Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Flexion, torsion et flambage des barres composées de parois minces

Autor: Bleich, F. / Bleich, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-2965

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

V3

Flexion, torsion et flambage des barres composées de parois minces.

Biegung, Drillung und Knickung von Stäben aus dünnen Wänden.

Bending, Torsion and Buckling of Bars Composed of Thin Walls.

Dr. Ing. F. Bleich et Dr. Ing. H. Bleich, Wien.

1° — Introduction.

Ce fut *Bach*[1] qui, pour la première fois, détermina par des essais le fait que pour les différentes formes de poutre la répartition des contraintes longitudinales dans une section, ne concorde pas avec la répartition calculée d'après la théorie de la flexion de Navier. A peu près à la même époque, et indépendamment de *Bach*, *R. Sonntag*[2] présenta un rapport sur la torsion des barres à sections ⌊, [et ⊓ soumises à la flexion et calcula les contraintes réelles. L'équation différentielle de la torsion des poutres en I, symétriques, fut établie par *Timoschenko*.[3] *Weber*[4] a généralisé ces recherches pour des poutres quelconques à deux semelles, c'est-à-dire pour des sections en [, ⊓ et ⊥. Le problème du basculement des poutres en I fut traité par *Timoschenko*.[3] La stabilité des barres en ⊥, I, ⊓ et [a été étudiée par *Ostenfeld*.[5] C'est *Eggenschwyler*[6] qui a étudié la torsion des barres à section rectangulaire ou en forme de caisson.

La théorie classique de la flexion et de la torsion des barres droites prismatiques est basée sur l'hypothèse que les contraintes longitudinales de flexion sont réparties dans la section suivant une loi linéaire, et que dans le cas de la pure torsion, il ne se produit aucun effort longitudinal si l'on néglige les grandeurs du second ordre de petitesse. Mais ceci ne concerne pas les barres composées de plaques minces, ainsi qu'il a été démontré dans les travaux cités ci-dessus. Comme en construction métallique on emploie d'une façon presque

---

1 *C. Bach:* Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Balken mit [-förmigem Querschnitt. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1909, page 1790 et 1910, page 382.

2 *R. Sonntag:* Biegung, Schub und Scherung. Berlin 1909.

3 *S. Timoschenko:* Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschrift für Math. u. Phys. 1910, page 361.

4 *C. Weber:* Übertragung der Drehmomente in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt. Zeitschrift für angew. Math. u. Mech. 1926, page 85.

5 *A. Ostenfeld:* Communication N° 5 et 6 du Laboratoire de statique de l'Ecole Polytechnique de Copenhague, Copenhague 1931 et 1932.

6 *A. Eggenschwyler:* Über die Verdrehungsbeanspruchung rechteckiger Kastenquerschnitte. Eisenbau 1918, page 45.

continue des poutres composées de plusieurs plaques, il nous paraît nécessaire de rechercher le comportement effectif de telles poutres, sans limitation à certaines formes de section.

La représentation, que nous donnons en abrégé ci-après, est le premier essai d'introduction d'une théorie aussi générale que possible du problème de la flexion et de la torsion des barres à parois minces. Cette recherche permet de concevoir plus exactement les relations et les équations de portée générale, pour l'étude des problèmes spéciaux de l'équilibre stable et instable.

L'objet de cette étude est par conséquent les poutres prismatiques, composées de différentes parois rectangulaires et dont les sections sont disposées plus ou moins suivant la fig. 1. La fig. 1a montre un exemple de *section ouverte* ou *simplement composée* et la fig. 1b *une section* fermée ou à *composition*

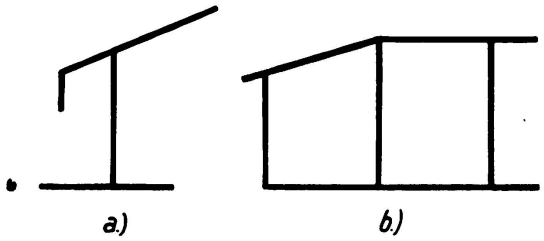


Fig. 1.

multiple. L'épaisseur des différentes parois peut être variable, mais nous admettrons toujours qu'elle est petite par rapport à la hauteur de la paroi elle-même.

De la théorie de la flexion de Navier nous prenons l'hypothèse que la forme géométrique de la section est conservée dans la déformation engendrée par la surcharge. Nous reviendrons encore dans la suite sur ce point de vue fondamental. Par contre, nous ne conserverons pas la condition disant qu'une section reste plane au cours de la déformation. Nous supposerons que pour chaque paroi prise individuellement, les principes de la théorie de la flexion de Navier sont valables. Cette hypothèse ne peut naturellement pas être exactement remplie là où deux ou plusieurs parois se rencontrent, à cause des épaisseurs qui ne sont pas nulles; cependant il faut choisir cette épaisseur si réduite que l'on puisse négliger les écarts. Nous prenons en considération les flexions des parois dans leur plan, alors que nous négligeons les flexions perpendiculaires au plan des parois, à cause de la faible résistance à la flexion dans cette direction. Nous ne considérons des efforts tranchants que la partie qui provient de la torsion, tandis que les contraintes de cisaillement qui proviennent de la flexion seront négligées, à cause de leur influence tout-à-fait secondaire sur les déformations de la barre, lorsque la longueur de cette dernière est grande par rapport aux dimensions de sa section.

Afin d'obtenir l'équation différentielle du problème, dans sa forme la plus générale, nous partons d'un principe de variation connu de la mécanique. Nous obtenons ainsi l'avantage que l'on peut utiliser le résultat général pour l'établissement des solutions approximatives, d'après le procédé de *Ritz,* pour tous les cas où une solution exacte des équations différentielles amenées par le problème de variation nous conduit à des complications.

Désignons par A_a le travail des forces extérieures et par A_i le travail des forces intérieures (travail de déformation), on a la condition extrême

$$\delta\,(A_i - \lambda A_a) = 0 \tag{1}$$

où λ est un coefficient dépendant des conditions spéciales du problème. Dans tous les cas que nous voulons considérer ici, il est possible de déterminer λ d'avance.

S'il s'agit des déformations du premier ordre d'un problème de *flexion* ou de *torsion* d'une barre droite, A_i et A_a sont des fonctions du second et du premier degré des grandeurs de déformation.[7] De ce fait on peut tirer d'une manière connue pour le coefficient λ la valeur 2.

Lorsqu'il s'agit d'un problème *d'équilibre instable* (problème de flambage) on a $\lambda = 1$, quand il n'y a que des déformations du premier ordre dans les conditions d'équilibre.

D'après la condition (1) on a:

$$\text{dans le cas d'un équilibre stable:}\quad \delta\,(A_i - 2A_a) = 0 \tag{2}$$

$$\text{dans le cas d'un équilibre instable:}\quad \delta\,(A_i - A_a) = 0 \tag{3}$$

La plus grande partie de notre étude consiste à représenter le travail de déformation A_i et le travail des forces extérieures A_a. Dans la détermination de A_i il faut faire une distinction entre les barres à composition simple et celles à composition multiple.

2° — Le travail de déformation A_i.

Barres dont la section est à composition simple.

Considérons une seule paroi d'une barre, son axe présentera en général, lors de la déformation de toute la barre, une courbure K_i dans le plan de la paroi et un allongement $\bar{\varepsilon}_i$. En même temps, toute la barre subit une déformation angulaire φ. Soit J_i le moment d'inertie de la section de la paroi, avec hauteur h_i et épaisseur δ_i variant avec la hauteur, par rapport à l'axe passant par le centre de gravité et perpendiculaire au plan de la paroi; soit encore F_i la surface de la section et J_{di} la résistance à la torsion de la paroi; on obtient pour le travail de déformation total A_i d'une barre de longueur l composée de n parois rassemblées, l'expression:

$$A_i = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} (E J_i K_i^2 + E F_i \bar{\varepsilon}_i^2 + G J_{di}\, \varphi'^2)\right] dz, \tag{4}$$

où dz représente la distance de deux sections infiniment rapprochées l'une de l'autre.

