

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Rubrik: IVa. Surfaces auto-portantes

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IV

Tendances actuelles dans le calcul et la construction
des ponts et charpentes en béton armé.

Neuere Gesichtspunkte für die Berechnung und Konstruktion
von Eisenbeton-, Hoch- und Brückenbauten.

Recent points of view concerning the calculation and design of
bridge and structural engineering in reinforced concrete,

IV a

Surfaces auto-portantes.

Flächentragwerke.

Walled structures.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVa1

Etude des voiles minces courbes ne subissant pas de flexion.

Einführung in die allgemeine Theorie der biegungsfreien Schalen.

Theory of Thin Curved Shells not Subjected to Bending.

Dr. ès sciences F. Aimond,
Ingénieur des Ponts et Chausée détaché au Ministère de l'Air, Paris.

1° — Rappel des équations générales en coordonnées rectilignes de l'équilibre statique des voiles minces.

Soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface en coordonnées rectilignes quelconques non nécessairement rectangulaires. L'état des contraintes en un point m du voile, est déterminé par la connaissance des contraintes n_1, n_2, Θ , agissant sur les éléments mm_1 et mm_2 respectivement parallèles aux plans zox et zoy . n_1 agit sur mm_2 parallèlement au plan zox , n_2 agit sur mm_1 parallèlement au plan zoy , Θ agit à la fois sur mm_1 parallèlement à zox , et sur mm_2 parallèlement à zoy (fig. 1). Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ les coefficients directeurs des tangentes aux éléments mm_1 et mm_2 , c'est-à-dire les projections suivant ox, oy, oz du vecteur unité portées par chacune de ces tangentes.

Supposons le voile chargé d'une manière quelconque, et appelons $X dx dy$, $Y dx dy$, $Z dx dy$ les composantes suivant ox, oy, oz , de la charge appliquée à l'élément $mm_1 m' m_2$ limité aux parallèles mm_1 et $m_2 m'$ au plan zox et aux parallèles mm_2 et $m_1 m'$ au plan zoy . L'étude des conditions d'équilibre des dits éléments conduit aux équations suivantes:

$$(1) \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} = X$$

$$(2) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = Y$$

$$(3) \quad r v_1 + 2 s \Theta + t v_2 = \zeta$$

en posant

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\zeta = Z - pX - qY,$$

$$v_1 = n_1 \frac{\alpha_1}{\beta_2} \quad v_2 = n_2 \frac{\beta_2}{\alpha_1}.$$

2° — Interprétation géométrique des quantités figurant dans les équations générales d'équilibre.

La quantité ζ figurant au second membre de l'équation (3) n'est autre que la projection du vecteur (X, Y, Z) sur oz , cette projection étant effectuée parallèlement au plan tangent à la surface. Pour interpréter les quantités v_1, v_2 et Θ qui sont les inconnues des équations d'équilibre, définissons d'une manière générale ce que nous appellerons contrainte réduite. Par définition, la contrainte réduite s'exerçant sur un élément du voile est la projection sur le plan des xy de la force élastique s'exerçant sur cet élément, divisée par la longueur de la projection de l'élément. On constate facilement que la répartition des contraintes réduites autour d'un point suit les mêmes lois que les contraintes réelles et en particulier la représentation de Mohr leur est applicable. Les quantités v_1, v_2, Θ , sont précisément les contraintes réduites relatives aux éléments qui se projettent suivant des parallèles aux axes des x et des y . On peut remarquer que les contraintes de cisaillement Θ se conservent en projection tandis qu'il n'en est pas de même des autres contraintes n_1, n_2 .

3° — Interprétation géométrique des équations générales d'équilibre.

Les équations (1) et (2) expriment évidemment l'équilibre en projection sur le plan tangent. L'équation (3) exprime au contraire l'équilibre des forces appliquées normalement au voile. Pour l'interpréter géométriquement, prenons l'origine o du trièdre $oxyz$ sur la surface, et orientons ox et oy suivant les directions de deux éléments arbitraires. Nous pouvons achever de définir complètement le trièdre $oxyz$ en nous donnant d'une manière arbitraire la direction oz . L'équation (3) définit une relation linéaire entre les contraintes s'exerçant sur les éléments arbitraires ox et oy et la projection ζ effectuée sur oz parallèlement au plan tangent de la densité de la charge appliquée. Lorsqu'on change la direction oz sans toucher à ox et oy , chaque terme de la relation linéaire précédente est simplement multiplié par un même facteur.

Nous pouvons profiter de l'indétermination de la direction des éléments ox et oy pour simplifier l'équation (3). Si on dirige en particulier ces éléments suivant deux directions conjuguées de la surface, c'est-à-dire suivant deux directions conjuguées par rapport à l'indicatrice, le coefficient de Θ s'annule et l'équation (3) se réduit à une relation linéaire entre les contraintes longitudinales v_1 et v_2 . On peut se demander s'il n'est pas possible d'orienter les éléments ox et oy de manière qu'il ne reste plus dans l'équation (3) qu'une seule contrainte. On voit immédiatement que cela n'est pas possible si la surface est convexe, c'est-à-dire si les rayons de courbure principaux sont de même sens et qu'au contraire cela est possible si la surface n'est pas convexe.

Plaçons-nous dans cette dernière hypothèse et distinguons deux cas, suivant que la contrainte qui reste dans l'équation (3) est une contrainte longitudinale ou le cisaillement Θ . Le premier cas n'est possible que si la surface est développable, c'est-à-dire si on peut la considérer comme l'enveloppe d'une famille de plans tangents dépendant d'un paramètre. Si l'on prend l'élément ox suivant la direction de la génératrice rectiligne qui passe en o , l'équation (3) se réduit à

$$(4) \quad r v_1 = \zeta$$

Le deuxième cas correspond aux surfaces à courbures opposées. Si l'on prend ox et oy suivant les directions des asymptotiques, l'équation (3) se réduit à

$$(5) \quad 2s\Theta = \zeta$$

L'interprétation des équations (4) et (5) est immédiate. Interprétons d'abord l'équation (4). Il est visible que les seules contraintes agissant sur un élément infiniment petit de la surface admettant une composante non située dans le plan tangent à la surface, sont les contraintes projetées suivant v_1 , et l'équation (4) exprime simplement l'identité entre les projections des contraintes n_1 sur oz effectuées parallèlement au plan tangent et la projection effectuée dans les mêmes conditions de la charge appliquée.

Interprétons maintenant l'équation (5). Il suffit pour cela de considérer un quadrilatère élémentaire dont deux côtés consécutifs sont constitués par des arcs d'asymptotiques se croisant en o . Les contraintes longitudinales n_1 et n_2 appliquées à ce quadrilatère ont une résultante dans le plan tangent puisque cette résultante est la somme géométrique de la résultante des contraintes n_1 et de la résultante des contraintes n_2 , et que chacune de ces deux dernières résultantes est nécessairement dans le plan osculateur d'un arc d'asymptotique, plan osculateur qui coïncide avec le plan tangent en vertu de la définition même des asymptotiques. Donc, la composante ζ des charges appliquées à la surface en dehors du plan tangent ne dépend que du cisaillement Θ . Il lui est d'ailleurs proportionnel. Le coefficient de proportionnalité dont la valeur est $2s$ a une signification géométrique excessivement simple. C'est le quotient du double de la distance du sommet opposé à o dans le quadrilatère au plan tangent en o , cette distance étant comptée parallèlement à la direction oz , par le produit des longueurs d'arcs d'asymptotiques formant les côtés du quadrilatère.

4° — Classification des voiles minces au point de vue de leurs propriétés mécaniques.

Les considérations précédentes conduisent à classer les voiles minces en trois groupes. Le premier groupe comprend les surfaces développables comme les cylindres et les cônes, le deuxième groupe comprend les surfaces convexes comme la sphère, le paraboloïde elliptique, l'ellipsoïde, l'hyperbololoïde à deux nappes, et, d'une manière générale, toutes les surfaces à double courbure engendrées par une courbe dont la concavité est dirigée vers le bas et qui s'appuie sur une directrice courbe dont la concavité est également dirigée vers le bas. Le troisième groupe comprend les surfaces à courbures opposées comme le paraboloïde hyperbolique, l'hyperbololoïde à une nappe, les conoïdes, toutes les surfaces réglées non développables, et d'une manière générale, toutes les surfaces qui peuvent être engendrées par une courbe dont la concavité est tournée vers le haut et qui s'appuie sur une directrice dont la concavité est tournée vers le bas.

Cette classification nous est suggérée par l'interprétation géométrique de l'équation (3). Les voiles du premier groupe sont ceux pour lesquels l'équation (3) peut être mise sous la forme (4), les voiles du second groupe sont ceux pour lesquels l'équation (3) peut être mise sous la forme

$$(6) \quad rv_1 + tv_2 = \zeta$$

τ et t étant de même signe, les voiles du troisième groupe sont ceux pour lesquels l'équation (3) peut se mettre sous la forme (5).

Observons que pour les voiles du troisième groupe l'équation (3) peut également se mettre sous la forme (6), mais r et t sont alors de signes contraires. Observons également que pour les voiles du deuxième groupe, l'équation (3) peut aussi être mise sous la forme (5), où Θ représente encore le cisaillement sur les asymptotiques, mais l'équation (5) n'est plus alors une équation à termes réels, s et t sont deux expressions purement imaginaires.

Les voiles du premier groupe sont caractérisés par la propriété que la composante normale de la contrainte s'exerçant sur les génératrices rectilignes, est en chaque point proportionnelle à la composante normale de la densité de la charge appliquée. Les voiles du second groupe sont caractérisés par la propriété que la contrainte de cisaillement purement imaginaire s'exerçant sur les éléments imaginaires d'asymptotiques, est proportionnelle en chaque point à la composante normale de la densité de la charge appliquée. Les voiles du troisième groupe sont caractérisés par la propriété que la contrainte de cisaillement s'exerçant sur les éléments d'asymptotiques est proportionnelle en chaque point à la composante normale de la densité de la charge appliquée.

On peut encore faire observer la différence suivante entre les voiles du deuxième et du troisième groupe. Si l'on considère en un point les contraintes longitudinales s'exerçant sur deux éléments conjugués, la composante normale de la charge appliquée, que l'on peut considérer comme la poussée au vide produite par ces contraintes longitudinales, est une forme linéaire de ces contraintes. Cette forme est à coefficients de même signe pour les voiles du deuxième groupe et à coefficients de signes contraires pour les voiles du troisième groupe. Il en résulte que la portance d'un voile du deuxième groupe peut être considérée comme produite par des contraintes longitudinales de même sens s'exerçant sur deux éléments conjugués, et que la portance d'un voile du troisième groupe peut, d'une manière analogue, être considérée comme produite par des contraintes longitudinales de sens contraires, s'exerçant sur deux éléments conjugués.

Lorsqu'il s'agit d'un voile du second groupe, on peut toujours choisir les éléments conjugués de manière qu'ils forment un réseau orthogonal et isotherme sur la surface associée ayant pour carré de l'élément linéaire la forme quadratique

$$r dx^2 + 2 s dxdy + t dy^2.$$

Les coefficients des contraintes longitudinales correspondantes, dans la forme linéaire représentant la composante normale de la densité de la charge appliquée, sont alors égaux. On peut donc dire que dans les voiles du second groupe la composante normale de la densité de la charge à appliquer est proportionnelle à la somme des contraintes longitudinales s'exerçant suivant les éléments d'un système orthogonal et isotherme pour la surface associée.

Les différences de propriétés qui, nous venons de le voir, distinguent les voiles des trois groupes, ont une importance primordiale sur la nature des appuis que l'on peut se donner au pourtour des voiles pour parfaire leur

équilibre, et sur le mode de calcul effectif des contraintes dans les voiles en fonction des conditions au contour.

5^o — Etude des voiles du premier groupe.

L'étude des voiles du premier groupe est une généralisation de l'étude des cylindres. L'équation (4) fait connaître, en chaque point du voile, la composante normale à la génératrice rectiligne passant en ce point, de la contrainte agissant sur un élément de cette génératrice. Par conséquent, si nous traçons sur la surface une famille de géodésiques coupant les différentes génératrices rectilignes sous un angle constant, nous connaîtrons la contrainte longitudinale agissant parallèlement à ces géodésiques sur les éléments de génératrices rectilignes. L'équation (2) nous fera alors connaître par une intégration immédiate la valeur du cisaillement sur les génératrices et les géodésiques, et la formule (1) par une nouvelle intégration, les contraintes longitudinales s'exerçant sur les éléments des géodésiques parallèlement aux génératrices.

La détermination des contraintes effectuée de cette manière n'est complète que si l'on se donne sur une courbe déterminée rencontrant une fois seulement chaque génératrice, les valeurs des contraintes s'exerçant sur les éléments de la dite courbe. On peut d'ailleurs aussi bien se donner sur deux courbes rencontrant chacune chaque génératrice une fois et une seule, une relation entre les composantes de la contrainte s'exerçant sur tout élément des deux courbes.

6^o — Etude des voiles du second groupe.

Considérons un voile mince du second groupe. Nous avons vu que la composante normale de la densité de la charge appliquée était proportionnelle en chaque point à la somme des contraintes longitudinales s'exerçant sur des éléments d'un système orthogonal et isotherme pour la surface associée. Supposons que ces contraintes longitudinales soient égales. Leur valeur est alors bien déterminée en chaque point par la valeur de la composante normale de la densité de la charge. Nous avons ainsi satisfait à l'équation (3). Les équations (1) et (2) qui expriment l'équilibre dans le plan tangent ne seront alors satisfaites que si la composante tangentielle de la densité de la charge a une valeur déterminée, que l'on obtient en écrivant précisément les conditions d'équilibre parallèlement au plan tangent. Nous appellerons système fondamental de charges tout système de charges correspondant aux conditions précédentes, c'est-à-dire tel que les contraintes longitudinales s'exerçant sur des éléments d'un système orthogonal et isotherme pour la surface associée soient égales. Il est alors bien évident qu'un système quelconque de charges peut être considéré comme la somme d'un système fondamental et d'un système composé uniquement de charges tangentielles et que nous appellerons système complémentaire du système fondamental de charges.

Nous sommes ramenés ainsi à l'étude des systèmes complémentaires, c'est-à-dire des systèmes où la charge appliquée est tangente à la surface. Dans de tels systèmes, les contraintes longitudinales sur des éléments d'un système orthogonal et isotherme pour la surface associée, sont égales, et par suite la contrainte sur un élément quelconque ne dépend plus que de deux paramètres, par exemple les composantes de la contrainte s'exerçant sur un des éléments conjugués

précédents. Il est bien évident que l'on peut choisir arbitrairement ces deux paramètres. On voit facilement que l'on peut déterminer deux fonctions imaginaires conjuguées φ et ψ de manière qu'en prenant pour paramètres deux quantités que nous désignerons par S_φ et S_ψ , les forces élastiques agissant sur un élément quelconque de la surface soient une forme linéaire des expressions différentielles $S_\varphi d\varphi$ et $S_\psi d\psi$. Les équations d'équilibre dans le plan tangent montrent alors que la dérivée partielle de S_φ par rapport à φ et la dérivée partielle de S_φ par rapport à ψ sont des fonctions linéaires de S_φ et S_ψ . En éliminant l'un des deux paramètres, S_ψ par exemple, entre ces deux relations, on obtient une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre à caractéristiques imaginaires, à laquelle doit satisfaire le paramètre conservé S_φ .

Pour déterminer une solution de cette équation, on peut se donner la valeur de S_φ et d'une de ses dérivées sur une courbe arbitraire de la surface, à condition toutefois, étant donné que l'équation est à caractéristiques imaginaires, que certaines conditions d'analyticité soient remplies. Si l'on remarque que se donner S_φ et une de ses dérivées sur une courbe revient à se donner S_φ et S_ψ sur cette courbe, et par suite la contrainte s'exerçant sur un élément quelconque de la courbe, on voit que, sous certaines réserves d'analyticité, on peut déterminer les contraintes dans le voile, à condition de connaître les contraintes s'exerçant sur les éléments d'une courbe.

