

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Coupoles massives, réservoirs cylindriques et constructions semblables

Autor: Granholm, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-2955>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IVa 3

Coupoles massives, réservoirs cylindriques et constructions semblables.

Massive Kuppeln, zylindrische Behälter und ähnliche Konstruktionen.

Solid Domes, Cylindrical Reservoirs and Similar Constructions.

Dr. techn. H. Granholm,

Dozent an der Königlichen Technischen Hochschule, Stockholm.

Le calcul exact des contraintes de flexion dans une coupole massive est très compliqué. Un travail de doctorat¹ présenté à l'Ecole polytechnique de Stockholm fait ressortir ces difficultés et l'on peut se demander si l'Ingénieur occupé dans la pratique trouvera le temps et l'occasion de calculer les dimensions d'une coupole sur la base de la théorie exacte. L'établissement des équations fondamentales est déjà compliqué et leur intégration exacte conduit à des séries qui sont difficiles à manier et qui ne convergent que lentement. Alors que la convergence est satisfaisante pour bien des épaisseurs de paroi, une modification de cette épaisseur peut faire disparaître cette bonne convergence. Même lorsque l'Ingénieur possède à fond la théorie mathématique de ce problème, le calcul d'un cas de charge déterminé exige beaucoup trop de travail. Il serait tout-à-fait impossible d'arriver à une méthode pratique en partant du chemin suivi par *Meissner, Bolle, Dubois, Honegger, Ekström*, etc. Par exemple, pour les coupoles sphériques, on obtient lors de l'intégration dans les cas les plus simples, des séries hypergéométriques qui ne peuvent être pour l'Ingénieur un instrument exact à cause de leur lente convergence.

En considération de ces faits, il importe avant tout, pour le développement plus ample de la théorie des coupoles, de se diriger vers des solutions qui satisfassent les exigences de la pratique, même si l'on doit introduire certaines approximations. Ainsi que l'a montré *Geckeler*,² il est possible de trouver par des moyens mathématiques relativement simples, une solution qui ne s'éloigne que peu de la solution exacte et qui est simple et agréable à employer lorsque l'épaisseur de la paroi et le rayon sont constants. La bonne concordance entre la théorie de *Geckeler* et la théorie exacte nous permet d'expliquer plus exactement la théorie approchée, lorsque l'on est au clair sur les hypothèses que l'on

¹ John Erik Ekström: „Studien über dünne Schalen von rotationssymmetrischer Form und Belastung mit konstanter und veränderlicher Wandstärke“. Stockholm 1932.

² cf. par ex. „Handbuch für Eisenbetonbau“, 6^e vol., Berlin 1928.

introduit. On s'approche encore un peu plus de la théorie exacte en employant le procédé d'intégration asymptotique de *Blumenthal* et *Steuermann*, ce qui peut se faire même lorsque l'épaisseur de la paroi est variable. Ce procédé représente un gros progrès par rapport aux méthodes qui sont basées sur des solutions en forme de séries infinies, où l'on doit toujours supposer que l'épaisseur de la paroi varie suivant une fonction déterminée pour obtenir une solution.

Un examen plus approfondi des équations finales données par *Geckeler* montre que ces équations sont exactement du même type que celles pour une poutre sur appuis élastiques. L'analogie physique n'est pas non plus difficile à remarquer. On peut considérer comme une poutre le méridien de la coupole qui est soutenu par les cercles parallèles ou ceintures. Comme ceux-ci se laissent comprimer ou étirer ils correspondent au point de vue statique à des appuis élastiques.

Cette conception nous fait voir la statique de la coupole avec une exactitude suffisante. Pour l'établissement des équations d'équilibre, il n'est plus nécessaire de reprendre les équations différentielles de *Meissner* et il est possible de poser directement et simplement les équations nécessaires à l'aide de la théorie des poutres sur appuis élastiques. Ceci signifie, pour l'Ingénieur qui est dans la pratique qu'il n'a plus besoin de s'efforcer tout d'abord de comprendre la théorie classique, assez compliquée, de la coupole; de plus il peut établir de lui-même les équations nécessaires.

Les travaux de *Geckeler* montrent qu'il n'a lui-même pas complètement saisi la haute signification des approximations qu'il propose; c'est-à-dire qu'il n'a pas compris qu'en gros la coupole agit comme une série continue de poutres sur appuis élastiques. La manière de voir que je propose peut naturellement être étendue en ce sens que l'on peut considérer le méridien non comme une poutre mais comme un arc appuyé élastiquement sur les éléments annulaires de la coupole.

Par l'introduction de cette conception plus exacte, on obtient un aperçu plus juste de la statique de la coupole et les équations que l'on obtient ainsi sont les mêmes que celles de *Meissner*.

Il est notoire que spécialement dans les coupoles très plates, où par conséquent l'effet de voûte dans les éléments de méridien est très marqué, il est nécessaire d'introduire cette dernière manière de voir afin d'obtenir l'exactitude désirée. Plus la tangente à la coupole au droit de l'appui est inclinée, plus sera exacte la conception du méridien en tant que poutre sur appuis élastiques et dans le cas spécial où la tangente à la coupole est partout verticale, c'est-à-dire lorsque la coupole se transforme en un cylindre, cette manière de voir est tout-à-fait exacte.

