dans le calcul de  $J_0$ ), que dans les cas où le raidisseur longitudinal ne présente aucune interruption à l'endroit des raidisseurs verticaux.

On peut disposer le raidisseur d'un ou des deux côtés de l'âme. Lorsque l'on ne dispose un raidisseur que d'un côté de l'âme, il faut remplacer, lors du gondolement, la rigidité à la flexion du raidisseur supposé indépendant de la plaque par un raidisseur idéal qui est constitué par le raidisseur placé d'un côté de l'âme et une bande de l'âme d'une largeur déterminée. La détermination de la largeur de cette bande de tôle qui collabore se trouve dans le cadre d'un problème connu d'élastostatique.<sup>9</sup> Lorsque le raidisseur n'est pas chargé axialement (par exemple dans les plaques raidies sous une charge de cisaillement pur ou dans les plaques raidies verticalement avec répartition horizontale linéaire de la compression), il existe aussi dans les plaques avec raidisseur placé d'un seul côté une limite de stabilité avec «un point d'embranchement». Lorsque cependant le raidisseur est chargé axialement il ne faut admettre directement la question de l'existence de limites de stabilité avec «point d'embranchement» que dans les cas où le raidisseur est disposé des deux côtés de la tôle, de telle sorte que son axe se trouve dans le plan médian de la tôle.

### III° *La stabilité des plaques rectangulaires raidies verticalement, sollicitées à la flexion dans leur plan.*

Nous étudions une plaque rectangulaire de longueur  $a$  et de hauteur  $h$ , appuyée sans encastrement sur les quatre côtés (conditions aux appuis de *Navier*) et sollicitée dans son plan à la flexion pure. La plaque est renforcée par un raidisseur horizontal qui se trouve à la distance  $0,25 h$  du bord soumis à la compression et qui doit être disposé de chaque côté de la plaque de façon que son axe se trouve dans le plan médian de la plaque (fig. 2 c avec  $\tau = 0$ ). Désignons par  $F$  la section des raidisseurs, par  $EJ$  la rigidité perpendiculaire au plan de la plaque lors du fléchissement et  $i = \sqrt{J/F}$  le rayon d'inertie de la section; afin de pouvoir calculer avec des valeurs relatives, nous rapportons ces constantes à des constantes correspondantes de la plaque et nous obtenons les grandeurs auxiliaires

$$\delta = \frac{F}{th}, \quad \gamma = \frac{EJ}{Dh}, \quad \frac{i}{t} = \sqrt{\frac{\gamma}{12(1 - \mu^2)}} \quad (3)$$

L'auteur a étudié la stabilité de cette plaque en se basant sur le critère de l'énergie<sup>10</sup> et il a obtenu pour  $a/h = 0,8$ ,  $F = 0,12 \cdot th$  la solution représentée à la fig. 8 (courbes tracées épaisses).

<sup>9</sup> cf. E. Chwalla: Der Stahlbau, 9<sup>e</sup> année, 1936, p. 73.

<sup>10</sup> E. Chwalla: Der Stahlbau, 9<sup>e</sup> année, 1936.

La courbe montre comment la contrainte de flexion  $\sigma_k$  dans la fibre extrême croît à la limite la plus basse de la stabilité lorsque la résistance à la flexion des raidisseurs croît, pour une section des raidisseurs restant constante; sur l'axe des abscisses nous avons porté le rapport du rayon d'inertie  $i$  des raidisseurs à l'épaisseur  $t$  de la tôle et sur l'axe des ordonnées le coefficient de gondolement  $k$  (rapport de la contrainte critique  $\sigma_k$  dans la fibre extrême à la grandeur de référence  $\sigma_e$  d'après l'éq.[2]).

La partie de courbe (I) est disposée pour chaque état d'équilibre critique dans lequel la plaque commence à se gondoler en une seule ondulation (cf. fig. 9) et lorsque donc les raidisseurs ont un fléchissement sinusoïdal. Si  $i/t$  est accidentellement égal  $(i/t)_0 = 0,847$ , on obtient un cas particulier caractérisé par le fait que les raidisseurs supposés indépendants de la plaque se trouvent à l'état critique à leur limite de flambage d'Euler (le nombre des demi-vagues  $m = 1$ ) et par le fait que le gondolement de la plaque est influencé favorablement ou dé-

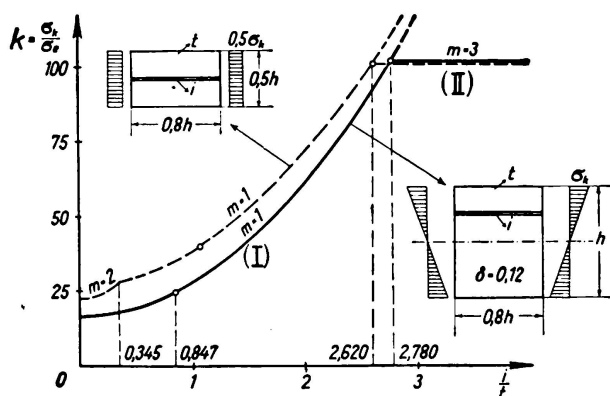


Fig. 8.

La contrainte de gondolement en fonction de la rigidité du raidisseur horizontal.

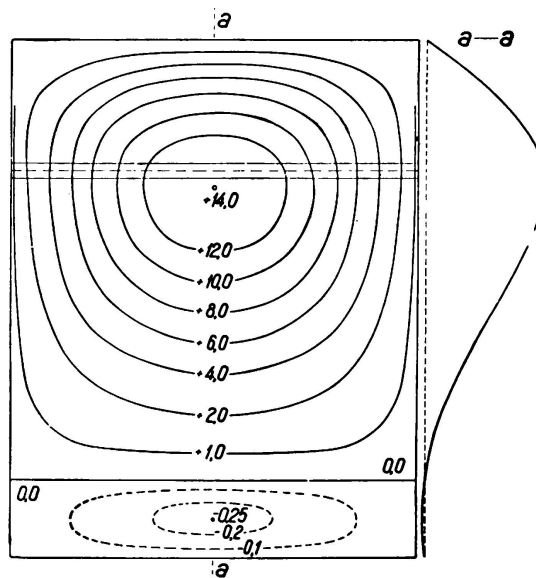


Fig. 9.

Surface d'ondulation d'une plaque raidie horizontalement et sollicitée à la flexion: forme d'ondulation I.

favorablement; la contrainte dans la fibre extrême de la plaque se monte à  $\sigma_k = k \cdot \sigma_e = 24,47 \cdot \sigma_e$ , de telle sorte que la contrainte de compression qui revient aux raidisseurs à l'état critique de l'équilibre  $0,5 \cdot \sigma_k = 12,24 \cdot \sigma_e$  et qui, ainsi qu'on peut facilement s'en convaincre, concorde avec la contrainte de flambage d'Euler des raidisseurs supposés isolés. Comme la plaque étudiée se gondolerait aussi à l'état non raidi, en demi-ondulations  $m = 1$  si l'on tient compte du faible rapport des côtés, le chiffre de gondolement que nous avons trouvé dans notre cas spécial  $k = 24,47$  est identique au chiffre de gondolement valable pour la plaque non raidie (théorie de Timoshenko<sup>6</sup>). La plaque raidie possède ici la même résistance au gondolement que la plaque non raidie.

Si l'on choisit la section des raidisseurs pour une surface de section donnée  $F = 0,12 th$  de telle sorte que le rapport  $i/t > 0,847$ , la plaque doit s'appuyer

aux raidisseurs; la résistance au gondolement de la plaque acquiert le relèvement déterminé par la courbe (I). Si par contre on choisit la forme de la section des raidisseurs de telle sorte que  $i/t < 0,847$  (répartition des raidisseurs en une série de semelles plates qui sont appliquées des deux côtés de la tôle) les *raidisseurs comprimés s'appuient à la plaque*; dans le cas limite  $i/t = 0$ , la limite de la stabilité de la plaque serait réduite à  $\sigma_k = 16,385 \cdot \sigma_c$  et par conséquent 33 % plus bas que la limite de stabilité de la plaque non raidie.

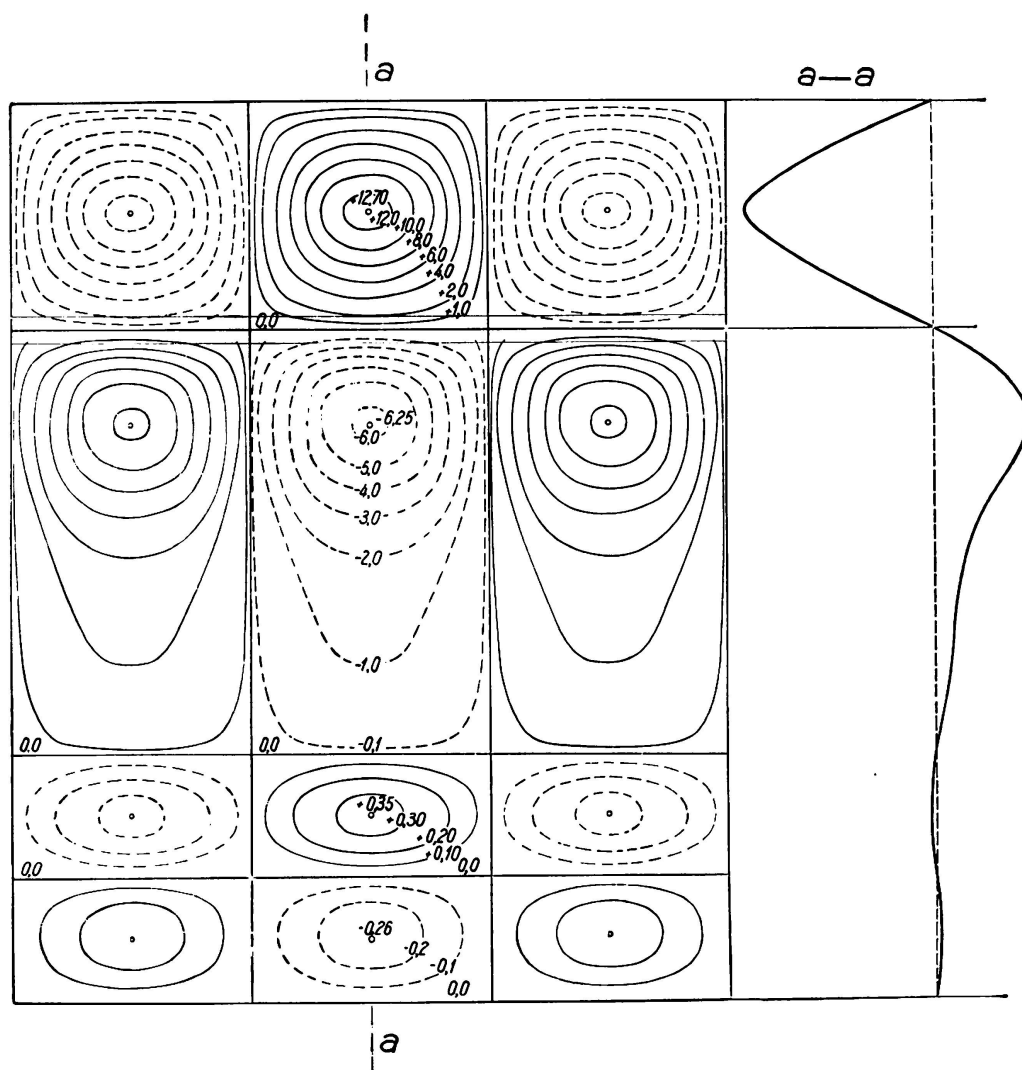


Fig. 10.