Les réserves relatives à l'analyticité dont nous avons parlé ne sont pas des réserves de pure forme. Elles correspondent à une réalité physique qui est la suivante. On sait en effet que dans tous les problèmes où une fonction vérifiant une équation à caractéristiques imaginaires est déterminée par les valeurs qu'elle prend, ainsi qu'une de ses dérivées, sur une courbe donnée, la solution n'est pas une fonction continue des données c'est-à-dire qu'en faisant varier très peu les données, on peut obtenir des valeurs de la fonction aussi différentes que l'on veut en des points arbitrairement choisis. Il résulte de là que les états d'équilibre d'un voile convexe correspondant à des valeurs données des contraintes s'exerçant sur une courbe ne sont pas stables par rapport aux valeurs des contraintes sur cette courbe.

Pour obtenir des solutions stables, il faut envisager des conditions aux limites différentes de celles que nous avons envisagées. Au lieu de nous donner les valeurs des contraintes sur une courbe, donnons-nous sur une courbe fermée une relation entre les composantes des contraintes s'exerçant sur les éléments de la courbe. Si cette relation est convenablement choisie le problème pourra se trouver déterminé tout au moins à une ou plusieurs constantes près, la solution étant une fonction continue des données. L'équilibre correspondant sera un équilibre stable. Supposons par exemple que nous voulions que la contrainte le long de la courbe donnée ait une composante donnée normalement à une direction donnée, direction variable avec chaque point de la courbe. L'indétermination relative des paramètres S_φ et S_ψ permet de les déterminer de manière que S_φ représente le long de la courbe donnée la valeur de la composante normale à une direction donnée de la contrainte s'exerçant sur les éléments de la courbe. La théorie des équations intégrales permet alors de déterminer la fonction S_φ par une méthode analogue à celle qu'ont employée Fredholm et ses successeurs pour résoudre les problèmes du même type relatifs aux équations caractéristiques imaginaires.

7° — Etude des voiles du troisième groupe.

Considérons un voile mince du troisième groupe. La valeur de la composante normale de la densité de la charge détermine tout d'abord en chaque point du voile les contraintes de cisaillement sur les éléments d'asymptotiques. Supposons que les contraintes dans le voile se réduisent à ces cisaillements. Il faut et il suffit pour cela, que la composante tangentielle de la charge appliquée à un quadrilatère élémentaire d'arcs d'asymptotiques fasse équilibre à la projection sur le plan tangent de la résultante des efforts tangentiels appliqués aux éléments du quadrilatère. Nous appellerons système fondamental de charges, tout système de charges correspondant aux conditions précédentes, c'est-à-dire tel que les contraintes s'exerçant sur les éléments d'asymptotiques se réduisent à des cisaillements. Il est bien évident qu'un système quelconque de charges peut être considéré comme la superposition d'un système fondamental de charge et d'un système que nous appellerons encore système complémentaire et composé uniquement de charges tangentielles.

Nous sommes ainsi ramenés à l'étude de l'action des systèmes complémentaires. Pour cela nous remarquons encore que la force élastique s'exerçant sur un élément du voile peut encore se mettre sous la forme d'une forme linéaire d'expressions différentielles telles que $S_\varphi d\psi$ et $S_\psi d\varphi$, φ et ψ étant maintenant deux fonctions réelles, S_φ et S_ψ deux paramètres réels. Les équations d'équilibre suivant le plan tangent permettent alors d'exprimer les dérivées partielles de S_φ par rapport à φ et de S_ψ par rapport à ψ en fonction linéaire de S_φ et S_ψ . L'élimination de S_ψ entre ces équations conduit à une équation en S_φ linéaire aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles. Les caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles sont précisément les lignes asymptotiques.

Pour déterminer une solution de l'équation précédente valable dans un domaine D limité par un contour C décomposons ce contour en deux suites d'arcs Γ et Γ' tels que de tout point de D soient issues deux asymptotiques rencontrant Γ une fois et une seule, puis décomposons Γ en deux suites d'arcs Γ_1 et Γ_2 tels que toute ligne brisée d'arcs d'asymptotiques joignant tout point de Γ_1 à un point de Γ' ait ses sommets intermédiaires sur Γ_2 ou Γ' , et qu'il n'existe aucune ligne brisée d'arcs d'asymptotiques ayant ses extrémités sur Γ_1 et ses sommets intermédiaires sur Γ_2 . On obtiendra une solution unique valable dans D , en se donnant sur Γ_1 la valeur de la contrainte s'exerçant sur les éléments de Γ_1 et en se donnant sur Γ_2 une relation entre les composantes de la contrainte s'exerçant sur les éléments de Γ_2 . La valeur de la solution sera donnée par la formule de *Riemann* appliquée successivement à différents sous-domaines du domaine D . Aucune condition d'analyticité n'est ici requise et la solution obtenue est toujours une fonction continue des données. Par contre il n'existe pas en général de solution correspondant à une relation entre les composantes des contraintes s'exerçant sur les différents éléments de la courbe fermée C .

Lorsque le voile mince considéré est une surface réglée, l'équation aux dérivées partielles du second ordre peut se ramener à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre ne contenant qu'une dérivée, équation dont l'intégration est immédiate étant donné qu'on peut la considérer comme une équation

différentielle linéaire. Dans le cas où le voile mince est une quadrique réglée, la détermination des paramètres S_φ et S_ψ se réduit à deux quadratures.

8° — Choix du système d'appuis dans les voiles minces des trois groupes.

Le choix du système d'appuis dans un voile mince dépend essentiellement du groupe auquel il appartient. Nous distinguerons deux catégories d'appuis, les appuis simples pour lesquels les réactions dépendent d'un seul paramètre, et les appuis doubles pour lesquels les réactions dépendent de deux paramètres. Les composantes des contraintes que le voile transmet à un appui simple satisfont par conséquent à une relation connue a priori, tandis que les composantes des contraintes que le voile transmet à un appui double peuvent prendre des valeurs indépendantes. Par ailleurs, certaines parties du voile sur son contour peuvent ne comporter aucun appui, le bord est dit libre.

Nous nous proposons de rechercher comment il faut répartir les bords libres, les appuis simples et les appuis doubles au contour d'un voile mince pour que celui-ci soit soumis à un équilibre unique et stable.

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas d'un voile du premier groupe. On pourra se donner un bord libre sur toute partie du contour ne comprenant pas de génératrice rectiligne, et rencontré une fois au plus par toute génératrice. Si le bord libre rencontre toutes les génératrices, la répartition des contraintes dans le voile est déterminée, et par suite, les autres bords devront comporter des appuis doubles. Le système d'équilibre correspondant est stable. Donnons-nous au contraire deux bords rencontrant chacun une seule fois toutes les génératrices et aménagés en appuis simples. On obtiendra encore un état d'équilibre stable du voile, à condition d'aménager le reste du contour, composé exclusivement de génératrices, en appuis doubles.

Considérons maintenant un voile du second groupe. Ce voile ne peut admettre de bords libres, car l'équilibre correspondant n'est pas stable. Mais on peut aménager l'ensemble du pourtour du voile en appuis simples, l'équilibre correspondant est bien déterminé et stable.

Considérons enfin un voile du troisième groupe et décomposons le contour en trois catégories d'arcs Γ_1 , Γ_2 , Γ' définis comme il a été indiqué au 7°. On pourra se donner un bord libre suivant Γ_1 , des appuis simples suivant Γ_2 , et des appuis doubles suivant Γ' . L'équilibre correspondant est bien déterminé et c'est un équilibre stable.

9° — Propriétés géométriques et calculs géométriques des voiles du troisième groupe.

Les voiles du troisième groupe présentent des propriétés géométriques remarquables qui permettent d'en faire un calcul graphique précis.

Interprétons tout d'abord géométriquement les paramètres S_φ et S_ψ et les fonctions φ et ψ introduits au 7°. S_φ et S_ψ sont les contraintes longitudinales s'exerçant sur les asymptotiques pour un système complémentaire de charges. φ et ψ sont des coordonnées curvilignes de la surface pour lesquelles les lignes de coordonnées sont les lignes asymptotiques.

Remplaçons les voiles minces par un système réticulaire gauche dont les mailles sont des quadrilatères rectilignes gauches formés par des cordes de lignes asymptotiques. Le système obtenu travaille comme la surface donnée, et l'assimilation des deux systèmes est légitime si les mailles sont suffisamment petites. Les charges appliquées au système réticulaire doivent être appliquées aux sommets du système réticulaire suivant le plan tangent à la surface.

Appliquons une force unique F en un sommet quelconque du système réticulaire. Cette force peut se décomposer suivant deux des barres passant en ce point et correspondant à deux lignes asymptotiques différentes. On transporte ainsi la force F à deux autres noeuds de la surface où on opère de même, et ainsi de suite. Si l'on suppose le contour de la surface divisé en trois catégories d'arcs Γ_1 , Γ_2 et Γ' dans les conditions indiquées précédemment, et si l'on choisit convenablement les deux barres initiales suivant lesquelles on décompose la force donnée F , la transmission de la force F se fera par le processus indiqué sans qu'on rencontre jamais un bord libre. Si l'on rencontre un bord de Γ_2 supposé aménagé en appui simple, on pourra encore faire la décomposition entre la seconde barre aboutissant au sommet considéré sur Γ_2 et la direction de la réaction de l'appui simple. L'opération qu'on effectue ainsi est ce qu'on appelle une réflexion sur l'appui simple. En la continuant ainsi, on transmettra finalement la force F à toute une zone d'appuis doubles. On aura ainsi obtenu un équilibre du système compatible avec les réactions d'appuis, et cet équilibre sera stable. En opérant de la même manière pour chaque noeud chargé du système réticulaire, on aura déterminé l'état d'équilibre relatif au système complémentaire de charges en ne faisant intervenir que des décompositions de forces suivant la règle du parallélogramme. L'épure correspondante peut se faire facilement en projection sur un plan arbitraire.

La détermination géométrique des efforts dont nous venons de parler permet d'envisager l'équilibre d'un voile du troisième groupe comme résultant d'une propagation d'efforts s'effectuant suivant les arcs d'asymptotiques en partant des bords libres pour aboutir aux appuis doubles en se réfléchissant sur les appuis simples. Cette propriété est analogue à la propagation par ondes des phénomènes régis par des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles et comme elle, est due essentiellement à la nature réelle des caractéristiques des équations régissant l'équilibre des contraintes dans le voile considéré.

10° — Exemples simples de voiles du troisième groupe.

L'exemple le plus simple de voile du troisième groupe est fourni par le paraboloïde hyperbolique. Ce voile est caractérisé par la propriété que le cisaillement suivant les génératrices rectilignes est, à un facteur près, constant sur toute la surface, égal à la composante suivant l'axe du paraboloïde de la charge appliquée rapportée à l'unité de surface en projection sur un plan quelconque non parallèle à l'axe. D'autre part, les efforts dus au système complémentaire de charges se propagent suivant chaque génératrice sans qu'il se produise d'interférences entre les génératrices, de telle sorte qu'un effort tangentiel appliqué à un petit élément du voile ne fait sentir son effet que sur les bandes engendrées par les génératrices rencontrées. Après le paraboloïde hyperbolique, le voile du troisième groupe le

plus simple est l'hyperboleïde à une nappe. Ce voile possède en commun avec le paraboloïde la propriété que les efforts dus au système complémentaire se propagent suivant chaque génératrice sans interférence avec les autres génératrices. Il ne diffère du paraboloïde hyperbolique que par l'expression plus compliquée du coefficient de proportionnalité entre le cisaillement et la densité de la charge appliquée.

Viennent ensuite les surfaces réglées non développables et en premier lieu les conoïdes. Pour ces surfaces, le coefficient de proportionnalité entre le

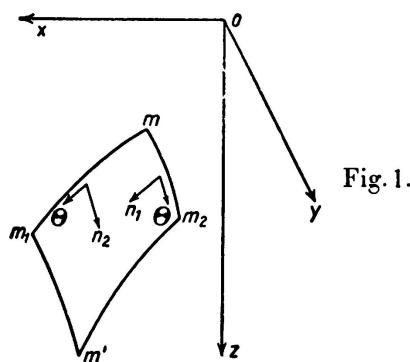


Fig. 1.

cisaillement sur les asymptotiques et la densité de la charge appliquée, a une expression beaucoup plus compliquée que pour les premières surfaces envisagées, mais ce qui les distingue surtout de ces surfaces, c'est que les efforts dus au système complémentaire se propagent en s'épanouissant sur la surface, les asymptotiques non rectilignes s'arc-boutant sur les génératrices rectilignes de la surface, de telle sorte qu'une force tangentielle appliquée à un petit élément intéresse toute une zone en éventail de la surface, comme dans les surfaces les plus générales du troisième groupe.

Les figures 2 et 3 montrent la différence entre les quadriques réglées et les autres surfaces du troisième groupe au dernier point de vue qui vient d'être signalé.

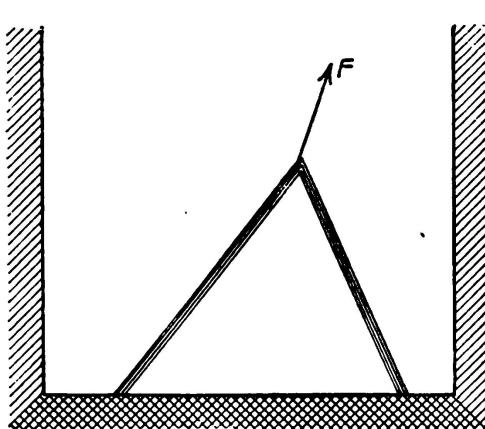


Fig. 2.

Mode de propagation des efforts tangentiels
tans une quadrique réglée.

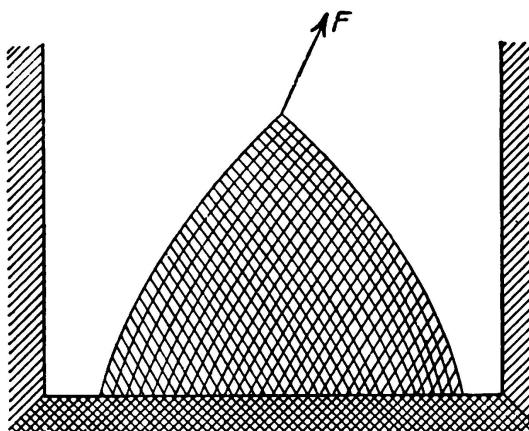


Fig. 3.

Mode de propagation des efforts tangentiels dans
une surface quelconque du 3^e groupe.

11° — Conclusion.

Si l'on excepte les voiles réglés développables comme les cylindres et les cônes qui forment une classe très particulière de voiles, l'ensemble des voiles à double courbure se divise en deux grandes familles suivant le signe de la courbure totale. Dans les deux familles de voiles, ce sont les lignes asymptotiques qui jouent le rôle essentiel dans la transmission des efforts tangentiels, et par suite dans la détermination de la nature des réactions d'appuis correspondant à des équilibres bien déterminés et stables. Lorsque les asymptotiques sont imaginaires, le voile ne peut admettre de bords libres, mais peut être limité à des bords aménagés tous en appuis simples. L'exemple courant d'appuis de cette sorte est constitué par un tympan plan à grande raideur dans son plan et sans raideur appréciable perpendiculairement à ce plan. Lorsque les asymptotiques sont réelles, on doit décomposer les bords du voile en bords libres, en bords avec appuis simples, et en bords avec appuis doubles suivant les règles déterminées que nous avons indiquées. Comme les appuis doubles peuvent constituer une difficulté au point de vue constructif, il y a avantage à chercher à en diminuer l'importance le plus possible, ce qui peut se faire de différentes manières en choisissant convenablement le tracé de la surface.