Afin de faire mieux voir la simplicité du problème de la coupole traité de cette façon, j'ai calculé quelques problèmes et j'ai comparé les résultats ainsi obtenus avec ceux de la théorie exacte. La concordance est partout étonnamment bonne.

Comme premier exemple, choisissons une coupole sphérique de béton armé d'épaisseur constante, $\delta = 16$ cm, de rayon $r = 1000$ cm et d'angle d'ouverture 40° . Supposons que la coupole soit chargée par un liquide à la pression constante $p = 1,0 \text{ kg/cm}^2$ et que l'arête soit complètement encastrée (fig. 1).

Si l'on calcule les contraintes dans cette coupole d'après la théorie des membranes, on obtient une compression dans le méridien $T_1 = \frac{p r}{2}$ et une compression dans les parallèles $T_2 = \frac{p r}{2}$. Ces contraintes dans le méridien et le parallèle sont constantes sur toute la coupole et la solution par la théorie des membranes

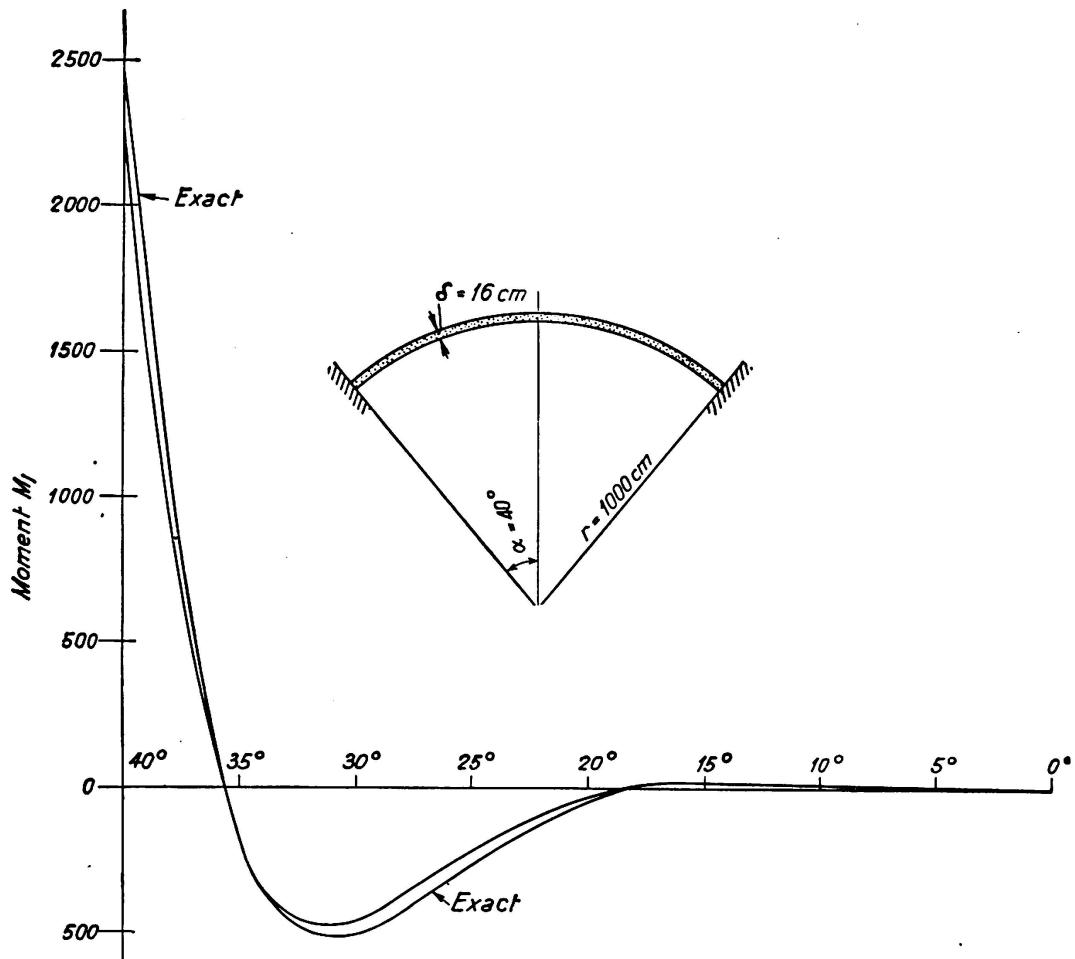


Fig. 1.