Surface d'ondulation d'une plaque raidie horizontalement et sollicitée à la flexion:  
forme d'ondulation II.

Si  $i/t$  croît fortement pour  $F = 0,12$  th maintenu constant, on atteint un cas limite dans lequel *deux différentes formes de voussure existent* et la plaque a par conséquent la possibilité de se gondoler, *sous la même charge critique*, dans l'une ou dans l'autre forme de voussure. La forme de voussure (I) dont nous avons déjà parlé présente en coupe longitudinale une allure sinusoïdale (fig. 9), de telle sorte que le raidisseur se courbe en une demi-ondulation sinusoïdale lors du gondolement; l'énergie potentielle accumulée dans la plaque gondolée se compose

avec l'énergie accumulée dans la plaque et les raidisseurs pliés. La forme de voussure (II) se décompose en une série de petits gondollements et est ainsi caractérisée par le fait qu'à l'endroit du raidisseur il existe une « ligne de noeuds » horizontale de telle sorte que le raidisseur ne présente à la limite de stabilité aucun fléchissement latéral (fig. 10); l'énergie potentielle accumulée dans la plaque gondolée n'est constituée ici que par l'énergie accumulée dans la plaque arquée, cependant l'apport de cette énergie est relativement très grand. Le cas limite dans lequel les deux formes de voussure sont énergétiquement équivalentes, de telle sorte que les deux formes peuvent se produire également sous la même charge critique, est atteint dans la plaque étudiée ( $a/h = 0,8$ ,  $F = 0,12$  th, cf. fig. 8) pour  $i/t = (i/t)_{I,II} = 2,780$ ,  $k = 101,85$ . Les deux formes de voussure correspondant à cette limite de stabilité sont représentées aux fig. 9 et 10 sous forme de courbes de niveau. Les cotes inscrites à côté des différentes lignes de niveau ne doivent être considérées que comme des valeurs relatives et les valeurs absolues de l'ondulation sont à considérer à la limite de stabilité comme infiniment petites. À côté des deux plans avec courbes de niveau nous avons représenté la section a-a de la surface ondulée.

La valeur spéciale  $(i/t)_{I,II}$  dépend en général du rapport des côtés de la plaque et de la grandeur auxiliaire  $\delta = F/th$ ; ainsi que nous le montrerons dans l'étude d'un cas de charge semblable (fig. 15) cette valeur est liée à un maximum  $\max (i/t)_{I,II}$  qui peut être déterminé pour une valeur donnée  $\delta$ . Si nous exécutons le raidisseur horizontal d'une façon rigide telle que  $i/t = \max (i/t)_{I,II}$ , la plaque avec rapport des côtés d'une grandeur quelconque prendra certainement à l'état critique de l'équilibre la forme de voussure II, pour laquelle le raidisseur ne présente aucun fléchissement latéral.

Le chiffre de gondollement correspondant à la forme de voussure (II) se monte à  $k = 101,85$  et il est 4,16 fois plus grand que le chiffre de gondollement d'une plaque non raidie. Le nombre des demi-ondes sinusoïdales qui se produisent dans la direction longitudinale est  $m = 3$  (cf. fig. 10), mais la résistance au gondollement dans le cas où  $m = 4$  ne serait qu'à peine plus grand ( $k = 103,49$ ). Comme la forme de voussure (II) présente à l'endroit du raidisseur une « ligne de noeuds » horizontale le chiffre de gondollement  $k = 101,85$  est indépendant de la rigidité à la flexion  $EJ$  du raidisseur et par le fait même aussi de la valeur  $i/t$ ; chaque raidisseur pour lequel  $i/t \geq (i/t)_{I,II}$  engendre cette « ligne de noeuds » horizontale dans la surface ondulée et agit ainsi comme un raidisseur « infiniment rigide. »

Notre étude, nous tenons à le faire remarquer expressément, ne se rapporte qu'à la limite de la stabilité élastique, donc seulement à la possibilité de formes d'équilibre *infiniment peu* gondolées. La question de savoir comment se développe la forme de voussure sous une charge *hypercritique*, c'est-à-dire les contraintes de flexion dans les fibres extrêmes  $\sigma > \sigma_k$  ne peut être résolue au moyen de nos théories linéaires de stabilité. Des ondulations avec flèche infiniment grande sont liées à des déplacements infiniment grands des bords dans la direction du plan primitif de la plaque (donc perpendiculairement à la ligne de bord primitive) de telle façon que la solution du problème dépendra avant tout de la possibilité et de la grandeur de ces déplacements dans le cas étudié (le « retrait » des lignes de bord). Ces considérations ont une certaine importance non seule-

ment pour la détermination de la signification pratique de la forme de vous-sure II et de l'état limite  $i/t = (i/t)_{I,II}$  mais aussi pour la comparaison des résultats déduits de la théorie linéaire de stabilité avec les résultats obtenus expérimentalement.

#### IV° *L'influence des contraintes additionnelles de cisaillement sur la limite de stabilité.*

L'âme d'une poutre à âme pleine n'est pas seulement sollicitée par des contraintes de flexion mais aussi par des contraintes de cisaillement qui peuvent avoir une influence sensible sur la position de la limite de stabilité et sur la forme de la surface ondulée. Il existe ici une combinaison «la plus défavorable» des valeurs  $\sigma$  et  $\tau$ , qui correspond à la limite la plus basse de stabilité et qui ne peut être en général déterminée que par une voie indirecte. Pratiquement on fait en sorte de tenir compte de deux positions de charge seulement (celle pour laquelle le moment de flexion est maximum et celle pour laquelle l'effort tranchant est maximum dans la travée étudiée).

Le problème de la stabilité des plaques rectangulaires sollicitées dans leur plan à la flexion pure et au cisaillement pur (fig. 2b) a été résolu pour le cas d'un appui sans encastrement des bords de la plaque par *Timoshenko*<sup>11</sup> et *Stein*.<sup>11</sup> Nous pouvons représenter cette solution d'une manière plus expressive en calculant outre les deux valeurs  $\sigma_k$  et  $\tau_k$  qui correspondent à la limite de stabilité les contraintes de gondolement  $\sigma_{k0}$  et  $\tau_{k0}$  qui sont valables pour la plaque étudiée lorsque cette plaque est sollicitée *exclusivement* à la flexion pure et *exclusivement* au cisaillement pur. Les rapports  $\sigma_k/\sigma_{k0}$  et  $\tau_k/\tau_{k0}$  déterminent donc les coordonnées d'un point de la courbe  $\sigma_k/\sigma_{k0} = \Phi(\tau_k/\tau_{k0})$  qui appartient au paramètre  $a/h$  et qui détermine la solution du problème de stabilité pour toutes les combinaisons des grandeurs  $\sigma$  et  $\tau$ . Comme un changement du signe du moment de flexion ou de la force de cisaillement n'a vraisemblablement aucune influence sur la limite de stabilité, cette courbe est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées et coupe ces axes de coordonnées à angle droit au point  $\sigma_k/\sigma_{k0} = 1,00$  et  $\tau_k/\tau_{k0} = 1,00$ .

A la fig. 11 nous avons représenté de cette façon la solution trouvée par *Timoshenko* pour le cas où  $a/h = 0,50$  et  $1,00$ . Les courbes obtenues pour les différents rapports des côtés peuvent être approximativement remplacées dans les applications pratiques par un cercle de rayon «un.» Nous n'avons donc à calculer pour le dimensionnement de l'âme que les contraintes brutes  $v_b \sigma$ ,  $v_b \tau$  sous  $v_b$  fois la charge utile, ainsi que les contraintes imaginaires de gondolement  $\sigma_{k0}$  et  $\tau_{k0}$ . Si le point qui est déterminé par les coordonnées  $v_b \sigma/\sigma_{k0}$ ,  $v_b \tau/\tau_{k0}$  se trouve sur l'arc de cercle ou au-dessous de l'arc de cercle dans la fig. 11, c'est-à-dire si  $v_b \sigma/\sigma_{k0} \leq \sqrt{1 - (v_b \tau/\tau_{k0})^2}$ , la sécurité au gondolement désirée est assurée pour des valeurs  $a/h$  de grandeur quelconque. Comme approximation de la courbe nous pouvons employer un polygone à trois côtés au lieu de l'arc de cercle; nous devons maintenant choisir  $v_b \cdot \sigma$  et  $v_b \cdot \tau$  de telle sorte que trois inégalités déterminées correspondant aux trois côtés du polygone soient satisfaites.

<sup>11</sup> S. *Timoshenko*: Miscell. Papers pres. Amer. Soc. Mech. Engr.-Meetings 1933, Paper Nr. 3 et Engineering 138, 1934, p. 207; O. *Stein*: Der Stahlbau, 7<sup>e</sup> année 1934, p. 57.

Lorsque l'âme est renforcée dans le domaine des contraintes de compression par un raidisseur horizontal (fig. 2c), les valeurs de référence  $\sigma_{ko}$  (que nous pouvons déterminer à l'aide de la théorie exposée au chapitre III) ainsi que  $\tau_{ko}$  (qui peut être déterminé au moyen de la solution établie par *Timoshenko*<sup>6</sup>) sont beaucoup plus grandes qu'avant. La courbe  $\sigma_k/\sigma_{ko} = \Phi(\tau_k/\tau_{ko})$  que nous obtenons maintenant rencontre comme auparavant les axes de coordonnées aux points  $\sigma_k/\sigma_{ko} = 1,00$  et  $\tau_k/\tau_{ko} = 1,00$  mais ne coupe plus l'axe des abscisses sous un angle droit, car la limite de stabilité, en tenant compte du raidisseur disposé du côté de la compression seulement, ne dépend plus du signe du moment de flexion.

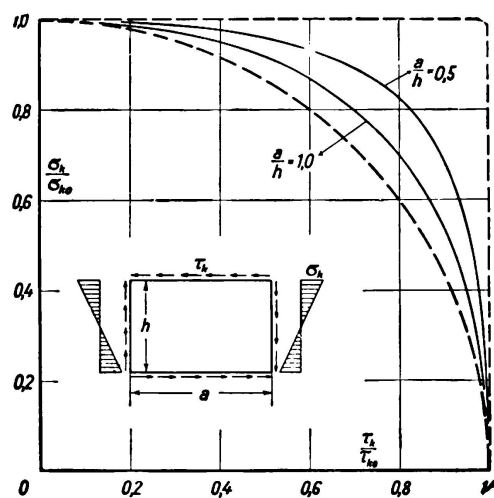


Fig. 11.