Si l'on se place strictement au point de vue de la facilité de calcul, les considérations qui précèdent laissent entrevoir que, parmi les voiles à double courbure, ceux donnant lieu à des calculs vraiment élémentaires sont les quadriques réglées.

Résumé.

Dans la construction des voiles minces en béton armé il s'agit d'abord de problèmes statiquement déterminés, indépendants de la théorie de la plasticité. La totalité de ces questions est traitée en liaison avec d'autres problèmes qui se présentent lors de l'exécution des voiles minces et avant tout en liaison avec les problèmes de la compatibilité des déformations conditionnées par l'état de tension calculé d'une manière isostatique.

L'auteur utilise l'hypothèse d'une répartition uniforme des tensions sur toute l'épaisseur de la section de telle façon que l'on peut admettre le voile concentré en sa surface moyenne.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVa 2

Les surfaces portantes dans la construction en béton armé.

Die Flächentragwerke des Eisenbetonbaues.

Shell Construction in Reinforced Concrete.

Dr. Ing. Fr. Dischinger,
Professor an der Technischen Hochschule, Berlin.

Douze ans après que la Société Dyckerhoff et Widmann, en collaboration avec la maison Zeiss de Jena, eut créé les voiles minces en coquille, constructions pour lesquelles les charges engendrent essentiellement des efforts restant dans la surface même, ce genre de construction a pris un grand essor grâce aux recherches de la théorie générale élaborée dans un temps extraordinairement court.

Avec cette théorie on a créé de nouveaux ouvrages dans le domaine des grandes halles et cela sur un plan beaucoup plus vaste encore que ce qui a été fait à l'aide des plaques et des dalles champignons. Au moyen des coupoles et des toitures ondulées, appelées ensemble du nom de "surfaces portantes", on peut obtenir des portées qui jusqu'à maintenant étaient considérées comme irréalisables.

Depuis la découverte de ces constructions, il s'est à peine écoulé 10 ans. Dans ce court laps de temps on a construit des halles de 100000 m² et de 100 m de portée.

Le présent rapport se compose de deux parties. Dans la première partie nous donnerons un résumé des progrès de la théorie depuis le dernier congrès et les développements obtenus en construction. La seconde partie est consacrée à la théorie des enveloppes cylindriques et des tuyaux.

1. Développement de la théorie des voiles depuis le dernier congrès, 1932:

Pour tout ce qui concerne les différentes formes des voiles dont il sera question ici, nous renvoyons au rapport de W. Petry II/4, présenté au congrès de Paris en 1932. Dans la même année parut la première partie du traité de U. Finsterwalder¹ concernant le problème des coupoles cylindriques (tonne) de Zeiss-Dywidag. Cette théorie considère une voûte cylindrique limitée par deux nervures, on a ainsi une poutre cintrée que l'on peut considérer comme une plaque creuse, dans laquelle le voile représente la plaque. A l'inverse des plaques ordinaires, dans lesquelles, pour de grandes distances des nervures, la plaque ne prend que fort peu des forces de compression, ici tout le voile travaille à la compression.

Cela vient de ce que dans la plaque ordinaire (fig. 1 a), la participation de la plaque aux efforts de compression N_x se fait par l'intermédiaire des efforts de cisaillement N_{xy} entre les nervures et la plaque.

La partie de la plaque ainsi sollicitée est fonction de la longueur de la poutre. Les efforts de compression ne se répartissent pas régulièrement suivant la largeur de la plaque, parce que les éléments de la plaque les plus éloignés de la poutre (nervure) subissent des déformations de cisaillement et donc ne participent plus à la répartition des efforts de compression.

Le mode d'action des plaques cintrées (fig. 1 b) est totalement différent car, comme on le voit dans l'équation 2 du chapitre suivant, en négligeant l'effort

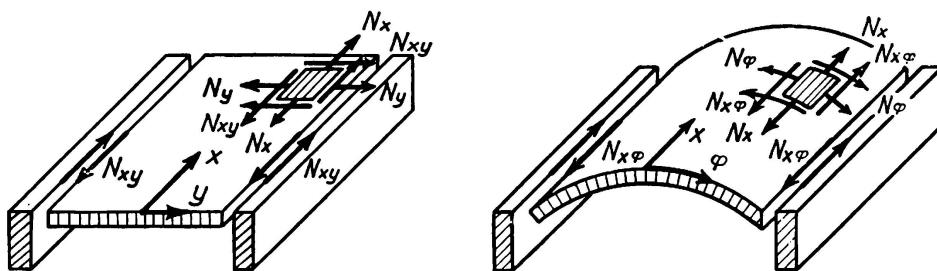


Fig. 1 a.

Fig. 1 b.

de cisaillement N_{xy} entre le voile et la nervure, il reste des efforts de compression N_x , qui proviennent des charges élémentaires et tout le voile participe donc sur toute sa largeur à la compression et cela d'autant plus que la courbure du voile est plus haute par rapport à la ligne des appuis.

Les voiles construits suivant des segments d'ellipse ont donc une capacité portante bien plus grande, que les voiles cylindriques. De plus, dans les voiles nervurés on a de bien moindres moments de flexion dans le sens du voile parce que les efforts de compression N_x , nécessaires pour contrebalancer le moment fléchissant extérieur (provenant de la poussée des autres voiles), proviennent en très grandes parties des poids propres élémentaires du voile et non des efforts de cisaillement N_{xy} . Les valeurs des moments fléchissants dans le sens de la voûte sont donc dépendantes des forces de compression N_x , qui proviennent de l'effet des forces de cisaillement N_{xy} . De ces considérations on déduit que pour des voiles très surélevés, les moments fléchissants sont bien moindres que dans les voiles cylindriques. Je reviendrai plus tard sur ce point.

Entre le voile et la nervure on a 4 forces indéterminées, ce sont:
La force suivant le sens de la voûte N_φ , l'effort tranchant Q_φ , le moment fléchissant M_φ , l'effort de cisaillement $N_{x\varphi}$.

Pour les deux bords de la voûte on a ainsi 8 valeurs indéterminées et le problème du voile demande donc une équation différentielle du 8^{ème} ordre ou bien un système de trois équations différentielles de cet ordre, parce que nous avons besoin de 8 constantes correspondant aux 8 valeurs statiquement indéterminées, pour les liaisons des deux joints entre le voile et les nervures. Pour résoudre ce problème, U. Finsterwalder partit de l'hypothèse que pour de grandes distances entre les deux joints, le voile n'est pas en état de transmettre des efforts par l'entremise des moments de flexion M_x et posa donc le moment $M_x = 0$, l'effort tranchant correspondant $Q_x = 0$ et le moment de torsion $= 0$. Par suite de cette

simplification, il réussit à représenter le problème par une équation différentielle du 8^e ordre, en introduisant une fonction de tension dans laquelle les forces internes du voile sont les dérivées de cette fonction de tension, comme dans la fonction de tension de Airy.

Pour des distances entre joints plus petites par rapport au rayon, des voiles cylindriques, les simplifications faites par U. Finsterwalder, soit $M_x = 0$, $Q_x = 0$, $M_{x\varphi} = 0$ ne sont plus admissibles. Pour cette raison l'auteur s'est efforcé, dans le cas important de construction de halles, de trouver une solution rigoureuse du calcul des voiles cylindriques. Parce que pour ces ouvertures de voûte, les voiles doivent, eu égard à la sécurité au flambage, être renforcés par des nervures, j'ai étendu mon examen aussi aux formes anisotropes.² Il en résulte trois équations différentielles linéaires simultanées, à coefficients constants. Une solution particulière de ces équations différentielles, d'après H. Reissner,³ est obtenue en mettant les surfaces de charges, représentées par des fonctions circulaires, sous la forme de double série trigonométrique. L'analyse montre que pour un tuyau fermé, il y a trois possibilités de transmission des efforts. Elles sont: 1) La transmission des efforts aux joints (fonds) par les forces d'extension (théorie des membranes), 2) la transmission des efforts aux raidissements (nervures) par le moment fléchissant M_x dans le voile (effet de dalle), 3) une assimilation de la partie chargée des harmoniques supérieures au moment fléchissant dans le sens annulaire. Cette assimilation est seulement possible parce que les harmoniques supérieures ne déterminent sur la totalité de la section annulaire aucune résultante verticale réelle de marge correspondante. La charge réelle est transmise par les effets 1 et 2 aux fonds. Pour satisfaire aux conditions aux limites des poutres de rives des voiles Zeiss-Dywidag, la solution particulière citée ci-dessus doit être complétée par la solution d'un système homogène d'équations différentielles. Le système homogène d'équations différentielles doit satisfaire en même temps, comme cité ci-dessous dans le problème résolu en 1930 par K. Miesel,³ à la donnée exponentielle $e^{m\varphi} \cos \lambda x$. Il en résulte que les trois équations différentielles se transforment en trois équations homogènes ordinaires, qui conduisent à une équation du 8^e degré, de la solution de laquelle nous obtenons la longueur d'onde et l'affaiblissement d'une double oscillation partant des deux bords. Cette équation du 8^e degré peut être résolue pour environ 100 cas différents. Les nombres donnés ci-dessus, pour les longueurs d'onde et les affaiblissements, sont portés en diagrammes qui donnent la possibilité d'avoir directement des valeurs sans calculer chaque cas. Avec l'analogie ci-dessus, il n'est pas seulement possible de déterminer les huit conditions aux limites le long des génératrices, mais aussi les conditions aux limites des fonds.

Le problème des "limites" des tuyaux cylindriques circulaires fermés a déjà fait, comme nous l'avons mentionné ci-dessus, l'objet d'une étude de M. K. Miesel en 1930 sur les perturbations aux "limites". De cela, M. Miesel a aussi pris en considération l'élasticité des disques raidissants, problème qui joue un grand rôle dans la construction des sous-marins. M. U. Finsterwalder s'est aussi occupé de ce problème, dans son travail mentionné sous 1) et a donné pour cela une solution, approchée de nouveau, sous la forme d'une fonction de tension, où maintenant, en opposition avec la solution correspondante pour les voiles Zeiss-Dywidag, ce ne sont pas les grandeurs M_x , Q_x , $M_{x\varphi}$, mais les valeurs M_φ , Q_φ ,

$M_{x\varphi}$, qui sont négligées. Cette solution approchée donne avec un minimum de travail essentiel, pas pour toutes les grandes valeurs des harmoniques, une très bonne correspondance avec la solution rigoureuse de M. K. Miesel. Toutefois, pour nos problèmes de construction, il n'y a aucune haute valeur des harmoniques qui soit prise en considération.

Plus le voile sera raidi dans le sens de la voûte, contre la flexion, plus se rapprochera, dans les voiles Zeiss-Dywidag, la loi de répartition des forces de tension N_x de la loi de Navier, car alors le travail des moments fléchissants dans le sens de la voûte ne joue plus aucun rôle vis-à-vis de celui des forces d'extension.

Plus la voûte sera mince, plus elle aura la tendance de diminuer les moments de flexion, ce qui entraîne une mauvaise répartition des forces d'extension.

Cependant, pour obtenir une meilleure répartition des forces N_x , ces voiles minces doivent être combinés avec des hautes poutres de rives.

J'ai déjà montré au début de mon exposé que pour des voûtes très surélevées, comme par exemple celles constituées par des segments plats d'ellipse, on obtenait des moments fléchissants moindres et de meilleurs effets de poutre.

Plus les voiles deviendront grands, plus il sera nécessaire de remplacer la forme cylindrique (circulaire) par la forme de voile surélevé.

Pour les grandes halles du Ministère de l'air on a utilisé presque exclusivement des voûtes de formes elliptiques, proposées par M. U. Finsterwalder et calculées d'après la théorie des voiles cylindriques, en remplaçant approximativement le segment d'ellipse par trois arcs de cercles.

Cela conduit naturellement à des calculs très compliqués, vue que ces éléments de voiles ont 4 côtés et que les oscillations partant de ces côtés s'influencent mutuellement. On a donc un pressant besoin d'une solution exacte et complète du calcul de la courbure elle-même. Cela a été trouvé par un de mes assistants et fera l'objet d'une dissertation ultérieure.

Les poutres portantes des voûtes qui nous occupent sont souvent calculées comme poutres continues sur plusieurs appuis. Comme les dites poutres ont par rapport à leur portée une grande hauteur, les moments sur appuis sont en grande partie très influencés par les déformations dues au cisaillement; Flügge⁴ l'a déjà montré.

Pour des poutres élancées on sait que les déformations dues au cisaillement sont habituellement négligées. Pour les supports des voiles cela n'est pas toujours admissible. Dans le paragraphe II de mon exposé, j'ai montré complètement l'influence de ces effets de cisaillement sur les moments d'appuis et j'ai développé une méthode au moyen de l'équation des trois moments de Flügge, qui permet de calculer les moments d'appuis, ceci pour des portées et des marges quelconques, aussi bien dans le sens de la voûte que dans le sens de la longueur et cela pour des supports de voiles isotropes et anisotropes. Le problème du flambage prend toujours plus d'importance à mesure que les portées augmentent.

Nous avons deux cas à considérer:

- a) le flambage du voile dans le jeu de la voûte,
- b) le flambage dans le sens des génératrices.

Le premier problème avait été traité par R. von Mises⁵ en 1914 déjà et le second plus tôt encore par Lorentz⁶ et Timoschenko.⁷ Ces deux problèmes se

combinent dans les coupoles de grandes dimensions avec de grands écartements des appuis, de telle sorte qu'en les étudiant séparément, pour les deux cas de flambage, on obtiendrait des résultats trop favorables. Ces cas de flambage combinés, si important pour les voiles, ont été résolus par W. Flügge⁸, qui en a donné une solution très détaillée et applicable aux cas pratiques. Il en ressort que le flambage combiné agit de façon tout-à-fait défavorable. Les recherches de Flügge s'étendent aussi au cas de parois cylindriques circulaires, pour lesquelles on est clairement renseigné pour de grandes portées. Par une extrapolation, W. Flügge montre que ces équations s'étendent aussi au cas particulier du flambement des plaques.

Comme on suppose dans les conditions de flambage que les déformations du voile sont faibles par rapport aux épaisseurs, mais que d'autre part ces conditions sont déjà très difficiles à réaliser en pratique, puisqu'avec de grandes portées on obtient déjà des déformations sensibles, il faut exiger qu'on adopte pour les voiles des coefficients de sécurité au flambage notablement plus élevés que pour de simples arcs. On atteint aisément une sécurité suffisante en renforçant le voile au moyen de nervures. Ces mesures ont en plus l'avantage de diminuer les déformations et de supporter aussi les moments de flexion du voile. Dans presque tous les pays on a construit ces dernières années des voiles de dimensions croissantes. On a exécuté de tel voiles jusqu'à 60 m de portée pour les poutres et 45 m pour les arcs, soit de 2700 m² de base. Sur ces bases on a adopté pour les voiles à grande portée des sections transversales elliptiques. D'autre part on a exécuté un grand nombre de halles avec des arcs de 100 m de portée et un écartement relativement faible des poutres de rive. La fig. 2 donne la vue extérieure d'un hangar d'aviation du type avec arcs de grandes portées et la fig. 3 la vue intérieure d'un hangar avec arcs et poutres de grandes portées, dont la reproduction m'a été permise par le Ministère de l'air. Les fig. 4 et 5 montrent l'application de ces voiles aux bâtiments; la fig. 4 représente le hangar des camions postaux de Bamberg et la fig. 5 des voiles cylindriques circulaires disposées en sheds, pour une fabrique de tôle de Buenos Aires.