Comparaison entre la grandeur du moment méridien calculée d'abord d'après l'équation 5 et ensuite d'après la méthode exacte au moyen de séries hypergéométriques. Les écarts sont insignifiants pour la pratique.

est très simple. Sous l'effet de ces contraintes de compression T_1 et T_2 la coupole est comprimée de telle sorte que son rayon se réduit de $\frac{T \cdot r}{E \delta}$, c'est-à-dire $\frac{p r^2}{2 E \delta}$. Cette réduction du rayon n'est pas grande; dans notre exemple, pour $E = 210\,000 \text{ kg/cm}^2$, elle ne monte qu'à 0,15 cm. Mais comme la coupole est fixée tout autour de son arête, elle ne peut pas modifier librement sa forme; les parties situées près de l'arête conserveront le rayon primitif mais plus on s'éloigne de l'arête, plus la liberté de mouvement de la construction est grande et plus les déformations pourront se produire librement. Quoique dans notre

cas la compression soit relativement faible, il se produit cependant aux environs des arêtes certaines perturbations qui engendrent des moments d'un ordre de grandeur tel que l'on ne peut pas les négliger.

Nous voulons rechercher maintenant quels moments sont engendrés dans une poutre sur appuis élastiques lorsque l'on admet qu'elle subit un fléchissement correspondant à la valeur que nous avons calculée ci-dessus $\frac{pr^2}{E2\delta}$. La relation entre le moment et le fléchissement est donnée par l'équation:

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_1 \quad (1)$$

et l'influence de l'appui élastique des éléments de parallèle est exprimée par l'équation:

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} = \frac{E\delta}{r^2} \cdot y \quad (2)$$

Eliminons M_1 de ces deux équations, on obtient

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + \frac{E\delta}{r^2} \cdot y = 0 \quad (3a)$$

ou en admettant que la rigidité EJ est constante et égale à $\frac{Em^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{\delta^3}{12}$ on a:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4k^4 y = 0 \quad (3b)$$

où

$$k^4 = \frac{3(m^2 - 1)}{m^2} \cdot \frac{1}{r^2 \delta^2}$$

L'intégrale générale de l'équation 3b peut s'écrire sous la forme connue

$$y = e^{-kx} (A \cos kx + B \sin kx) + e^{kx} (C \cos kx + D \sin kx) \quad (4a)$$

c'est-à-dire que l'on peut considérer le fléchissement comme la somme de deux oscillations sinusoïdales, l'un avec amplitudes décroissantes et l'autre avec amplitudes croissantes. On peut poser en général que les coefficients C et D sont nuls en admettant que la poutre n'est pas trop courte et que l'origine peut être déplacée au point d'où part la perturbation. Pour les coupole fermées, on peut par conséquent écrire l'intégrale avec précision suffisante sous la forme:

$$y = e^{-kx} (A \cos kx + B \sin kx) \quad (4b)$$

Ici x désigne la longueur d'arc du méridien, mesurée à partir du bord de la coupole. Dans ce cas, il est facile de déterminer les constantes arbitraires en partant des conditions d'appui:

$$y = -\frac{pr^2}{2E\delta} \text{ et } y' = 0$$

on obtient:

$$A = B = -\frac{pr^2}{2E\delta}$$

et le fléchissement du méridien est ainsi

$$y = -\frac{pr^2}{2E\delta} \cdot e^{-kx} (\cos kx + \sin kx).$$

Après introduction de cette valeur dans l'équation 1 on obtient l'expression suivante pour le moment dans le méridien :

$$M_1 = \frac{\sqrt{3}}{12} \rho \delta e^{-kx} (-\cos kx + \sin kx) \quad (5)$$

Dans cette expression on a négligé la contraction du matériau c'est-à-dire que l'on a posé le nombre de Poisson $m = \infty$.

A l'aide des valeurs données dans le tableau I pour les fonctions $e^{-kx} \cos kx$ et $e^{-kx} \sin kx$, il est facile de représenter graphiquement l'équation 5. Dans la fig. 1, on voit très bien comment le moment dans le méridien M_1 varie avec l'éloignement du bord de la coupole. A titre de comparaison, nous avons donné les valeurs exactes calculées d'après la méthode de *Bolle* avec séries hypergéométriques.³ Ainsi que l'on peut le voir, la concordance entre les résultats exacts et les valeurs approximatives est étonnamment bonne c'est pourquoi il n'y a aucune raison de faire du problème de la coupole un travail mathématique étendu. Dans les coupole avec angle d'ouverture plus grand que dans notre cas, la concordance entre les valeurs exactes et approchées est encore meilleure. Seulement pour les coupole dont la pente aux appuis est très faible, l'influence des hypothèses que l'on a faites a une signification pratique. Remarquons en passant que de telles coupole ne sont pas appropriées, à cause des fortes perturbations qui se produisent à la liaison de la coupole à la ceinture d'appui.

Pour le calcul des contraintes dans la coupole, il n'y a pas que le moment dans le méridien qui rentre en ligne de compte mais aussi les moments dans le parallèle M_2 et l'accroissement des compressions dans le méridien et le parallèle qui en résulte, car les conditions d'appui ne correspondent pas aux hypothèses de la théorie des membranes. Ces grandeurs M_2 , ΔT_1 et ΔT_2 peuvent être calculées directement à partir des relations suivantes. La concordance entre les valeurs obtenues d'après la méthode approchée que nous donnons et celles obtenues par la méthode exacte est aussi très bonne, ainsi que l'on peut le voir d'après la comparaison donnée dans le tableau II.