Les grandeurs K_i et $\bar{\varepsilon}_i$ ne sont cependant pas indépendantes l'une de l'autre mais elles sont reliées entre elles par certaines conditions de transition. Au point où deux parois se rencontrent les contraintes longitudinales et par le fait

[7] Ceci est valable sous la réserve que dans les conditions d'équilibre les déformations sont négligeables par rapport aux dimensions de la poutre.

même les allongements des deux parois doivent être égaux entre eux. Pour chaque arête de barre on a, lorsque a est la distance de l'arête à l'axe de gravité de la paroi, voir fig. 2:

$$\bar{\varepsilon}_i + a'_i K_i = \bar{\varepsilon}_{i+1} - a_{i+1} K_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1) \tag{5}$$

Lorsque l'on a n parois on peut établir n équations de ce genre. Soit S la force normale qui agit dans la barre, l'allongement moyen ε_m est:

$$\varepsilon_m = \frac{S}{EF}, \qquad \text{où} \qquad F = \sum_i F_i.$$

On a la relation d'équilibre:

$$E \sum_i F_i \bar{\varepsilon}_i = S = E F \varepsilon_m \tag{6}$$

Avec $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_m + \varepsilon_i$ les équations (5) et (6) se transforment en:

$$\varepsilon_i + a' K_i = \varepsilon_{i+1} - a_{i+1} K_{i+1} \tag{5'}$$

$$\sum_i \varepsilon_i F_i = 0 \tag{6'}$$

Introduisons d'autre part $\varepsilon_i = \varepsilon_m + \bar{\varepsilon}_i$ dans l'équation (4) on obtient en tenant compte de (6′) et en introduisant $J_d = \Sigma J_{di}$:

$$A_i - \frac{1}{2} \int_0^l \left[\sum_i (E J_i K_i^2 + E F_i \varepsilon_i^2) + E F \varepsilon_m^2 + G J_d \varphi'^2 \right] dz \tag{7}$$

Les n équations (5′) et (6′) permettent d'exprimer les n grandeurs ε_i par les n grandeurs K_i, de telle sorte que ε_i apparaît comme fonction linéaire de K_i.

Il est maintenant nécessaire d'établir la relation entre les courbures K_i des différentes parois et la déformation de toute la barre. Nous choisissons pour les considérations suivantes un système de coordonnées suivant les trois doigts de la main gauche, dont l'axe z coïncide avec l'axe de gravité de la barre, et dont les axes x et y se trouvent dans la section considérée et coïncident avec les axes principaux d'inertie de la section. Lors de la déformation engendrée par la surcharge, le centre de gravité S de la section considérée se déplace vers S′, voir fig. 3. Les composantes de ce déplacement sont x et y. D'autre part

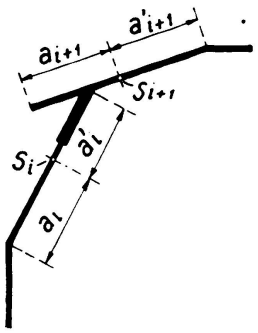


Fig. 2.

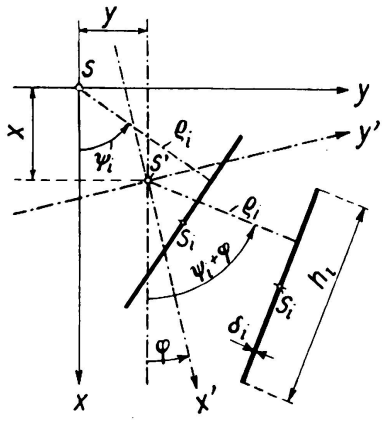


Fig. 3.

la section tourne de l'angle φ. L'angle φ sera compté positif dans le sens de l'axe positif des x vers l'axe positif des y. Comme nous avons supposé que la forme géométrique de la section est conservée, les trois grandeurs x, y et φ suffisent à déterminer la position d'un point quelconque de la section. A la fig. 3 nous avons représenté la paroi i avec le centre de gravité S_i avant et après le déplacement et la rotation. Pour un point d'application quelconque de la charge, l'axe de la barre, primitivement droit s'est modifié en une courbe spéciale. Les projections de cette courbe sur les plans des xz et des yz ont les courbures $x'' = \frac{d^2x}{dz^2}$ et $y'' = \frac{d^2y}{dz^2}$ lorsque la déformation peut être considérée comme faible. La courbure K_i de la paroi i n'est maintenant pas autre chose que la projection de la courbure de l'axe de la barre sur le plan tourné de la paroi. Il en résulte, lorsque l'on observe la fig. 3:

$$K_i = x'' \sin(\psi_i + \varphi) - y'' \cos(\psi_i + \varphi) - \rho_i \varphi'' \tag{8}$$

Cette équation peut être simplifiée dans tous les cas où φ est négligeable par rapport à ψ. Ceci se présente par exemple dans la plupart des problèmes d'équilibre stable. La relation (8) prend alors la forme simplifiée:

$$K_i = x'' \sin \psi_i - y'' \cos \psi_i - \rho_i \varphi'' \tag{8'}$$

Introduisons la relation (8') dans l'équation (7) on obtient A_i sous la forme

$$A_i = \frac{E}{2}\int_0^l \Big[\alpha_{xx} x''^2 + \alpha_{yy} y''^2 + \alpha_{xy} x'' y'' + \alpha_{x\varphi} x'' \varphi'' + \alpha_{y\varphi} y'' \varphi'' + \\ + \alpha_{\varphi\varphi} \varphi''^2 + F \varepsilon_m^2 + \frac{G}{E} J_d \varphi'^2\Big] dz \tag{9}$$

On peut contrôler en général que

$$\alpha_{xx} = J_y, \quad \alpha_{yy} = J_x, \quad \alpha_{xy} = J_{xy} = 0,$$

où J_x et J_y sont les moments d'inertie de la section de la barre par rapport aux axes principaux x et y. J_{xy} est le moment centrifuge. D'autre part on a pour des section qui sont symétriques par rapport aux axes x et y, $\alpha_{xy} = 0$ et $\alpha^{y\varphi} = 0$.[8]

Lorsque l'on introduit les désignations définitives $\alpha_{x\varphi} = B_x$, $\alpha_{y\varphi} = B_y$ et $\alpha_{\varphi\varphi} = B_\varphi$ *l'équation pour le travail intérieur devient pour les problèmes d'équilibre stable:*

$$A_i = \frac{E}{2}\int_0^l \Big[J_y x''^2 + J_x y''^2 + B_x x'' \varphi'' + B_y y'' \varphi'' + B_\varphi \varphi''^2 + F \varepsilon_m^2 + \frac{G}{E} J_d \varphi'^2\Big] dz \tag{10}$$

Revenons à l'équation plus exacte (8) qu'il faut employer dans bien des problèmes de stabilité; on peut écrire dans cette relation, par suite de la petitesse supposée de φ:

$$\sin(\psi_i + \varphi) = \sin \psi_i + \varphi \cos \psi_i$$
$$\cos(\psi_i + \varphi) = \cos \psi_i - \varphi \sin \psi_i$$

[8] Nous ne pouvons le démontrer ici car la place nous manque. Nous le publierons prochainement ailleurs.

On obtient ainsi pour K_i l'expression:

$$K_i = (x'' + y''\varphi) \sin \psi_i + (x''\varphi - y'') \cos \psi_i - \rho_i \varphi'' \tag{11}$$

L'introduction de la relation (11) dans l'équation (7) fournit une formule pour A_i qui a la même structure que l'équation (10); x'' et y'' sont remplacés par $x'' + y''\varphi$ et $x''\varphi - y''$. L'équation du travail intérieur a ainsi, dans les problèmes de stabilité, la forme suivante:

$$A_i = \frac{E}{2}\int_0^l \Big[J_y(x''+y''\varphi)^2 + J_x(x''\varphi - y'')^2 + B_x(x''+y''\varphi)\varphi'' + B_y(x''\varphi - y'')\varphi'' + B_\varphi \varphi''^2 + F\varepsilon_m^2 + \frac{G}{E} J_d \varphi'^2\Big] dz \tag{12}$$

Barres dont la section est à composition multiple.

Dans les section fermées les efforts tranchants qui existent par suite de la torsion de la barre engendrent une flexion des différentes parois tandis que dans les barres à section ouverte la flexion ne dépend que des contraintes normales. Dans une section ouverte les contraintes de torsion s'écoulent dans la section des parois aux deux arêtes longitudinales en direction opposée, dans les section fermées en même direction. Dans le dernier cas elles ont la même allure que les efforts tranchants de flexion. La courbure d'une paroi dans son plan se compose ainsi dans notre cas de deux parties, des courbures résultant des contraintes normales, $\overline{K}_i$, et des courbures provenant des efforts tranchants de torsion $\overline{\overline{K}}_i$. Posons égal à T_i (fig. 4) l'effort tranchant par unité de longueur de la section de la paroi et engendré par la torsion.