Dépendance réciproque des contraintes de gondolement pour la sollicitation à la flexion et au cisaillement

#### V° La stabilité des plaques rectangulaires comprimées uniformément et sollicitées en outre au cisaillement.

Nous étudions une plaque rectangulaire avec rapport des côtés  $a/h$ , appuyée des quatre côtés sans encastrement et sollicitée par des contraintes normales  $\sigma$  réparties uniformément sur la hauteur  $h$  ainsi que par des contraintes de cisaillement  $\tau$  uniformément réparties (fig. 2 e). Le problème de stabilité de cette plaque fut résolu d'une façon approximative par *Wagner*<sup>12</sup> et *Wansleben*<sup>8</sup>, en admettant une bande infiniment longue et il fut étudié par l'auteur<sup>10</sup> pour des plaques dont le rapport des côtés est quelconque. De même que dans le chapitre IV nous pouvons représenter la solution trouvée d'une façon plus explicite en calculant à part les valeurs  $\sigma_k$  et  $\tau_k$  qui appartiennent à la limite de stabilité trouvée, les contraintes imaginaires de gondolement  $\sigma_{ko}$  et  $\tau_{ko}$  qui seraient valables pour la plaque si cette dernière était sollicitée *exclusivement* à la compression pure et *exclusivement* au cisaillement pur. Les rapports  $\sigma_k/\sigma_{ko}$ ,  $\tau_k/\tau_{ko}$  déterminent les coordonnées d'un point de la courbe  $\sigma_k/\sigma_{ko} = \Psi(\tau_k/\tau_{ko})$  qui correspond au paramètre  $a/h$  et qui détermine la solution du problème de stabilité pour toutes les combinaisons des grandeurs  $\sigma$  et  $\tau$ . Comme un changement de signe de la force de cisaillement est sans influence sur la limite de stabilité, cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et coupe cette axe à angle droit au point  $\sigma_k/\sigma_{ko} = 1,00$ ; l'axe des abscisses est coupé sous un angle oblique à l'endroit  $\tau_k/\tau_{ko} = 1,00$ , car la limite de stabilité est

<sup>12</sup> H. Wagner: Jahrbuch d. wiss. Ges. f. Luftfahrt, 1928, S. 113.

modifiée par un changement de signe de la contrainte normale (transition du cas «compression et cisaillement» au cas «traction et cisaillement»).

Les surfaces ondulées qui se forment à la limite de la stabilité se composent d'une série de gondolements dans les plaques dont le rapport des côtés est grand, gondolements qui sont séparés par des «lignes de noeuds». Au contraire des résultats représentés aux fig. 3 à 10 qui se rapportent aux plaques avec contraintes normales réparties linéairement sur la hauteur  $h$ , il se forme dans les plaques avec sollicitation additionnelle au cisaillement des surfaces ondulées dont la coupe longitudinale n'est plus constituée d'une série continue de demi-ondes simples sinusoïdales et dont les «lignes de noeuds» ne sont plus droites. Afin de représenter cette différence, nous voulons désigner par  $m'$  le nombre des demi-ondes que l'on a sur la section longitudinale passant par le point du plus grand fléchissement latéral. La condition générale pour l'obtention des limites de la stabilité élastique se décompose comme dans le cas de la sollicitation au cisaillement pur en deux conditions de gondollement indépendantes l'une de l'autre dont l'une correspond aux surfaces ondulées avec  $m' = 1, 3, 5 \dots$  et l'autre aux surfaces ondulées avec  $m' = 2, 4, 6 \dots$ . Suivant le rapport des côtés de la plaque et la grandeur de la tension additionnelle de cisaillement, l'une ou l'autre conduit à la limite la plus basse de stabilité.

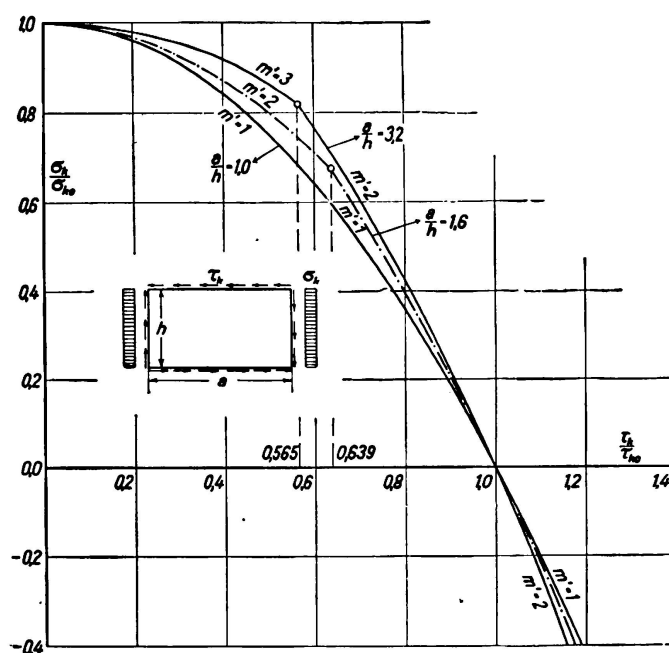


Fig. 12.

Dépendance réciproque des contraintes de gondolement pour la sollicitation à la compression simple et au cisaillement.

A la fig. 12 nous avons représenté la courbe solution  $\sigma_k/\sigma_{k0} = \Psi(\tau_k/\tau_{k0})$  pour des plaques rectangulaires dont le rapport des côtés  $a/h = 1,00; 1,60$  et  $3,20$ . Des plaques carrées se gondolent à la limite la plus basse de stabilité non seulement dans le cas du cisaillement pur ( $\tau_k/\tau_{k0} = 0$ ) mais aussi dans le cas de la compression et du cisaillement et dans le cas de la traction et du cisaillement suivant une surface ondulée avec une seule demi-onde, de telle sorte que la

courbe  $\sigma_k/\sigma_{k0} = \Psi(\tau_k/\tau_{k0})$  se compose ici d'une seule branche ( $m' = 1$ ). Dans les plaques dont le rapport des côtés  $a/h = 1,60$ , une surface ondulée avec deux demi-ondes est déterminante dans le cas de la compression pure ( $\tau_k/\tau_{k0} = 0$ ) et dans le cas de petites contraintes de cisaillement additionnelles ( $\tau < 0,639 \cdot \tau_{k0}$ ,  $\sigma > 0,672 \cdot \sigma_{k0}$ ) de telle façon que la courbe  $\sigma_k/\sigma_{k0} = \Psi(\tau_k/\tau_{k0})$  se compose de deux branches ( $m' = 1$  et  $m' = 2$ ). Les plaques ayant le rapport des côtés  $a/h = 3,20$  forment dans le cas de la compression pure ( $\tau_k/\tau_{k0} = 0$ ) ou dans le cas de petites contraintes de cisaillement additionnelles ( $\tau < 0,565 \cdot \tau_{k0}$ ,  $\sigma > 0,820 \cdot \sigma_{k0}$ ), une surface ondulée avec trois demi-ondes et dans le cas de grandes contraintes additionnelles de cisaillement ou dans le cas de traction et de cisaillement une surface ondulée avec deux demi-ondes dans la direction longitudinale, de telle sorte que la courbe est ici aussi composée de deux branches ( $m' = 2$  et  $m' = 3$ ).

Les courbes  $\sigma_k/\sigma_{k0} = \Psi(\tau_k/\tau_{k0})$  de la fig. 12 peuvent être remplacées approximativement par des paraboles dont l'éq. est  $\sigma_k/\sigma_{k0} = 1 - (\tau_k/\tau_{k0})^x$  lorsque nous nous limitons au domaine de contraintes  $-0,40 \leq (\sigma_k/\sigma_{k0}) \leq +1,00$  et lorsque nous excluons la décomposition des courbes en plusieurs branches. Une loi approximative de ce genre fut déjà proposée dans le cadre d'une étude de stabilité semblable (gondollement d'un tuyau à paroi mince soumis à une charge axiale et une sollicitation additionnelle de torsion)<sup>13</sup>. Pour  $x = 2$  nous obtenons une parabole quadratique qui couvre pratiquement tout-à-fait une courbe  $\sigma_k/\sigma_{k0} = \Psi(\tau_k/\tau_{k0})$  correspondant au paramètre  $a/h = 1,00$ . Au lieu de la parabole on peut employer comme approximation de la courbe solution un polygone à trois côtés; le principe de dimensionnement est alors déterminé par trois inégalités (correspondant aux trois côtés du polygone).

Lorsque  $a/h = 1,6$  et lorsque la contrainte de compression à la grandeur  $\sigma = 2,82 \cdot \sigma_e$ , le gondollement se produit quand la contrainte additionnelle de cisaillement atteint la valeur  $\tau = 4,47 \cdot \sigma_e$ ; comme les valeurs de référence sont ici  $\sigma_{k0} = 4,20 \cdot \sigma_e$  et  $\tau_{k0} = 7,00 \cdot \sigma_e$ ,  $\sigma_k/\sigma_{k0} = 0,672$  et  $\tau_k/\tau_{k0} = 0,639$  sont valables, de telle sorte que nous obtenons dans la fig. 12 le cas spécial dans lequel un gondollement est possible suivant deux surfaces ondulées différentes ( $m' = 1$  et  $m' = 2$ ) pour la même charge critique. Ces deux formes ondulées, qui ici sont énergétiquement équivalentes et qui peuvent se produire avec la même probabilité, sont représentées aux fig. 13a et 13b sous forme de plans avec courbes de niveau. Les cotes inscrites à côté des différentes courbes de niveau ne sont à considérer que comme des rapports et les valeurs absolues de l'ondulation sont à imaginer infiniment petites à la limite de stabilité.