L'établissement des expressions mathématiques pour les forces supplémentaires ΔT_1 et ΔT_2 se fait de la façon la plus simple par application de l'analogie, en considérant le méridien comme une poutre sur appuis élastiques. Le supplément de la compression dans le méridien, ΔT_1 , peut être considéré comme l'effort de cisaillement dans la poutre multiplié par $\cotg \alpha$, où α est l'angle formé par le méridien et le plan horizontal. On obtient

$$\Delta T_1 = \cotg \alpha EJ \cdot \frac{d^3 y}{dx^3}. \quad (6)$$

Le supplément de compression dans le parallèle ΔT_2 , est une mesure pour l'effet d'appui élastique et ΔT_2 est par conséquent directement proportionnel au fléchissement y du méridien, donc

$$\Delta T_2 = \frac{E\delta}{r} \cdot y. \quad (7)$$

³ cf. *Ekström*, p. 124.

Tableau I.

Valeurs des fonctions $e^{-kx} \cos kx$, $e^{-kx} \sin kx$, $e^{-kx} (\cos kx - \sin kx)$ et $e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$

kx	$e^{-kx} \cos kx$	$e^{-kx} \sin kx$	$e^{-kx} (\cos kx - \sin kx)$	$e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$
0	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000
$\frac{\pi}{8}$	0.6239	0.2584	0.3655	0.8823
$\frac{\pi}{4}$	0.8225	0.3225	0.0000	0.6450
$\frac{3\pi}{8}$	0.1179	0.2845	-0.1665	0.4024
$\frac{\pi}{2}$	0.0000	0.2079	-0.2079	0.2079
$\frac{5\pi}{8}$	-0.0536	0.1297	-0.1833	0.0761
$\frac{3\pi}{4}$	-0.0671	0.0671	-0.1342	0.0000
$\frac{7\pi}{8}$	-0.0592	0.0245	-0.0837	-0.0347
$\frac{\pi}{2}$	-0.0432	0.0000	-0.0432	-0.0432
$\frac{9\pi}{8}$	-0.0269	-0.0112	-0.0157	-0.0381
$\frac{5\pi}{4}$	-0.0139	-0.0139	0.0000	-0.0279
$\frac{11\pi}{8}$	-0.0051	-0.0123	0.0072	-0.0174
$\frac{3\pi}{2}$	0.0000	-0.0090	0.0090	-0.0090
$\frac{13\pi}{8}$	0.0023	-0.0056	0.0079	-0.0033
$\frac{7\pi}{4}$	0.0029	-0.0029	0.0058	0.0000
$\frac{15\pi}{8}$	0.0026	-0.0011	0.0037	0.0015
2π	0.0019	0.0000	0.0019	0.0019
$\frac{17\pi}{8}$	0.0011	0.0005	0.0006	0.0016
$\frac{9\pi}{4}$	0.0006	0.0006	0.0000	0.0012
$\frac{19\pi}{8}$	0.0002	0.0005	-0.0003	0.0007
$\frac{5\pi}{2}$	0.0000	0.0004	-0.0004	0.0004
$\frac{21\pi}{8}$	-0.0001	0.0003	-0.0004	0.0002
$\frac{11\pi}{4}$	-0.0001	0.0001	-0.0002	0.0000
$\frac{23\pi}{8}$	-0.0001	0.0001	-0.0002	0.0000
3π	-0.0001	0.0000	-0.0001	-0.0001

Le moment dans le parallèle M_2 s'obtient de la façon la plus simple en déterminant les modifications de courbure du parallèle⁴ et l'on obtient en négligeant l'influence de la contraction

$$M_2 = \cot \alpha \cdot \frac{EJ}{r} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (8)$$

Introduisons dans les équations 6, 7 et 8 l'équation pour le fléchissement du méridien

$$y = -\frac{pr^2}{2E\delta} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$$

on obtient les expressions suivantes pour ΔT_1 , ΔT_2 et M_2 :

$$\Delta T_1 = -\cot \alpha \frac{pr^2 \delta^2}{6} k^3 e^{-kx} \cos kx \quad (6a)$$

$$\Delta T_2 = -\frac{pr}{2} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx) \quad (7a)$$

$$M_2 = \cot \alpha \frac{pr \delta^2}{12} k e^{-kx} \sin kx. \quad (8a)$$

Le tableau II contient les valeurs calculées ainsi pour les contraintes dans le méridien et le parallèle et les moments dans le parallèle en comparaison avec les valeurs exactes.

Tableau II.

Comparaison entre les valeurs approchées et exactes des contraintes dans le méridien et le parallèle et les moments dans le parallèle.