2) Les toits plissés.

Dans les toits plissés, le voile est remplacé par un polyèdre et la section de courbure continue par un polygone. Le problème est essentiellement le même que pour les voiles cylindriques. Les équations différentielles sont remplacées par d'autres équations différentielles du même ordre. Aux moments de flexion dus à l'effet de voile viennent s'ajouter ceux dus à l'effet de plaque, car les faces doivent premièrement transmettre leurs charges sur les arêtes du toit en provoquant des moments de flexion; ces efforts sont reportés sur les raidissements par des extensions dues à l'effet de voile, respectivement de "toits plissés". Le problème a été traité par E. Gruber⁹ et G. Grüning¹⁰ d'abord en considérant les moments de flexion dus à l'effet de voile. Les deux auteurs ont négligé la résistance à la torsion des poutres des bords. Sur ce point, les travaux précédents ont été complété par R. Ohlig¹¹ qui a tenu compte de la résistance à la torsion des extrémités, de la même façon qu'on l'a toujours fait pour les voiles. A cause de leurs grands moments fléchissantes, ces types de poutres sont moins économiques que les voiles et comme le mieux est souvent l'ennemi du bien, on ne les a

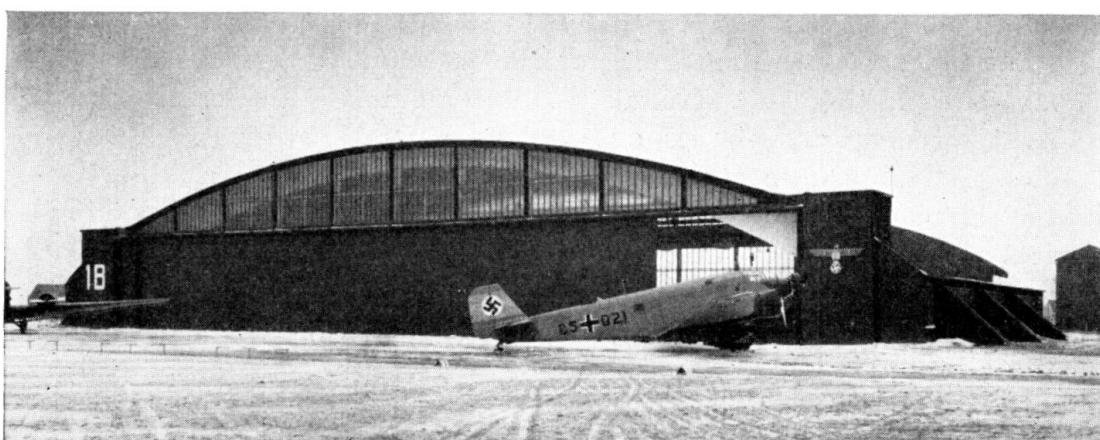


Fig. 2.

pas exécutés jusqu'à aujourd'hui dans les grandes constructions. Cela tient aussi au fait que les brevets pour les voiles et les "toits plissés" se trouvent dans les mêmes mains, celles de la maison Dyckerhoff et Widmann A.-G.

3) Les coupoles polygonales composées de voiles cylindriques.

Comme on le sait, c'est d'après ce système qu'ont été exécutées les plus grandes coupoles massives existant actuellement, celle du marché couvert de Leipzig avec 76 m de portée et la coupole en arc de cloître du marché couvert de Bâle, de 60 m de portée. Tandis que la théorie de ces arcs de cloître est établie et



Fig. 3.

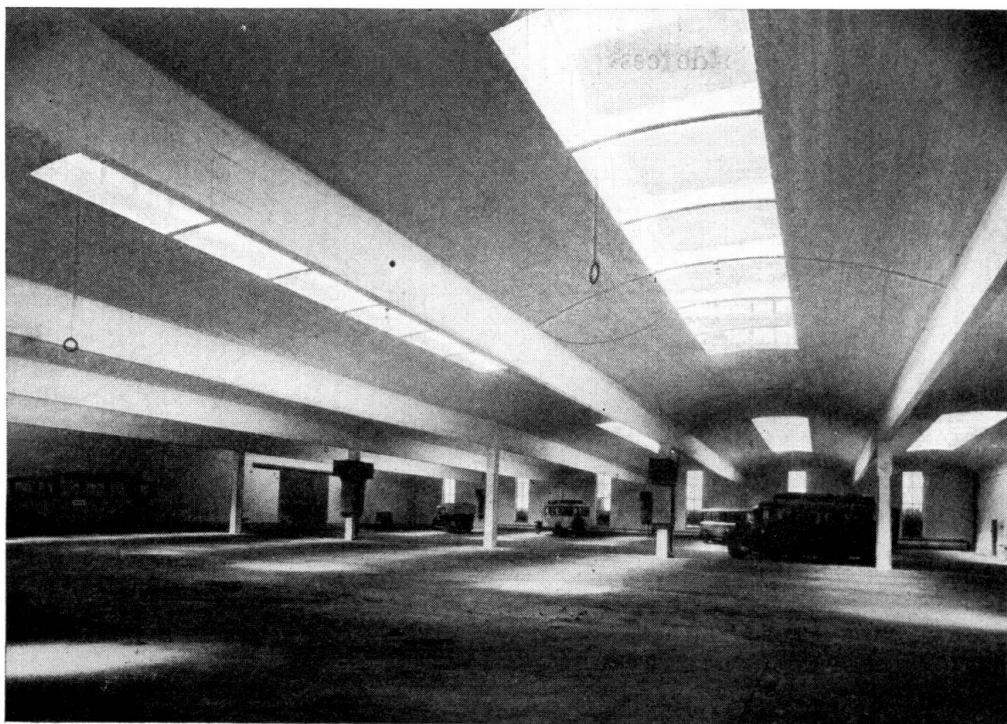


Fig. 4.
Hangar des autobus de Bamberg.

publiée¹² depuis longtemps, cela n'est pas le cas pour les arcs en croix. Avec ces arcs en croix, on construit des coupoles très belles au point de vue architectonique et irréprochables au point de vue acoustique. La fig. 6 montre une de ces coupoles, de forme octogonale. Indépendamment d'une bonne acoustique, ces coupoles donnent un éclairage excellent; des grandes fenêtres ménagées dans le

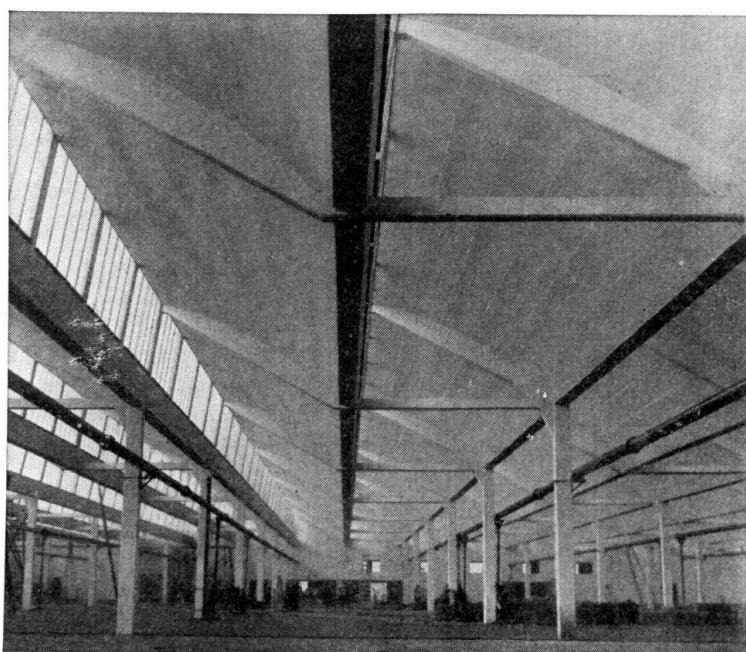


Fig. 5.

dôme, la lumière tombe au milieu de la salle par réflexion sur voûte cylindrique. J'ai développé la théorie de ces coupole à l'occasion du concours de 1930 de l'Académie d'architecture (Beaux Arts) et j'ai montré qu'il est possible d'éliminer tout effort de flexion dans les arêtes de raidissement. Comme la place me manque pour la publier dans ce rapport, cette théorie sera publiée prochainement dans une revue.

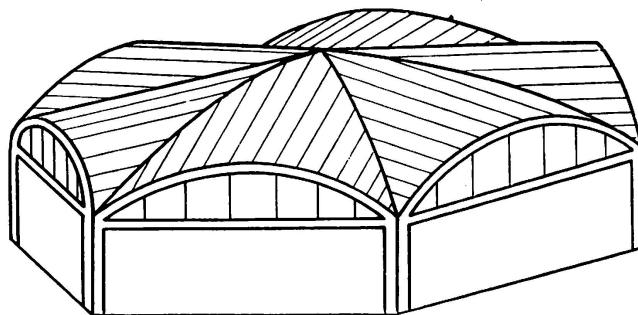


Fig. 6.

4) Les voiles à double courbure.

La théorie des voiles de révolution librement appuyés sur leur pourtour est déjà établie depuis longtemps. Dans le développement ultérieur des voiles à double courbure les types suivants sont importants:

- a) Les voiles de révolution appuyés en quelques points seulement, pour lesquels "l'effet de coupole" est repris par un "effet de poutres" pour reporter les efforts sur les colonnes.
- b) Les coupole de "rotation" et de "translation" avec des bases carrées ou polygonales.
- c) Les coupole d'abside.

La théorie des diverses formes de coupole à double courbure fut développée par moi en 1930 à l'occasion du concours déjà mentionné. La publication de cette étude, sous la forme d'un ouvrage, avait été prévue par l'Académie; mais par suite de manque de ressources, cette publication n'a pas pu être entreprise. Ces pourquoi, ces travaux ont été publiés sous une forme raccourcie dans la revue "Bauingenieur".¹³ En ce qui concerne les voiles sur appui unique dont la forme est une surface de révolution, on doit remarquer que, les hauteurs de poutre et par conséquent les bras de levier des forces intérieures pour transmettre les charges vers les colonnes sont proportionnelles aux portées des poutres et qu'aussi les contraintes découlant de l'effet de poutre sont indépendantes de la portée. Il découle de cela que l'on peut réaliser avec de telles constructions, aussi bien qu'avec les coupole polygonales, de très grandes portées. Les voiles ne sont cependant pas exempts de phénomènes de flexion. D'après l'étude de A. Havers,¹⁴ qui traite le problème de la distorsion de l'anneau de base d'un voile sphérique et qui en donne la solution au moyen d'une fonction sphérique, il est possible dès lors de déterminer les moments du flexion correspondants, ce qui est une nécessité absolue. L'application numérique sur un exemple, quoique laborieuse, serait hautement désirable pour délimiter nettement quelles portées peuvent être tolérées avec de telles formes de voiles et si elles sont économiques

comparativement aux voiles du type b), pour lesquels la transmission des efforts se fait presque exclusivement par des forces de compression et dont l'épaisseur est par conséquent fixée uniquement pour résister au flambage, car, même pour les grandes portées, les contraintes admissibles ne peuvent pas être appliquées. Le calcul des voiles de révolution dont la forme en plan est rectangulaire ou polygonale, peut s'effectuer d'une manière très simple d'après la méthode indiquée par l'auteur, au moyen de l'équation différentielle traduisant l'état de tension de la membrane élastique.

La fig. 7 montre un voile de ce type très plat, à base rectangulaire, qui fut exécuté pour un bâtiment de l'école technique de Dantzig; pour une portée de 12.00 m ce voile n'a que 0.77 m de flèche; le surbaissement est donc de 15,6, soit beaucoup plus que les ponts les plus élancés. Cette figure permet de reconnaître qu'un tel type de voile n'est pas autre chose qu'une plaque bombée qui se distingue des plaques habituelles en ce sens qu'elle travaille en compression. Sur la fig. 8 on voit un voile à double courbure à base rectangulaire, destiné à une halle à Klinker, à Beocin. Cette figure nous montre l'application de ce que l'on a désigné sous le nom de (c) voiles à absides. Comme je l'ai démontré dans l'article de la revue "Bauingenieur",¹³ il se réalise dans cette demi-coupoles l'état de tension d'une membrane, si les retombées sont raidies par un anneau. Puisque ces demi-coupoles peuvent être considérées comme des éléments de construction formant un ensemble stable par lui-même, leur rôle comme nouvel élément constructif des halles est très important, puisqu'elles permettent de raccorder des coupoles cylindriques à une base qui se rapproche de l'ovale. Ces demi-coupoles ont reçu une application en grand dans la construction des hangars pour avions de portées atteignant 40 m. Le hangar d'avions, représenté sur la fig. 3, est constitué par une longue voûte cylindrique qui se termine à ses extrémités par une coupole à abside. Enfin, la fig. 9 montre une demi-coupoles du même genre destinée au pavillon de musique des bains de Schwalbach.

5) Le principe de la compensation statique des masses dans le calcul des voiles affins.

Les voiles examinés précédemment pouvaient être calculées à l'aide de l'équation différentielle de l'état de tension de la membrane, parce que le voile sphérique se laisse facilement traiter mathématiquement. Le principe de la compensation statique des masses nous permet d'une manière très simple de calculer aussi des voiles affins. J'ai développé ce principe en 1928 pour des cas déterminés;¹⁵ en 1930, à l'occasion de l'étude déjà mentionnée, j'ai exposé le problème d'une manière générale, au moyen de l'équation différentielle et pour un voile de forme quelconque; cette étude a été publiée dans la revue "Bauingenieur".¹⁶ Il s'agit par exemple de calculer un voile à base elliptique, en partant d'un voile de révolution de forme fondamentale. Les nombreux problèmes qui peuvent être traités de cette manière sont indiqués dans le mémoire cité ci-dessus; il suffit de rappeler ici que les voiles de révolution affins peuvent se calculer d'une manière simple.

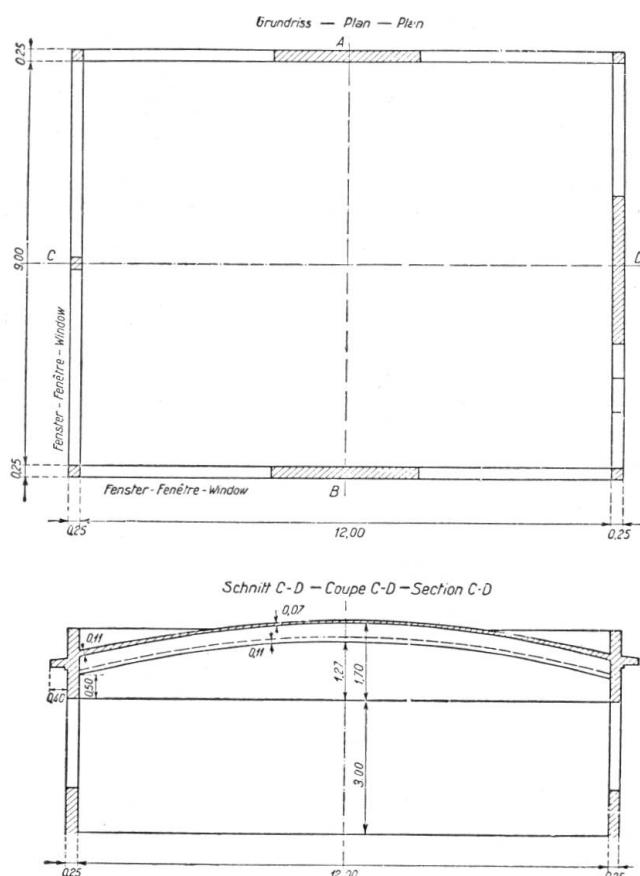


Fig. 7.



Fig. 8.
Hall à klinker, Beocin.