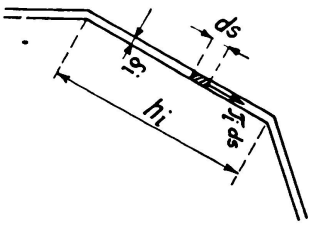


Fig. 4.

L'expression du travail de déformation A_i prend maintenant la forme:

$$A_i = \frac{1}{2}\int_0^l \Big[\sum_i (EJ_i \overline{K}_i^2 + EF_i \varepsilon_i^2) + F\varepsilon_m^2 + \sum_i \frac{1}{G}\frac{h_i}{\delta_i} T_i^2\Big] dz, \tag{13}$$

où la résistance à la torsion des différentes parois est négligée car elle est petite vis-à-vis de la résistance à la torsion de toute la section, qui est représentée dans l'équation (13) par le dernier terme.

Pour modifier encore l'équation (13) nous employons de nouveau les conditions de transition (5') et les conditions d'équilibre (6') que nous adaptons encore une fois:

$$\varepsilon_i + a'_i \overline{K}_i = \varepsilon_{i+1} - a_{i+1} \overline{K}_{i+1} \tag{14}$$

$$\sum \varepsilon_i F_i = 0 \tag{14'}$$

Si la section composée de n parties est reliée r-fois (pour un cadre $r = 2$), on obtient $n + r - 2$ équations (14) et une relation (14'), en tout $n + r - 1$ équations où n grandeurs ε sont inconnues. Le nombre des équations est $r - 1$ fois plus grand que le nombre des inconnues. Additionnons les équations (14) appartenant aux angles d'un système fermé de parois, les grandeurs ε_i se simplifient et l'on gagne pour une section r fois reliée, $r - 1$ relations de la forme

$$\sum_i{}' h_i \overline{K_i} = 0 \tag{15}$$

où h_i est la hauteur des parois et où le prime ajouté au signe Σ doit montrer que la sommation ne doit s'étendre qu'aux parties d'un système à parois fermé. Ces équations ne contiennent pas ε_i et représentent $r - 1$ relations linéaires entre les $\overline{K_i}$. Les équations (14) ne sont par conséquent pas indépendantes l'une de l'autre. Après la mise de côté des équations (15) qui ne contiennent plus aucune inconnue ε_i, il reste n relations qui n'ont une solution que lorsque les conditions (15) sont remplies. S'il est possible de satisfaire les conditions (15) dont dépendent les $\overline{K_i}$ et nous démontrerons pour terminer que ceci est effectivement le cas, les relations (14) et (14') représentent un système d'équations linéaires sans contradiction pour les inconnues ε_i. Dans la détermination des ε_i on peut supprimer une des équations dans chaque groupe des relations (14), qui appartient à un cadre fermé de parois.

L'équation de A_i contient encore n grandeurs T_i. Pour établir les relations manquantes de T_i, considérons un système unique de parois en cadre. Supposons ce système coupé suivant une de ses arêtes te telle sorte que l'on engendre une barre à section ouverte; sous l'effet de la surcharge les deux lèvres de la coupure se déplaceront l'une par rapport à l'autre dans la direction z. Dans le système fermé les deux lèvres doivent être unies l'une à l'autre. Désignons par ζ le déplacement d'un point d'une paroi dans le sens longitudinal de la barre (direction de l'axe des z), on doit avoir, lorsque la section est partout formée,

$$\int_L \frac{\partial \zeta}{\partial s} ds = 0 \tag{16}$$

Pour chaque système fermé de parois, une telle équation est valable de telle sorte que l'on dispose ainsi de $r - 1$ relations (16).

Posons maintenant $\zeta = \zeta' + \zeta''$ où ζ' est le déplacement résultant des contraintes de flexion σ, et ξ le déplacement engendré par les efforts tranchants T_i/δ_i. Dans chaque paroi on a:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial s} = \int_0^z \overline{K_i}\, dz \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \zeta''}{\partial s} = \frac{T_i}{G\delta_i} - \rho_i \varphi',$$

lorsque ρ_i est la distance de la paroi au centre de gravité de la barre. L'introduction de ces valeurs dans l'équation (16) donne:

$$\int_L ds \int_0^z \overline{K_i}\, dz + \int_L \frac{T_i}{G\delta_i} ds - \int_L \rho_i \varphi' ds = 0.$$

Intervertissons dans le premier membre la suite des intégrations et introduisons des sommes s'étendant aux parois, on obtient:

$$\int_0^z \left(\sum_i{}' h_i \overline{K_i}\right) dz + \frac{1}{G} \sum_i{}' \frac{T_i h_i}{\delta_i} - \varphi' \sum{}' \rho_i h_i = 0.$$

Les sommes se rapportent chaque fois à une suite de parois en cadre. Comme d'après l'équation (15) le premier terme est nul, il reste les r — 1 relations

$$\frac{1}{G} \sum_i{}' \frac{T_i h_i}{\delta_i} - \varphi' \sum_i{}' \rho_i h_i = 0 \tag{17}$$

Les efforts tranchants T_i sont coordonnés à des efforts tranchants de même grandeur dans la direction z. Pour chaque arête de deux ou plusieurs parois qui se rencontrent, on peut poser la relation d'équilibre

$$\sum_i{}'' T_i = 0, \tag{18}$$

où la somme ne s'étend qu'aux efforts tranchants des parois qui se réunissent dans cette arête. En tout, nous avons n — r + 1 équations (18) de telle sorte que le total des relations (17) et (18) est exactement de n. Comme elles sont linéaires, leur solution fournit les inconnues T_i sous la forme simple:

$$T_i = \beta_i G \varphi' \tag{19}$$

Les coefficients β_i ne dépendent que de la forme de la section.

Il reste encore à démontrer l'existence effective de l'équation (15). Dans ce but calculons les courbures $\overline{\overline{K_i}}$ engendrées par les efforts tranchants, à savoir

$$\overline{\overline{K_i}} = -\frac{T_i'}{G \delta_i}, \quad \text{où} \quad T_i' = \frac{\partial T_i}{\partial z}.$$

La courbure totale est $K_i = \overline{K_i} = \overline{\overline{K_i}}$, d'où $\overline{K_i} = K_i - \overline{\overline{K_i}}$. Pour K_i l'equation (8) est valable, d'où

$$\overline{K_i} = x'' \sin(\psi_i + \varphi) - y'' \cos(\psi_i + \varphi) - \rho_i \varphi'' + \frac{T_i'}{G \delta_i} \tag{20}$$

Introduisons la relation (20) dans l'équation (15), on obtient:

$$x'' \sum_i{}' h_i \sin(\psi_i + \varphi) - y'' \sum_i{}' h_i \cos(\psi_i + \varphi) - \varphi'' \sum_i{}' \rho_i h_i + \frac{1}{G} \sum_i{}' \frac{T_i' h_i}{\delta_i} = 0.$$

Les deux premières sommes sont la longueur de la projection d'un polygone fermé, sur les axes des x et des y et par conséquent sont nulles. Le reste s'obtient de l'équation (17) par différentiation suivant z. Il nous paraît démontré que l'équation (15) est identiquement satisfaite.

Introduisons pour terminer l'équation (19) dans la relation (20), on obtient:

$$\overline{K_i} = x'' \sin(\psi_i + \varphi) - y'' \cos(\psi_i + \varphi) + \left(\frac{\beta_i}{\delta_i} - \rho_i\right) \varphi'' \tag{20'}$$

c'est l'équation correspondant à la relation (8), pour des sections fermées.

En remplaçant φ par ψ, on simplifie l'équation (20′) en

$$\overline{K}_i = x'' \sin \psi_i - y'' \cos \psi_i + \left(\frac{\beta_i}{\delta_i} - \rho_i\right) \varphi'' \tag{20''}$$

En partant des équations (14) et (14′) on peut déterminer maintenant les ε_i en fonction des $\overline{K}_i$. On obtient ainsi sur la base des équations (13) et en tenant compte des relations (19) et (20″) *l'équation suivante pour le travail intérieur (équilibre stable):*

$$A_i = \frac{E}{2} \int_0^l \left[J_y x''^2 + J_x y''^2 + B_x x'' \varphi'' + B_y y'' \varphi'' + B_\varphi \varphi''^2 + F \varepsilon_m^2 + \frac{G}{E} J_d \varphi'^2 \right] dz \tag{21}$$

où

$$J_d = \sum_i \frac{\beta_i^2 h_i}{\delta_i} \tag{21'}$$

L'équation (21) présente la même structure que la relation (10), seulement J_d a une autre signification que dans l'équation (10). De même la relation (12) qui entre en ligne de compte pour les problèmes de stabilité est aussi valable pour les barres fermées, lorsque l'on définit J_d par l'équation (21′).