Pente du méridien α	$T_1 + \Delta T_1$ approché kg/cm	$T_1 + \Delta T_1$ exact kg/cm	$T_2 + \Delta T_2$ approché	$T_2 + \Delta T_2$ exact	M_2 approché kg cm/cm	M_2 exact
40°	443	439	0	0	0	0
35°	474	481	215	193	99	113
30°	503	504	437	427	62	73
25°	506	508	517	520	12	17
20°	503	504	518	523	-8	-10
15°	501	501	511	510	-9	-14
10°	499	499	501	501	-5	-9
5°	499	498	499	498	0	-3

Le problème que nous venons de calculer correspond aux conditions d'appui les plus simples. Afin de démontrer l'applicabilité de cette méthode à des conditions d'appui compliquées, j'ai calculé une coupole jointe à un cylindre suivant la fig. 2. Afin de simplifier le problème, dans une certaine mesure, on a admis que la pression de l'eau est constante sur la coupole. Ce problème fut complètement résolu par *Ekström* avec les mêmes hypothèses. Le tableau III contient

⁴ cf. par exemple *Föppl*, „Drang und Zwang“, 2^e vol., Berlin 1928.

les valeurs exactes pour le moment dans le méridien, M_1 et pour la contrainte dans le parallèle, T_2 .

Pour toutes les constantes de la coupole, nous utiliserons l'indice 1 et pour les constantes du cylindre l'indice 2.

Le calcul de cette construction fut effectué de la manière suivante. Si la coupole intérieure et le cylindre sont libérés l'un de l'autre et s'ils peuvent se déformer sans entrave sous l'effet de la surcharge, on obtient d'après la théorie de la membrane:

$$\text{une réduction du rayon de la coupole de } \frac{pr_1^2}{2E\delta_1} = \frac{p \cdot 10^4}{E} \cdot 3,12 \text{ cm}$$

$$\text{une augmentation du rayon du cylindre de } \frac{pr_2^2}{E\delta_2} = \frac{p \cdot 10^4}{E} \cdot 1,72 \text{ cm.}$$

La paroi du cylindre forme donc un petit angle avec la verticale de $\frac{10}{E} \cdot 1,72$ (cf. fig. 2).

Comme cette déformation n'est pas conciliable avec les conditions d'appui réelles, il faut introduire des forces et des moments supplémentaires pour tenir

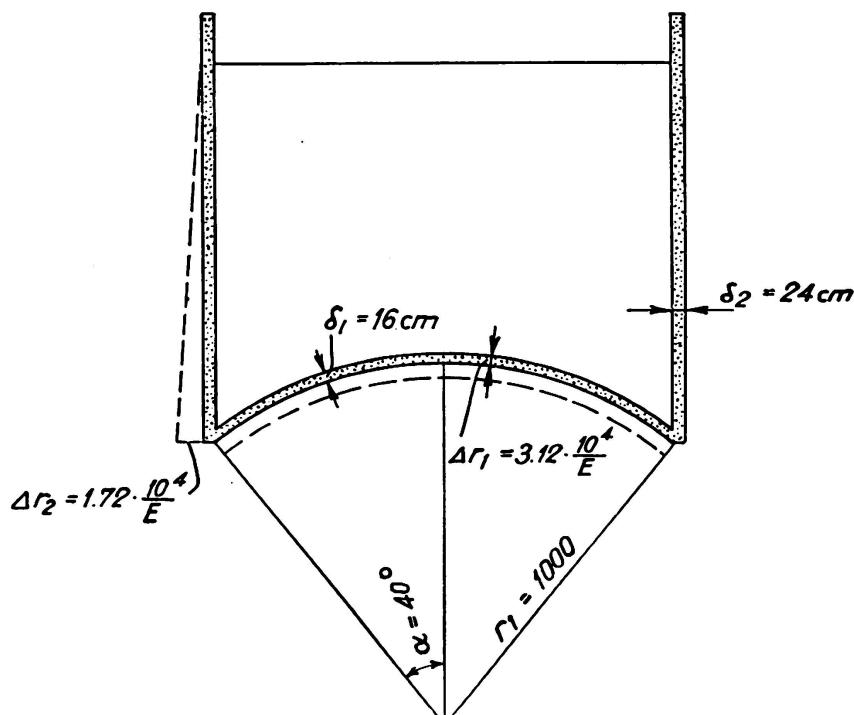


Fig. 2.

compte des conditions de continuité. Ces conditions de continuité sont les suivantes:

Le cylindre et la coupole doivent avoir le même fléchissement et la même variation d'angle au point de liaison et le point de liaison doit en outre être en équilibre quant aux moments et aux forces agissantes. Ceci représente quatre conditions d'appui qui peuvent s'exprimer par quatre équations d'où l'on peut tirer toutes les inconnues: déformations, moments, etc.

Afin de simplifier l'établissement des équations nous donnons ci-dessous les expressions générales pour le fléchissement et ses dérivées. On a

$$\begin{aligned}y &= e^{-kx} [A \cos kx + B \sin kx] \\y' &= k e^{-kx} [(B - A) \cos kx - (A + B) \sin kx] \\y'' &= 2 k^2 e^{-kx} [-B \cos kx + A \sin kx] \\y''' &= 2 k^3 e^{-kx} [(A + B) \cos kx + (B - A) \sin kx]\end{aligned}\quad (9)$$

La première condition que les fléchissements du cylindre et de la coupole doivent être égaux au bord, s'exprime par l'équation suivante:

$$-A_1 \sin 40^\circ + A_2 = \frac{P \cdot 10^4}{E} (3,12 \sin 40^\circ + 1,72).$$