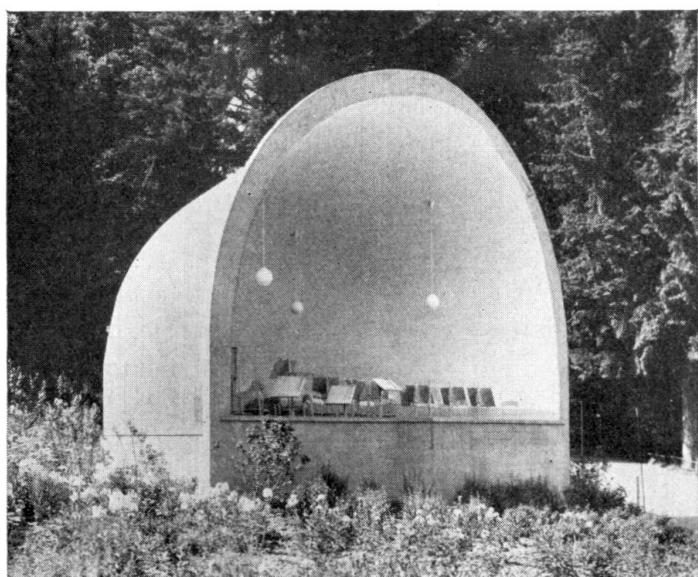


Fig. 9.
Pavillon à musique des bains de Schwalbach.

6) Voiles de forme entièrement arbitraire.

Les voiles de ce type ne peuvent pas être calculés à l'aide de l'équation différentielle des membranes, parce que nous ne pouvons pas intégrer les 3 équations différentielles aux dérivées partielles correspondantes. Nous devons choisir un autre chemin et résoudre ces équations par la méthode des différences finies.

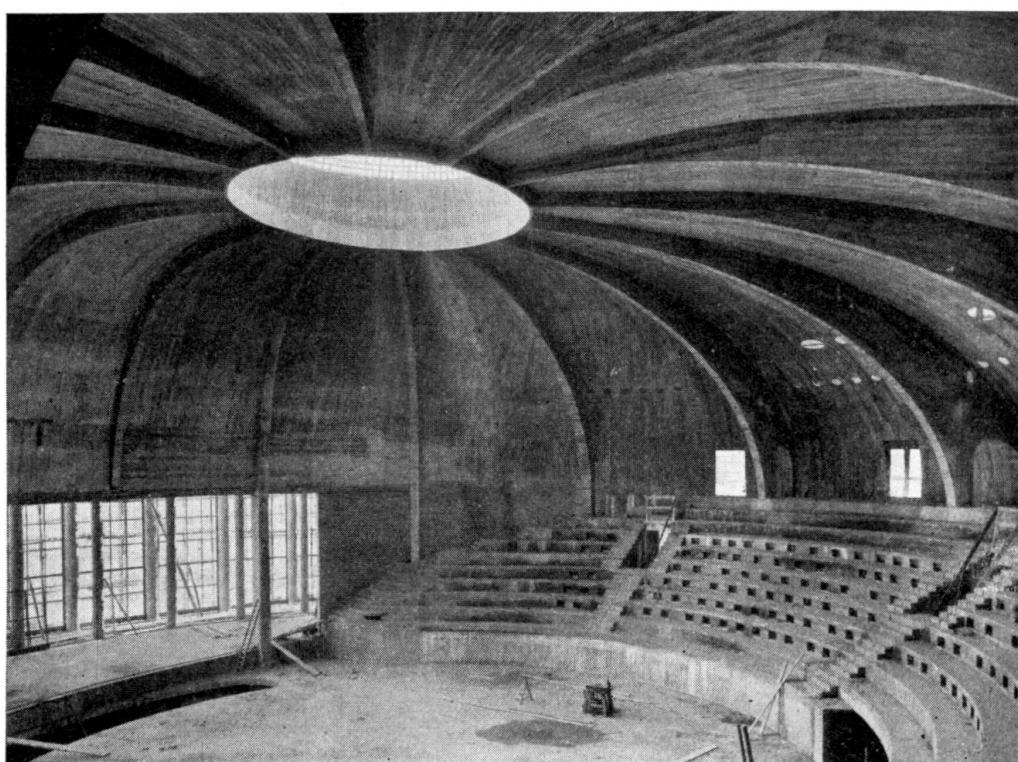


Fig. 10.
Maison du sport allemand. Berlin-Reichssportfeld.

Pucher, en 1931,¹⁷ a donné une méthode simple et rapide conduisant à la solution de ce problème. Il est démontré que cette solution simple est possible, parce que les 3 équations différentielles peuvent être ramenées à une seule en introduisant une fonction nouvelle, la fonction de tension, qui, dès qu'elle est connue, permet de trouver complètement l'état de tension cherché. Les contraintes intérieures peuvent être déterminées d'une manière semblable à celle que l'on utilise dans la méthode de la fonction d'Airy. Puisque seule la répartition de la rigidité intervient sur la forme de la surface, toutes les constructions en voiles peuvent être calculées si les conditions sur le pourtour sont données et si l'état de tension de la membrane est ainsi à déterminer. La méthode pour différences finies est toujours applicable si, comme déjà mentionné plus haut, une solution au moyen de l'équation différentielle est possible. Les derniers travaux français suivent la trace indiquée par Pucher. Le développement des méthodes de construction des coupoles en France se base sur cette théorie; la forme des coupoles appartient aux surfaces réglées non développables. Pour le cas spécial de la surface de translation, Flügge⁴ a donné une solution analogue, au moyen des équations à différences.

Comme conclusion, je peux encore montrer une exécution intéressante, reproduite dans la fig. 10. Elle se rapporte à la coupole de la maison des sports allemands, érigée à l'occasion des Olympiades. Le projet a été établi par l'Architecte March et la disposition constructive par U. Finsterwalder. Le lanternau supérieur est placé excentriquement pour obtenir un bon éclairage. Dans cette construction, l'effet de coupole n'existe pas effectivement, parce que les secteurs isolés qui la constituent ne réagissent pas les uns sur les autres, à cause de la présence des nervures de raidissement.

L i t e r a t u r e.

¹ U. Finsterwalder: Die Theorie der zylindrischen Schalengewölbe, System Zeiß-Dywidag, Association intern. des Ponts et Charpentes, Mémoires 1, 1932, et dissertation, Munich 1930, de même Ing. Arch., IV^e vol. 1933.

² Fr. Dischinger: Die strenge Theorie der Kreiszylinderschale in ihrer Anwendung auf die Zeiß-Dywidag-Schalen, Beton und Eisen 1935, fasc. 16—18.

³ K. Miesel: Über die Festigkeit von Kreiszylinderschalen bei nicht achsensymmetrischer Belastung, Ing. Arch. I^r vol. 1930.

⁴ W. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen, Editions Jul. Springer, Berlin 1934.

⁵ R. v. Mises: Z. V.D.I. 58, 1914 p. 750 et ss.

⁶ R. Lorenz: Z. V.D.I. 52, 1908, p. 1766 et ss.

⁷ S. Timoschenko: Z. Math. Phys. 58 (1910), p. 378 et ss.

⁸ W. Flügge: Die Stabilität der Kreiszylinderschale. Ing. Arch. III^e vol. 1932.

⁹ E. Gruber: Berechnung prismatischer Scheibenwerke. Association intern. des Ponts et Charpentes, Mémoires 1 1932, p. 225 et Mémoires 2 1934, p. 206.

¹⁰ G. Grüning: Die Nebenspannungen der prismatischen Scheibenwerke, Ing. Arch. 3^e vol. 1932.

¹¹ R. Ohlig: Beitrag zur Theorie der Prismatischen Faltwerke, Ing. Arch. 6^e vol. 1935, et Die Nebenspannungen der Randträger prismatischer Faltwerke. Dissertation Darmstadt 1934.

En ce qui concerne la théorie des membranes ad 9 et 11. cf. aussi H. Craemer: Allgemeine Theorie der Faltwerke. Beton und Eisen 1930, p. 276 et G. Ehlers: Die Spannungsermittlung in Flächentragwerken. Beton und Eisen 1930, p. 28.

¹² *Fr. Dischinger*: Theorie der Vieleckskuppeln, Diss. Dresde 1929 et Beton und Eisen 1929, p. 100.

¹³ *Fr. Dischinger*: Die Rotationsschalen mit unsymmetrischer Form und Belastung. Bauing. 1935, fasc. 35—38.

¹⁴ *A. Havers*: Asymtotische Biegetheorie der unbelasteten Kugelschale, Ing. Arch. 6 1935.

¹⁵ *Fr. Dischinger*: Der Spannungszustand in affinen Schalen und Raumfachwerken, Bauing. 1936, p. 128, cf. aussi.

¹⁶ *Fr. Dischinger*: Handbuch für Eisenbeton, 3^e édition, 12^e vol. 1928 et *W. Flügge*⁴.

¹⁷ *A. Pucher*: Beitrag zur Theorie tragender Flächen, Dissertation, Graz 1931 et sous le titre Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen, sous forme abrégée. Beton und Eisen 1934, fasc. 19.

Résumé.

Dans la première partie de ce rapport l'auteur donne un aperçu du développement de la théorie des différentes formes de voile depuis le dernier Congrès de 1932 et il parle des principes des travaux les plus importants.

Dans la deuxième partie l'auteur traite le problème du tuyau cylindrique renforcé et du toit Zeiss-Dywidag et il montre que dans ces voiles portants on ne doit pas négliger l'influence des déformations dues aux efforts tranchants sur les moments d'encastrement, ce qui n'est pas le cas pour les poutres élancées dans lesquelles ces influences que l'on sait très petites peuvent être négligées.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVa 3

Coupoles massives, réservoirs cylindriques et constructions semblables.

Massive Kuppeln, zylindrische Behälter und ähnliche Konstruktionen.

Solid Domes, Cylindrical Reservoirs and Similar Constructions.

Dr. techn. H. Granholm,

Dozent an der Königlichen Technischen Hochschule, Stockholm.

Le calcul exact des contraintes de flexion dans une coupole massive est très compliqué. Un travail de doctorat¹ présenté à l'Ecole polytechnique de Stockholm fait ressortir ces difficultés et l'on peut se demander si l'Ingénieur occupé dans la pratique trouvera le temps et l'occasion de calculer les dimensions d'une coupole sur la base de la théorie exacte. L'établissement des équations fondamentales est déjà compliqué et leur intégration exacte conduit à des séries qui sont difficiles à manier et qui ne convergent que lentement. Alors que la convergence est satisfaisante pour bien des épaisseurs de paroi, une modification de cette épaisseur peut faire disparaître cette bonne convergence. Même lorsque l'Ingénieur possède à fond la théorie mathématique de ce problème, le calcul d'un cas de charge déterminé exige beaucoup trop de travail. Il serait tout-à-fait impossible d'arriver à une méthode pratique en partant du chemin suivi par *Meissner, Bolle, Dubois, Honegger, Ekström*, etc. Par exemple, pour les coupoles sphériques, on obtient lors de l'intégration dans les cas les plus simples, des séries hypergéométriques qui ne peuvent être pour l'Ingénieur un instrument exact à cause de leur lente convergence.

En considération de ces faits, il importe avant tout, pour le développement plus ample de la théorie des coupoles, de se diriger vers des solutions qui satisfassent les exigences de la pratique, même si l'on doit introduire certaines approximations. Ainsi que l'a montré *Geckeler*,² il est possible de trouver par des moyens mathématiques relativement simples, une solution qui ne s'éloigne que peu de la solution exacte et qui est simple et agréable à employer lorsque l'épaisseur de la paroi et le rayon sont constants. La bonne concordance entre la théorie de *Geckeler* et la théorie exacte nous permet d'expliquer plus exactement la théorie approchée, lorsque l'on est au clair sur les hypothèses que l'on

¹ John Erik Ekström: „Studien über dünne Schalen von rotationssymmetrischer Form und Belastung mit konstanter und veränderlicher Wandstärke“. Stockholm 1932.

² cf. par ex. „Handbuch für Eisenbetonbau“, 6^e vol., Berlin 1928.

introduit. On s'approche encore un peu plus de la théorie exacte en employant le procédé d'intégration asymptotique de *Blumenthal* et *Steuermann*, ce qui peut se faire même lorsque l'épaisseur de la paroi est variable. Ce procédé représente un gros progrès par rapport aux méthodes qui sont basées sur des solutions en forme de séries infinies, où l'on doit toujours supposer que l'épaisseur de la paroi varie suivant une fonction déterminée pour obtenir une solution.

Un examen plus approfondi des équations finales données par *Geckeler* montre que ces équations sont exactement du même type que celles pour une poutre sur appuis élastiques. L'analogie physique n'est pas non plus difficile à remarquer. On peut considérer comme une poutre le méridien de la coupole qui est soutenu par les cercles parallèles ou ceintures. Comme ceux-ci se laissent comprimer ou étirer ils correspondent au point de vue statique à des appuis élastiques.

Cette conception nous fait voir la statique de la coupole avec une exactitude suffisante. Pour l'établissement des équations d'équilibre, il n'est plus nécessaire de reprendre les équations différentielles de *Meissner* et il est possible de poser directement et simplement les équations nécessaires à l'aide de la théorie des poutres sur appuis élastiques. Ceci signifie, pour l'Ingénieur qui est dans la pratique qu'il n'a plus besoin de s'efforcer tout d'abord de comprendre la théorie classique, assez compliquée, de la coupole; de plus il peut établir de lui-même les équations nécessaires.

Les travaux de *Geckeler* montrent qu'il n'a lui-même pas complètement saisi la haute signification des approximations qu'il propose; c'est-à-dire qu'il n'a pas compris qu'en gros la coupole agit comme une série continue de poutres sur appuis élastiques. La manière de voir que je propose peut naturellement être étendue en ce sens que l'on peut considérer le méridien non comme une poutre mais comme un arc appuyé élastiquement sur les éléments annulaires de la coupole.

Par l'introduction de cette conception plus exacte, on obtient un aperçu plus juste de la statique de la coupole et les équations que l'on obtient ainsi sont les mêmes que celles de *Meissner*.

Il est notoire que spécialement dans les coupoles très plates, où par conséquent l'effet de voûte dans les éléments de méridien est très marqué, il est nécessaire d'introduire cette dernière manière de voir afin d'obtenir l'exactitude désirée. Plus la tangente à la coupole au droit de l'appui est inclinée, plus sera exacte la conception du méridien en tant que poutre sur appuis élastiques et dans le cas spécial où la tangente à la coupole est partout verticale, c'est-à-dire lorsque la coupole se transforme en un cylindre, cette manière de voir est tout-à-fait exacte.

Afin de faire mieux voir la simplicité du problème de la coupole traité de cette façon, j'ai calculé quelques problèmes et j'ai comparé les résultats ainsi obtenus avec ceux de la théorie exacte. La concordance est partout étonnamment bonne.

Comme premier exemple, choisissons une coupole sphérique de béton armé d'épaisseur constante, $\delta = 16$ cm, de rayon $r = 1000$ cm et d'angle d'ouverture 40° . Supposons que la coupole soit chargée par un liquide à la pression constante $p = 1,0 \text{ kg/cm}^2$ et que l'arête soit complètement encastrée (fig. 1).