#### VI° La stabilité des plaques rectangulaires uniformément comprimées, raidies horizontalement.

Nous étudions une plaque rectangulaire avec rapport des côtés  $a/h$ , sollicitée dans le sens longitudinal par des contraintes de compression uniformément réparties et renforcée à la demi-hauteur par un raidisseur longitudinal (fig. 2f avec  $\tau = 0$ ). Les raidisseurs sont disposés des deux côtés du plan de la plaque,

<sup>13</sup> F. J. Bridget, C. C. Jerome et A. B. Vosseller: Transactions Amer. Soc. Mech. Engr., 56, 1934, p. 569, APM 56—6.

de telle sorte que l'axe des raidisseurs se trouve dans le plan médian de la plaque; leur section est désignée par  $F$ , leur rigidité à la flexion (rapportée aux fléchissements perpendiculaires au plan de la plaque) par  $EJ$  et le rayon d'inertie de leur section par  $i = \sqrt{J/F}$ . L'étude de la stabilité de cette plaque, que nous devons à *Timoshenko*<sup>6</sup>, conduit, lorsque nous nous contentons d'une solution approchée (en pratique suffisamment exacte) et lorsque nous introduisons les grandeurs auxiliaires:

$$\delta = \frac{F}{t \cdot h}, \quad \gamma = \frac{EJ}{Dh}, \quad \frac{i}{t} = \sqrt{\frac{\gamma}{12(1-\mu^2)\delta}}, \quad k = \frac{\sigma_k}{\sigma_e}, \quad \sigma_e = \frac{\pi^2 D}{h^2 t}$$

$$\beta = \frac{a}{m h}, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (4)$$

à la condition de gondolement relativement simple:

$$(1 + 4\delta) \cdot (k\beta_1^2)^2 - (k\beta_1^2) \cdot \{4\gamma + (1 + 2\delta) \cdot [(1 + \beta_1^2)^2 + (1 + 9\beta_1^2)^2]\} + 2\gamma[(1 + \beta_1^2)^2 + (1 + 9\beta_1^2)^2] + (1 + \beta_1^2) \cdot (1 + 9\beta_1^2)^2 = 0 \quad (5)$$

Nous avons représenté à la fig. 14 la solution que nous obtenons pour le cas où  $\delta = 0,20$ , à l'aide de l'éq. 5, sous forme d'un faisceau de courbes disposées suivant le paramètre  $\gamma$  («lignes de bord»). Les surfaces ondulées, qui appar-

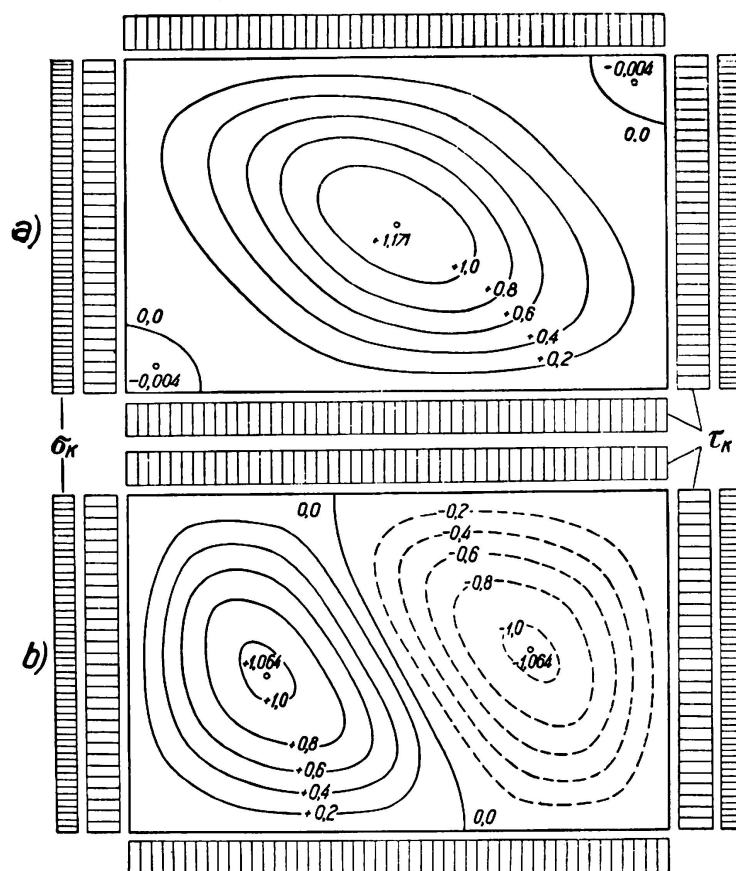


Fig. 13.

Surface d'ondulation d'une plaque sollicitée à la compression et au cisaillement.

tiennent à ces solutions et qui seront désignées dans la suite par « formes d'ondulation I » seront décomposées dans les plaques dont le rapport des côtés est grand par des « lignes de noeuds », en une série de gondolements individuels, avec coupe longitudinale sinusoïdale. Le nombre  $m$  de la demi-onde sinusoïdale, déterminant pour la limite inférieure de stabilité, est écrit à côté des différentes branches de courbes à la fig. 14.

La courbe la plus basse de la fig. 14 se rapporte au cas limite imaginaire  $\gamma = 0$  dans lequel la section du raidisseur a la surface  $F = 0,20 \cdot t/h$  et dont la forme de la section a été choisie défavorablement de telle sorte que la rigidité à la flexion  $EJ$  soit pratiquement nulle (paquet de semelles appliqué à plat sur la plaque). Le raidisseur soumis à la compression doit être soutenu par la plaque de façon que le chiffre de gondolement  $k$  devienne plus petit que pour une plaque non raidie (courbe « a » de la fig. 4). Par contre la section  $F = 0,20 t/h$  est conformée de manière que  $EJ$  et par le fait même aussi  $\gamma$  devienne grand;

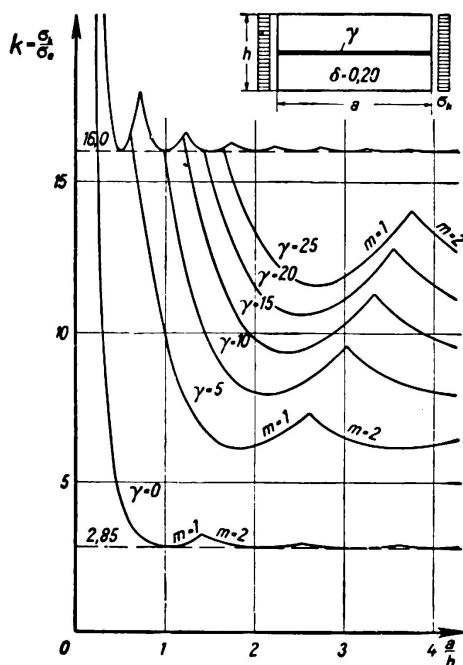


Fig. 14.

Le gondolement des plaques comprimées raidies horizontalement.

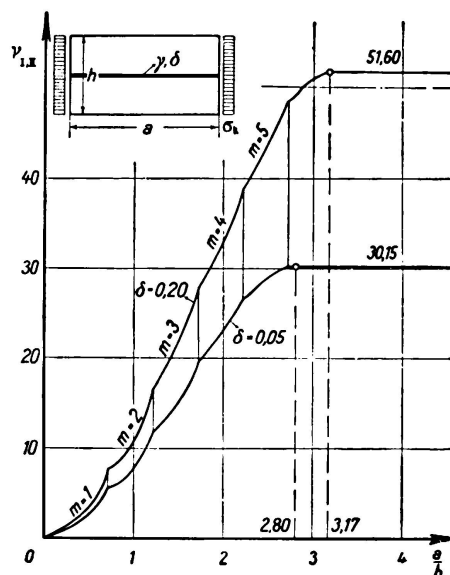


Fig. 15.

Relation entre la valeur limite du rapport de rigidité  $\gamma_{I, II}$  et du rapport des côtes de la plaque.

le raidisseur peut alors agir et soutenir la plaque à la limite de stabilité. De même qu'à la fig. 8 la résistance au gondolement ne peut pas croître ici d'une façon illimitée car il se produit pour tous les  $\gamma \geq \gamma_{I, II}$  « une forme d'ondulation (II) » à la limite inférieure de stabilité, forme caractérisée par une « ligne de noeuds » à l'endroit du raidisseur. Le raidisseur ne présente ainsi aucun fléchissement latéral de telle sorte que les chiffres de gondolement correspondant à la « forme d'ondulation (II) » sont indépendants de la grandeur  $\gamma$  et ne peuvent être relevés par la disposition d'un raidisseur « infiniment rigide ». La courbe solution correspondant à ce cas limite (courbe la plus haute dans la fig. 14) peut être déduite directement de la courbe « a » de la fig. 4, si nous observons que la

plaque donnée est décomposée par «la ligne de noeuds» horizontale en deux bandes de hauteur  $h/2$  identiquement sollicitées, dont la plus petite contrainte critique de compression se monte à  $\min \sigma_k = 4,00 \cdot \frac{4\pi^2 D}{h^2 t} = 16,00 \cdot \sigma_e$ .

La valeur limite  $\gamma_{I, II}$  dépend en général du rapport des côtés  $a/h$  et de la grandeur auxiliaire  $\delta = F/th$ ; elle est liée à une valeur maximale  $\max \gamma_{I, II}$  qui peut être déterminée pour une valeur donnée  $\delta$ . A la fig. 15 nous avons déterminé et représenté la valeur limite  $\gamma_{I, II}$  en fonction du rapport des côtés de la plaque pour le cas où  $\delta = 0,20$  et  $0,05$  à l'aide de la solution esquissée. La chute et le relèvement répétés de cette courbe, qui se produisent lorsque le premier point maximum est atteint, sont ici négligés. Les deux courbes sont composées des différentes branches correspondant au paramètre  $m$  inscrit (nombre des demi-ondes sinusoïdales de la forme d'ondulation II) et elles atteignent leurs valeurs maximales  $\max \gamma_{I, II} = 51,60$  et  $30,15$  aux endroits  $a/h = 3,17$  et  $2,80$ . Des raidisseurs avec une rigidité à la flexion  $EJ \geq (\max \gamma_{I, II}) \cdot Dh$  sont suffisamment rigides pour engendrer, même dans les plaques avec un rapport quelconque des côtés, la formation d'une surface ondulée avec une «ligne de noeuds» à l'endroit du raidisseur à la limite la plus basse de stabilité. Les courbes représentées à la fig. 15 peuvent sans difficulté être utilisées pour l'établissement de formules approximatives simples pour la valeur limite  $\gamma_{I, II}$  et pour la valeur maxima indépendante de  $\delta$ ,  $\max \gamma_{I, II}$ .

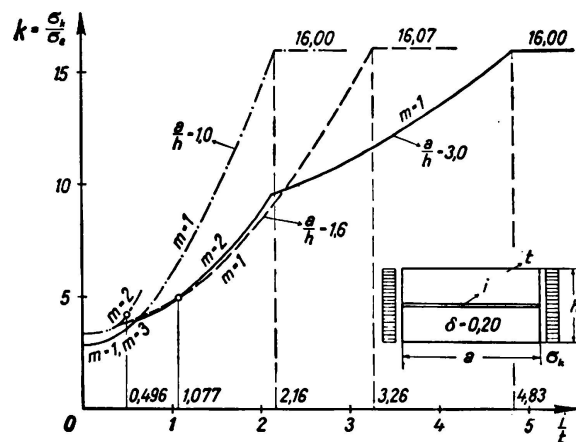


Fig. 16.

Relation entre le chiffre de gondolement  $k$  et le rapport de rigidité  $\frac{i}{t}$ .