Pour que les déformations d'angle soient égales on doit avoir:

$$k_1 (B_1 - A_1) = k_2 (B_2 - A_2) = \frac{10}{E} \cdot 1,72$$

et pour l'équilibre des moments on peut poser:

$$k_1^2 E J_1 B_1 = k_2^2 E J_2 B_2.$$

La dernière condition doit exprimer que la réaction horizontale, résultant de la surcharge de la coupole intérieure par l'effort de cisaillement dans le cylindre ainsi que par l'effort de cisaillement et la contrainte du méridien dans la coupole, doit être supportée, c'est-à-dire que

$$-2 k_1^3 E J_1 (A_1 + B_1) \frac{1}{\sin 40^\circ} - 2 k_2^3 E J_2 (A_2 + B_2) = P \cdot 500 \cdot \cos 40^\circ.$$

Par élimination on peut tirer de ces quatre équations pour $P = 1 \text{ kg/cm}^2$ les valeurs suivantes pour les constantes

$$\begin{aligned}A_1 &= -15,35 \cdot \frac{10^4}{E} & B_1 &= -7,16 \cdot \frac{10^4}{E} \\A_2 &= -6,13 \cdot \frac{10^4}{E} & B_2 &= 2,05 \cdot \frac{10^4}{E}.\end{aligned}$$

Le problème est ainsi complètement résolu; on peut maintenant calculer sans difficulté les moments, etc. pour chaque point du cylindre et de la coupole. Le tableau III donne une comparaison entre les valeurs calculées et les valeurs exactes pour le moment de méridien et la contrainte dans le parallèle de la coupole. La concordance est satisfaisante dans tous les points.

Ces deux exemples nous montrent que la méthode proposée est pratiquement utilisable pour résoudre le problème et qu'elle donne facilement les résultats à trouver.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, la solution approchée donne des résultats d'autant plus exacts que la coupole a une forte pente et que l'épaisseur est mince. Ce dernier point surtout a une grosse importance, ainsi que l'a démontré entre autres *Steuermann*⁵. L'équation exacte pour le fléchissement du méridien ne

⁵ *E. Steuermann*: „Some Considerations on the Calculation of Elastic Shells“, Congrès international de mécanique, Stockholm 1930.

T a b l e a u III.

Moments de méridien et compression dans le parallèle de la coupole
d'après la fig. 2.

Pente du méridien α	M_1 approché kg cm/cm	M_1 exact kg cm/cm	$T_2 + \Delta T_2$ approché kg/cm	$T_2 + \Delta T_2$ exact kg/cm
40°	— 5280	— 5560	— 1950	— 1930
35°	1450	2250	— 800	— 540
30°	1980	2200	401	613
25°	596	764	618	639
20°	— 6	9	572	593
15°	— 99	— 141	520	526
10°	— 54	— 80	498	498
5°	— 8	— 15	495	493

contient pas comme l'équation 3b que les expressions du quatrième ordre et de l'ordre nul mais aussi des expressions avec dérivées du premier, deuxième et troisième ordre qui cependant sont toutes multipliées avec des polynomes de $\cot \alpha$. Lorsque α croît, le sens de ces expressions diminue et pour $\alpha = 90^\circ$, c'est-à-dire pour le cylindre, ces expressions tombent complètement ce qui fait que l'équation 3b est alors tout-à-fait exacte. La réduction de l'épaisseur de la coupole a une influence semblable sur l'équation différentielle complète. On voit directement d'où cela provient. Lorsque l'épaisseur de la paroi est faible, le sens de la compression du méridien n'est que restreint par rapport à l'influence de la variation de courbure. En d'autres termes, cela signifie que le travail des forces normales par suite de la compression du méridien peut être négligée, dans les coupoles minces, vis-à-vis du travail des moments de méridien et des contraintes du parallèle.

Dans les problèmes que nous avons traités jusqu'à présent, nous avons toujours admis une épaisseur constante. Lorsque l'épaisseur δ est variable, on ne peut pas partir de l'équation 3b mais il faut employer l'équation 3a. Comme la théorie simple de la poutre sur appuis élastiques donne des résultats suffisamment exacts dans les cas ci-dessus, c'est-à-dire avec épaisseur constante, c'est une raison pour admettre qu'il doit en être de même lorsque l'épaisseur est variable.

La théorie de la poutre sur appuis élastiques avec moments d'inertie variable et appuis variables a été étudiée jusqu'à présent par différents savants,⁶ en général à l'aide des séries. Les résultats obtenus sont malheureusement plus ou moins inutilisables actuellement. Par suite de la grande parenté qui existe entre les équations 3a et 3b, il est naturellement évident que les solutions des deux équations ont en gros la même construction mathématique. C'est pourquoi l'on peut admettre que l'on peut écrire la solution de l'équation 3, par exemple, sous la forme suivante:

$$y = ue^{\pm z} (A \cos z + B \sin z) \quad (12)$$

⁶ cf. par exemple Hayashi: „Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage“, Berlin 1921.

où u et z sont certaines fonctions de x . Par l'emploi du procédé d'intégration asymptotique de Blumenthal, il est possible de déterminer les fonctions u et z de telle sorte que l'équation 12 représente vraiment, avec une très bonne approximation, une intégrale de l'équation 3a.