Si l'on calcule les contraintes dans cette coupole d'après la théorie des membranes, on obtient une compression dans le méridien $T_1 = \frac{p r}{2}$ et une compression dans les parallèles $T_2 = \frac{p r}{2}$. Ces contraintes dans le méridien et le parallèle sont constantes sur toute la coupole et la solution par la théorie des membranes

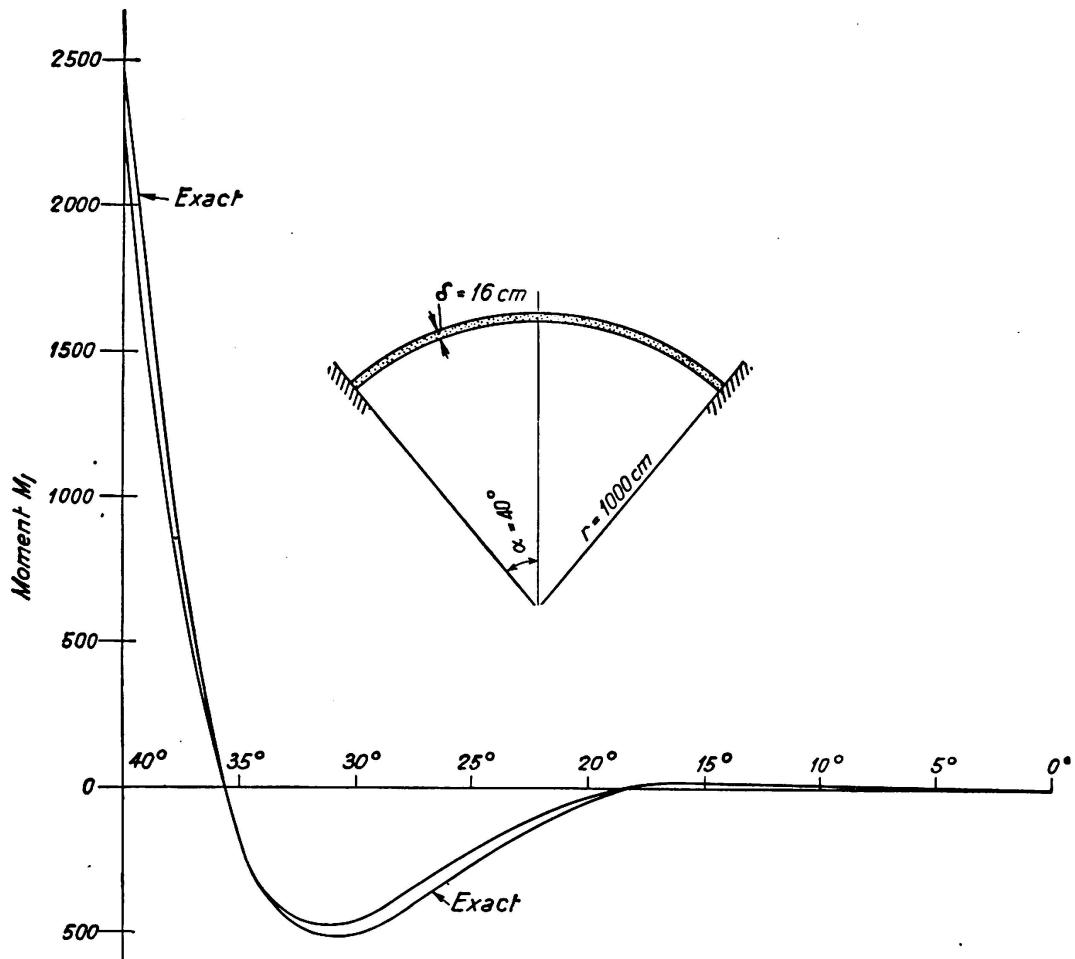


Fig. 1.

Comparaison entre la grandeur du moment méridien calculée d'abord d'après l'équation 5 et ensuite d'après la méthode exacte au moyen de séries hypergéométriques. Les écarts sont insignifiants pour la pratique.

est très simple. Sous l'effet de ces contraintes de compression T_1 et T_2 la coupole est comprimée de telle sorte que son rayon se réduit de $\frac{T \cdot r}{E \delta}$, c'est-à-dire $\frac{p r^2}{2 E \delta}$. Cette réduction du rayon n'est pas grande; dans notre exemple, pour $E = 210\,000 \text{ kg/cm}^2$, elle ne monte qu'à 0,15 cm. Mais comme la coupole est fixée tout autour de son arête, elle ne peut pas modifier librement sa forme; les parties situées près de l'arête conserveront le rayon primitif mais plus on s'éloigne de l'arête, plus la liberté de mouvement de la construction est grande et plus les déformations pourront se produire librement. Quoique dans notre

cas la compression soit relativement faible, il se produit cependant aux environs des arêtes certaines perturbations qui engendrent des moments d'un ordre de grandeur tel que l'on ne peut pas les négliger.

Nous voulons rechercher maintenant quels moments sont engendrés dans une poutre sur appuis élastiques lorsque l'on admet qu'elle subit un fléchissement correspondant à la valeur que nous avons calculée ci-dessus $\frac{pr^2}{E2\delta}$. La relation entre le moment et le fléchissement est donnée par l'équation:

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_1 \quad (1)$$

et l'influence de l'appui élastique des éléments de parallèle est exprimée par l'équation:

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} = \frac{E\delta}{r^2} \cdot y \quad (2)$$

Eliminons M_1 de ces deux équations, on obtient

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + \frac{E\delta}{r^2} \cdot y = 0 \quad (3a)$$

ou en admettant que la rigidité EJ est constante et égale à $\frac{Em^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{\delta^3}{12}$ on a:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4k^4 y = 0 \quad (3b)$$

où

$$k^4 = \frac{3(m^2 - 1)}{m^2} \cdot \frac{1}{r^2 \delta^2}$$

L'intégrale générale de l'équation 3b peut s'écrire sous la forme connue

$$y = e^{-kx} (A \cos kx + B \sin kx) + e^{kx} (C \cos kx + D \sin kx) \quad (4a)$$

c'est-à-dire que l'on peut considérer le fléchissement comme la somme de deux oscillations sinusoïdales, l'un avec amplitudes décroissantes et l'autre avec amplitudes croissantes. On peut poser en général que les coefficients C et D sont nuls en admettant que la poutre n'est pas trop courte et que l'origine peut être déplacée au point d'où part la perturbation. Pour les coupole fermées, on peut par conséquent écrire l'intégrale avec précision suffisante sous la forme:

$$y = e^{-kx} (A \cos kx + B \sin kx) \quad (4b)$$

Ici x désigne la longueur d'arc du méridien, mesurée à partir du bord de la coupole. Dans ce cas, il est facile de déterminer les constantes arbitraires en partant des conditions d'appui:

$$y = -\frac{pr^2}{2E\delta} \text{ et } y' = 0$$

on obtient:

$$A = B = -\frac{pr^2}{2E\delta}$$

et le fléchissement du méridien est ainsi

$$y = -\frac{pr^2}{2E\delta} \cdot e^{-kx} (\cos kx + \sin kx).$$

Après introduction de cette valeur dans l'équation 1 on obtient l'expression suivante pour le moment dans le méridien :

$$M_1 = \frac{\sqrt{3}}{12} \rho \delta e^{-kx} (-\cos kx + \sin kx) \quad (5)$$

Dans cette expression on a négligé la contraction du matériau c'est-à-dire que l'on a posé le nombre de Poisson $m = \infty$.

A l'aide des valeurs données dans le tableau I pour les fonctions $e^{-kx} \cos kx$ et $e^{-kx} \sin kx$, il est facile de représenter graphiquement l'équation 5. Dans la fig. 1, on voit très bien comment le moment dans le méridien M_1 varie avec l'éloignement du bord de la coupole. A titre de comparaison, nous avons donné les valeurs exactes calculées d'après la méthode de *Bolle* avec séries hypergéométriques.³ Ainsi que l'on peut le voir, la concordance entre les résultats exacts et les valeurs approximatives est étonnamment bonne c'est pourquoi il n'y a aucune raison de faire du problème de la coupole un travail mathématique étendu. Dans les coupole avec angle d'ouverture plus grand que dans notre cas, la concordance entre les valeurs exactes et approchées est encore meilleure. Seulement pour les coupole dont la pente aux appuis est très faible, l'influence des hypothèses que l'on a faites a une signification pratique. Remarquons en passant que de telles coupole ne sont pas appropriées, à cause des fortes perturbations qui se produisent à la liaison de la coupole à la ceinture d'appui.

Pour le calcul des contraintes dans la coupole, il n'y a pas que le moment dans le méridien qui rentre en ligne de compte mais aussi les moments dans le parallèle M_2 et l'accroissement des compressions dans le méridien et le parallèle qui en résulte, car les conditions d'appui ne correspondent pas aux hypothèses de la théorie des membranes. Ces grandeurs M_2 , ΔT_1 et ΔT_2 peuvent être calculées directement à partir des relations suivantes. La concordance entre les valeurs obtenues d'après la méthode approchée que nous donnons et celles obtenues par la méthode exacte est aussi très bonne, ainsi que l'on peut le voir d'après la comparaison donnée dans le tableau II.

L'établissement des expressions mathématiques pour les forces supplémentaires ΔT_1 et ΔT_2 se fait de la façon la plus simple par application de l'analogie, en considérant le méridien comme une poutre sur appuis élastiques. Le supplément de la compression dans le méridien, ΔT_1 , peut être considéré comme l'effort de cisaillement dans la poutre multiplié par $\cotg \alpha$, où α est l'angle formé par le méridien et le plan horizontal. On obtient

$$\Delta T_1 = \cotg \alpha EJ \cdot \frac{d^3 y}{dx^3}. \quad (6)$$

Le supplément de compression dans le parallèle ΔT_2 , est une mesure pour l'effet d'appui élastique et ΔT_2 est par conséquent directement proportionnel au fléchissement y du méridien, donc

$$\Delta T_2 = \frac{E\delta}{r} \cdot y. \quad (7)$$

³ cf. *Ekström*, p. 124.

Tableau I.

Valeurs des fonctions $e^{-kx} \cos kx$, $e^{-kx} \sin kx$, $e^{-kx} (\cos kx - \sin kx)$ et $e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$

kx	$e^{-kx} \cos kx$	$e^{-kx} \sin kx$	$e^{-kx} (\cos kx - \sin kx)$	$e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$
0	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000
$\frac{\pi}{8}$	0.6239	0.2584	0.3655	0.8823
$\frac{\pi}{4}$	0.8225	0.3225	0.0000	0.6450
$\frac{3\pi}{8}$	0.1179	0.2845	-0.1665	0.4024
$\frac{\pi}{2}$	0.0000	0.2079	-0.2079	0.2079
$\frac{5\pi}{8}$	-0.0536	0.1297	-0.1833	0.0761
$\frac{3\pi}{4}$	-0.0671	0.0671	-0.1342	0.0000
$\frac{7\pi}{8}$	-0.0592	0.0245	-0.0837	-0.0347
$\frac{\pi}{2}$	-0.0432	0.0000	-0.0432	-0.0432
$\frac{9\pi}{8}$	-0.0269	-0.0112	-0.0157	-0.0381
$\frac{5\pi}{4}$	-0.0139	-0.0139	0.0000	-0.0279
$\frac{11\pi}{8}$	-0.0051	-0.0123	0.0072	-0.0174
$\frac{3\pi}{2}$	0.0000	-0.0090	0.0090	-0.0090
$\frac{13\pi}{8}$	0.0023	-0.0056	0.0079	-0.0033
$\frac{7\pi}{4}$	0.0029	-0.0029	0.0058	0.0000
$\frac{15\pi}{8}$	0.0026	-0.0011	0.0037	0.0015
2π	0.0019	0.0000	0.0019	0.0019
$\frac{17\pi}{8}$	0.0011	0.0005	0.0006	0.0016
$\frac{9\pi}{4}$	0.0006	0.0006	0.0000	0.0012
$\frac{19\pi}{8}$	0.0002	0.0005	-0.0003	0.0007
$\frac{5\pi}{2}$	0.0000	0.0004	-0.0004	0.0004
$\frac{21\pi}{8}$	-0.0001	0.0003	-0.0004	0.0002
$\frac{11\pi}{4}$	-0.0001	0.0001	-0.0002	0.0000
$\frac{23\pi}{8}$	-0.0001	0.0001	-0.0002	0.0000
3π	-0.0001	0.0000	-0.0001	-0.0001

Le moment dans le parallèle M_2 s'obtient de la façon la plus simple en déterminant les modifications de courbure du parallèle⁴ et l'on obtient en négligeant l'influence de la contraction

$$M_2 = \cot \alpha \cdot \frac{EJ}{r} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (8)$$

Introduisons dans les équations 6, 7 et 8 l'équation pour le fléchissement du méridien

$$y = -\frac{pr^2}{2E\delta} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$$

on obtient les expressions suivantes pour ΔT_1 , ΔT_2 et M_2 :

$$\Delta T_1 = -\cot \alpha \frac{pr^2 \delta^2}{6} k^3 e^{-kx} \cos kx \quad (6a)$$

$$\Delta T_2 = -\frac{pr}{2} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx) \quad (7a)$$

$$M_2 = \cot \alpha \frac{pr \delta^2}{12} k e^{-kx} \sin kx. \quad (8a)$$

Le tableau II contient les valeurs calculées ainsi pour les contraintes dans le méridien et le parallèle et les moments dans le parallèle en comparaison avec les valeurs exactes.

Tableau II.

Comparaison entre les valeurs approchées et exactes des contraintes dans le méridien et le parallèle et les moments dans le parallèle.

Pente du méridien α	$T_1 + \Delta T_1$ approché kg/cm	$T_1 + \Delta T_1$ exact kg/cm	$T_2 + \Delta T_2$ approché	$T_2 + \Delta T_2$ exact	M_2 approché kg cm/cm	M_2 exact
40°	443	439	0	0	0	0
35°	474	481	215	193	99	113
30°	503	504	437	427	62	73
25°	506	508	517	520	12	17
20°	503	504	518	523	-8	-10
15°	501	501	511	510	-9	-14
10°	499	499	501	501	-5	-9
5°	499	498	499	498	0	-3

Le problème que nous venons de calculer correspond aux conditions d'appui les plus simples. Afin de démontrer l'applicabilité de cette méthode à des conditions d'appui compliquées, j'ai calculé une coupole jointe à un cylindre suivant la fig. 2. Afin de simplifier le problème, dans une certaine mesure, on a admis que la pression de l'eau est constante sur la coupole. Ce problème fut complètement résolu par *Ekström* avec les mêmes hypothèses. Le tableau III contient

⁴ cf. par exemple *Föppl*, „Drang und Zwang“, 2^e vol., Berlin 1928.

les valeurs exactes pour le moment dans le méridien, M_1 et pour la contrainte dans le parallèle, T_2 .

Pour toutes les constantes de la coupole, nous utiliserons l'indice 1 et pour les constantes du cylindre l'indice 2.

Le calcul de cette construction fut effectué de la manière suivante. Si la coupole intérieure et le cylindre sont libérés l'un de l'autre et s'ils peuvent se déformer sans entrave sous l'effet de la surcharge, on obtient d'après la théorie de la membrane:

$$\text{une réduction du rayon de la coupole de } \frac{pr_1^2}{2E\delta_1} = \frac{p \cdot 10^4}{E} \cdot 3,12 \text{ cm}$$

$$\text{une augmentation du rayon du cylindre de } \frac{pr_2^2}{E\delta_2} = \frac{p \cdot 10^4}{E} \cdot 1,72 \text{ cm.}$$

La paroi du cylindre forme donc un petit angle avec la verticale de $\frac{10}{E} \cdot 1,72$ (cf. fig. 2).