Lorsque δ_i est variable à l'intérieur d'une paroi, il faut remplacer δ_i dans toutes les relations de la présente étude par la valeur moyenne $\delta_{im} = \frac{F_i}{h_i}$ pour les barres qui ont une section fermée. Une prise en considération plus exacte de la variation de δ_i ne présente aucune difficulté fondamentale cependant un calcul plus précis nous conduirait à des formules peu pratiques.

3° — Détermination des fonctions B_x, B_y et B_φ des sections.

Le calcul des fonctions B_x, B_y et B_φ sera exécuté par exemple pour une section symétrique en ⊓. L'axe des x sera choisi comme axe de symétrie. Les trois parois de cette section seront désignées par 1, 2 et 3 (voir fig. 5). Nous

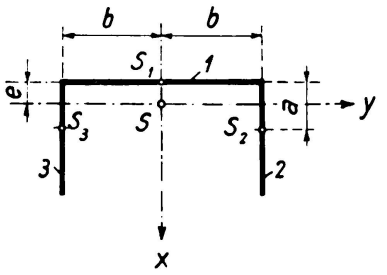


Fig. 5.

admettons que les parois 2 et 3 ont une épaisseur variable. Pour cette raison la distance $a \neq \frac{h}{2}$.

Nous partons des équations (5′) et (6′) qui s'expriment, lorsque nous commençons par la paroi 2 et que nous continuons dans le sens positif $x \longrightarrow y$:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_2 + aK_2 &= \varepsilon_1 - bK_1 \\ \varepsilon_1 + bK_1 &= \varepsilon_3 - aK_3 \\ F_1 \varepsilon_1 + F_2 (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Exprimons ε_2 et ε_3 par ε_1, on obtient les relations:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - bK_1 - aK_2, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + bK_1 + aK_3 \tag{b}$$

En introduisant dans la troisième des équations (a) avec $F = F_1 + F_2 + F_3$ on a

$$\varepsilon_1 - \frac{F_2 a}{F}(K_2 - K_3), \tag{c}$$

ou ε_2 et ε_3 sont aussi déterminées en fonction des K_i. Calculons maintenant la somme $\Sigma F_i \varepsilon_i^2$ dans l'équation (7)

$$\sum_1^3 F_i \varepsilon_i^2 = \frac{3}{F}[F_2 a (K_2 - K_3)]^2 + F_2[2 b^2 K_1^2 + 2 a b K_1 (K_2 + K_3) + a^2 (K_2^2 + K_3^2)] \tag{d}$$

Les courbures K_i sont à calculer d'après l'équation (8') où l'on introduit pour les angles ψ_i les valeurs numériques suivantes:

$$\psi_1 = \pi. \qquad \psi_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_3 = \frac{3\pi}{2}.$$

Avec ces valeurs de ψ_i on obtient en considérant la fig. 5:

$$K_1 = y'' - e\varphi'' \qquad K_2 = x'' - b\varphi'' \qquad K_3 = -x'' - b\varphi''.$$

On détermine ainsi la somme

$$\sum_1^3 J_i K_i^2 = J_1 (y'' - 2 e y'' \varphi'' + e^2 \varphi''^2) + 2 J_2 (x''^2 + b^2 \varphi''^2)$$

et en employant l'équation développée ci-dessus (d), la somme

$$\sum_1^3 F_i \varepsilon_i^2 = -\frac{4}{F} F_2^2 a^2 x''^2 + F_2[2 b^2 (y''^2 - 2 e y'' \varphi'' + e^2 \varphi''^2) - 4 a b^2 (y'' \varphi'' - e \varphi''^2)$$
$$+ a^2 (2 x''^2 + 2 b^2 \varphi''^2)].$$

Tirons les coefficients des produits $x''\varphi''$ et $y''\varphi''$, que nous avons désignés ci-dessus par B_x et B_y, des sommes (e) et (f), on obtient:

$$\left.\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= -2 J_1 e - 4 F_2 b^2 (a + e) = -2 e (J_x + F b^2) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Nous avons désigné par J_x et J_y les moments d'inertie principaux par rapport aux axes des x et des y de la section en ⊓.

Rassemblons tous les coefficients de φ''^2, on obtient de la même manière

$$B_\varphi = J_1 e^2 + 2 J_2 b^2 + 2 b^2 F_2 (a + e)^2 = J_x e^2 + J_y b^2 + 3 F b^2 e^2. \tag{23}$$

Ci-dessous nous donnons les fonctions B_x, B_y et B_φ des sections pour quelques formes de section avec un axe de symétrie, souvent employées en construction métallique. Elles furent calculées d'après la méthode que nous venons de donner.

Section symétrique en II *(fig. 6).*

$$\left.\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 2\{-J_1 e + 2 J_4 (h - e) - 2 F_2 b^2 (a + e) \\ &\quad - 2 F_4 (b - c)[c(h - e) + b(h + e)]\} \\ B_\varphi &= J_1 e^2 + 2 J_2 b^2 + 2 J_4 (h - e)^2 + 2 b^2 F_2 (a + e)^2 \\ &\quad + 2 F_4 [c(h - e) + b(h + e)]^2 \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

J_1, J_2 et J_4 sont les moments d'inertie des parois 1, 2 et 4 par rapport à l'axe passant par le centre de gravité et perpendiculaire à leur plan. F_1, F_2 et F_4 sont les surfaces des sections des parois correspondantes.[9]

Section asymétrique en I *(fig. 7).*

$$\left.\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= -2\,[J_1 e - J_2 (h - e)] \\ B_\varphi &= J_1 e^2 + J_2 (h - e)^2. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

J_1 et J_2 sont les moments d'inertie des membrures 1 et 2 par rapport à l'axe des x.

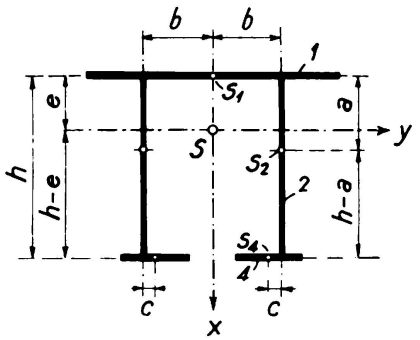


Fig. 6.

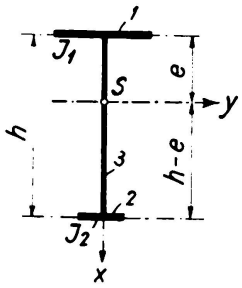


Fig. 7.

Section en T *(fig. 8).*

$$\left.\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= -2 J_1 e \\ B &= J_1 e^2. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

J_1 est le moment d'inertie de la paroi 1 par rapport à l'axe des x.

Cornière à ailes égales (fig. 9).

$$\left.\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 2\sqrt{2}\, e J_x \\ B_\varphi &= 2 e^2 \left(J - \frac{F b^2}{16}\right) \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

J_x est ici le moment d'inertie par rapport à l'axe des x et F la surface de la section de la cornière.

[9] Lorsque le centre de gravité des deux membrures inférieures se trouve en dehors de l'âme, il faut introduire c négatif.

Les développements généraux servant de base aux calculs précédents, furent établis en admettant une épaisseur de paroi variable. Les formules obtenues (22) à (27) sont par conséquent aussi valables pour les poutres ordinaires rivées dont les parois sont renforcées par places au moyen de cornières ou d'autres profilés.

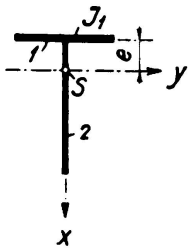


Fig. 8.

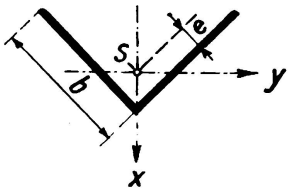


Fig. 9.

Dans ce cas il faut calculer les distances du centre de gravité a_i, les moments d'inertie J_i et les surfaces F_i pour les sections de parois renforcées. Les distances a, b, c, etc. sont toujours à ramener au plan médian de la paroi. Les moments d'inertie principaux J_x et J_y sont à déterminer suivant la méthode connue.

Section fermée suivant la fig. 10.

Les parties supérieures doivent être considérées comme une paroi distincte car, au point de vue de la transmission des efforts tranchants, elles se comportent autrement que celles d'un cadre fermé constitué de 4 parois en forme de caisson. Nous admettons qu'il y a symétrie par rapport à l'axe des x.