Si comme précédemment nous introduisons la rigidité de la poutre $EJ = \frac{E\delta^3}{12}$, nous obtenons pour les fonctions u et z les expressions suivantes:

$$u = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \quad (13)$$

et

$$z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r\delta}}. \quad (14)$$

On obtient ce résultat de la façon suivante: Opérons la dérivation de l'équation 3a, nous obtenons après simplification l'équation

$$y^{IV} + p_1 y''' + p_2 y'' + p_3 y' + p_4 y = 0 \quad (15)$$

où $p_1 = 6 \frac{\delta'}{\delta}$

$$p_2 = 3 \left(\frac{\delta'^2}{\delta^2} + \frac{\delta''}{\delta} \right)$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \frac{12}{r^2 \delta^2}$$

Multiplions les équations

$$v = f(z)$$

$$v' = f' z'$$

$$v'' = f' z'' + f'' z'^2$$

$$v''' = f' z''' + 3 f'' z' z'' + f''' z'^3$$

$$v^{IV} = f' z^{IV} + f'' (4 z' z''' + 3 z''^2) + 6 f''' z'^2 z'' + f^{IV} z'^4$$

où f' représente $\frac{df}{dz}$ et z' , $\frac{dz}{dx}$, par les facteurs Q_4 , Q_3 , Q_2 , Q_1 et 1 et additionnons les, nous obtenons en posant égal à 0 le membre de gauche, premièrement l'équation:

$$v^{IV} + Q_1 v''' + Q_2 v'' + Q_3 v' + Q_4 v = 0 \quad (16)$$

et secondement lorsque l'on pose les facteurs f' , f'' et f chacun pour soi égal à zéro

$$\begin{aligned} z^{IV} + Q_1 z''' + Q_2 z'' + Q_3 z' &= 0 \\ (4 z' z''' + 3 z''^2) + 3 z' z'' \cdot Q_1 + z'^2 Q_2 &= 0 \\ 6 z'^2 z'' + z'^3 Q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

De ces équations, on peut tirer Q_1 , Q_2 et Q_3 tandis que la fonction $f(z)$ est déterminée par la condition

$$f^{IV} z'^4 + Q_4 f = 0 \quad (18)$$

Si l'on choisit le facteur Q_4 égal à $4z'^4$, notre équation 18 devient

$$\frac{d^4 f}{dz^4} + 4f = 0$$

c'est-à-dire

$$f(z) = e^{\pm z} (A \cos z + B \sin z) \quad (19)$$

où Z est déterminé par la condition:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt[4]{\frac{Q_4}{4}} \quad (20)$$

Si l'on introduit dans l'équation 15: $y = uv$ on obtient après introduction et division par u :

$$\begin{aligned} v'''' + v''' \left(\frac{4u'}{u} + p_1 \right) + v'' \left(\frac{6u''}{u} + \frac{3u'}{u} p_1 + p_2 \right) + \\ + v' \left(\frac{4u'''}{u} + \frac{3u''}{u} p_1 + \frac{2u'}{u} p_2 + p_3 \right) + vp_4 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

En posant égaux les coefficients pour v et v''' dans les équations 16 et 21 on peut déterminer les fonctions inconnues Q_4 et u . On obtient alors $Q_4 = p_4$ et par suite d'après l'équation 20

$$\begin{aligned} z = \int \sqrt[4]{\frac{p_4}{4}} dx \\ \text{ou avec } p_4 = \frac{12}{r^2 \delta^2}; \quad z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r \delta}} \end{aligned} \quad (14)$$

De la condition $\frac{4u'}{u} + p_1 = Q_1$, on obtient, en employant la dernière des équations 17

$$\begin{aligned} \frac{4u'}{u} = -p_1 - \frac{3}{2} (\log p_4)' \\ \text{ou } u = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \end{aligned} \quad (13)$$

Si l'on résume le résultat des calculs ci-dessus on peut écrire la solution de l'équation 3a en négligeant les expressions qui contiennent le facteur e^{+z} , sous la forme suivante:

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} e^{-z} (A \cos z + B \sin z) \quad (12a)$$

où z est déterminé par la condition

$$z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r \delta}}.$$

Au premier aspect, l'équation 12a paraît peut-être incommoder et peu appropriée à un emploi pratique à cause de la construction compliquée de la fonction z et du facteur supplémentaire $\frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}}$. Dans la pratique, le cas se pose plus simplement. Il n'est pas nécessaire de donner la fonction z autrement qu'al-

gébriquement et c'est pourquoi elle peut être calculée très facilement en partant de l'équation 14, par exemple par la règle du trapèze. La dérivation de l'équation 12 a donne des expressions assez compliquées lorsque l'on n'introduit aucune approximation. Remarquons que les dérivées z'' , z''' , u'' et u''' sont petites et par conséquent peuvent être négligées pour les dimensions qui se présentent dans la pratique. On obtient des dérivées de la forme suivante:

$$\begin{aligned}y &= u e^{-z} (A \cos z + B \sin z) \\y' &= u z' e^{-z} [(B - \mu A) \cos z - (A + \mu B) \sin z] \\y'' &= 2 u z'^2 e^{-z} [-(\mu B + v A) \cos z + (\mu A - v B) \sin z] \\y''' &= 2 u z'^3 e^{-z} [(A + \mu_1 B) \cos z + (B - \mu_1 A) \sin z]\end{aligned}\quad (9a)$$

où

$$v = \frac{u'}{uz'}$$

$$\mu = 1 - v$$

$$\mu_1 = 1 - 3v.$$

Dans le cas où l'épaisseur est constante on obtient $v = 0$ et $\mu = \mu' = 1$ et les équations ci-dessus sont exactement les mêmes que les équations 9.