Comme cette déformation n'est pas conciliable avec les conditions d'appui réelles, il faut introduire des forces et des moments supplémentaires pour tenir

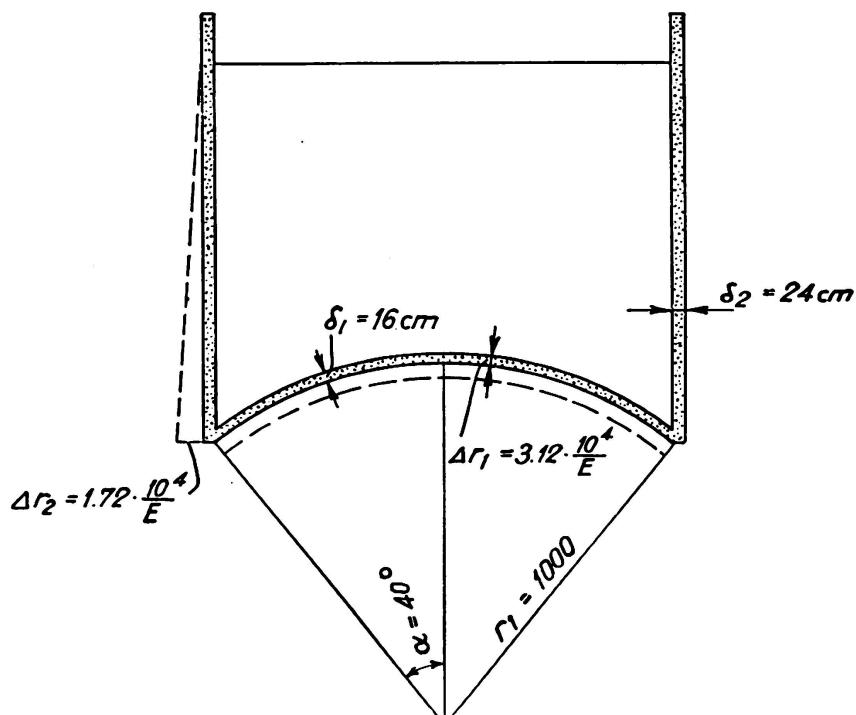


Fig. 2.

compte des conditions de continuité. Ces conditions de continuité sont les suivantes:

Le cylindre et la coupole doivent avoir le même fléchissement et la même variation d'angle au point de liaison et le point de liaison doit en outre être en équilibre quant aux moments et aux forces agissantes. Ceci représente quatre conditions d'appui qui peuvent s'exprimer par quatre équations d'où l'on peut tirer toutes les inconnues: déformations, moments, etc.

Afin de simplifier l'établissement des équations nous donnons ci-dessous les expressions générales pour le fléchissement et ses dérivées. On a

$$\begin{aligned}y &= e^{-kx} [A \cos kx + B \sin kx] \\y' &= k e^{-kx} [(B - A) \cos kx - (A + B) \sin kx] \\y'' &= 2 k^2 e^{-kx} [-B \cos kx + A \sin kx] \\y''' &= 2 k^3 e^{-kx} [(A + B) \cos kx + (B - A) \sin kx]\end{aligned}\quad (9)$$

La première condition que les fléchissements du cylindre et de la coupole doivent être égaux au bord, s'exprime par l'équation suivante:

$$-A_1 \sin 40^\circ + A_2 = \frac{P \cdot 10^4}{E} (3,12 \sin 40^\circ + 1,72).$$

Pour que les déformations d'angle soient égales on doit avoir:

$$k_1 (B_1 - A_1) = k_2 (B_2 - A_2) = \frac{10}{E} \cdot 1,72$$

et pour l'équilibre des moments on peut poser:

$$k_1^2 E J_1 B_1 = k_2^2 E J_2 B_2.$$

La dernière condition doit exprimer que la réaction horizontale, résultant de la surcharge de la coupole intérieure par l'effort de cisaillement dans le cylindre ainsi que par l'effort de cisaillement et la contrainte du méridien dans la coupole, doit être supportée, c'est-à-dire que

$$-2 k_1^3 E J_1 (A_1 + B_1) \frac{1}{\sin 40^\circ} - 2 k_2^3 E J_2 (A_2 + B_2) = P \cdot 500 \cdot \cos 40^\circ.$$

Par élimination on peut tirer de ces quatre équations pour $P = 1 \text{ kg/cm}^2$ les valeurs suivantes pour les constantes

$$\begin{aligned}A_1 &= -15,35 \cdot \frac{10^4}{E} & B_1 &= -7,16 \cdot \frac{10^4}{E} \\A_2 &= -6,13 \cdot \frac{10^4}{E} & B_2 &= 2,05 \cdot \frac{10^4}{E}.\end{aligned}$$

Le problème est ainsi complètement résolu; on peut maintenant calculer sans difficulté les moments, etc. pour chaque point du cylindre et de la coupole. Le tableau III donne une comparaison entre les valeurs calculées et les valeurs exactes pour le moment de méridien et la contrainte dans le parallèle de la coupole. La concordance est satisfaisante dans tous les points.

Ces deux exemples nous montrent que la méthode proposée est pratiquement utilisable pour résoudre le problème et qu'elle donne facilement les résultats à trouver.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, la solution approchée donne des résultats d'autant plus exacts que la coupole a une forte pente et que l'épaisseur est mince. Ce dernier point surtout a une grosse importance, ainsi que l'a démontré entre autres *Steuermann*⁵. L'équation exacte pour le fléchissement du méridien ne

⁵ *E. Steuermann*: „Some Considerations on the Calculation of Elastic Shells“, Congrès international de mécanique, Stockholm 1930.

Tableau III.

Moments de méridien et compression dans le parallèle de la coupole
d'après la fig. 2.

Pente du méridien α	M_1 approché kg cm/cm	M_1 exact kg cm/cm	$T_2 + \Delta T_2$ approché kg/cm	$T_2 + \Delta T_2$ exact kg/cm
40°	— 5280	— 5560	— 1950	— 1930
35°	1450	2250	— 800	— 540
30°	1980	2200	401	613
25°	596	764	618	639
20°	— 6	9	572	593
15°	— 99	— 141	520	526
10°	— 54	— 80	498	498
5°	— 8	— 15	495	493

contient pas comme l'équation 3b que les expressions du quatrième ordre et de l'ordre nul mais aussi des expressions avec dérivées du premier, deuxième et troisième ordre qui cependant sont toutes multipliées avec des polynomes de $\cot \alpha$. Lorsque α croît, le sens de ces expressions diminue et pour $\alpha = 90^\circ$, c'est-à-dire pour le cylindre, ces expressions tombent complètement ce qui fait que l'équation 3b est alors tout-à-fait exacte. La réduction de l'épaisseur de la coupole a une influence semblable sur l'équation différentielle complète. On voit directement d'où cela provient. Lorsque l'épaisseur de la paroi est faible, le sens de la compression du méridien n'est que restreint par rapport à l'influence de la variation de courbure. En d'autres termes, cela signifie que le travail des forces normales par suite de la compression du méridien peut être négligé, dans les coupoles minces, vis-à-vis du travail des moments de méridien et des contraintes du parallèle.

Dans les problèmes que nous avons traités jusqu'à présent, nous avons toujours admis une épaisseur constante. Lorsque l'épaisseur δ est variable, on ne peut pas partir de l'équation 3b mais il faut employer l'équation 3a. Comme la théorie simple de la poutre sur appuis élastiques donne des résultats suffisamment exacts dans les cas ci-dessus, c'est-à-dire avec épaisseur constante, c'est une raison pour admettre qu'il doit en être de même lorsque l'épaisseur est variable.

La théorie de la poutre sur appuis élastiques avec moments d'inertie variable et appuis variables a été étudiée jusqu'à présent par différents savants,⁶ en général à l'aide des séries. Les résultats obtenus sont malheureusement plus ou moins inutilisables actuellement. Par suite de la grande parenté qui existe entre les équations 3a et 3b, il est naturellement évident que les solutions des deux équations ont en gros la même construction mathématique. C'est pourquoi l'on peut admettre que l'on peut écrire la solution de l'équation 3, par exemple, sous la forme suivante:

$$y = ue^{\pm z} (A \cos z + B \sin z) \quad (12)$$

⁶ cf. par exemple Hayashi: „Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage“, Berlin 1921.

où u et z sont certaines fonctions de x . Par l'emploi du procédé d'intégration asymptotique de Blumenthal, il est possible de déterminer les fonctions u et z de telle sorte que l'équation 12 représente vraiment, avec une très bonne approximation, une intégrale de l'équation 3a.

Si comme précédemment nous introduisons la rigidité de la poutre $EJ = \frac{E\delta^3}{12}$, nous obtenons pour les fonctions u et z les expressions suivantes:

$$u = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \quad (13)$$

et

$$z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r\delta}}. \quad (14)$$

On obtient ce résultat de la façon suivante: Opérons la dérivation de l'équation 3a, nous obtenons après simplification l'équation

$$y^{IV} + p_1 y''' + p_2 y'' + p_3 y' + p_4 y = 0 \quad (15)$$

où $p_1 = 6 \frac{\delta'}{\delta}$

$$p_2 = 3 \left(\frac{\delta'^2}{\delta^2} + \frac{\delta''}{\delta} \right)$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \frac{12}{r^2 \delta^2}$$

Multiplions les équations

$$v = f(z)$$

$$v' = f' z'$$

$$v'' = f' z'' + f'' z'^2$$

$$v''' = f' z''' + 3 f'' z' z'' + f''' z'^3$$

$$v^{IV} = f' z^{IV} + f'' (4 z' z''' + 3 z''^2) + 6 f''' z'^2 z'' + f^{IV} z'^4$$

où f' représente $\frac{df}{dz}$ et z' , $\frac{dz}{dx}$, par les facteurs Q_4 , Q_3 , Q_2 , Q_1 et 1 et additionnons les, nous obtenons en posant égal à 0 le membre de gauche, premièrement l'équation:

$$v^{IV} + Q_1 v''' + Q_2 v'' + Q_3 v' + Q_4 v = 0 \quad (16)$$

et secondement lorsque l'on pose les facteurs f' , f'' et f chacun pour soi égal à zéro

$$\begin{aligned} z^{IV} + Q_1 z''' + Q_2 z'' + Q_3 z' &= 0 \\ (4 z' z''' + 3 z''^2) + 3 z' z'' \cdot Q_1 + z'^2 Q_2 &= 0 \\ 6 z'^2 z'' + z'^3 Q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

De ces équations, on peut tirer Q_1 , Q_2 et Q_3 tandis que la fonction $f(z)$ est déterminée par la condition

$$f^{IV} z'^4 + Q_4 f = 0 \quad (18)$$

Si l'on choisit le facteur Q_4 égal à $4z'^4$, notre équation 18 devient

$$\frac{d^4 f}{dz^4} + 4f = 0$$

c'est-à-dire

$$f(z) = e^{\pm z} (A \cos z + B \sin z) \quad (19)$$

où Z est déterminé par la condition:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt[4]{\frac{Q_4}{4}} \quad (20)$$

Si l'on introduit dans l'équation 15: $y = uv$ on obtient après introduction et division par u :

$$\begin{aligned} v'''' + v''' \left(\frac{4u'}{u} + p_1 \right) + v'' \left(\frac{6u''}{u} + \frac{3u'}{u} p_1 + p_2 \right) + \\ + v' \left(\frac{4u'''}{u} + \frac{3u''}{u} p_1 + \frac{2u'}{u} p_2 + p_3 \right) + vp_4 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

En posant égaux les coefficients pour v et v''' dans les équations 16 et 21 on peut déterminer les fonctions inconnues Q_4 et u . On obtient alors $Q_4 = p_4$ et par suite d'après l'équation 20

$$\begin{aligned} z = \int \sqrt[4]{\frac{p_4}{4}} dx \\ \text{ou avec } p_4 = \frac{12}{r^2 \delta^2}; \quad z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r \delta}} \end{aligned} \quad (14)$$

De la condition $\frac{4u'}{u} + p_1 = Q_1$, on obtient, en employant la dernière des équations 17

$$\begin{aligned} \frac{4u'}{u} = -p_1 - \frac{3}{2} (\log p_4)' \\ \text{ou } u = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \end{aligned} \quad (13)$$

Si l'on résume le résultat des calculs ci-dessus on peut écrire la solution de l'équation 3a en négligeant les expressions qui contiennent le facteur e^{+z} , sous la forme suivante:

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} e^{-z} (A \cos z + B \sin z) \quad (12a)$$

où z est déterminé par la condition

$$z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r \delta}}.$$

Au premier aspect, l'équation 12a paraît peut-être incommoder et peu appropriée à un emploi pratique à cause de la construction compliquée de la fonction z et du facteur supplémentaire $\frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}}$. Dans la pratique, le cas se pose plus simplement. Il n'est pas nécessaire de donner la fonction z autrement qu'al-

gébriquement et c'est pourquoi elle peut être calculée très facilement en partant de l'équation 14, par exemple par la règle du trapèze. La dérivation de l'équation 12 a donne des expressions assez compliquées lorsque l'on n'introduit aucune approximation. Remarquons que les dérivées z'' , z''' , u'' et u''' sont petites et par conséquent peuvent être négligées pour les dimensions qui se présentent dans la pratique. On obtient des dérivées de la forme suivante:

$$\begin{aligned}y &= u e^{-z} (A \cos z + B \sin z) \\y' &= u z' e^{-z} [(B - \mu A) \cos z - (A + \mu B) \sin z] \\y'' &= 2 u z'^2 e^{-z} [-(\mu B + v A) \cos z + (\mu A - v B) \sin z] \\y''' &= 2 u z'^3 e^{-z} [(A + \mu_1 B) \cos z + (B - \mu_1 A) \sin z]\end{aligned}\quad (9a)$$

où

$$v = \frac{u'}{uz'}$$

$$\mu = 1 - v$$

$$\mu_1 = 1 - 3v.$$

Dans le cas où l'épaisseur est constante on obtient $v = 0$ et $\mu = \mu' = 1$ et les équations ci-dessus sont exactement les mêmes que les équations 9.

Les équations 9a sont construites de la même manière que les dérivées données dans les équations 9 pour une poutre avec rigidité constante. Le calcul d'une coupole d'épaisseur variable se laisse par conséquent exécuter de la même manière et sans beaucoup plus de peine que dans le cas d'épaisseur constante. Les exemples calculés ci-dessus (cf. fig. 1 et 2) sont aussi figuratifs pour le cas où δ est variable et les équations d'équilibre sont à établir de même en apportant seulement les modifications exigées par la différence entre les équations 9 et 9a.

Dans le problème de la coupole, nous n'avons pas considéré le fait que la poutre-méridien s'aminçait vers le haut et avait une largeur nulle à la clé de la coupole, nous avons plutôt admis une largeur constante. Ceci correspond à la réalité lorsque la coupole est cylindrique mais, dans les coupoles en général, il existe dans chaque hypothèse une certaine approximation. Si nous considérons ce retrécissement, nous pouvons écrire, pour une coupole sphérique, le moment d'inertie de la poutre-méridien à une distance angulaire α de la clé de la façon suivante:

$$J = \frac{\delta^3}{12} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} \quad (21)$$

Avec cette expression pour le moment d'inertie, nous obtenons pour les fonctions u et z

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{\sin \alpha}} \\ \text{et} \quad z &= \sqrt[4]{3} \int \frac{1}{\sqrt{r \delta}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha}} \cdot dx.\end{aligned}$$

Les relations ci-dessus concernent principalement le problème de la coupole mais il est évident que l'on peut les appliquer à un réservoir cylindrique et à des constructions semblables qu'il faut considérer comme cas particuliers. Les méthodes usitées pour le calcul de tels réservoirs⁷ ainsi que leurs développement

en séries peuvent être avantageusement remplacées par la méthode donnée ci-dessus. On rencontre un cas spécial intéressant de ce problème dans le calcul des barrages en arc massifs. Jusqu'à présent on partait, pour résoudre de tels problèmes, de l'équation 3b et l'on introduisait une valeur moyenne de l'épaisseur de la paroi.⁸

En traitant l'équation 3a d'après la méthode ci-dessus, on peut sans difficulté tenir compte de l'anisotropie en différentes directions et à différents points de la construction. Il peut s'agir d'une pure qualité du matériau ou d'une pure anisotropie constructive. Par exemple, par l'introduction de différentes quantités de fer d'armature dans différentes directions, le module apparent d'élasticité du matériau est variable pour les différentes directions, ce qui doit être considéré comme anisotropie du matériau; pour introduire une anisotropie constructive dans un réservoir cylindrique ou une coupole on peut placer des poutres de renforcement dans la direction de la génératrice ou du méridien. Dans de telles conditions on ne peut pas écrire l'équation 3a sous la forme de l'équation 15; les coefficients p_1 à p_4 ont l'aspect suivant:

$$p_1 = \frac{2(E_1 J)'}{E_1 J}$$

$$p_2 = \frac{(E_1 J)''}{E_1 J}$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \frac{E_2 \delta}{r^2 E_1 J}$$

et les fonctions z et u apparaissent sous la forme suivante:

$$z = \int \sqrt[4]{\frac{E_2 \delta}{4 r^2 E_1 J}} \cdot dx$$

et

$$u = \sqrt[8]{\frac{r^6}{E_1 J E_2^3 \delta^3}}$$

Mais comme on emploie pour u et pour z une expression mathématique, l'introduction des équations 22 et 23 n'apporte aucune complication des calculs.