A la fig. 16 nous avons montré la façon dont croît le chiffre de gondolement d'une plaque avec rapport des côtés donné ( $a/h = 1,00, 1,60$  et  $3,00$ ), lorsque le raidisseur possède la section  $F = 0,20 \cdot th$  et lorsque la section a une forme variable de telle sorte que le rapport  $i/t$  peut prendre des valeurs de différentes grandeurs. Dans le cas  $a/h = 1,00$ , la forme d'ondulation I engendre à la limite la plus basse de stabilité une seule demi-onde dans la direction longitudinale, de telle sorte que la courbe correspondant à ce cas dans le domaine  $0 \leq i/t \leq 2,16$  n'est composée que d'une seule branche dont l'ordonnée croît de  $k = 2,85$  à  $k = 16,00$ . La courbe pour le cas  $a/h = 1,60$  se compose dans le domaine  $0 \leq i/t \leq 3,26$  de deux branches car pour la petite valeur  $i/t$ , une forme d'ondulation avec demi-ondes  $m = 2$  est déterminante. Les ordonnées de cette courbe

croissent dans le domaine donné de  $k = 3,30$  à  $k = 16,07$ . Dans le cas  $a/h = 3,00$  la courbe est formée à l'intérieur du domaine  $0 \leq i/t \leq 4,83$  de trois branches, car à la limite inférieure de stabilité il se forme suivant la grandeur de  $i/t$  des surfaces ondulées avec  $m = 3$ ,  $m = 2$  ou  $m = 1$ ; les ordonnées des courbes croissent à l'intérieur du domaine indiqué de  $k = 2,85$  à  $k = 16,00$ .

VII° *La stabilité de la plaque rectangulaire raidie horizontalement, uniformément comprimée et sollicitée en outre au cisaillement.*

Si la plaque étudiée au chapitre VI est sollicitée non seulement par des contraintes normales uniformément réparties, mais en plus par des contraintes de cisaillement uniformément réparties (fig. 2 f), la section longitudinale de la surface d'ondulation correspondant à la limite de stabilité n'est pas seulement formée par des demi-ondes sinusoïdales et les lignes de neouds ne sont plus

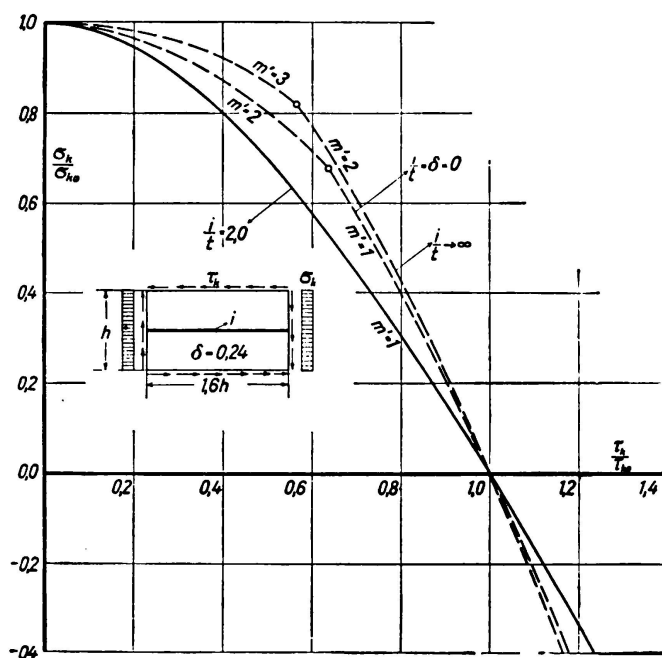


Fig. 17.

Dépendance réciproque des contraintes de retrait d'une plaque raidie pour une sollicitation à la compression simple et au cisaillement.

droites et ne sont plus perpendiculaires au bord de la plaque. De même que dans le cas de cisaillement pur et dans le cas de la combinaison de compression et de cisaillement des plaques *non raidies* (chapitre V), l'équation pour l'atteinte de la limite de stabilité se décompose en deux conditions de gondolement indépendantes l'une de l'autre, donc les surfaces d'ondulation possèdent un nombre non entier de demi-ondes,  $m'$ . Suivant la grandeur de  $a/h$ ,  $\delta$  et  $\gamma$ , l'une ou l'autre de ces conditions de gondolement est déterminante pour la formation de la limite la plus basse de stabilité. La solution peut être représentée sous forme des courbes  $\sigma_k/\sigma_{k0} = \Psi(\tau_k/\tau_{k0})$ . Cependant l'allure de ces courbes ne dépend pas seulement de  $a/h$  mais aussi de  $\delta$  et  $\gamma$ . Nous employons ici comme grandeurs de référence  $\sigma_{k0}$  et  $\tau_{k0}$  les contraintes de gondolement qui sont valables pour la plaque étudiée,

horizontalement raidie, dans le cas d'une surcharge *exclusive* de compression (cf. la solution esquissée au chapitre VI) et dans le cas une sollicitation *exclusive* au cisaillement (cf. la solution développée par *Timoshenko* <sup>6</sup>).

A la fig. 17 nous avons représenté la courbe  $\sigma_k/\sigma_{k0} = \Psi(\tau_k/\tau_{k0})$  pour une plaque avec rapport des côtés  $a/h = 1,60$  et renforcement horizontal de surface  $F = 0,24 \cdot th$  et avec  $i/t = 2,00$ . Les contraintes de gondolement  $\sigma_{k0}$  et  $\tau_{k0}$  ont ici la grandeur  $\sigma_{k0} = 8,83 \cdot \sigma_e$  et  $\tau_{k0} = 12,72 \cdot \sigma_e$  et le nombre des demi-ondes formé par la surface d'ondulation à la limite la plus basse de stabilité se monte dans tous les cas à  $m = 1$ . A titre de comparaison nous avons reporté aussi la courbe pour le cas de la plaque non raidie (courbe « $a/h' = 1,60$ » dans la fig. 12) ainsi que la courbe pour le cas limite dans lequel la rigidité à la flexion est suffisamment grande pour engendrer la formation de la forme d'ondulation II. Comme la plaque se décompose dans ce cas limite en deux bandes de hauteur  $h/2$  identiquement sollicitées, cette courbe concorde avec la courbe « $a/h = 3,20$ » de la fig. 12. Nous remarquons que la plaque étudiée ( $\delta = 0,24$ ,  $i/t = 2,00$ ) est plus «sensible» aux contraintes additionnelles de cisaillement qu'une plaque non raidie ( $\delta = 0$ ,  $i/t = 0$ ) ou une plaque très fortement raidie ( $\delta = 0,24$   $i/t \rightarrow \infty$ ) ce qui conduit à la production de surface d'ondulation par l'application du raidisseur choisi, par opposition à ce qu'on a dans les deux cas de comparaison et dans le cas imaginaire de la compression pure et du cisaillement pur, surfaces d'ondulation qui ont le même nombre de demi-ondes et qui présentent une allure semblable. Dans la comparaison des courbes de la fig. 17 est le jugement de la «sensibilité» que nous venons de décrire, il faut évidemment observer que dans la fig. 17 nous avons reporté comme coordonnées non pas des valeurs absolues  $\sigma_k$  et  $\tau_k$  mais les rapports  $\sigma_k/\sigma_{k0}$  et  $\tau_k/\tau_{k0}$  où les valeurs de référence  $\sigma_{k0}$ ,  $\tau_{k0}$  ont des valeurs de différentes grandeurs pour les trois courbes tracées et sont beaucoup plus grandes pour la plaque raidie que pour la plaque non raidie.

#### VIII° Le calcul approximatif de l'âme raidie horizontalement.

Etudions une plaque rectangulaire appuyée sur ses quatre côtés sans encastrement, sollicitée dans le sens longitudinal par des contraintes de compression réparties en forme de trapèze ou de triangle avec valeur maxima  $\sigma$ . Nous pouvons déterminer à la limite la plus basse de stabilité la contrainte critique qui se présente  $\sigma \equiv \sigma_k$  soit exactement (à l'aide du procédé de solution indiqué par *Timoshenko* <sup>6</sup> soit encore d'une façon approximative, en remplaçant la répartition irrégulière des contraintes de compression par des contraintes de compression uniformément réparties  $\sigma_m = \psi \cdot \sigma$ ,  $\psi < 1$  et en déterminant pour ce cas simple de surcharge la limite la plus basse de stabilité  $(\sigma_m)_k$ . La grandeur  $\bar{\sigma}_k = \frac{1}{\psi} (\sigma_m)_k$  n'est que peu différente, ainsi que la remarqué *Shizuo Ban* <sup>14</sup> de la valeur exacte  $\sigma_k$ . Ce résultat nous conduit à déterminer la contrainte critique  $\sigma_k$  dans la fibre extrême de la plaque rectangulaire sollicitée dans son plan à la flexion simple (fig. 2a) d'une façon approchée en se basant sur une «plaque de remplacement» que nous supposons prélevée sur le côté comprimé de la plaque originale et qui possède la hauteur  $h' = h/2$ . Nous remplaçons la contrainte

<sup>14</sup> *Shizuo Ban*: Mémoires de l'Association internat. des Ponts et Charpentes, III<sup>e</sup> vol 1935, p. 1.

de compression répartie en forme de triangle sur la plaque de remplacement avec la tension au bord  $\sigma$  par une contrainte de compression uniformément répartie  $\sigma' = 0,5 \cdot \sigma$  et nous voulons désigner par un prime toutes les grandeurs correspondant à la plaque de remplacement, afin de les distinguer des grandeurs appartenant à la plaque originale.

Afin de simplifier autant que possible l'étude approximative, nous supposons que la plaque de remplacement est appuyée sur ses quatre bords de la même façon que la plaque originale, nous devons donc réduire les grandeurs trouvées  $\bar{\sigma}_k = \sigma'_k / 0,5 = 2 \cdot \sigma'_k$  d'environ 30 % afin d'obtenir des valeurs approximatives utilisables pour la contrainte de flexion critique dans la fibre extrême  $\sigma_k$ . Cette réduction est nécessaire car nous considérons, dans le cadre du procédé approximatif, la ligne de bord *inférieure* de la plaque de remplacement comme fixée latéralement, tandis que les éléments de plaque situés sur cette ligne présentent, lors du gondolement de la plaque originale (cf. fig. 7), un fléchissement latéral relativement grand. Si les bords longitudinaux de la plaque originale sont appuyés sans encastrement nous obtenons, à l'aide de la plaque de remplacement, par exemple pour la plus petite contrainte critique dans la fibre extrême, le résultat  $\min \sigma'_k = 4,00 \cdot \sigma'_e = 16,00 \cdot \sigma_e$  (courbe «a» de la fig. 4),  $\bar{\sigma}_k = 32,00 \cdot \sigma_e$  et en introduisant la réduction dont nous avons parlé  $0,7 \cdot \bar{\sigma}_k = 22,4 \cdot \sigma_e$ , tandis que la solution exacte (courbe «a» de la fig. 6) se monte à  $\min. \sigma_k = 23,9 \cdot \sigma_e$ . Si les bords longitudinaux de la plaque originale sont totalement encastres, on obtient en se basant sur la plaque de remplacement  $\min. \sigma'_k = 6,97 \cdot \sigma'_e = 27,88 \cdot \sigma_e$  (courbe «b» de la fig. 4),  $\bar{\sigma}_k = 55,76 \cdot \sigma_e$  d'où  $0,7 \cdot \bar{\sigma}_k = 39,00 \cdot \sigma_e$ , tandis que la valeur exacte (courbe «b» de la fig. 6) est de  $\min. \sigma_k = 39,6 \cdot \sigma_e$ .