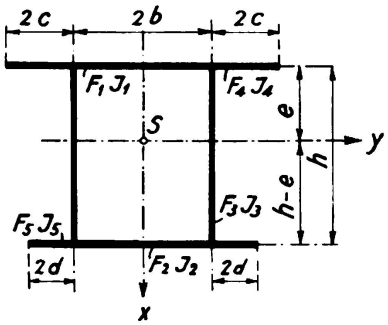


Fig. 10.

La détermination de J_d dans l'expression du travail A_i exige d'abord la détermination des efforts tranchants T_i. Ces efforts tranchants n'agissent que dans le cadre rectangulaire fermé, formé des quatre parois 1, 2, 3 et 4. Par suite de la conservation de l'équilibre des forces normales dans les quatre arêtes du cadre, ces efforts tranchants doivent être égaux dans ces quatre parois. Il n'y a par conséquent qu'une inconnue à déterminer, d'après l'équation (17), comme fonction de l'angle de rotation φ. On obtient ainsi:

$$\frac{T}{G}\left[\frac{b}{\delta_1}+\frac{b}{\delta_2}+\frac{2h}{\delta_3}\right]-2hb\varphi'=0$$

d'où

$$T=\beta G\varphi' \qquad \text{avec} \qquad \beta=\frac{2hb}{\frac{b}{\delta_1}+\frac{b}{\delta_2}+\frac{2h}{\delta_3}} \tag{28}$$

D'après l'équation (21') on obtient ainsi

$$J_d = \frac{4\,h^2\,b^2}{\frac{b}{\delta_1} + \frac{b}{\delta_2} + \frac{2\,h}{\delta_3}} \quad [10] \tag{29}$$

Le calcul des grandeurs B_x, B_y et B_φ se fait de la même façon que pour des section ouvertes. Comme l'expression de la courbure $\overline{K}_i$ par suite de la flexion, contient aussi les efforts tranchants T_i, on a aussi dans les fonctions B de la section des termes qui dépendent des efforts tranchants T. On obtient avec les désignations de la fig. 10:

$$\left.\begin{aligned}
B_x &= 0 \\
B_y &= 2\Big[-(J_1 + 2\,J_4)\,e + (J_2 + 2\,J_5)\,(h - e) + \frac{F_3}{4}\,b^2\,(h - 2\,e) - \\
&\quad - \frac{F_4}{2}\,(b + c)^2\,e + \frac{F_5}{2}\,(b + d)^2\,(h - e)\Big] \\
B_\varphi &= (J_1 + 2\,J_4)\,e^2 + (J_2 + 2\,J_5)\,(h - e)^2 + 2\,J_3\left(\frac{\beta}{\delta_3} - \frac{b}{2}\right)^2 + \\
&\quad + \frac{F_3}{8}\,b^2\,(h - 2\,e)^2 + \frac{F_4}{2}\,(b + c)^2\,e^2 + \frac{F_5}{2}\,(b + d)^2\,(h - e)^2
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

On a observé que F_1, J_1 et F_2, J_2 sont les surfaces et les moments d'inertie des parois 1 et 2 de hauteur 2b et que F_4, J_4 et F_5, J_5 sont les surfaces et les moments d'inertie des parois extérieures 4 et 5 de hauteur 2c et 2d.

Dans les poutres rivées il faut tenir compte de la variation de la section à l'intérieur des différentes parois en introduisant pour δ_i dans les expressions de B, J_d et B_φ une valeur moyenne $\delta_{im} = \frac{F_i}{h_i}$. Ce que nous avons dit pour les barres avec section ouverte est valable pour F_i, J_i et a_i.

4° — Equations différentielles de la flexion et torsion.

Soient p_x et p_y les surcharges extérieures continues ou discontinues dans la direction des axes principaux x et y et M_d le moment de torsion des forces extérieures où p_x, p_y et M_d sont à considérer comme fonctions de l'ordonnée z. Pour le travail extérieur A_a on a l'expression.

$$A_a = \frac{1}{2}\int_0^l [p_x\,x + p_y\,y - M_d\,\varphi']\,dz \tag{31}$$

A_a est une fonction linéaire des déplacements x, y, φ.

La condition d'équilibre $\delta\,(A_i - 2\,A_a)$, équation (3), s'exprime par conséquent, lorsque l'on introduit A_i de l'équation (10),

---

[10] L'équation (28) concorde avec la formule connue, tirée de la théorie de l'élasticité, pour le cadre rectangulaire. Cf. *A.* et *L. Föppl:* „Drang und Zwang", 2e vol. 2e édition, Munich et Berlin.

$$\left.\begin{aligned}\delta\int_0^l\Big[\frac{E}{2}\,(J_y x''^2 + J_x y''^2 + B_x x''\varphi'' + B_y y''\varphi'' + B_\varphi \varphi''^2) + \frac{G}{2} J_d \varphi'^2 - \\ - p_x x - p_y y + M_d \varphi'\Big]\,dz,\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

où nous admettons que la force normale $S = 0$ et c'est pourquoi on a aussi $\varepsilon_m = 0$. On obtient trois équations différentielles simultanées

$$\left.\begin{aligned}&EJ_y \frac{d^4 x}{dz^4} + \frac{EB_x}{2}\frac{d^4\varphi}{dz^4} - p_x = 0\\ &EJ_x \frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{EB_y}{2}\frac{d^4\varphi}{dz^4} - p_y = 0\\ &\frac{EB_x}{2}\frac{d^4 x}{dz^4} + \frac{EB_y}{2}\frac{d^4 y}{dz^4} + EB_\varphi \frac{d^4\varphi}{dz^4} - GJ_d \frac{d^2\varphi}{dz^2} - \frac{dM_d}{dz} = 0\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Par une transformation des coordonnées on peut simplifier l'équation (33) d'une façon appréciable. Exécutons la transformation:

$$x = \bar{x} - \frac{B_x}{2J_y}\varphi, \qquad y = \bar{y} - \frac{B_y}{2J_x}\varphi$$

c'est-à-dire que l'on déplace l'axe des z, parallèlement à l'axe passant par le centre de gravité, de

$$s_x = \frac{B_y}{2J_x}, \qquad s_y = -\frac{B_x}{2J_y} \quad (34)$$

et désignons par $\overline{M}_d$ le moment de torsion des forces extérieures par rapport au nouvel axe, les équations (33) se modifient en

$$\left.\begin{aligned}&EJ_y \frac{d^4\bar{x}}{dz^4} - p_x = 0\\ &EJ_x \frac{d^4\bar{y}}{dz^4} - p_y = 0\\ &E\left[B_\varphi - \frac{B_x^2}{4J_y} - \frac{B_y^2}{4J_x}\right]\frac{d^4\varphi}{dz^4} - GJ_d \frac{d^2\varphi}{dz^2} - \frac{d\overline{M}_d}{dz} = 0\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Les deux premières équations sont indépendantes de φ et, dans leur forme, sont identiques aux équations différentielles de la théorie de *Navier*. La troisième relation est indépendante de $\bar{x}$ et $\bar{y}$. La transformation des axes principaux que nous avons exécutée, permet ainsi de traiter séparément dans tous les cas la flexion et la torsion et donne ainsi un aperçu clair sur les processus de déformation et sur la répartition des contraintes.

D'après la dernière des équations (35) on peut voir que pour $\overline{M}_d = 0$ la rotation φ est nulle. Si d'autre part $p_x = p_y = 0$, $\bar{x}$ et $\bar{y}$ disparaissent, l'axe de la barre reste droit et toute la barre tourne d'un angle φ. Dans ce cas l'axe avec coordonnées au centre de gravité s_x et s_y d'après l'équation (34), est l'axe de rotation dans la torsion de la barre. Nous voulons le désigner par *axe de torsion*. Son point d'intersection avec la section est appelé *centre de cisaillement*

ou *centre des efforts tranchants*. Il fut déterminé la première fois pour un fer en [. Sa signification fondamentale pour le calcul des formes de section dont il est question ici n'est apparue avec précision qu'après avoir effectué la transformation dont nous avons parlé.

D'après les équations (35) nous pouvons justement déterminer le comportement général des barres élancées, constituées de parois minces: Admettons que les forces extérieures passent par l'axe de torsion, qui généralement ne coïncide pas avec l'axe de gravité, il ne se produit que des contraintes de flexion et aucune contrainte de torsion. Le calcul des déformations et des contraintes se fait sur la base de la première des équations (35), donc comme d'après la theorie de *Navier*, pour des surcharges qui passent par l'axe de gravité. Dans tous les autres cas de charge il se produit aussi bien des contraintes de flexion que des contraintes de torsion, même lorsque p_x et p_y disparaissent. Si la section possède un axe de symétrie, le centre des efforts tranchants se trouve sur cet axe. Lorsque l'on a deux axes de symétrie, l'axe de torsion coïncide avec l'axe de gravité.