Résumé.

Par la décomposition des voiles en deux faisceaux de poutres qui se croisent on peut obtenir une représentation plus claire du mode d'action statique de la construction. Les moments et les contraintes qui se produisent peuvent être calculés comme pour la poutre sur appui continu élastique. Comme la théorie exacte conduit à des solutions en forme de séries infinies qui ne convergent que lentement dans certaines conditions, la méthode donnée ici présente des avantages pratiques.

⁷ cf. Lorenz: „Technische Elastizitätslehre“, Berlin 1913. H. Reißner: „Beton und Eisen“ 7, 150, 1908. T. Pöschl et K. Terzaghi: „Berechnung von Behältern“, Berlin 1913.

⁸ cf. N. Royen: „Tvärödammen vid Norrfors kraftverk“ (Le barrage de Tvärö à l'usine de Norrfors), revue Betong, cahier 2, 1926.

IVa 4

Ouvrages à parois minces renforcées ou non par des raidisseurs.

Versteifte und unversteifte Flächentragwerke.

Shell Structures with or without Stiffeners.

R. Vallette,

Ingénieur aux Chemins de fer de l'Etat, Paris.

La question des ouvrages à parois minces ayant été traitée au Congrès de Paris, c'est la tendance qui s'est manifestée depuis cette époque que nous examinerons.

On peut distinguer deux sortes d'ouvrages à parois minces: ceux où la rigidité de la paroi a été prise en compte dans la résistance de système, et ceux où cette résistance a été complètement négligée, la paroi étant alors considérée comme apte à résister aux seuls efforts dirigés tangentiellement à la surface du voile, qu'elle constitue, et qui travaille alors comme une simple membrane.

On envisagera donc:

- 1° — Les parois minces rigides,
- 2° — Les membranes.

Nous examinerons ici les ouvrages à parois minces rigides, les ouvrages à paroi-membrane faisant l'objet d'une étude de M^r Aimond.

I — Ouvrages à parois minces rigides.

A — Construction.

Généralités. — Dès le début de la construction en béton armé on a fait contribuer les parois minces constituées par le hourdis à la résistance générale de l'ossature. Cette utilisation du monolithisme est d'ailleurs une des caractéristiques importantes du béton armé. Mais une utilisation plus complète de la résistance des parois fut envisagée par la suite, ces parois devenant l'élément résistant principal de la construction: paroi porteuse des réservoirs, des silos, des voûtes etc. . . .

Application aux constructions.

1° — *Réservoirs.* — Dans les réservoirs la paroi porteuse fut intégralement employée dans les fonds, les encorbellements, les coupoles de couverture, mais la rigidité de la paroi n'a qu'exceptionnellement été prise en compte.

2^o — *Silos.* — Dans les silos l'utilisation de la paroi porteuse d'abord partielle devint totale suivant le processus indiqué par *M. Freyssinet* au Congrès de Paris et auquel nous ne voyons rien à ajouter, aucune nouvelle orientation ne s'étant manifestée depuis.

3^o — *Constructions voûtées.* —

a) *Voûtes courantes.* —

Dans le domaine de la voûte courante en berceau, auto-portante entre appui, les dimensions tendent à s'accroître notablement et l'on a pu projeter dans un cas concret un berceau de $51,50\text{ m} \times 51,50\text{ m}$ appuyé seulement aux quatre angles, dont la paroi était intégralement auto-portante et ne comportait que de petites nervures raidisseuses tout à fait secondaires sans qu'aucune poutre de bordure ne vienne contribuer à la

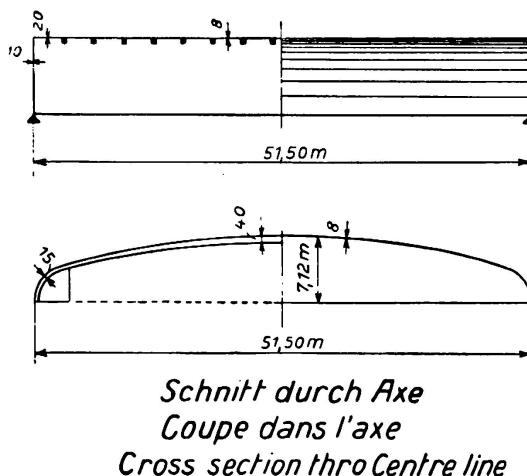


Fig. 1.

Berceau de 51,50 m de portée.

résistance (fig. 1) — (*Projet Boussiron*). On peut considérer ce genre de construction comme l'aboutissement du type de comble employé en France depuis 1910 par divers constructeurs et utilisant une partie de la paroi voûtée comme poutre porteuse (poutre de retombée) entre les poteaux de long pan plus ou moins espacés. A l'origine la hauteur de voûte OA utilisée était faible (fig. 2) et une nervure de bordure ON contribuait à la résistance; par la suite on augmenta la hauteur OA intéressée, on supprima la nervure active ON et on accrut beaucoup la portée entre poteaux; dans le stade actuel toute la voûte est utilisée avec une portée quelconque sans poutre de bordure.

b) — *Autres types de voûtes.* —

1^o — Un type particulier de construction voutée est constitué par les hangars d'Orly.¹ Ils peuvent être considérés comme l'exemple le plus remarquable et le précurseur des systèmes autoportants à nombreuses petites travées tels qu'ils furent utilisés par la suite en Europe Centrale.

On y trouve en effet des travées de 7,50 m d'ouverture et de 90 m de portée, la résistance des parois étant entièrement intéressée dans la flexion générale (Construction Freyssinet-Limousin).

¹ Voir le Génie Civil 22 septembre au 6 octobre 1923.

2^o — Une variante du type d'Orly a été réalisée à Cherbourg pour l'établissement de hangar double à avions. La voûte est constituée uniquement d'éléments minces (fig. 3) qui, comme à Orly, assurent seuls la résistance du système; la paroi devient en outre autoportante entre poteaux de long pan (Projet Sté Rabut-Constructeur Subileau).

3^o — Les voûtes conoides (Freyssinet-Limousin) formant shed ont été appliquées à de multiples ouvrages (Ateliers de Montrouge, de Caen, de Fontenay . . .) elles ont fait l'objet d'une étude de *M. Fauconnier* parue dans le 2^{ème} volume de Mémoires de notre Association ce qui nous dispense de nous étendre à leur sujet, elles sont auto-portantes entre poteaux de long pan.

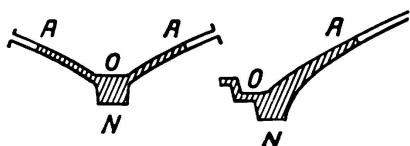


Fig. 2.

Poutre de retombée.

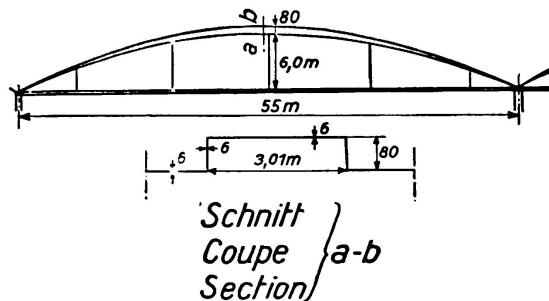


Fig. 3.

Hangar double de Cherbourg.

4^o — *Autres construction.* — D'autres types de combles: coupoule sur plan carré, voûtes d'arêtes, arc de cloître etc . . . ont été envisagés par divers auteurs à l'occasion de concours ouverts par le Service des bases aériennes pour l'exécution de hangars à avions mais ces types ne sont pas assez fixés pour qu'on puisse y voir une orientation, ni en faire état.

Une construction remarquable d'une nature toute différente a été établie près de Paris pour l'essai des avions, c'est la grande soufflerie de Chalais-Meudon.² Elle comporte un certain nombre d'éléments à parois minces auto-portants et principalement un tube diffuseur elliptique de dimensions imposantes (fig. 4) qui ne comporte que 2 points d'appuis espacés de 34 m et est intégralement porté par sa paroi de 7 cm d'épaisseur simplement raidie par des nervures tous les 3,60 m (Construction Limousin).

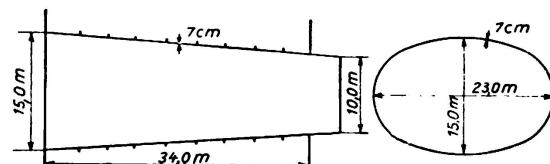


Fig. 4.

Tube diffuseur de la soufflerie de Chalais-Meudon.

5^o — *Conclusions.* — En résumé on peut discerner en France dans le domaine de la construction à paroi mince rigide, d'une part un effort diffus vers la recherche de types nouveaux de comble sans orientation nette vers un type déterminé et d'autre part, pour les types bien fixés, une tendance certaine vers l'utilisation complète de la faculté portante des parois, allant jusqu'à

² Voir le Génie Civil du 3 novembre 1934.

intéresser la section complète de la construction (grandes voûtes de comble, tube de Chalais-Meudon) quand la portée le justifie et tout en conservant le type pur de l'ouvrage mince sans addition de «poutre de bordure» pour les voûtes, ou d'autres éléments porteurs, ce que l'on peut regarder comme une caractéristique de la construction française.

B — *Calcul.* —

1^o — *Parois planes.* — Nous signalerons pour le calcul des parois planes porteuses la méthode indiquée par *M. L'Hermite* dans le Génie Civil de 29 avril 1933.

2^o — *Voûtes auto-portantes diverses.* — L'utilisation de la paroi de voûtes comme «poutre de retombée» pour reporter sur les appuis les charges des retombées, a suivi de près l'apparition des premiers combles voûtés en béton armé.³ Cette poutre qui intéressait une faible partie de la voûte fut considérée par les constructeurs comme une poutre droite ordinaire, isolée et calculée comme telle; cela conduisait à des éléments surabondants, mais pour de faibles portées entre poteaux l'excédent de matière engagée n'est pas pratiquement à considérer et il n'y a pas lieu de recourir à des méthodes de calcul plus poussées.

Dans les cas, d'ailleurs peu courants, où la conception de l'ouvrage conduisait à de grandes portées entre poteaux, la hauteur de voûte à intéresser entraînait à un profil nettement courbe qui demandait une étude spéciale. Nous savons que certains constructeurs (notamment *M. Boussiron*) bien qu'ils ne l'aient pas publiée, eurent une solution personnelle de cette question. Nous avons nous-mêmes par la suite donné une méthode simple⁴ qui, d'une part, met au point le calcul d'une telle poutre et qui, d'autre part, traite le calcul du berceau complet de forme quelconque ne portant qu'à ses extrémités.

Cette méthode étend au profil courbe à paroi mince la théorie de la flexion et en tire les conséquences au point de vue des efforts secondaires introduits, elle met en évidence notamment les flexions transversales produites dans un anneau de voûte par les actions tangentielles dirigées suivant les directrices du berceau. Appliquée à de grandes portées cette méthode s'est montrée complète et très sûre et donne des résultats qui concordent avec les observations faites sur des modèles, sur une voûte d'expérience, et sur des ouvrages construits.

3^o — *Autres ouvrages.* — Ce même calcul s'applique aux ouvrages formant un tube complet et nous avons été amenés à donner la méthode utilisée pour le calcul du grand diffuseur de la soufflerie de Chalais-Meudon (décris ci-dessus) telle qu'elle est exposée dans le compte rendu des travaux de cet ouvrage.⁵

Pour les coupoles, dont le type normal relève d'un calcul banal, la rigidité de la paroi n'intervient que pour les charges isolées, leur effet est très localisé et le plus souvent on rentre dans le cas des membranes à cause des systèmes de méridiens et de parallèles que l'on trouve en tout point.

Pour les autres types de couverture à paroi rigide il n'y a pas eu en France

³ Voir le Génie Civil du 27 janvier 1934.

⁴ Génie Civil du 27 janvier 1934.

⁵ Génie Civil du 3 novembre 1934.

d'exposé de méthode de calcul dans les publications techniques, leur étude est imparfaite et reste encore du domaine personnel des constructeurs.

4^e — *Conclusion.* — Les méthodes de calculs des systèmes à parois minces rigides conservent en France les principes de simplicité qui ont été la règle pour l'étude des constructions en béton armé. Il s'agit en effet d'un matériau et de systèmes complexes et variables, et il serait vain de vouloir rechercher des lois exprimant tous les phénomènes qui interviennent dans leurs conditions de travail sous une charge; il y a lieu de ne retenir que les faits principaux qui sont des résultantes et sont traduits par des lois simples (loi de Hooke, loi de Navier . . .) approchées mais sûres.

Le but n'est d'ailleurs pas ici d'obtenir une solution mathématique pure, il s'agit seulement de chiffrer suffisamment bien tous les efforts qui apparaissent dans un système défini pour qu'il n'y ait ni excès de matière ni sous-évaluation notables. La recherche de cette solution pratique sur les bases simples indiquées doit cependant se faire en usant de toutes les ressources de l'art du calcul pour aboutir à des solutions particulières sûres et facilement applicables, mais il est utile de remarquer que dans l'histoire des constructions en béton armé les méthodes de calculs définitives, épurées, n'ont été établies qu'après la réalisation des types par nos grands constructeurs.

L'imagination, le sens technique, le sentiment des efforts inséparables des créations dans l'art de bâtir, avaient suffi au constructeur pour concevoir, déterminer et calculer le type créé. Une force peut toujours en effet être approximativement chiffrée quand elle est bien mise en évidence qualitativement et c'est ce dernier point qui demande les recherches les plus attentives dans les nombreux éléments de détail que comporte une construction en béton armé, sa solution exige ce bon sens technique qui fait les bons constructeurs.

Le calcul des voiles minces rigides a suivi cette évolution et il conserve la tendance très nette à ne pas s'écartez de la simplicité et de la clarté pour évaluer tous les efforts notables qui apparaissent dans l'analyse du type de construction envisagé.

Résumé.

On étudie ici les constructions à paroi mince dans lesquelles la rigidité réelle de la paroi est prise en compte, et spécialement les constructions voûtées.

Après quelques lignes d'historique, on indique que dans le stade actuel on utilise en France dans ces constructions, uniquement et intégralement, la paroi mince comme élément porteur sans addition d'aucune poutre de bordure, — que le système soit à petits voûtes multiples (type hangar d'Orly), à grande voûte unique, ou en anneau (soufflerie de Meudon).

On indique ensuite que le calcul des systèmes est d'autre part traité avec la netteté qui a toujours été la règle en France pour l'étude du béton armé, ce qui, en conduisant à une conception claire des efforts en jeu, permet au constructeur d'appliquer librement et de développer les types créés.

Leere Seite
Blank page
Page vide