Les équations 9a sont construites de la même manière que les dérivées données dans les équations 9 pour une poutre avec rigidité constante. Le calcul d'une coupole d'épaisseur variable se laisse par conséquent exécuter de la même manière et sans beaucoup plus de peine que dans le cas d'épaisseur constante. Les exemples calculés ci-dessus (cf. fig. 1 et 2) sont aussi figuratifs pour le cas où δ est variable et les équations d'équilibre sont à établir de même en apportant seulement les modifications exigées par la différence entre les équations 9 et 9a.

Dans le problème de la coupole, nous n'avons pas considéré le fait que la poutre-méridien s'aminçait vers le haut et avait une largeur nulle à la clé de la coupole, nous avons plutôt admis une largeur constante. Ceci correspond à la réalité lorsque la coupole est cylindrique mais, dans les coupoles en général, il existe dans chaque hypothèse une certaine approximation. Si nous considérons ce retrécissement, nous pouvons écrire, pour une coupole sphérique, le moment d'inertie de la poutre-méridien à une distance angulaire α de la clé de la façon suivante:

$$J = \frac{\delta^3}{12} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} \quad (21)$$

Avec cette expression pour le moment d'inertie, nous obtenons pour les fonctions u et z

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{\sin \alpha}} \\ \text{et} \quad z &= \sqrt[4]{3} \int \frac{1}{\sqrt[4]{r \delta}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha}} \cdot dx.\end{aligned}$$

Les relations ci-dessus concernent principalement le problème de la coupole mais il est évident que l'on peut les appliquer à un réservoir cylindrique et à des constructions semblables qu'il faut considérer comme cas particuliers. Les méthodes usitées pour le calcul de tels réservoirs⁷ ainsi que leurs développement

en séries peuvent être avantageusement remplacées par la méthode donnée ci-dessus. On rencontre un cas spécial intéressant de ce problème dans le calcul des barrages en arc massifs. Jusqu'à présent on partait, pour résoudre de tels problèmes, de l'équation 3b et l'on introduisait une valeur moyenne de l'épaisseur de la paroi.⁸

En traitant l'équation 3a d'après la méthode ci-dessus, on peut sans difficulté tenir compte de l'anisotropie en différentes directions et à différents points de la construction. Il peut s'agir d'une pure qualité du matériau ou d'une pure anisotropie constructive. Par exemple, par l'introduction de différentes quantités de fer d'armature dans différentes directions, le module apparent d'élasticité du matériau est variable pour les différentes directions, ce qui doit être considéré comme anisotropie du matériau; pour introduire une anisotropie constructive dans un réservoir cylindrique ou une coupole on peut placer des poutres de renforcement dans la direction de la génératrice ou du méridien. Dans de telles conditions on ne peut pas écrire l'équation 3a sous la forme de l'équation 15; les coefficients p_1 à p_4 ont l'aspect suivant:

$$p_1 = \frac{2(E_1 J)'}{E_1 J}$$

$$p_2 = \frac{(E_1 J)''}{E_1 J}$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \frac{E_2 \delta}{r^2 E_1 J}$$

et les fonctions z et u apparaissent sous la forme suivante:

$$z = \int \sqrt[4]{\frac{E_2 \delta}{4 r^2 E_1 J}} \cdot dx$$

et

$$u = \sqrt[8]{\frac{r^6}{E_1 J E_2^3 \delta^3}}$$

Mais comme on emploie pour u et pour z une expression mathématique, l'introduction des équations 22 et 23 n'apporte aucune complication des calculs.

Résumé.

Par la décomposition des voiles en deux faisceaux de poutres qui se croisent on peut obtenir une représentation plus claire du mode d'action statique de la construction. Les moments et les contraintes qui se produisent peuvent être calculés comme pour la poutre sur appui continu élastique. Comme la théorie exacte conduit à des solutions en forme de séries infinies qui ne convergent que lentement dans certaines conditions, la méthode donnée ici présente des avantages pratiques.

⁷ cf. Lorenz: „Technische Elastizitätslehre“, Berlin 1913. H. Reißner: „Beton und Eisen“ 7, 150, 1908. T. Pöschl et K. Terzaghi: „Berechnung von Behältern“, Berlin 1913.

⁸ cf. N. Royen: „Tvärödammen vid Norrfors kraftverk“ (Le barrage de Tvärö à l'usine de Norrfors), revue Betong, cahier 2, 1926.