Les équations (34) et (35) sont aussi bien valables pour les sections ouvertes que pour les fermées. Dans la détermination des fonctions de la section: J_d, B_x, B_y et B_φ seulement, il faut voir s'il s'agit d'une section à composition simple ou multiple.

Pour les applications courantes on peut amener par intégration les équations à la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} & EJ_y \frac{d^2x}{dz^2} + M_y = 0 \\ & EJ_x \frac{d^2y}{dz^2} + M_x = 0 \\ & E\left[B_\varphi - \frac{B_x^2}{4J_y} - \frac{B_y^2}{4J_x}\right]\frac{d^3\varphi}{dz^3} - GJ_d \frac{d\varphi}{dz} - \overline{M}_d = 0 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

M_x et M_y sont les moments des forces extérieures dans les plans z_y et z_x; φ est ainsi défini par l'équation différentielle du troisième ordre

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} - \alpha^2 \frac{d\varphi}{dz} - \frac{M_d}{\gamma} = 0 \tag{37}$$

où

$$\alpha^2 = \frac{GJ_d}{\gamma} \quad \text{et} \quad \gamma = E\left[B_\varphi - \frac{B_x^2}{4J_y} - \frac{B_y^2}{4J_x}\right] \tag{37'}$$

La solution de l'équation de torsion (37), dépendante du mode de surcharge et des conditions d'appui, ne dépend de la forme de la barre que par les paramètres α et γ qui se présentent comme constantes dans la solution. Les solutions de l'équation (37), aussi bien que les solutions de flexion de *Navier*, peuvent être établies indépendamment de la section de la barre. La relation (37) est une généralisation de l'équation différentielle établie par *Timoschenko* pour la torsion des poutres symétriques en I.

Pour terminer ces explications générales, nous voudrions encore faire quelques remarques sur l'hypothèse que nous avons faite au début sur l'invariabilité

de la forme de la section. Réunissons trois parois en une barre, nous nous rendons facilement compte que chacune de ces parois peut subir de petites déformations quelconques dans son plan sans que la liaison entre les parois soit supprimée et sans que l'angle formé par deux parois varie. Lorsque l'on a plus de trois parois, d'une façon générale n parois, n — 3 angles varient lorsque l'on prévoit que les différentes parois se déformeront dans leurs plans. De ces considérations il résulte que, dans les barres en forme de ⊥, L, [, I et ⅂, la condition de la conservation de la forme de la section est remplie car, lors des déformations que subissent les différentes parois sous l'effet de la surcharge, il n'existe aucune obligation de modifier la forme de la section. Dans les barres composées de quatre ou d'un nombre plus grand de parois, que la section soit à composition simple ou multiple, il faut prendre des mesures telles que la forme de la section soit conservée. Il suffit en général de disposer de place en place des cloisons transversales. Au point de vue pratique elles ne sont évidemment nécessaires que là où la surcharge, par des effets de torsion importants, engendre de fortes variations des angles formés par les différentes parois.

Si l'on relie deux parois d'une barre par des contrefiches, ainsi par exemple que le représente la fig. 11, on peut calculer une telle barre comme barre fermée. Dans le cas de la fig. 11a, lors de la détermination des valeurs B d'après les formules (30), il faut poser $J_2 = 0$ et $F_2 = 0$ pour les parois du treillis. Dans le cas de la fig. 11b il faut introduire pour J_2 le moment d'inertie des

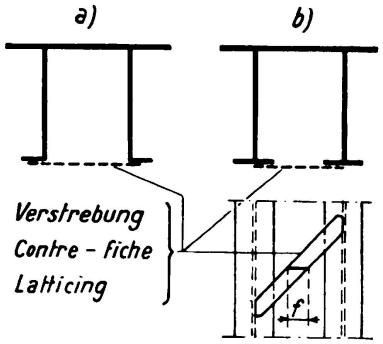


Fig. 11.

parois de treillis se trouvant entre les deux âmes et pour F_2 la surface des plaques qui sont entre les deux âmes. Dans le calcul de l'effort tranchant T au moyen de la relation (28) et de J_d suivant l'équation (29), il faut poser δ_2 égal à l'épaisseur de tôle idéale que l'on obtient en répartissant la section f d'une contre-fiche (fig. 11b) sur toute la hauteur 2b de la paroi.

5° — Détermination des contraintes lors de flexion et de torsion.

Les contraintes dans la fibre extrême, engendrées par les moments M_x et M_y sont calculées de la manière usuelle, comme si les charges passaient par l'axe de gravité de la barre. Supposons que $\overline{M}_d$ n'est pas égal à zéro, c'est-à-dire que les charges ne passent pas exactement par l'axe de torsion, la troisième des équations (35), respectivement (37) est à intégrer, après l'introduction de $\overline{M}_d$ comme fonction de z, en tenant compte des conditions d'appui. Si φ est connu en fonction de z, on peut déterminer les contraintes additionnelles dans

la fibre extrême et les efforts tranchants engendrés par la torsion. Dans ce but, on calcule la courbure des différentes parois de la barre suivant les équations (8′) et (20″) où x et y sont les déplacements subis par l'axe de gravité lorsque la barre tourne d'une angle φ autour de l'axe de torsion. Il faut introduire ainsi dans les relations (8′) et (20″) les déplacements $x = s_y\varphi$ et $y = -s_x\varphi$ de telle sorte que d'une façon générale on a:

$$K_i = \left[s_y \sin \psi_i + s_x \cos \psi_i + \left(\frac{\beta_i}{\delta_i} - \rho_i\right)\right] \varphi'' \tag{38}$$

Pour les barres à section ouverte $\beta_i = 0$.

Les contraintes σ_i dans la fibre extrême de la paroi i sont déterminées par les relations:

$$\sigma_i = E\ (\varepsilon_i + \eta K_i) \tag{39}$$

où η est la distance de la fibre extrême, au centre de gravité de la paroi. η est à considérer comme positif dans la direction positive $x \longrightarrow y$.

Introduisons dans l'équation (38) les longueurs e, s_x, b etc., on obtient pour K_i des expressions de la forme $K_i = \mu_i \varphi''$.

On calcule ainsi à l'aide de l'équation (5′) les valeurs ε_i qui prennent aussi la forme $\varepsilon_i = \nu_i \varphi''$. Toutes les valeurs numériques sont ainsi connues et l'on peut, au moyen de l'équation (39), calculer les contraintes normales σ_i dans les points extrêmes considérés. Il faut ici remarquer ce qui suit: Alors que jusqu'à présent toutes les mesures prises en considération, a, b, e, s etc. se rapportent au plan médian des parois, les η sont à prendre pour les surfaces extrêmes et extérieures des parois. Dans un angle tel que celui représenté à la fig. 12 par exemple, le calcul des contraintes doit se faire avec les distances

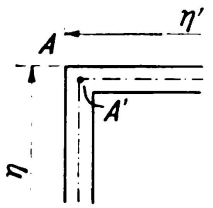


Fig. 12.

η et η', suivant que l'on détermine la contrainte à l'angle A dans la paroi verticale ou horizontale. Les deux contraintes calculées ainsi ne concordent pas exactement car la solution du problème proposé part de l'hypothèse de parois infiniment minces. Le calcul ne concorderait que pour le point d'intersection A′.

Les contraintes normales σ, engendrées par la torsion, sont finalement à combiner avec les contraintes σ, engendrées par les moments M_x et M_y et calculées par la méthode habituelle.

Les efforts tranchants de torsion sont à calculer pour chaque paroi de barre *à section ouverte* suivant la formule:

$$\tau_i = G\,\varphi' \max \delta_i \tag{40}$$

max δ_i est l'épaisseur la plus grande de la paroi considérée. Dans les barres

à section fermée on obtient les efforts tranchants déterminants T_i d'après la relation:

$$\tau_i = \frac{T_i}{\min \delta_i} \tag{41}$$

min δ_i est ici l'épaisseur la plus faible de la paroi considérée.