Si la plaque rectangulaire étudiée, sollicitée à la flexion simple dans son plan, est appuyée sans encastrement sur ses bords et est renforcée à l'endroit  $y = 0,75 \cdot h$  par un *raidisseur horizontal* dont l'axe se trouve dans le plan médian de la plaque (fig. 2c avec  $\tau = 0$ ), nous obtenons dans ce cas, dans le cadre de notre procédé approximatif, une plaque de remplacement avec la hauteur  $h' = 0,5 \cdot h$  renforcée en son milieu par un raidisseur horizontal centré. Notre nouvelle plaque est chargée par des contraintes de compression uniformément réparties  $\sigma' = 0,5 \cdot \sigma$  (fig. 2f avec  $\tau = 0$ ). Déterminons les contraintes de compression critiques les plus petites  $\sigma'_k$  de cette plaque de remplacement à l'aide de la théorie esquissée au chapitre VI, (c'est-à-dire à l'aide de la relation de gondolement simple, éq. 5) et réduisons de 10 à 20 % les grandeurs de calcul  $\bar{\sigma}_k = \sigma'_k / 0,5$  acquises de cette façon dans les cas pratiques qui se présentent, nous obtenons alors ici aussi des valeurs approximatives utilisables pour la contrainte critique de flexion  $\sigma_k$  dans la fibre extrême de la plaque originale. Si par exemple  $a/h = 0,8$ ;  $F = 0,12 \cdot th$  et  $i/t = 2,00$  nous obtenons alors pour la plaque de remplacement  $a'/h' = 1,60$ ;  $\delta' = 0,24$ ;  $\gamma' = 12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot \delta' \cdot (i/t)^2 = 10,84$  et de l'éq. 5 le chiffre de gondolement  $k' = 8,83$  de telle sorte que l'on obtient  $\sigma'_k = k' \cdot \sigma'_e = 4 \cdot k' \cdot \sigma_e = 35,32 \cdot \bar{\sigma}_e$  et  $\bar{\sigma}_k = 8 k' \cdot \sigma_e = 70,64 \cdot \sigma_e$ . Ces grandeurs de calcul doivent être réduites de 13,8 % afin de concorder avec la valeur exacte de la contrainte critique de flexion dans la fibre extrême  $\sigma_k = 60,86 \cdot \sigma_e$  (cf. chapitre III). A la fig. 8 nous avons représenté la courbe solution que nous avons obtenue de cette façon à l'aide de notre plaque de remplacement (ligne en traits). Pour de très petites valeurs  $i/t$ , une surface ondulée avec  $m = 2$  demi-

ondes est déterminante dans le cadre de cette solution approchée, de telle sorte que la courbe approximative est composée de deux branches. Dans le cas où  $m = 1$  on a par exemple pour  $i/t = 0; 0,847; 2,00; 2,78$  et  $3,00$  suivant la série  $k' = 3,34; 4,34; 8,83; 13,71$  et  $15,43$  tandis que dans le cas où  $m = 2$  pour  $i/t = 0; 0,2; 0,4$  et  $0,6$  on obtient en série  $k' = 2,82; 3,05; 3,72$  et  $4,83$ .

La contrainte critique de flexion dans la fibre extrême correspondant à la forme d'ondulation II et la valeur limite  $(i/t)_{I, II}$  définie dans le chapitre III peuvent être déterminées d'une façon approximative grâce au procédé esquissé. La « ligne de noeuds » horizontale que la forme d'ondulation II présente au point  $y = 0,75 \cdot h$ , décompose la plaque originale en deux plaques dont la supérieure a la hauteur  $h' = 0,25 \cdot h$  et est sollicitée par une contrainte de compression trapezoïdale avec la valeur moyenne  $\sigma' = 0,75 \cdot \sigma$ . Cette plaque supérieure que nous introduisons comme « plaque de remplacement » dépend à son bord inférieur de la plaque inférieure principalement sollicitée à la traction et elle acquiert un genre d'encastrement élastique. Nous voulons tenir compte d'une manière approchée de l'influence de cet encastrement élastique, en posant dans les calculs: une première fois un appui sans encastrement et une seconde fois un encastrement rigide du bord inférieur de la plaque de remplacement et prendre la moyenne arithmétique des deux chiffres de gondolement que nous avons obtenus ainsi. Supposons par exemple que la plaque originale possède le rapport des côtés  $a/h = 0,8$  et un raidisseur avec  $F = 0,12 \cdot th$  (fig. 8), nous obtenons d'après la solution exacte esquissée au chapitre III une forme d'ondulation suivant la fig. 10 avec  $m = 3$  demi-ondes dans la direction longitudinale et avec une contrainte critique de flexion dans la fibre extrême  $\sigma_k = 101,85 \cdot \sigma_e$ , cependant la résistance au gondolement de la plaque pour une ondulation avec  $m = 4$  demi-ondes ne serait pas beaucoup plus grande ( $\sigma_k = 103,49 \cdot \sigma_e$ ) que cette valeur minima. Pour la plaque de remplacement qui a le rapport des côtés  $a'/h' = 3,20$ , dans l'hypothèse de bords appuyés sans encastrement on a  $k' = 4,04$  et  $m = 3$  (cf. la courbe « a » de la fig. 4) de telle façon que nous obtenons  $\sigma'_k = k' \cdot \sigma'_e = 16 k' \cdot \sigma_e$  et  $\bar{\sigma}_k = (16/0,75) k' \cdot \sigma_e = 86,19 \cdot \sigma_e$ . Si nous admettons pour le bord inférieur de la plaque de remplacement un encastrement complet, on a  $k' = 5,41$  et  $m = 4$  (cf. la courbe « b » de la fig. 5) de telle sorte que l'on obtient  $\bar{\sigma}_k = (16/0,75) k' \cdot \sigma_e = 115,41 \cdot \sigma_e$ . La moyenne arithmétique des deux valeurs limites a la grandeur  $\bar{\sigma}_k = 100,80 \cdot \sigma_e$  et correspond à une forme d'ondulation avec  $m = 3 - 4$  demi-ondes dans la direction longitudinale, résultat qui concorde d'une façon satisfaisante avec la solution exacte indiquée précédemment. La branche II de la courbe solution déterminée par le chiffre de gondolement  $k = 100,80$ , représentée en petits traits à la fig. 8 coupe la branche I au point  $(i/t)_{I, II} = 2,62$ . Ce résultat approximatif concorde d'une façon pratiquement satisfaisante avec le résultat de la solution exacte  $(i/t)_{I, II} = 2,780$ .

L'influence des contraintes additionnelles de cisaillement peut être prise en considération d'une façon simple dans le cadre de notre procédé approximatif. Lorsqu'il n'existe aucun raidisseur (fig. 2b) nous pouvons évaluer l'influence qu'exercent les contraintes additionnelles de cisaillement sur la limite de stabilité, directement avec le procédé approximatif indiqué au chapitre IV (approximation des courbes solutions par un quart de cercle ou un polygone à trois

côtés). Lorsque la plaque originale est raidie horizontalement (fig. 2c), nous basons notre étude approximative sur une plaque de remplacement de hauteur  $h' = h/2$  (fig. 2f) et nous obtenons ainsi les courbes solutions esquissées au chapitre VII (fig. 17), qui peuvent être remplacées dans une première approximation par une parabole adaptée ou un polygone à trois côtés.

#### IX° Le gondolement dans le domaine «non-élastique».

Lorsque la plus grande contrainte locale de comparaison  $(\sigma_v)_k$ , qui existe à l'état critique de l'équilibre (calculée sans tenir compte de l'affaiblissement dû aux trous de rivets) est plus grande que la limite d'élasticité et de proportionnalité  $\sigma_P$  de l'acier employé (d'après les prescriptions allemandes sur le flambage la valeur  $\sigma_P = 2,073 \text{ t/cm}^2$  est valable aussi bien pour l'acier St 37 que pour l'acier St 52) les conditions de gondolement liées à la loi de *Hooke* perdent leur validité. Admettons que la quasi-isotropie de l'acier de construction est conservée aussi dans le domaine entre les limites d'élasticité et d'écoulement, nous devons remplacer seulement dans l'éq. 1 les quotients  $E/(1 - \mu^2)$  par une valeur  $T'$  qui est plus petite que  $E/(1 - \mu^2)$  et pour laquelle nous pouvons admettre par exemple qu'elle ne dépend exclusivement que de la contrainte locale de comparaison  $(\sigma_v)_k$  qui existe à l'état critique de l'équilibre. Si la plaque est sollicitée dans son plan à la flexion,  $(\sigma_v)_k$  et par le fait même aussi  $T'$  sont fonctions de l'endroit  $x, y$  (état de contrainte inhomogène), ce qui engendre de grandes difficultés pour la détermination théorique de la limite de stabilité. Si par contre nous déterminons la limite de stabilité dans le cadre de notre procédé approximatif, à l'aide de la plaque de remplacement uniformément comprimée et additionnellement sollicitée au cisaillement simple, nous obtenons un état de contrainte homogène et  $T'$  est indépendant du lieu  $x, y$ . La relation entre  $T'$  et la contrainte de comparaison  $(\sigma_v)_k$  qui existe à la limite de stabilité peut être déterminée par une loi approximative adéquate; il faut seulement remarquer que la condition de gondolement liée à la loi de *Hooke* est encore exactement valable pour  $(\sigma_v)_k = \sigma_P$  et la contrainte de gondolement pour  $(\sigma_v)_k$  est infiniment petite en tenant compte de la plastification commençante du matériau. On doit par conséquent avoir pour  $(\sigma_v)_k = \sigma_P$ ,  $T' = E/(1 - \mu^2)$  et pour  $(\sigma_v)_k = \sigma_F$ ,  $T' = 0$ .