Afin de contrôler l'exactitude de la théorie que nous venons de développer, nous allons comparer les mesures de contraintes effectuées par Bach sur un NP [30 avec les contraintes fournies par le calcul exact basé sur les équations que nous avons établies ici. La poutre d'essai avait une longueur de 3 m et elle était chargée aux tiers de la longueur pas des forces de 1500 kg, verticales, ainsi que la fig. 13 le représente en coupe. La grandeur et l'allure des contraintes normales dans les ailes supérieure et inférieure du fer en [sont représentées sur la même figure. La concordance entre les contraintes mesurées et

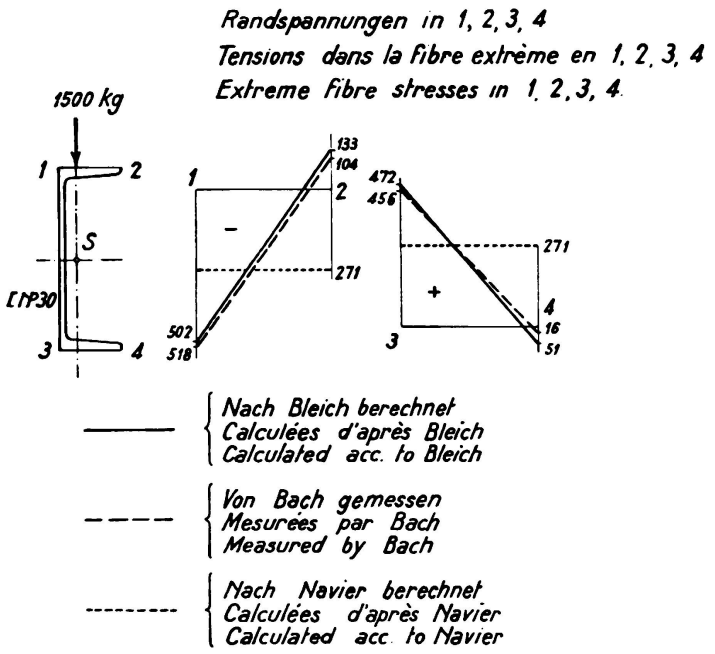


Fig. 13.

calculées est satisfaisante. Dans les diagrammes de contrainte nous avons aussi reporté à titre de comparaison la contrainte de flexion de 271 kg/cm², uniformément répartie, et calculée suivant la méthode courante. Remarquons encore que les points de mesurage 1 à 4 se trouvaient éloignés de 5 mm de la surface extérieure des deux ailes. Dans le calcul des contraintes on a tenu compte de cette position des points.[11]

6° — Les équations différentielles du problème de flambage.

Supposons une barre droite chargée d'une force longitudinale S agissant dans son axe de gravité. Remarquons que la barre est d'abord comprimée de ε_m sous

[11] L'essai de *Bach* fut contrôlé par *G. Weber* au moyen des formules établies par lui pour les barres à deux membrures.

l'effet de S. Pour le fléchissement, après l'atteinte de la limite de stabilité, on a pour le travail extérieur, l'expression connue:

$$A_a = \int_0^l \left[\frac{1}{2} S \varepsilon_m + \frac{1}{2} S (x'^2 + y'^2) \right] dz$$

Pour le problème de flambage simple que nous considérons ici, il suffit de prendre l'équation (10) comme expression du travail intérieur. On peut y négliger les grandeurs de déformation d'un plus haut degré de petitesse. La condition de variation (3), lorsque l'on observe que le terme $\frac{1}{2} S \varepsilon_m$ en A_a peut aussi être remplacé par $\frac{E}{2} F \varepsilon_m^2$ à cause de $S = E F \varepsilon_m$, est:

$$\delta \int_0^l \left[\frac{E}{2} \left(J_y x''^2 + J_x y''^2 + B_x x'' \varphi'' + B_y y'' \varphi'' + B_\varphi \varphi''^2 + \frac{G}{E} J_d \varphi'^2 \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} S (x'^2 + y'^2) \right] dz = 0.$$

La variation fournit les trois équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} & E J_y \frac{d^4 x}{dz^4} + \frac{E B_x}{2} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + S \frac{d^2 x}{dz^2} = 0, \\ & E J_x \frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{E B_y}{2} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + S \frac{d^2 y}{dz^2} = 0, \\ & \frac{E B_x}{2} \frac{d^4 x}{dz^4} + \frac{E B_y}{2} \frac{d^4 y}{dz^4} + E B_\varphi \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - G J_d \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

qui après avoir été intégrées deux fois ont la forme:

$$\left.\begin{aligned} & E J_y \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{E B_x}{2} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + S x = 0, \\ & E J_x \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{E B_y}{2} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + S y = 0, \\ & \frac{E B_x}{2} \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{E B_y}{2} \frac{d^2 y}{dz^2} + E B_\varphi \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - G J_d \varphi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Avec ces trois équations différentielles simultanées, le problème du flambage des barres à parois minces sous sa forme générale est liquidé. Les équations (43) nous permettent de dire ce qui suit: Lorsque la section de la barre ne possède aucun axe de symétrie, c'est-à-dire que B_x aussi bien que B_y sont différents de zéro, il se produit une rotation de la barre car φ ne disparaît pas. Si la section a un axe de symétrie, la barre flambe, suivant les rapports de rigidité, dans la direction de l'axe de symétrie ou perpendiculairement à cet axe. Dans ce dernier cas la barre se tord aussi.

Afin d'acquérir un plus ample aperçu du comportement de telles barres, faisons des recherches sur une barre de longueur l, dont la section est symétrique par rapport à l'axe des x. La barre a des articulations à ses deux extrémités

pour permettre le flambage dans la direction de l'axe des y et elle est assurée contre une rotation autour de l'axe des z.

En posant

$$y = C_1 \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad \varphi = C_2 \sin \frac{n\pi z}{l} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

on obtient, après introduction dans la deuxième et la troisième équation (43), la condition de flambage

$$\begin{vmatrix} \left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} EJ_x + S\right) & -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \frac{EB_y}{2} \\ -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \frac{EB_y}{2} & \left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} EB_\varphi + GJ_d\right) \end{vmatrix} = 0.$$

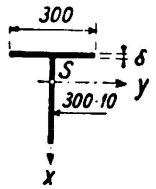
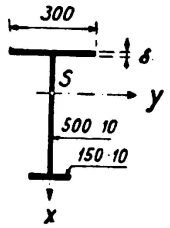
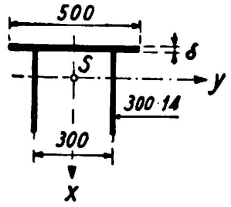
Avec l'abréviation $S_E = \frac{n^2\pi^2 EJ_x}{l^2}$ on obtient après le calcul des déterminants la charge de flambage

$$S_K = S_E \left(1 - \frac{B_y^2}{4 J_x \left(B_\varphi + \frac{J_x G J_d}{S_E}\right)}\right) \tag{44}$$

On obtient la plus petite valeur avec $n = 1$, lorsque donc $S_E = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}$. *La résistance effective au flambage, perpendiculairement à l'axe de symétrie, est par conséquent plus petite que la charge calculée d'après Euler.* Recherchons l'ordre de grandeur du deuxième terme de la parenthèse, on trouve que pour certaines formes de section en T et en I asymétrique, on obtient des réductions importantes de la charge de flambage calculée suivant la methode ordinaire.[12] Dans le tableau qui suit nous avons donné S_K calculé d'après l'équation (44) pour quelques formes de section. Les chiffres furent calculés en admettant que la contrainte de flambage σ_k, déterminée d'après *Euler,* est exactement de 2000 kg/cm². Lorsque l'élancement de la barre croît, S_K se rapproche de la charge d'*Euler.* L'influence de la résistance à la torsion de la barre est très importante. Plus cette résistance est grande plus la charge S_K devient grande. Son influence croît avec l'accroissement du degré d'élancement. Dans les sections fermées, la différence entre S_K et S_E est très faible à cause de la forte résistance à la torsion.

Lorsque la charge s'éloigne du centre de gravité de la barre vers le centre des efforts tranchants qui par exemple pour une section en T se trouve à l'intersection des deux parois, S_K croît d'une façon constante, comme nous le démontrerons ensuite, et atteint la valeur maxima S_E lorsque la charge agit exactement dans l'axe de torsion. Pour un flambage latéral d'une barre de la forme considérée l'axe de gravité et l'axe de torsion ont intervertis leur rôle. Si dans une section en ⊥ l'âme est haute on devrait par conséquent avoir, d'après les considérations que nous venons d'énoncer, une résistance plus grande que celle

[12] Cette réduction de la résistance a été déterminée par *Ostenfeld.* Voir le travail cité à la note [5], page 17.

Forme de section	Rapport de la force S_K lors du flambage dans la direction y à la force d'Euler S_E			
	$\delta^{mm} =$	10	20	30
	$\frac{S_K}{S_E} =$	0,699	0,930	0,974
	$\delta =$	10	20	30
	$\frac{S_K}{S_E} =$	0,691	0,724	0,883
	$\delta =$	10	20	40
	$\frac{S_K}{S_E} =$	0,534	0,703	0,942

que l'on obtient par le calcul habituel en tenant compte de l'excentricité de la force.

Nous faisons expressément remarquer que le développement et les conclusions que nous avons donnés, ne sont valables que pour le cas du flambage élastique.

7° — Les équations différentielles du problème de basculement.

Par basculement nous entendons l'apparition d'un état d'équilibre instable dans une barre sollicitée à la flexion. Il est caractérisé par le fait qu'avec apparition de l'équilibre instable la barre subit en même temps une torsion et s'écarte latéralement, c'est-à-dire perpendiculairement au plan de la flexion. Afin de simplifier cette représentation, considérons seulement des barres dont la section n'a qu'un axe de symetrie et qui sont chargées dans le plan x—z. La barre s'écartera dans la direction de l'axe y lorsque J_x est sensiblement plus petit que J_y ainsi que cela est par exemple le cas pour une poutre chargée dans le plan de l'âme.

Soit p_x la charge agissant dans le plan x—z, M_y le moment de flexion engendré par cette charge, S une des forces extérieures longitudinales agissant dans l'axe de la barre, «a» la hauteur du point d'application de la charge p au-dessus du centre de gravité de la section (voir fig. 14) où a peut aussi être négatif. Le travail total des forces extérieures, c'est-à-dire le travail à l'état d'équilibre stable et instable est déterminé par l'expression

$$A_a = \frac{1}{2}\int\left[\frac{M_y^2}{EJ_y} + S\varepsilon_m + Sy'^2 + a p_x \varphi^2\right] dz$$

Quant au travail intérieur A_i nous devons retourner à l'équation (12) car l'in-

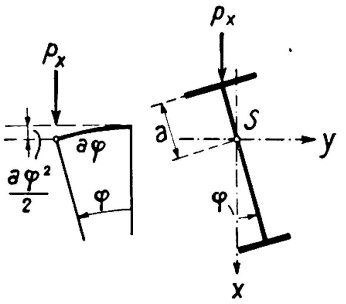


Fig. 14.

fluence des termes de déformation d'un ordre supérieur ne peuvent plus être négligés. Par conséquent la condition de variation (3), prend la forme suivante, lorsque l'on remarque que $B_x = 0$ à cause de la symétrie que nous avons admise:

$$\delta \frac{1}{2} \int_0^l \Big[E \Big(J_y (x'' + y''\varphi)^2 + J_x (x''\varphi - y')^2 + B_y (x''\varphi - y'')\varphi'' + B_\varphi \varphi''^2 + F \varepsilon_m^2 + \\ + \frac{G}{E} J_d \varphi'^2 \Big) - \Big(\frac{M_y^2}{E J_y} + S \varepsilon_m + S y'^2 + a p_x \varphi^2 \Big) \Big] dz \tag{45}$$

Les variations des grandeurs x et ε_m lors du basculement sont petites par rapport aux grandeurs de déplacement y et φ qui ne se présentent que lors du basculement. Pour la variation nous considérons par conséquent les grandeurs x et ε_m comme invariables; elles conservent lors du basculement les valeurs $x'' = -\frac{M_y}{EJ_y}$ et $\varepsilon_m = \frac{S}{EF}$ qu'elles avaient exactement avant l'apparition de l'état instable. Introduisons ces valeurs de x et ε_m dans l'équation (45) on obtient la condition suivante dans laquelle nous avons supprimé tous les termes de plus que le deuxième ordre de petitesse

$$\delta \frac{1}{2} \int_0^l \Big[E J_x y''^2 - E B_y y'' \varphi'' + E B_\varphi \varphi''^2 + G J_d \varphi'^2 - 2 \Big(1 - \frac{J_x}{J_y}\Big) M_y y'' \varphi - \\ - a p \varphi^2 - S y'^2 \Big] dz.$$

Si l'on varie suivant y et φ, on arrive aux deux équations différentielles simultanées:

$$\left.\begin{aligned} & E J_x \frac{d^4 y}{dz^4} - \frac{E B_y}{2} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \Big(1 - \frac{J_x}{J_y}\Big) \frac{d^2}{dz^2} (M_y \varphi) + S \frac{d^2 y}{dz^2} = 0, \\ & -\frac{E B_y}{2} \frac{d^4 y}{dz^4} + E B_\varphi \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \Big(1 - \frac{J_x}{J_y}\Big) M_y \frac{d^2 y}{dz^2} - G J_d \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - a p_x \varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Avec ces relations on a résolu en principe le problème du basculement des barres qui possèdent au moins un axe de symétrie.[13]

Pour le cas spécial le plus simple, S et M_y constants, $p_x = 0$, on trouve, pour

[13] Si l'on pose $B_y = 0$, c'est-à-dire, si l'on admet que la section a deux axes de symétrie, on peut éliminer la fonction y dans le cas spécial $S = 0$ et l'on obtient l'équation différentielle du troisième ordre, établie par *Timoschenko* pour le problème de basculement de la poutre en I.

une barre de longueur l, assurée à ses extrémités contre une rotation autour de l'axe z mais qui peut tourner librement autour de l'axe x, avec

$$y = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}, \qquad \varphi = C_2 \sin \frac{\pi z}{l}$$

la condition de stabilité

$$\left(EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} - S\right)\left(EB_\varphi \frac{\pi^2}{l^2} + GJ_d\right) - \left[\frac{EB_y}{2} \frac{\pi^2}{l^2} - \left(1 - \frac{J_x}{J_y}\right) M_y\right]^2 = 0 \qquad (47)$$

De cette équation on peut déterminer S ou M_y. Supposons que les moments M_y sont engendrés par le fait que la force S n'agit pas au centre de gravité mais à la distance $e = \frac{M_y}{S}$, on se trouve en présence d'un cas de flambage par compression excentrique. Avec $S_E = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}$ et $\left(1 - \frac{J_x}{J_y}\right) \approx 1$ l'équation (47) prend la forme simplifiée:

$$(S_E - S)\left(EB_\varphi \frac{\pi^2}{l^2} + GJ_d\right) - \left(\frac{B_y}{2J_x} S_E - Se\right)^2 = 0 \qquad (48)$$

$\frac{B_y}{2J_x} = s_x$ est la distance comprise entre le centre des efforts tranchants et le centre de gravité. Choisissons $e = s_x$, c'est-à-dire faisons agir la force normale S au centre des efforts tranchants, $S = S_E$ devient un maximum et égal à la force de flambage d'*Euler*. Avec ceci nous avons démontré l'assertion que nous avions émise dans le paragraphe précédent.

Résumé.

La théorie ordinaire de la flexion et de la torsion des barres droites repose sur deux hypothèses: 1° Les contraintes normales qui se produisent lors de la flexion sont des fonctions linéaires des coordonnées x et y de la section. 2° Dans le cas de la torsion pure, les contraintes normales sont nulles si l'on néglige les petites grandeurs de deuxième ordre. Ces hypothèses ne sont pas toujours remplies dans les barres composées de parois minces. En partant de l'hypothèse que, dans chaque paroi qui compose la barre, les principes de la théorie de la flexion de *Navier* sont valables, nous avons établi, à l'aide d'un principe de variation, les équations différentielles de la flexion et de la torsion des barres prismatiques. Les équations sont en général valables, aussi bien pour les barres à section ouverte que pour les barres à section fermée, pour les section à compositions simple ou multiple. Par une transformation appropriée des coordonnées, il est possible de traiter séparément la flexion et la torsion. Cette transformation explique aussi la signification du centre des efforts tranchants.

Après avoir exposé d'une façon générale la détermination des contraintes pour la flexion et la torsion nous avons développé, dans leur forme la plus générale, les équations différentielles du problème de flambage des formes de barres prises en considération et nous avons traité le cas simple du flambage d'une barre avec section à un axe de symétrie. On a observé qu'une barre chargée centriquement a une force de flambage qui peut se trouver bien en dessous de la charge d'*Euler*. Pour terminer nous avons établi les équations différentielles du basculement pour les barres dont les sections ont au moins un axe de symétrie. Ici nous avons démontré que lorsqu'une barre est chargée par une force normale S passant par l'axe de symétrie, la charge critique S_K atteint une valeur plus grande quand S passe par le centre des efforts tranchants.