La similitude de ces conditions limites avec les conditions limites desquelles dépend le module de flambage d'une barre comprimée en acier doux, nous conduit à l'idée de ramener la détermination de la contrainte critique de comparaison  $(\sigma_v)_k$  d'une plaque rectangulaire sollicitée d'une façon homogène et se gondolant dans le domaine «non-élastique», à la détermination d'une contrainte de flambage  $s_k$  (*Schleicher*<sup>15</sup>). Nous calculons la contrainte de flambage de la plaque étudiée en utilisant les conditions de gondolement indiquées au chapitre précédent, c'est-à-dire en supposant un matériau idéal qui obéisse d'une façon illimitée à la loi de la déformation de *Hooke* et nous obtenons ainsi

<sup>15</sup> F. Schleicher: Rapport final du 1<sup>er</sup> Congrès international Paris, 1932, p. 129 et Der Bauingenieur, 15<sup>e</sup> année, 1934, p. 505; cf. aussi E. Chwalla: Rapport de la II<sup>e</sup> Assemblée pour les ponts et les charpentes, Vienne, 1928, p. 321, ainsi que M. Roš et A. Eichinger: Rapport final du I<sup>er</sup> Congrès international à Paris, 1932, p. 144.

les contraintes idéales de gondolement  $\sigma_{k, id}$ ,  $\tau_{k, id}$  et nous calculons maintenant à l'aide de ces valeurs la contrainte critique idéale  $(\sigma_V)_{k, id}$  indépendante du point  $x$ ,  $y$ . Etudions maintenant une barre droite sur appuis articulés, centralement comprimée, qui est constituée du même acier doux que la plaque et choisissons pour le degré d'élanement de cette barre le « degré idéal d'élan-

cement »  $\lambda_{id} = \pi \sqrt{\frac{E}{(\sigma_V)_{k, id}}}$ ; la contrainte de flambage  $s_k$  de cette barre représente une valeur approximative pratiquement utilisable pour la contrainte critique de comparaison cherchée  $(\sigma_V)_k$ . En partant de  $(\sigma_V)_k$ , il est possible de calculer les composantes de la contrainte critique:  $\sigma_k$  et  $\tau_k$ . La contrainte de flambage  $s_k$  est déterminée sous forme de diagrammes en fonction du degré d'élanement  $\lambda$  et elle peut être prise directement sur ces diagrammes (officiellement prescrits pour les aciers de construction). Lorsque l'on a obtenu les grandeurs de calcul  $(\sigma_V)_{k, id} \leq \sigma_P$ , on peut trouver  $(\sigma_V)_k \equiv (\sigma_V)_{k, id}$  d'après ce procédé et d'autre part  $(\sigma_V)_{k, id}$  croît très fortement (ce qui par exemple pour une plaque sollicitée au cisaillement et additionnellement à la traction peut être illimité), alors  $(\sigma_V)_k$  se rapproche de plus en plus de la contrainte d'écoulement  $\sigma_F$  de l'acier doux employé. Comme le coefficient de sécurité au gondolement  $v_b$  est différent du coefficient de sécurité au flambage  $v_k$  nous ne pouvons pas prendre directement la contrainte de compression admissible (procédé- $\omega$ ) ni la valeur  $s_k$  dans les diagrammes officiels déterminés pour la contrainte de flambage. Si l'état de contrainte étudié est *inhomogène* nous pouvons introduire au lieu de la valeur  $(\sigma_V)_{k, id}$  indépendante du point  $x$ ,  $y$  la valeur maxima  $\max (\sigma_V)_{k, id}$  et nous obtenons ainsi des contraintes de gondolement qui sont en principe *plus grandes* que les vraies valeurs.

#### X° Le dimensionnement des raidisseurs horizontaux.

Les dimensions nécessaires du raidisseur horizontal seront déterminées par le résultat de la théorie exposée au chapitre III ou par l'étude approximative esquissée au chapitre VIII, de telle sorte que nous pouvons nous limiter dans la suite à quelques remarques *fondamentales*. La plaque appuyée sans encastrement sur ses bords et raidie horizontalement se gondole aussi bien sous une contrainte de compression uniformément répartie que suivant une surface ondulée dans le cas d'une sollicitation à la flexion simple, surface ondulée dont l'allure en coupe longitudinale est représentée par une ligne sinusoïdale simple composée de  $m$  demi-ondes. Si la forme d'ondulation I est déterminante à la limite de stabilité étudiée, le renforcement horizontal se gondolera aussi suivant une ligne sinusoïdale du même genre. Comme cette ligne sinusoïdale, ainsi qu'on le sait, représente la figure d'équilibre du raidisseur supposé détaché de la plaque sous une charge de compression centrée  $P = \frac{m^2 \pi^2 EJ}{a^2}$ , nous pouvons déterminer ce qui suit: Si la force de compression qui agit sur le raidisseur horizontal à la limite de stabilité correspondant au nombre  $m$  de demi-ondes concorde par hasard avec cette valeur  $P$ , le raidisseur atteint *lui-même* l'équilibre à la limite de stabilité et ne peut influencer en aucune façon la surface ondulée de la plaque. Le chiffre de gondolement  $k$  est donc identique au chiffre de gondolement de la plaque *non raidie* avec le même nombre  $m$  de demi-ondes; il faut cependant

remarquer que le nombre de demi-ondes qui se produit à la limite *la plus basse* de stabilité est influencé par la disposition du raidisseur et peut être par conséquent *d'une autre grandeur* pour la plaque raidie que pour la plaque non raidie.

Dans le cas d'une sollicitation à la flexion simple (fig. 2c avec  $\tau = 0$ ) la contrainte de compression qui revient au raidisseur à la limite de stabilité est égale à la demi-contrainte critique dans la fibre extrême  $\frac{1}{2} \sigma_k = \frac{1}{2} k \sigma_c = \frac{k \pi^2 D}{2 h^2 t}$  de telle sorte que la condition pour l'atteinte de cet état spécial «d'inefficacité du raidisseur» s'exprime

$$\frac{m^2 \pi^2 E J}{a^2 F} - \frac{k \pi^2 D}{2 h^2 t} = 0 \quad (6a)$$

et prend après introduction de l'éq. 1 la forme

$$\frac{i}{t} \equiv \left( \frac{i}{t} \right)_0 = \frac{a}{m h} \sqrt{\frac{k}{24 (1 - \mu^2)}} \quad (6b)$$

Pour  $k$  il faut introduire maintenant le chiffre de gondolement correspondant au nombre  $m$  de demi-ondes valable pour la plaque *non raidie*, car la limite de stabilité de la plaque n'est pas influencée par le raidisseur. La valeur  $(i/t)_0$  est indépendante de la grandeur auxiliaire  $\delta$  et se rapporte à la forme d'ondulation avec  $m$  demi-ondes. Dans une plaque avec rapport des côtés  $a/h = 0,8$  l'état spécial de «l'inefficacité du raidisseur» est atteint ainsi que nous l'avons déjà esquissé au chapitre III dans le cas où  $m = 1$  pour  $k = 24,47$  et  $(i/t)_0 = 0,847$ . Si le raidisseur est exécuté avec  $i/t < (i/t)_0$  le raidisseur comprimé s'appuie sur la plaque à l'état critique de l'équilibre, ce qui réduit la résistance au gondolement de la plaque. Si par contre le raidisseur est exécuté avec  $i/t > (i/t)_0$  il appuie la plaque et relève la résistance au gondolement.

Si la plaque est sollicitée par des contraintes de compression *uniformément réparties* (fig. 2f avec  $\tau = 0$ ) la contrainte de compression qui, lors du gondolement revient au raidisseur horizontal, est aussi grande que la contrainte de compression critique  $\sigma_k = k \cdot \sigma_c = \frac{k \cdot \pi^2 \cdot D}{h^2 t}$ , de telle sorte que la condition pour l'atteinte de l'état spécial de «l'inefficacité du raidisseur» s'exprime:

$$\frac{m^2 \pi^2 E J}{a^2 F} - \frac{k \pi^2 D}{h^2 t} = 0 \quad (7a)$$

Pour le chiffre du gondolement  $k$ , qui se rapporte ici également à une plaque *non raidie se gondolement avec  $m$  demi-ondes*, la relation suivante est directement valable  $k = \frac{m^2 h^2}{a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{m^2 h^2} \right)^2$  (courbe «a» de la fig. 4), de telle sorte que nous pouvons écrire aussi l'éq. 7a, après introduction de l'équation 1, sous la forme

$$\frac{i}{t} \equiv \left( \frac{i}{t} \right)_0 = \frac{1 + \frac{a^2}{m^2 h^2}}{\sqrt{12 (1 - \mu^2)}} \quad (7b)$$

La valeur  $(i/t)_0$  est ici aussi indépendante de la grandeur auxiliaire  $\delta$  et se rapporte à une forme d'ondulation avec le nombre choisi  $m$  de demi-ondes. Dans

une plaque dont le rapport des côtés est  $a/h = 1,60$ , l'état spécial de «l'inefficacité du raidisseur» est atteint pour  $k = 4,9506$ ,  $(i/t)_0 = 1,077$  dans le cas où  $m = 1$  et pour  $k = 4,2025$ ,  $(i/t)_0 = 0,496$  dans le cas où  $m = 2$ . Les deux points dont les coordonnées sont déterminées par ces deux paires de valeurs sont caractérisés dans la fig. 16 (courbe « $a/h = 1,60$ »).

L'état spécial de «l'inefficacité du raidisseur» se rapporte, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, exclusivement à la forme d'ondulation étudiée avec le nombre  $m$  de demi-ondes introduit dans les équations 6b et 7b. La suppression du raidisseur «inefficace» est par conséquent sans influence sur l'état critique de l'équilibre, dans les cas où  $m$  concorde avec le nombre de demi-ondes qui se présente à la limite la plus basse de stabilité de la plaque *non raidie*. Etudions une plaque dont le rapport des côtés est  $a/h = 1,60$ , la limite la plus basse de stabilité pour la plaque non raidie est atteinte alors pour  $m = 2$  et  $\sigma_k = 4,2025 \cdot \sigma_e$  (courbe «a» de la fig. 4). Si maintenant nous renforçons cette plaque par un raidisseur avec  $i/t = 0,496$ , nous obtenons, ainsi que le demande l'éq. 7b, un état spécial de «l'inefficacité du raidisseur» et nous avons de nouveau comme auparavant  $k = 4,2025$  mais cet état critique de l'équilibre ne correspond plus à la limite la plus basse de stabilité. Il résulte de la fig. 16 que le gondolement de la plaque renforcée ainsi que nous venons de le dire ( $\delta = 0,20$ ,  $i/t = 0,496$ ) ne se produit pas seulement sous la charge de compression  $\sigma_k = 4,2025 \cdot \sigma_e$  mais déjà sous la charge de compression  $\sigma_k = 3,832 \cdot \sigma_e$ , pour laquelle il se produit une surface d'ondulation avec une seule demi-onde ( $m = 1$ ). Le raidisseur s'appuie ici fortement à la plaque qui se gondole (la valeur  $i/t = 0,496$  est beaucoup plus petite que la valeur spéciale  $(i/t)_0 = 1,077$  correspondant au cas où  $m = 1$ ), de telle sorte que la limite de stabilité est abaissée et non pas relevée par la disposition du raidisseur donné. Exécutons le raidisseur non pas avec  $i/t = 0,496$  mais avec  $i/t = 1,077$  on a alors  $\sigma_k = 4,9506 \cdot \sigma_e$  et nous obtenons le cas spécial de «l'inefficacité du raidisseur» correspondant au nombre de demi-ondes  $m = 1$ . Ici aussi nous devons observer que «l'inefficacité» se rapporte exclusivement à une ondulation avec nombre tout-à-fait déterminé de demi-ondes (ici  $m = 1$ ) et que ce nombre de demi-ondes et par conséquent aussi le plus petit chiffre de gondolement possible peuvent être variables lorsque nous supprimons le raidisseur. La plaque étudiée se gondolerait déjà à l'état non renforcé sous une surcharge de compression  $\sigma_k = 4,2025 \cdot \sigma_e$ , et le nombre de demi-ondes serait ici  $m = 2$ . La conséquence de l'application du raidisseur donné est que la limite la plus basse de stabilité de la plaque est sensiblement relevée (quoique l'on ait atteint un état spécial de «l'inefficacité du raidisseur»), relèvement qui est à attribuer à la réduction (engendrée par le raidisseur) du nombre de demi-ondes déterminant de  $m = 2$  à  $m = 1$ .

De tous les résultats de ces considérations, nous pouvons tirer la conclusion que l'influence qu'exerce un raidisseur horizontal sur la limite la plus basse de stabilité d'une plaque rectangulaire uniformément comprimée ou sollicitée à la flexion simple, ne peut pas être déduite directement de la résistance au flambage, car le flambage du raidisseur supposé séparé de la plaque se fait perpendiculairement au plan de cette plaque. On ne peut par conséquent pas recommander de dimensionner le raidisseur horizontal exclusivement en supposant que ce raidisseur est séparé de la plaque et en tenant compte des prescriptions officielles

au sujet du flambage (procédé- $\omega$ ) pour contrôler la sécurité contre le flambage perpendiculairement au plan de la plaque. La base de cette prescription se trouve dans un flambage de la barre d'après une demi-onde sinusoïdale unique ( $m = 1$ ) ainsi que dans un nombre tout-à-fait déterminé de sécurité au flambage  $v_k$ , en partie dépendant du degré d'élancement de la barre, de telle sorte que nous obtenons, suivant le rapport des côtés de la plaque et suivant la grandeur du nombre de sécurité au gondolement  $v_d$ , des influences fortement différentes sur la limite de stabilité et dans certains cas nous pouvons arriver à des dimensions insuffisantes des raidisseurs. Lorsque le nombre de sécurité au flambage du raidisseur, dimensionné de cette façon, est par hasard de la même grandeur que le nombre de sécurité de gondolement de la plaque et lorsque le rapport des côtés de la plaque étudiée est tel que la plaque *non raidie* se gondolerait suivant une surface d'ondulation avec  $m = 1$  demi-onde ( $a/h \leq 1,41$  pour une surcharge de compression uniformément répartie et  $a/h \leq 0,95$  pour une sollicitation à la flexion simple), la limite de stabilité de la plaque, malgré le raidisseur, n'est pas du tout plus élevée que la limite de la plaque non raidie, l'efficacité du raidisseur est donc égale à zéro. Ce n'est que lorsque le nombre de sécurité au flambage du raidisseur est plus grand que le nombre de sécurité au gondolement nécessaire de la plaque ou lorsque le rapport des côtés de la plaque est grand, de telle sorte que la plaque se gondolerait à l'état non raidi suivant une surface ondulée *de plus d'une* demi-onde, qu'il y a un accroissement de la rigidité au fléchissement qui augmente la stabilité de la plaque. Une plaque uniformément comprimée, avec rapport des côtés  $a/h = 3,00$ , se gondolerait à l'état non renforcé sous une contrainte de compression  $\sigma_k = 4,00 \cdot \sigma_e$  suivant une surface ondulée avec  $m = 3$  demi-ondes (courbe «a» de la fig. 4), tandis que par la disposition d'un raidisseur dimensionné de la façon que nous avons indiquée, nous obtenons, dans le cas où  $v_k = v_b$ , l'état spécial de «l'inefficacité du raidisseur» pour  $m = 1$ ,  $i/t = 3,026$ ,  $k = 11,11$  (eq. 7b) et que nous relevons la résistance au gondolement de la plaque de  $\sigma_k = 4,00 \cdot \sigma_e$  à  $\sigma_k = 11,11 \cdot \sigma_e$ . Si la longueur de la plaque est plus grande qu'environ quatre fois la hauteur, la plaque *renforcée* se gondole déjà en plus d'une seule demi-onde (cf. fig. 14), de telle façon que le raidisseur dimensionné au flambage de la façon que nous avons indiquée est dans tous les cas suffisamment rigide pour pouvoir, malgré la charge de compression qui lui revient, *soutenir* la plaque lors du gondolement.

Pour terminer, nous devons par conséquent dire que le dimensionnement des raidisseurs horizontaux comprimés n'est possible que sur la base de la théorie de stabilité esquissée au chapitre III ou sur la base du procédé approximatif indiqué au chapitre VIII. On constatera qu'il est bien d'établir pour les limites  $(i/t)_{I, II}$  et  $\max (i/t)_{I, II}$ , déterminées au chapitre III (cf. aussi les valeurs limites  $\gamma_{I, II}$  et  $\max \gamma_{I, II}$ , esquissées grâce à la fig. 15), des formules simples d'approximation. Par un dimensionnement du raidisseur supposé détaché de la plaque, au flambage perpendiculaire au plan de la plaque, on n'obtient un dimensionnement des raidisseurs (et ceci seulement pour  $v_k \geq v_b$ ), que lorsque nous pouvons discerner le cas le plus défavorable dans lequel le raidisseur s'appuie à la plaque qui se gondole et qui réduit la résistance au gondolement de la plaque au lieu de la relever.

## Résumé.

Dans les champs du milieu, l'âme d'une poutre à âme pleine est sollicitée surtout à la flexion, très peu au cisaillement. Il faut dimensionner et construire de telle manière que des *déformations permanentes* (les concentrations de contraintes à la périphérie des trous de rivets sont négligées) et des *gondolements latéraux* ne puissent se produire. Afin d'exclure des plastifications locales, il faut éviter que les «contraintes fictives de comparaison» dans l'âme atteignent ou dépassent la limite apparente d'élasticité de l'acier de construction utilisé (chapitre I du mémoire); d'autre part il faut empêcher l'âme de se gondoler trop tôt, autrement dit il faut être sûr que la limite de stabilité inférieure ne soit pas atteinte sous la charge utile. La détermination théorique de cette limite de stabilité s'opère en idéalisant l'âme dans de grandes proportions quant à ses propriétés géométriques et mécaniques, son mode d'appui et sa surcharge (chapitre II du rapport). Nous sommes ainsi obligés d'introduire dans le calcul un coefficient de sécurité au gondolement  $v_b$  qui tienne compte de la différence inévitable entre l'hypothèse et la réalité. Ce coefficient de sécurité au gondolement peut être en général choisi de telle manière qu'il soit inférieur au coefficient moyen de sécurité au flambage  $v_k$  de barres comprimées en acier de construction, car la résistance de tôles appuyées sur leur pourtour dépasse de beaucoup la limite inférieure de stabilité, si l'on tient compte du fort allongement du plan médian qui se produit lors du gondolement. Afin d'augmenter la résistance au gondolement, on renforce l'âme par des raidisseurs; lorsque l'âme est sollicitée surtout à la flexion, on adoptera des raidisseurs horizontaux que l'on placera du côté comprimé; au point de vue stabilité ce procédé est justifié. Ces raidisseurs forment avec l'âme des assemblages rivés ou soudés; ils doivent donc résister à des efforts axiaux de compression dont il faut tenir compte lorsque l'on veut déterminer quelle influence exerce le raidisseur sur la limite de stabilité de la plaque.

Pour la détermination du comportement fondamental de telles âmes, l'auteur a étudié la stabilité d'une plaque rectangulaire appuyée sans encastrement sur ses côtés, raidie horizontalement dans la zone de compression et sollicitée à la flexion dans son plan (chapitre III du rapport). Comme nous devons compter dans la pratique avec l'apparition de contraintes additionnelles de cisaillement, nous avons représenté l'influence que ces contraintes de cisaillement ont sur la limite de stabilité (chapitre IV du rapport). Pour la détermination approximative de la stabilité des âmes raidies horizontalement, il faut imaginer une bande de la plaque enlevée au côté soumis à la compression et remplacer les contraintes de compression réparties sous forme de triangle ou de trapèze agissant sur cette bande de la plaque (appelée «plaque de remplacement») par des contraintes de compression de grandeur moyenne, uniformément réparties, pour passer ensuite de la résistance au gondolement de cette plaque de remplacement à la résistance au gondolement de l'âme. La détermination de la limite la plus basse de stabilité de cette plaque de remplacement n'exige qu'un travail beaucoup moins important que la détermination de la stabilité de l'âme donnée. Nous avons esquissé cela au chapitre V de ce rapport pour le cas d'une répartition uniforme de la compression et du cisaillement, au chapitre VI pour le cas d'une compres-

sion uniformément répartie et la disposition d'un raidisseur médian horizontal et pour terminer au chapitre VII pour le cas d'une répartition uniforme de la compression et du cisaillement et la disposition d'un raidisseur médian horizontal. Si nous écrivons, pour la plaque de remplacement, les mêmes conditions aux bords que pour le panneau d'âme étudié, nous obtenons, grâce à ce procédé approximatif, les valeurs de la contrainte critique dans la fibre extrême qui, en principe, sont plus élevées que les valeurs exactes (chapitre VIII du rapport). Cette évaluation trop grande de la résistance au gondolement est à attribuer au fait que nous avons supposé une fixation latérale le long du bord inférieur de la plaque de remplacement, tandis que les points situés sur cette ligne de bord de la surface médiane de la plaque subissent en réalité (lors du gondolement de l'âme) des déplacements latéraux relativement grands.

Le chapitre IX est consacré au cas du «gondolement inélastique» qui se présente lorsque «la contrainte de comparaison idéale» maxima, qui existe à l'état critique de l'équilibre, dépasse la limite d'élasticité et de proportionnalité de l'acier de construction employé. Dans le cadre du procédé approximatif esquissé, la plaque de remplacement n'est sollicitée que par les contraintes de compression et de cisaillement uniformément réparties, de telle sorte que l'état de contrainte qui se présente est homogène et que la «contrainte de comparaison» qui se produit à l'état critique de l'équilibre est indépendante du point considéré. La détermination de cette «contrainte critique de comparaison» peut, lorsque nous admettons que la conservation de la quasi-isotropie de l'acier est assurée dans le domaine compris entre les limites d'élasticité et d'écoulement, être ramenée à la détermination de la contrainte de flambage d'une barre comprimée centriquement et de degré d'élancement «idéal» connu. Le chapitre X qui termine notre rapport contient quelques remarques fondamentales sur le problème du dimensionnement des raidisseurs horizontaux. L'explication de l'influence que prennent des raidisseurs sur la stabilité des plaques et le dimensionnement de ces raidisseurs peuvent être exécutés d'une manière rationnelle sur la seule base des résultats de l'étude de la stabilité. Il est très approprié de fixer, pour les deux limites pratiquement très importantes du rapport de la rigidité, des formules approximatives simples. Si nous dimensionnons les raidisseurs exclusivement en supposant que le raidisseur est détaché de la plaque et en tenant compte des prescriptions officielles pour le contrôle d'une sécurité suffisante contre le flambage perpendiculairement au plan de la plaque, nous pouvons alors éliminer le cas le plus défavorable dans lequel le raidisseur s'appuie à la plaque qui se gondole et dans lequel la limite de stabilité se trouve plus basse que la limite de stabilité de la plaque *non raidie*; nous obtenons cependant, suivant le rapport des côtés de la plaque et suivant le coefficient de sécurité au gondolement exigé, des valeurs de différentes grandeurs de l'efficacité de ce raidisseur.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide