

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Théorie des systèmes hyperstatiques

Autor: Melan, E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-2913>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

I 4

Théorie des systèmes hyperstatiques.

Theorie statisch unbestimmter Systeme.

Theorie of Statically Indeterminate Systems.

Dr. Ing. E. Melan,

Professor an der Technischen Hochschule, Wien.

A) Matériau idéalement plastique.

A) Idealplastischer Baustoff.

A) Ideal-Plastic Material.

I.

La statique de construction a pour objet la détermination des forces intérieures et des déformations des systèmes composés de barres minces. Cette détermination se fait au moyen de trois groupes d'équations: le premier indique que le système est en équilibre, le deuxième représente les conditions de connexité géométrique tandis que le troisième exprime le rapport qui existe entre les forces intérieures d'une part et les déformations d'autre part. Lorsque le système est statiquement déterminé, le premier groupe d'équations suffit pour déterminer les forces intérieures, les autres groupes ne servant qu'à la détermination des déformations. Par contre lorsque le système est statiquement indéterminé, le premier groupe d'équations ne suffit pas à la détermination des forces intérieures. Il est dans ce cas absolument nécessaire de tenir compte des deux autres groupes d'équations et même de connaître le rapport existant entre les déformations et les tensions. La théorie usitée admet la validité illimitée de la loi de Hooke, c'est-à-dire admet que les allongements d'une barre sont proportionnels à la force normale et que les déformations angulaires d'une pièce courbe sont proportionnelles au moment de flexion agissant au point considéré.

Ainsi que nous l'avons déjà mentionné ailleurs, l'expérience nous montre que la validité de la loi de Hooke est limitée et que la relation linéaire entre la force et la déformation n'existe que dans certaines limites. Ces limites ne sont par contre pas invariables, elles dépendent non seulement de l'allongement constaté au moment considéré mais aussi de la rapidité avec laquelle la surcharge varie. Il est encore important de savoir si, en dehors du domaine de validité de la loi de Hooke, les allongements subissent un accroissement ou une diminution.

Si l'on veut obtenir des résultats exacts en tenant compte de l'état réel, il faut remplacer la loi de Hooke en dehors de son domaine de validité par une autre hypothèse qui tienne mieux compte des résultats des essais. Cette hypothèse, dans

le cas des systèmes hyperstatiques, ne se rapporte qu'au calcul de la déformation du système, ainsi que nous l'avons déjà dit plus haut, et dans le cas des systèmes hyperstatiques au contraire, elle nous conduit à la détermination de forces intérieures tout-à-fait différentes. Afin d'obtenir des résultats pratiquement utilisables, il est nécessaire d'idéaliser un peu cette relation par rapport à l'état réel. Avant tout l'on admet que la vitesse avec laquelle varie la surcharge est sans influence, en d'autres termes que les forces intérieures ne varient que lentement ainsi que la statique le conçoit lorsque l'on exclu les considérations d'ordre élastico-cinétique. Si l'on considère la figure 1a, il nous est possible de fonder la théorie. Contentons-nous d'une reproduction moins exacte de cette figure; on peut par exemple admettre le diagramme déformations/forces de la figure 1b. En général on idéalise encore un peu plus ce diagramme pour le cas d'un matériau de «plasticité parfaite» et ceci comme le montre la figure 1c. Cette dernière hypothèse est basée sur les essais que nous mentionnons ensuite; nous la formulerons

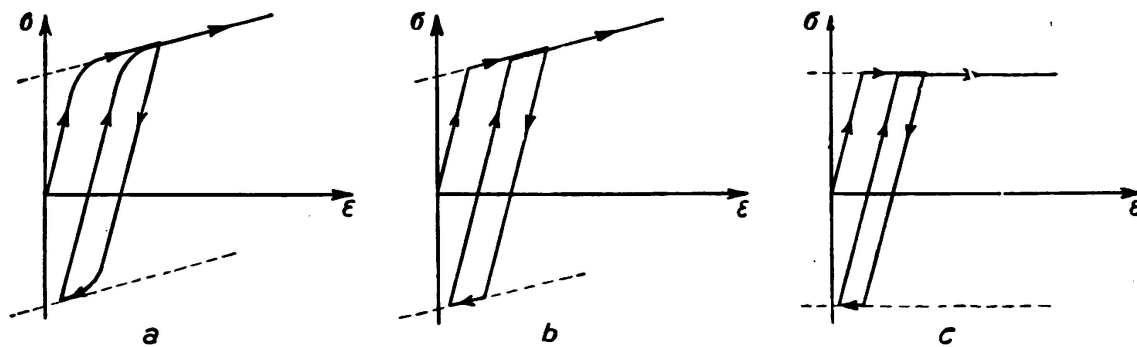


Fig. 1.

dans la deuxième partie de ce rapport. Elle repose sur les hypothèses faites par *Haar-Karman*, *Mises* et *Hencky*¹ sur la répartition des tensions suivant les trois axes.

Les résultats des essais de tension-déformation peuvent directement être appliqués aux barres tendues des treillis. Dans le cas des barres comprimées, la surcharge limite est généralement donnée par la charge de flambage. Si l'on veut étendre le diagramme de la figure 1c aux tensions négatives, il faut admettre que, au-dessous de la charge de flambage, l'axe de la barre peut se déformer d'une façon quelconque. En ce moment-là il est évident que la charge de flambage atteint sa valeur critique qui ne peut en aucun cas être dépassée. Au moment de la décharge il existe de nouveau une relation linéaire entre la force et la déformation.

D'une manière générale, cette théorie de la plasticité parfaite est d'une importance beaucoup moins grande pour les poutres en treillis que pour les systèmes rigides. Ainsi que nous le montrent les recherches générales, les systèmes constitués par un matériau idéalement plastique ont cette propriété remarquable de supprimer les pointes de tension qui se produisent dans un

¹ A. Haar et Th. von Karman, „Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien“. Nachr. der kgl. Ges. der Wiss. Göttingen 1909.

v. Mises, „Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand“. Idem 1913.

H. Hencky, „Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen“. Zeitschr. für angew. Math. und Mech. 1924.

matériau totalement élastique aux dépens des parties moins sollicitées dans un matériau plastique. En d'autres termes, il faut considérer les réserves du matériau qui cependant sont beaucoup plus faibles dans une poutre en treillis exactement dimensionnée que dans le cas d'une poutre continue de même profil reposant sur plusieurs appuis. Nous avons choisi comme exemple pour nos recherches la poutre en treillis pour les raisons suivantes: les recherches analytiques nous conduisent à des relations ayant un nombre fini de variables, ce qui n'est pas le cas pour les systèmes composés de barres rigides; ensuite les relations mathématiques sont beaucoup plus expressives pour le lecteur. Une généralisation à un nombre infini de variables est toujours possible et ainsi les résultats obtenus pour la poutre en treillis peuvent toujours être rapportés aux systèmes composés de barres rigides.

Pour les recherches concernant les systèmes composés de barres rigides de plasticité parfaite, on admet en général, ce qui est d'une précision suffisante, les mêmes relations entre le moment et la déformation angulaire que celles indiquées dans la figure 1c pour les tensions et les allongements. Il faut cependant faire remarquer que ces deux hypothèses ne s'accordent pas parfaitement. Sur ce sujet ainsi que sur d'autres questions y relatives, on lira avec le plus grand intérêt une contribution de *Eisenman* parue dans le «*Stahlbau*» de 1933. Notons encore une autre contribution de *W. Prager* („Über das Verhalten statisch unbestimmter Konstruktionen aus Stahl nach Überschreitung der Elastizitätsgrenze“) parue dans le «*Bauingenieur*» de 1933. Dans cette dernière étude il est démontré par un exemple déterminé que dans un système hyperstatique les déplacements sont beaucoup plus influencés que les moments par l'admission d'une loi d'élasticité spéciale et que cette loi est inconcevable pour déterminer la relation existant entre les moments intérieurs et les déformations angulaires.

Je voudrais encore faire remarquer deux points très importants qui, comme conséquence du remplacement de la loi de Hooke par une relation non linéaire ne sont pas assez mis en évidence dans la plupart des publications destinées aux ingénieurs. Premièrement, la validité de la loi de la superposition, par suite du fait que les équations ne sont plus linéaires, n'existe plus ou plutôt est limitée au calcul des forces intérieures des systèmes statiquement déterminés. A l'exception de ce dernier cas il est par conséquent impossible de dessiner des lignes d'influence. Secondement il est impossible de déterminer l'état de tension d'un système hyperstatique si les surcharges antérieures ne sont pas connues. Il faut aussi faire attention à ce dernier point dans tous les cas où il est question d'une seule surcharge comme par exemple dans les travaux de *J. Fritsche*, *Schaim*, *Kazinczi* et *Girkmann*² qui traitent spécialement de systèmes constitués

² *J. Fritsche*, „Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens“. Bautechnik 1930.

G. H. Schaim, „Der Durchlaufträger unter Berücksichtigung der Plastizität“. Stahlbau 1930.

G. v. Kazinczi, „Statisch unbestimmte Tragwerke unter Berücksichtigung der Plastizität“. Stahlbau 1931 et „Bemessung unvollkommen eingespannter Stahl-I-Deckenträger unter Berücksichtigung der plastischen Formänderungen“. Assoc. intern. des ponts et charpentes 1933/34. 2ème volume des Mémoires.

K. Girkmann, „Bemessung von Rahmentragwerken unter Zugrundelegung eines idealplastischen Stahles“. Sitzungsbericht der Akademie der Wiss. Wien 1931 et „Über die Auswirkung der Selbsthilfe des Baustahles in rahmenartigen Stabwerken“. Stahlbau 1932.

par des matériaux de plasticité parfaite. Il est tacitement supposé dans toutes ces recherches que les forces extérieures croissent progressivement de zéro à leur valeur finale. Il en est de même pour les recherches concernant des surcharges répétées, dans ce cas l'on suppose que la surcharge varie entre deux valeurs déterminées. A cette place il ne faut pas oublier de citer en première ligne le mémoire de *M. Grüning* „Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl mit beliebig häufig wiederholter Belastung“, Berlin 1926. La conclusion la plus importante à tirer de ce travail est qu'un système chargé un nombre suffisant de fois par une force variant entre deux limites déterminées, finit par ne se déformer que dans une marge déterminée. Les recherches de *Grüning* supposent le cas moins spécialisé de la figure 1a. Les recherches de portée générale se trouvent dans un travail spécial de *J. Fritsche* sur la poutre continue chargée un grand nombre de fois et constituée par un matériau idéalement plastique.

H. Bleich a étendu les résultats de *Grüning* à un matériau de plasticité parfaite (voir le *Bauingenieur* 1932). Dans ce mémoire il est démontré que, même pour une surcharge variable quelconque, c'est-à-dire non pas seulement pour une surcharge variant entre deux limites, le système considéré finit par travailler comme un système constitué par un matériau totalement élastique ceci après un certain nombre de variations de la surcharge. Cette proposition qui fera l'objet de la deuxième partie de ce rapport, sert de base au dimensionnement des systèmes hyperstatiques constitués par un matériau de plasticité parfaite. Sur ce principe s'est bâti un nouveau procédé appelé «procédé de l'équilibre plastique». Le lecteur que cette question intéresse pourra se renseigner par exemple dans le livre intitulé „Stahlhochbauten“ de *F. Bleich* publié à Berlin en 1932.

Cet aperçu des travaux les plus importants traitant la théorie des systèmes hyperstatiques n'a pas la prétention d'être complet, il faut cependant lui ajouter quelques études qui traitent la théorie de ces systèmes d'une manière plus générale. Citons tout d'abord un mémoire de *J. Fritsche* paru dans „*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*“ en 1931, ainsi qu'un travail de *Hohenemser* paru dans „*Ingenieurarchiv*“ de 1931. Ces deux études traitent la question de l'énergie potentielle dans de tels systèmes. Par contre nos recherches, qui ont pour but principal une démonstration générale de la loi de *H. Bleich*, utilisent les équations d'équilibre dont il a été parlé au début de ce travail, en liaison avec la loi de l'élasticité d'un matériau idéalement plastique. L'indétermination des allongements qui, à ma connaissance n'était pas prise en considération jusqu'à maintenant, de même que les restrictions nécessaires pour la validité de la loi de *H. Bleich*, sont des conséquences de l'hypothèse d'une loi de tensions/déformations en dehors du domaine de la loi de Hooke. Si l'on remplace ce diagramme par celui de la figure 1a ou 1b, toutes les solutions indéterminées tombent ainsi que toutes les considérations qui en dépendent. Cette simplification n'est rendue possible que par l'introduction d'une nouvelle constante du matériau, à savoir, l'inclinaison de la droite limite.

II.

1^o) La démonstration que donne *H. Bleich*, dans le mémoire que nous avons cité, de sa loi sur les systèmes hyperstatiques constitués d'un matériau idéale-

ment plastique n'est pas du tout simple et n'est faite que pour des systèmes au plus deux fois statiquement indéterminés. On peut considérer comme impossible un développement de sa démonstration pour des systèmes d'un plus haut degré d'indétermination et ceci à cause de l'excès de calculs.

Dans ce qui suit nous allons exposer une démonstration valable pour des systèmes d'un degré quelconque d'indétermination. Cette démonstration est assez simple lorsque l'on a étudié certaines propriétés des systèmes constitués d'un matériau idéalement plastique. Les explications que nous donnerons ensuite pour cette démonstration nous permettront d'avoir un aperçu beaucoup plus profond sur la manière dont se comportent de tels systèmes. Nous avons besoin ici de quelques lois très simples sur les systèmes d'équations linéaires que l'on peut trouver dans tous les livres d'algèbre. Afin de ne pas avoir affaire à un nombre infini de variables, nous bornerons notre étude aux poutres en treillis. Le passage à un nombre infini de variables, nécessaire pour les systèmes à barres rigides, se fait comme dans la théorie de l'intégration et ne présente aucune difficulté fondamentale.

Rappelons tout d'abord que l'allongement d'une barre constituée par un matériau idéalement plastique est donné par la relations:

$$\Delta S = v + \rho S, \quad (1)$$

ρ est une constante dépendant du module d'élasticité, de la longueur et du profil de la barre, v est la déformation permanente et S l'effort dans la barre. Lorsque S se trouve dans l'intervalle $T' < S < T$, où T' et T représentent les limites

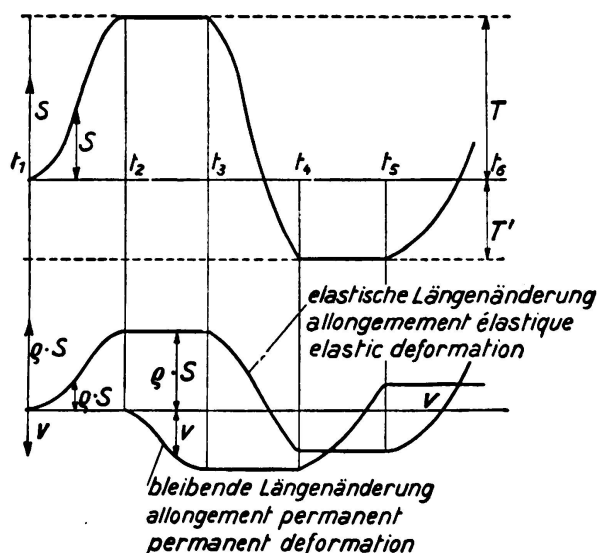


Fig. 2.

d'écoulement relatives à la compression et à la traction, v est une constante. Ce n'est que lorsque $S = T$ ou $S = T'$ que v croît ou décroît suivant que $S = T$ ou $S = T'$. On dit alors que la barre s'écoule. Il est impossible que $S < T'$ et $S > T$. Les relations que nous venons d'écrire sont représentées dans la figure 2, en abscisse est porté le temps. Dans ce diagramme, les ordonnées représentent: en-haut l'effort dans la barre et en-bas les allongements. La barre se comporte comme totalement élastique dans les intervalles de temps $t_1 < t < t_2$, $t_3 < t < t_4$ et $t_5 < t$ tandis que dans les autres intervalles elle s'écoule. Nous

supposons encore que dv/dt a une valeur finie, c'est-à-dire que l'allongement permanent se produit avec une vitesse d'écoulement finie, sans pouvoir faire de sauts.

2°) Dans une poutre en treillis hyperstatique, nous pouvons distinguer deux sortes de barres, les barres qui sont absolument nécessaires, c'est-à-dire que l'on ne pourrait supprimer sans provoquer une déformation cinématique de la poutre et les barres qui ne sont pas absolument nécessaires, donc que l'on pourrait enlever sans obtenir une déformation de la poutre. Par définition, dans une poutre en treillis v -fois statiquement indéterminée, il existe toujours un groupe d'au moins v barres que l'on pourrait supprimer sans provoquer une déformation de la poutre en treillis qui de statiquement indéterminée devient alors statiquement déterminée.

Considérons notre poutre en treillis à un moment déterminé auquel les surcharges extérieures ont atteint une certaine valeur. Chaque barre a subi un allongement permanent par suite de cette surcharge de telle sorte que l'effort S est atteint dans la barre. Si le système était totalement élastique, il existerait dans les barres, d'après la théorie usitée pour les systèmes hyperstatiques, un effort B . Il existe entre S , B et v la relation suivante:

$$S_i + \sum q_{ik} \cdot v_k = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (2)$$

Il est simple de comprendre la signification de q_{ik} qui représente l'effort dans la barre i lorsque le système n'est pas chargé (tous les $B = 0$) et que tous les allongements v , à l'exception de celui de la barre k sont nuls. Dans ce cas on prend $v_k = -1$. Si l'on introduit cette valeur dans l'équation 2), on obtient:

$$S_i = q_{ik}$$

Ceci nous montre que pour les poutres nécessaires $q_{ik} = 0$ et que $q_{ik} = q_{ki}$, ce qui fait que la somme dans l'équation 2) peut tout au plus s'étendre aux barres non nécessaires 1, 2, ... v . Du fait que la matrice est symétrique, c'est-à-dire que $q_{ik} = q_{ki}$, on peut constater que nous avons affaire à une réciprocité des efforts dans les barres, identique à la réciprocité des déplacements dans la loi de Maxwell. Cette loi qui peut être facilement contrôlée par la résolution des équations d'élasticité exprime que l'effort dans la barre i engendré par un allongement permanent $v_k = -1$ de la barre k (q_{ik}) est égal à l'effort dans la barre k engendré par un allongement $v_i = -1$ de la barre i (q_{ki}), c'est-à-dire que

$$q_{ik} = q_{ki}$$

Cette loi n'est évidemment valable que pour les systèmes hyperstatiques et seulement pour les barres non indispensables sans quoi notre équation devient:

$$q_{ik} = q_{ki} = 0$$

Introduisons dans l'équation (2) l'expression $\sigma_i = B_i - S_i$ nous obtenons le système d'équations:

$$\sigma_i = \sum q_{ik} \cdot v_k \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (3)$$

Le système des σ_i peut être défini comme un système de forces coercitives. Ces σ_i représentent les efforts qui existent dans les barres du système déchargé et qui sont provoqués par la déformation résultant d'une surcharge antérieure. Si l'on multiplie chaque équation de la série par v_i et que l'on additionne, on obtient la forme quadratique suivante:

$$J = \sum_i \sigma_i v_i = \sum_i \sum_k q_{ik} v_i v_k \quad (4)$$

J doit pour notre démonstration toujours être positif; il faudra donc choisir les v_k en conséquence. Pour le démontrer partons du principe des déplacements virtuels:

$$\sum S \Delta s = \sum P \delta$$

La sommation doit se faire, pour le membre de droite sur toutes les forces extérieures et pour le membre de gauche sur toutes les barres du treillis. Les S et les P représentent un système en équilibre. Les allongements Δs peuvent être choisis arbitrairement tout en étant cependant compatibles avec les conditions de connexité géométrique, ce qui signifie que dans un système v -fois statiquement indéterminé, on ne peut choisir plus de v valeurs arbitraires. Ces Δs représentent les valeurs de $v + \rho S$ et de ρB , allongements du système constitué respectivement d'un matériau idéalement plastique et totalement élastique. La différence $v + \rho (S - B) = v - \rho \sigma$ est certainement un système compatible d'allongements. Quant à δ , il exprime le déplacement du point d'application des forces extérieures dans la direction de ces forces lorsque chaque barre du treillis s'est allongée de la valeur Δs .

Posons $\Delta s = v - \rho \sigma$ et écrivons ensuite le principe des déplacements virtuels soit pour le système idéalement plastique, soit pour le système totalement élastique. Si nous remarquons que les efforts S et B sont engendrés par les mêmes forces extérieures et que dans les deux cas $\delta = v - \rho \sigma$, nous obtenons par soustraction:

$$\sum (v - \rho \sigma) \sigma = 0$$

d'où il résulte que:

$$J = \sum v \sigma = \sum \rho \sigma^2 = 0 \quad (4a)$$

ce qui démontre que J ne peut pas être négatif car $\rho = s/EF$ n'est pas négatif et par conséquent $\sum \rho \sigma^2$ ne peut être que positif. J ne peut disparaître que lorsque tous les σ sont nuls, ce qui ne prouve pas que dans ce cas tous les v seront nuls.

Considérons le treillis idéalement plastique au moment déterminé où les efforts dans les barres ont atteint la valeur S et les efforts dans les barres 1, 2, ..., μ la limite d'écoulement, $S_1 = T_1$, $S_2 = T_2$, ..., $S_\mu = T_\mu$. Si l'on modifie la surcharge, S devient égal à $S + \Delta S$, v à $v + \Delta v$ et B à $B + \Delta B$. Nous pouvons écrire l'équation suivante:

$$(S_i + \Delta S_i) + \sum q_{ik} (v_k + \Delta v_k) = (B_i + \Delta B_i)$$

Soustrayons maintenant de cette équation l'équation (2), nous obtenons:

$$\Delta S_i + \sum q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mu) \quad (5)$$

et:

$$\Delta \sigma_i = \sum q_{ik} \Delta v_k \quad (6)$$

où $\Delta\sigma_i$ représente la modification des forces coércitives. La somme $\sum_{ik} \Delta v_k$ ne peut s'étendre qu'au nombre μ de barres car par la définition même d'un matériau idéalement plastique seules les barres pour lesquelles $S = T'$ et $S = T$ peuvent s'écouler. Il faut supposer que ΔB a été choisi suffisamment petit pour que seules les μ premières barres aient atteint la limite d'écoulement. Tant que ces barres seules s'écoulent, nous avons affaire à une phase bien déterminée. Une autre phase commence lorsque des barres cessent de s'écouler ou encore lorsque de nouvelles barres commencent à s'écouler. Pour la phase qui suit le moment que nous considérons le système d'équations 5) est valable si nous remarquons qu'ensuite des propriétés d'un matériau idéalement plastique, il peut se présenter les deux alternatives suivantes pour les μ premières barres:

ou bien $\Delta S_i = 0$ et Δv_i a la même signe que $S_i = T_i$
respectivement $S_i = T'_i$

ou bien $\Delta v_i = 0$ et Δv_i n'a pas le même signe que

$$S_i = T_i \text{ resp. } S_i = T'_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mu) \quad (5a)$$

Il n'y a que les μ premières équations de 5) qui sont intéressantes car lorsque nous avons tiré les Δv_k des μ premières équations, il n'y a plus aucune difficulté à tirer S_j ($\mu < j \leq r$) des autres équations. Pour cette phase qui a été engendrée par un ΔB relativement petit, l'équation suivante est valable

$$S_j + \Delta S_j \leq T_j \quad \text{resp. } T'_j.$$

3°) Il est facile de démontrer au moyen du principe des déplacements virtuels que l'équation 5a) suffit pour déterminer les valeurs ΔS de l'équation 5)

$$\Delta S_i + \sum_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

Les charges extérieures $\bar{P} = P + \Delta P$, ainsi que les valeurs $S' = S + \Delta S'$ sont tout aussi admissibles que les valeurs $S'' = S + \Delta S''$ si les ΔS ne sont pas parfaitement déterminés. Il en serait de même pour les allongements $v' + \rho S'$ et $v'' + \rho S''$. Si l'on écrit le principe des déplacements virtuels dans les quatre combinaisons possibles, on obtient:

$$\begin{aligned} \sum S'' (v'' + \rho S'') &= \sum \bar{P} \delta'' & \sum S' (v'' + \rho S'') &= \sum \bar{P} \delta'' \\ \sum S'' (v' + \rho S') &= \sum \bar{P} \delta' & \sum S' (v' + \rho S') &= \sum \bar{P} \delta' \end{aligned}$$

Dans ces équations les déplacements de noeuds δ'' se rapportent à $v'' + \rho S''$ et δ' à $v' + \rho S'$. Si l'on soustrait de la différence des deux équations de droite la différence des deux équations de gauche, on obtient:

$$\sum (S'' - S') (v'' - v') + \rho (S'' - S')^2 = 0$$

ou encore:

$$\sum (\Delta S'' - \Delta S') (\Delta v'' - \Delta v') + \sum (\Delta S'' - \Delta S')^2 \rho = 0 \quad (7)$$

A cause du carré, $\sum (\Delta S'' - \Delta S')^2$ n'est plus négatif et il en est de même de $\sum (\Delta S'' - \Delta S') (\Delta v'' - \Delta v')$. Si la barre s'écoule dans les deux cas, $\Delta S'' = \Delta S' = 0$ tandis que si la barre ne s'écoule dans aucun cas $\Delta v'' = \Delta v' = 0$; la somme

disparaît donc chaque fois. Lorsque la barre s'écoule dans un cas et non dans l'autre, $\Delta S'' = 0$ et $\Delta v''$ a le même signe que $S = T$ tandis que $\Delta v' = 0$ et $\Delta S'$ a un signe opposé à celui de $S = T$. Dans ce cas le premier terme de notre équation se réduit à $-\Delta S' \Delta v''$. S' et v'' ne pouvant avoir le même signe, l'expression $-\Delta S' \Delta v''$ ne peut être négative. Lorsque S'' et S' n'ont pas la même valeur, l'équation 7) est formée par une somme de termes positifs et par conséquent ne peut être nulle que si $S'' = S'$. Une nouvelle phase bien déterminée ne peut se produire que lorsque les ΔB ou plus exactement les dB/dt sont donnés. Tout ceci nous démontre que les tensions dans les barres sont parfaitement déterminées mais non les allongements permanents. Il est possible dans certains cas d'obtenir plusieurs solutions pour les Δv .

Au début de cette phase, les λ premières barres doivent avoir atteint la limite d'écoulement. Il s'agit de trouver les solutions des deux équations suivantes, l'une pour les barres qui s'écoulent.

$$\sum_1^{\lambda} q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i = \Delta \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda) \quad (8a)$$

l'autre pour les barres qui ne s'écoulent pas encore:

$$\Delta S_j + \sum_1^{\lambda} q_{jk} \Delta v_k = \Delta B_j \quad (\lambda < j \leq r). \quad (8b)$$

D'après une loi connue de l'algèbre, les équations 8a) ne peuvent avoir des solutions bien déterminées que lorsque la matrice $(q_{11} \dots q_{\lambda\lambda})$ n'est pas singulière, c'est-à-dire lorsque les déterminants

$$\begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1\lambda} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{\lambda 1} & \dots & q_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

ne disparaissent pas. Il est suffisant mais non pas nécessaire pour cela que la matrice $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$ ne soit pas singulière. Dans ce cas, $\Delta v = 0$ est la seule condition pour que tous les $\Delta B = 0$. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation de la forme quadratique

$$J = \sum \sum q_{ik} \Delta v_i \Delta v_k$$

s'annule.

Les Δv ne sont plus déterminés lorsque la matrice $(q_{11} \dots q_{\lambda\lambda})$ est singulière et est du rang $\vartheta < \lambda$, c'est-à-dire lorsque non seulement tous ses déterminants mais aussi tous les déterminants mineurs de plus de ϑ rangées sont nuls quand au moins une ϑ rangée est nulle. Les solutions peuvent être représentées au moyen de l'emploi des constantes arbitraires, c_p dans la forme:

$$\Delta v_i = \Delta v_i^* + \sum_{p=\vartheta+1}^{\lambda} c_p v_{ip} \quad (9)$$

où les Δv_i^* sont les solutions du système

$$\sum q_{ik} \Delta v_k^* = \Delta B_i = \Delta \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, \vartheta)$$

lorsque $\Delta v_k^* = 0$ pour $k = \vartheta + 1, \vartheta + 2, \dots, \lambda$

Comme nous devons avoir dans ce cas au moins une matrice $(q_{11} \dots q_{\vartheta \vartheta})$ non singulière, les solutions Δv_i^* doivent être parfaitement déterminées. Les v_{ip} sont les solutions du système d'équations homogènes

$$\sum q_{ik} v_{kp} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda)$$

qui a comme solution $\lambda - \vartheta$ différents systèmes fondamentaux : v_{kp} ($p = \vartheta + 1, \vartheta + 2, \dots, \lambda$). On peut démontrer que ces v_{kp} satisfont aussi aux autres équations

$$\sum q_{ik} v_{kp} = 0 \quad (i = \lambda + 1, \lambda + 2, \dots, r).$$

Ceci résulte du fait que la matrice

$$\begin{array}{ccccccc} q_{11} & \dots & q_{1\lambda} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & & & & \\ q_{r1} & \dots & q_{r\lambda} & & & & \end{array} \quad (r > \lambda)$$

ne peut pas être d'un rang supérieur à ϑ , ce qui signifie que tous les déterminants mineurs d'un nombre de rangées et de colonnes plus grand que ϑ ne peuvent pas être d'un rang supérieur à ϑ lorsque le déterminant principal a le rang ϑ et que la forme quadratique s'y rapportant $J = \sum \sum q_{ik} v_i v_k$ est nettement positive.

Nous avons de nouveau deux cas à considérer, ou bien il est impossible de choisir les valeurs arbitraires c_p de telle sorte que l'expression $\sum c_p v_{ip}$ ait le signe exigé par l'alternative 5a). Si l'équation

$$\Delta v_i = \Delta v_i^* + \sum c_p v_{ip}$$

a le signe exigé, l'équation

$$\Delta v_i = \Delta v_i^* + \sum (c_p + \delta c_p) v_{ip}$$

ne peut avoir le même signe que si ϑ_c est choisi suffisamment petit. Dans ce cas les Δv_i ne sont plus parfaitement déterminés mais cependant entre des limites finies déterminées. Supposons maintenant que $\sum c_p v_{ip}$ remplisse la condition exigée pour le signe, l'expression $\sum k c_p v_{ip}$ a la même signe pour un k positif quelconque. Si k devient infiniment grand, la solution

$$\Delta v_i = \Delta v_i^* + k \sum c_p v_{ip}$$

devient elle-même infiniment grande.

Pour la démonstration de la loi que nous avons énoncée au début, il est encore utile de connaître le fait suivant. Si les valeurs z_i et w_i sont liées par la relation

$$z_i = \sum_{k=1}^r q_{ik} w_k \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

l'équation suivante est valable

$$\sum_{k=1}^r z_k v_{kp} = 0 \quad (10)$$

On peut contrôler l'exactitude de cette équation en y introduisant les valeurs

$$z_k = \sum_i q_{ki} w_i.$$

Il en résulte que

$$\sum_k z_k v_{kp} = \sum_k \sum_i q_{ki} w_i v_{kp}$$

et en modifiant la suite des sommations

$$\sum_i w_i \sum_k q_{ik} v_{kp}.$$

Comme par définition $\sum_k q_{ik} v_{kp} = 0$ il en résulte que $\sum_k z_k v_{kp} = 0$.

Pour compléter notre exposé faisons encore la remarque suivante. Ecrivons le principe des déplacements virtuels avec les allongements ΔB_p , ce qui est certainement compatible avec les conditions de connexité géométrique de la poutre en treillis. Utilisons à cet effet une première fois les efforts ΔS produits par la charge ΔP et une seconde fois les efforts ΔB . Soustrayons les deux équations et nous obtenons en remplaçant σ par sa valeur ($\sigma = \Delta S - \Delta B$)

$$\sum \Delta \sigma \Delta B_p = 0.$$

Il en résulte que $\Delta \sigma$ et ΔB ne peuvent jamais avoir le même signe pour toutes les barres sans quoi la somme serait toujours positive et ne pourrait pas être nulle, ainsi que nous l'exigeons, puisque ρ est toujours positif. C'est là l'expression de la faculté d'adaptation d'un système constitué par un matériau idéalement plastique. Dans un tel système on constate que les tensions diminuent en certains points pour augmenter en d'autres.

4) Les résultats que nous avons obtenus jusqu'à présent seront peut-être rendus plus expressifs pour l'ingénieur si nous expliquons les relations qui existent au cours d'une phase déterminée dans la poutre en treillis que nous avons considérée. Dans ce but nous modifions notre treillis en coupant certaines barres non indispensables et en installant à la coupure un mécanisme permettant un déplacement dans une seule direction déterminée. Pour certaines barres on admettra que seul un écartement des deux bords de la coupure doit être possible. Ceci sera réalisable en coupant la barre perpendiculairement à son axe et en posant les deux extrémités bout à bout sans aucune liaison. Pour d'autres barres on ne tolérera qu'un rapprochement des deux parties, ce qui est facile à réaliser en remplaçant la barre considérée par un câble.

Appliquons à notre treillis les surcharges ΔP , les efforts dans les barres de notre nouveau système seront ΔS . Il existe entre ces ΔS et les ΔB que nous avons définis plus haut la relation suivante:

$$\Delta S_i + \sum_i^{\mu} q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Dans cette équation les Δv représentent les déplacements opposés des bords de la coupure des μ premières barres. Le système d'équations suivant est valable pour les μ premières barres

$$\Delta S_i + \sum_k q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mu)$$

Dans cette équation il y a deux cas à considérer

$$\begin{aligned} &\text{ou } \Delta S = 0 \text{ et dans ce cas } \Delta v \geq 0 \\ &\text{ou } \Delta S \geq 0 \text{ et dans ce cas } \Delta v = 0 \end{aligned}$$

Le sens de l'inégalité est donné par le genre du mécanisme construit. Ce sont là les mêmes équations que celles que nous avons posées 5) et 5a) pour le système constitué par un matériau idéalement plastique.

Nous pouvons donc dire que le treillis constitué par un matériau idéalement plastique peut être remplacé au début d'une phase par un nouveau treillis dans lequel nous avons appliqué le mécanisme en question aux barres qui ont atteint la limite d'écoulement dans le treillis primitif. Si l'on surcharge ce nouveau treillis avec l'augmentation des forces extérieures provoquant cette phase, les efforts ΔS dans les barres seront égaux aux modifications des efforts se produisant dans les barres du treillis primitif au cours de la même phase. Si les barres coupées n'ont pas une matrice singulière $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$, nous pouvons affirmer que le nouveau treillis (sans tenir compte du mécanisme installé) n'a subi aucune déformation, car dans ce cas la solution du système d'équations homogènes

$$\sum q_{ik} v_{kp} = 0$$

est que tous les v soient nuls. Nous pouvons constater encore que le système:

$$\Delta S_i + \sum q_{ik} \Delta v_k = B_i$$

ne peut posséder pour une valeur quelconque de ΔB qu'une solution très déterminée pour les ΔS et les Δv . Admettons que la matrice $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$

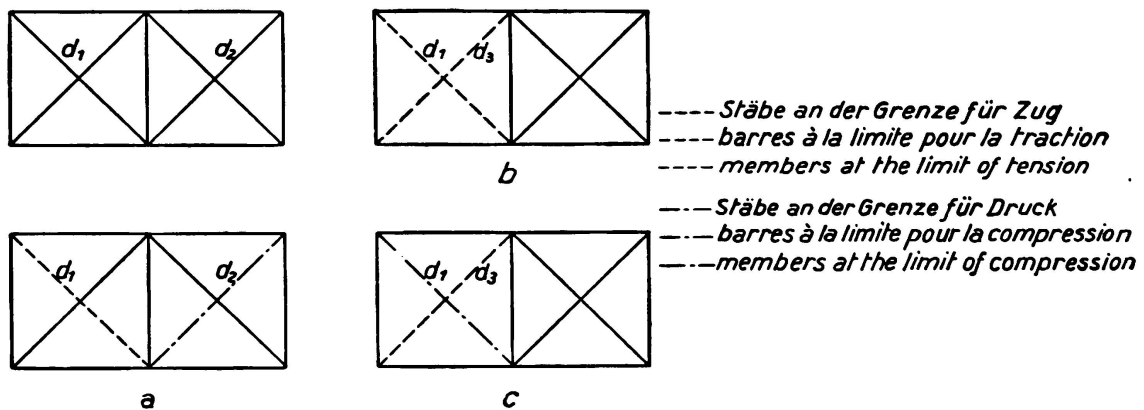


Fig. 3.

est singulière et de rang ϑ , nous avons alors deux cas à considérer. Ou bien le nouveau treillis est «bloqué de lui-même» par le mécanisme installé, c'est-à-dire que les solutions du système d'équations homogènes n'ont pas le signe imposé par le mécanisme. Le système est indéformé et l'on peut résoudre les équations pour tous les ΔB possibles, même lorsque les Δv ne sont pas parfaitement déterminés mais se trouvent cependant entre deux limites finies. Ou bien le nouveau treillis est déformé et il existe des solutions du système d'équations homogènes, solutions ayant le signe imposé. On ne peut plus choisir les ΔB arbitrairement dans ce cas car les Δv peuvent croître au-dessus de toute limite finie. Illustrons cette théorie par l'exemple d'un cas déterminé pour lequel nous ferons quelques considérations d'ordre cinématique. Prenons comme exemple la poutre en treillis de la figure 3. Supposons que les deux barres d_1 et d_2 ont

atteint la limite d'écoulement; notre nouveau treillis sera celui de la figure 3a. Il ne sera pas déformé, et les mécanismes peuvent être établis aux coupures. La matrice

$$\begin{array}{cc} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{array}$$

n'est en aucun cas singulière et comme la surcharge variera au cours de la phase qui suivra, nous aurons un état d'équilibre. Si ce sont les barres d_1 et d_3 qui atteignent la limite d'écoulement (fig. 3b), la matrice

$$\begin{array}{cc} q_{11} & q_{13} \\ q_{31} & q_{33} \end{array}$$

est singulière et le treillis est d'abord déformé. Mais si par contre les deux barres atteignent en même temps soit la limite de compression T' , soit la limite de traction T , les mécanismes appropriés supprimeront la possibilité de déformation et, à une variation quelconque des surcharges correspondra un état d'équilibre car nous avons affaire en ce cas à un système bloqué de lui-même. Dans le cas où une barre atteint la limite de compression et l'autre celle de traction (fig. 3c), lors d'une modification de la surcharge entraînant un véritable écoulement des deux barres, les ΔB doivent être tels que l'équilibre soit possible et qu'il existe des solutions. Les Δv peuvent dans ce cas dépasser toutes les limites finies.

5) Après ces différentes remarques, nous allons démontrer la loi que nous avons énoncée au début de ce travail. Cette loi est la suivante: Dans une poutre en treillis constituée par un matériau idéalement plastique, chargée de forces variables quelconques et dont les tensions dans les barres se trouvent dans un intervalle fixé d'avance $B_i^{\max} \geq B_i \geq B_i^{\min}$, les déformations permanentes tendent vers une limite finie pour une surcharge variant un nombre suffisant de fois. Nous devons supposer cependant qu'il est possible de trouver un système de forces coercitives $\bar{\sigma}$ pour lesquelles dans toutes les barres

$$-\bar{\sigma}_i + B_i^{\max} \leq T_i \quad \text{et} \quad -\bar{\sigma}_i + B_i^{\min} \geq T'_i.$$

Posons maintenant:

$$B_i^{\max} - T_i = t_i \quad \text{et} \quad B_i^{\min} - T'_i = t'_i.$$

il doit exister un système de forces coercitives $\bar{\sigma}$ pour lequel l'expression suivante est valable:

$$t'_i \leq \bar{\sigma}_i \leq t_i.$$

Supposons qu'un tel système de $\bar{\sigma}$ nous soit donné, formons les valeurs

$$\bar{B}_i^{\max} = \bar{\sigma}_i + T_i \quad \text{resp.} \quad \bar{B}_i^{\min} = \bar{\sigma}_i + T'_i$$

il en résulte clairement que si notre loi est exacte, elle est aussi valable pour des surcharges variables B_i

$$\bar{B}_i^{\max} \geq B_i \geq \bar{B}_i^{\min}$$

expression dans laquelle

$$\bar{B}_i^{\max} \geq B_i^{\max} \quad \text{et} \quad B_i^{\min} \geq \bar{B}_i^{\min}$$

(voir la figure 4).

Considérons une poutre en treillis après une série de variations de la surcharge. Il se peut qu'après l'expiration de φ phases, le système présente, après la phase φ , les forces coercitives $\sigma^{(\varphi)}$. Alors on pourra observer, au début de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase des barres pour lesquelles $\sigma^{(\varphi)} > \bar{\sigma}$ commencent à couler lorsque S est devenu égal à T' . Par contre les valeurs $S = T$ sont exclues car même quand $B = \bar{B}^{\max}$, l'effort dans les barres $S = \bar{B}^{\max} - \sigma^{(\varphi)}$ est plus petit que $T = \bar{B}^{\max} - \bar{\sigma}$. Une telle barre ne peut avoir pour $\sigma^{(\varphi)} > \bar{\sigma}$ qu'un allongement permanent négatif au cours de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase. Cependant

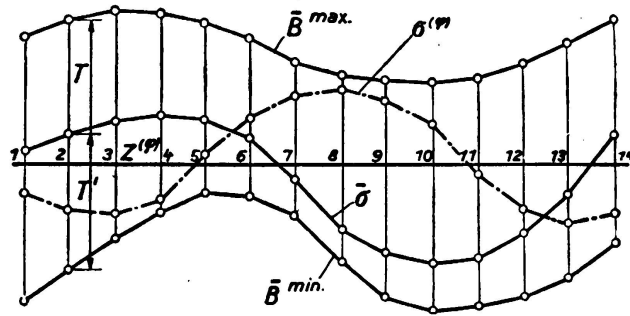


Fig. 4.

la condition $\sigma > \bar{\sigma}$ doit être conservée durant toute la phase pour une barre qui s'écoule, il en résulte encore que pour la fin de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase, respectivement de la $(\varphi + 2)^{\text{ème}}$ phase, la relation $\sigma^{(\varphi+1)} \geq \bar{\sigma}$ doit toujours exister. Inversement $\Delta v^{(\varphi+1)}$ doit être plus grand que 0 pour les barres pour lesquelles $\sigma^{(\varphi)} < \bar{\sigma}$. En résumé nous avons pour une barre qui s'écoule au cours de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase

$$\left. \begin{aligned}
 & z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} > 0 \\
 & \Delta v^{(\varphi+1)} > 0 \\
 \text{et en outre} \\
 & z^{(\varphi+1)} = z^{(\varphi)} - \Delta \sigma^{(\varphi+1)} \geq 0 \\
 \text{et lorsque} \\
 & z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} < 0 \\
 & \Delta v^{(\varphi+1)} < 0 \\
 \text{et en outre} \\
 & z^{(\varphi+1)} = z^{(\varphi)} - \Delta \sigma^{(\varphi+1)} \leq 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Il est entendu qu'au cours des phases qui suivent il ne peut se produire aucune modification des forces coercitives, lorsque pour toutes les barres $z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} = 0$. Notre démonstration se divise en deux parties, dans la première nous démontrerons que la condition $\bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} = z^{(\varphi)} = 0$ se produit effectivement une fois pour toutes les barres et dans la seconde que les allongements permanents produits jusqu'alors ne peuvent acquérir qu'un accroissement fini.

Entre les grandeurs $\bar{\sigma}$ et les allongements permanents \bar{v} il existe évidemment la relation donnée par le système d'équations suivant:

$$\bar{\sigma}_i = \sum q_{ik} \bar{v}_k \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

tandis que les allongements $v^{(\varphi)}$ au début de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase se rapportent aux forces coercitives $\sigma^{(\varphi)}$ selon le système d'équations:

$$\sigma_i^{(\varphi)} = \sum q_{ik} \bar{v}_k^{(\varphi)} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

Les sommes ci-dessus s'étendent à toutes les barres et de même que dans les sommes suivantes, il n'est pas exclu que certains \bar{v}_k , respectivement v disparaissent. Désignons par w et z les expressions suivantes

$$w^{(\varphi)} = \bar{v} - v^{(\varphi)} \quad \text{et} \quad z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)}$$

nous obtenons:

$$z_i^{(\varphi)} = \sum q_{ik} w_k^{(\varphi)}$$

et de même pour la fin de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase

$$z_i^{(\varphi+1)} = \sum q_{ik} w_k^{(\varphi+1)}$$

où

$$z_i^{(\varphi+1)} = z_i^{(\varphi)} - \Delta \sigma_i^{(\varphi+1)} \quad \text{et} \quad w_i^{(\varphi+1)} = w_i^{(\varphi)} - \Delta v_i^{(\varphi+1)} \quad (12)$$

Considérons maintenant la différence des deux formes quadratiques

$$\Delta K^{(\varphi+1)} = K^{(\varphi+1)} - K^{(\varphi)} = \sum (z^{(\varphi+1)} w^{(\varphi+1)} - z^{(\varphi)} w^{(\varphi)})$$

et remplaçons-y z et w par leur valeur donnée par l'équation (12) nous obtenons:

$$\Delta K^{(\varphi+1)} = - \sum z^{(\varphi)} \Delta v^{(\varphi+1)} - \sum \Delta \sigma^{(\varphi+1)} w^{(\varphi)} + \sum \Delta v^{(\varphi+1)} \Delta \sigma^{(\varphi+1)}$$

Les deux premières sommes sont maintenant identiques si l'on remplace dans la première $z^{(\varphi)}$ par $\sum q_{ik} w_k^{(\varphi)}$ et dans la seconde $\Delta \sigma^{(\varphi+1)}$ par $\sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)}$, l'on a dans les deux cas

$$\sum \sum q_{ik} \Delta v_i^{(\varphi+1)} w_k^{(\varphi)}$$

et l'on obtient:

$$\Delta K^{(\varphi+1)} = \sum (-2 z^{(\varphi)} + \Delta \sigma^{(\varphi+1)}) \Delta v^{(\varphi+1)} = - \sum (z^{(\varphi+1)} + z^{(\varphi)}) \Delta v^{(\varphi+1)}$$

D'après ce qui a déjà été dit, $z^{(\varphi+1)}$ ne peut jamais avoir un signe contraire à celui de $\Delta v^{(\varphi+1)}$ et $z^{(\varphi)}$ le même signe que $\Delta v^{(\varphi+1)}$ de telle sorte que $\Delta K^{(\varphi+1)}$ ne peut jamais être positif. Il en résulte que K ne peut jamais croître d'une phase à l'autre. Si les forces coercitives varient, K décroît et lorsque le système des forces coercitives reste constant au cours d'une phase, K reste lui-même constant. Ainsi que nous le démontrerons plus tard, ce dernier cas n'est possible que si tous les Δv s'annulent au cours de la phase considérée, c'est-à-dire que si K est nul. Puisque l'expression K lorsqu'elle varie ne peut que décroître, et ne peut d'après les équations 4), resp. 4a), jamais être négative, elle doit certainement être une fois nulle. Mais si K est nul, tous les z sont certainement nuls et à partir de ce moment-là il ne peut se produire aucun nouveau changement.

Il nous reste encore à démontrer que les allongements permanents se produisant alors $\bar{v} = \sum \Delta v$ ne sont pas infinis. Aussi longtemps que les $\Delta z^{(\varphi)} = \sigma^{(\varphi)} - \sigma^{(\varphi+1)}$ sont finis, les Δv le sont aussi. Il y a cependant une exception lorsque l'on a une matrice singulière pour laquelle les solutions

primaires $\sum_p c_p v_{ip}$ ont déjà le signe exigé. Dans ce cas seulement, pour des $\Delta z^{(\varphi)}$ finis on peut avoir des Δv infinis. Ce cas ne peut exister, si l'on tient compte de notre hypothèse sur l'existence d'un système de forces coercitives $\bar{\sigma}$ que lorsque tous les z sont nuls. Donc les z_i doivent avoir le même signe que les Δv_i c'est-à-dire dans notre cas le même signe $\sum_p c_p v_{ip}$.

Mais
$$\sum_p \sum_i c_p v_{ip} z_i = \sum_p c_p \sum_i z_i v_{ip} = 0$$

parce que d'après l'équation 10) $\sum_i z_p v_{ip} = 0$

Il en résulte que z_i et $\sum_p c_p v_{ip}$ ne peuvent pas avoir le même signe pour tous les i car sans cela $\sum_p \sum_i c_p v_{ip} z_i$ serait certainement positif et non pas nul. Nous pouvons conclure que le cas de phases au cours desquelles les Δv croissent au-dessus de toute mesure est impossible. Ce n'est que lorsque tous les z sont nuls, c'est-à-dire lorsque l'état des forces coercitives est déjà atteint que nous pouvons avoir des Δv infinis. Ceci ne peut se produire que lorsque la surcharge B a atteint les limites \bar{B}^{\max} ou \bar{B}^{\min} à μ endroits du système hyperstatique dont la matrice $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$ est singulière et dont le nouveau treillis n'est pas bloqué de lui-même. Pour terminer nous devons encore ajouter que les B peuvent s'approcher à volonté des limites \bar{B}^{\max} et \bar{B}^{\min} sans jamais les atteindre ou que s'ils peuvent les atteindre durant un intervalle de temps infiniment petit dt , il ne peut se produire alors aucune déformation permanente infinie pour une vitesse d'écoulement finie. D'ailleurs de tels allongements permanents croissant au delà de toute limite sont exclus par la solidification du matériau.

Nous avons déjà dit dans l'introduction de notre travail que cette démonstration peut être faite d'une manière tout-à-fait analogue pour les systèmes à barres rigides. Il est d'autre part vraisemblable que la loi que nous avons démontrée ici pour la poutre en treillis soit aussi valable pour la poutre continue constituée par un matériau idéalement plastique pour autant que l'on définisse les propriétés d'un tel milieu idéalement plastique.

B) Matériau à zone de solidification linéaire.

B) Baustoff mit linearem Verfestigungsbereich.

B) Material with Linear Range of Hardening.

Dans un autre rapport l'auteur s'est occupé de la théorie des systèmes hyperstatiques constitués par un matériau idéalement plastique. Il a démontré que le choix d'une loi d'élasticité avait une grande importance et il veut rechercher dans ce qui suit, la forme à donner à la loi de *H. Bleich* ainsi que le procédé de l'équilibre plastique qui s'y rapporte, lorsque l'on emploie un matériau avec zone de solidification linéaire. Il s'agit donc d'une généralisation des recherches de *M. Grüning* pour une surcharge variable quelconque. De même que dans le rapport cité il faut donner une nouvelle base de la théorie qui, malgré la généralisation, doit représenter une simplification importante vis-à-vis à la démonstration actuelle.

Les recherches suivantes concernent donc les systèmes hyperstatiques, soumis à une surcharge variable quelconque et constitués d'un matériau dont le dia-

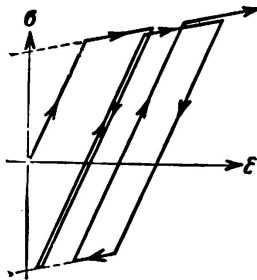


Fig. 1.

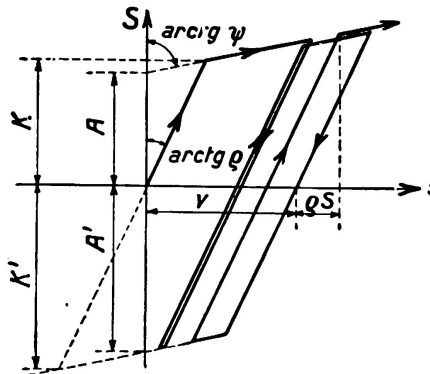


Fig. 2.

gramme des tensions est représenté à la fig. 1. Afin de simplifier le calcul, nous avons apporté une idéalisation plus poussée que l'hypothèse de *M. Grüning*.

Si nous limitons nos recherches, ainsi que l'ont fait les deux auteurs cités, aux poutres en treillis, c'est afin d'avoir un nombre fini de variables. Ainsi les efforts *S* et les allongements *s* sont reliés entre eux d'après la fig. 2 par la même relation que les tensions et les déformations. L'allongement *s*, produit par un certain effort *S*, est donné par la relation

$$s = v + \rho \cdot S \quad (1)$$

où *v* représente l'allongement «permanent» et $\rho \cdot S$ l'allongement «élastique». $\rho = l/EF$ est une constante dépendant de la longueur de la barre *l*, de sa section *F* et du module d'élasticité *E*, cette constante est naturellement toujours positive. Ainsi que le montre la fig. 2, *v* reste invariable aussi longtemps que *S* se trouve dans l'intervalle

$$c v + K' < S < c v + K \quad (2)$$

où, ainsi que l'on peut le trouver facilement:

$$c = \frac{1}{\psi - \rho}, \quad K' = A' \frac{\psi}{\psi - \rho} \quad \text{et} \quad K = A \frac{\psi}{\psi - \rho}$$

c est dans tous les cas positif tandis que K' est négatif et K positif.

Lorsque S atteint une de ces limites, dans l'intervalle de temps suivant, v ne reste constant que lorsque la valeur absolue de S ne croît pas, donc lorsque la modification ΔS n'a pas le même signe que $S = c v + K'$ ou $S = c v + K$. Mais lorsque la valeur absolue de S croît, ΔS a par conséquent le même signe que S et Δv croît en valeur absolue et l'on a pour la variation de Δv l'équation:

$$\Delta S = c \cdot \Delta v \quad (2a)$$

ou Δv à cause du signe positif de c doit toujours posséder le même signe que ΔS et aussi que S .

Nous désignerons dans la suite par matériau complètement élastique un matériau pour lequel la loi de *Hooke* est valable sans limite. Dans ce cas on aurait, pour une surcharge déterminée, les efforts B tels qu'ils sont fournis par la théorie usuelle des systèmes hyperstatiques. Entre ces B et les efforts S qui sont engendrés dans notre système par la même surcharge, on a la relation suivante:

$$S_i + \sum q_{ik} v_k = B_i \quad (3)$$

La signification de q_{ik} est facile à voir. Dans le système non chargé, complètement élastique (tous les $B = 0$) q_{ik} représente l'effort dans la barre i lorsque tous les v sont nuls et qu'une seule barre K a subi un allongement permanent $v_k = -1$. On peut très simplement démontrer que $q_{ik} = q_{ki}$ car d'après un théorème semblable à celui de *Maxwell*, l'effort S_i engendré par $v_k = -1$, (q_{ik}) est identique à l'effort S_k dans la barre k produit par un allongement $v_i = -1$ de la barre i , (q_{ki}). La matrice suivante est alors symétrique

$$\begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{r1} & \dots & q_{rr} \end{vmatrix}$$

elle possède encore une autre propriété caractéristique, à savoir que la forme quadratique:

$$J = \sum \sum q_{ik} v_i v_k \geq 0$$

est semi par définition positive, c'est-à-dire que pour toutes les valeurs de v_i que l'on peut choisir, l'expression de J ne peut en aucun cas être négative. La démonstration, au moyen du principe des déplacements virtuels, n'en est pas difficile et se trouve dans le rapport cité plus haut sous (3).

Lorsque les forces extérieures varient, les efforts B varient de ΔB dans le système complètement élastique, les efforts S de ΔS dans le système élastico-plastique et les allongements permanents v de Δv . Aussi longtemps que les ΔB se trouvent dans les limites suffisamment petites, les Δv ne se produiront que pour ces barres elles-mêmes; nous parlons alors d'une certaine phase; une nouvelle phase ne commence que lorsque les allongements permanents commencent

à varier pour d'autres nouvelles barres ou lorsque pour certaines barres les Δv disparaissent.

Nous admettons qu'au début d'une certaine phase (φ) les valeurs $S^{(\varphi)}$, $B^{(\varphi)}$ et $v^{(\varphi)}$ sont données et qu'alors les μ premières barres du treillis ont précisément atteint les valeurs limites $S^{(\varphi)} = cv^{(\varphi)} + K$ ou $S^{(\varphi)} = cv^{(\varphi)} + K'$. Si maintenant les $B^{(\varphi)}$ varient de $\Delta B^{(\varphi+1)}$ dans la phase suivante $(\varphi + 1)$, dans toutes les barres en général les $S^{(\varphi)}$ se modifieront de $\Delta S^{(\varphi+1)}$; de nouveaux allongements permanents ne peuvent se produire que dans les μ premières barres. On a donc le système d'équation:

$$S^{(\varphi)} + \Delta S^{(\varphi+1)} + \sum q_{ik} (v_k^{(\varphi)} + \Delta v_k^{(\varphi+1)}) = B_i^{(\varphi)} + \Delta B_i^{(\varphi+1)}$$

et si l'on soustrait de cette relation l'équation (3), on obtient

$$\Delta S_i^{(\varphi+1)} + \sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)} = \Delta B_i^{(\varphi+1)} \quad (i = 1, 2 \dots r) \quad (5)$$

Il suffit de considérer ici les μ premières équations qui contiennent cependant 2μ inconnus, à savoir les valeurs ΔS et les valeurs Δv . On peut montrer que l'on a pour les premières barres les alternatives suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta S \text{ a un signe opposé à } S \text{ et alors } \Delta v &= 0, \text{ ou} \\ \Delta S \text{ a le même signe que } S \text{ et alors } \Delta v &\text{ suivant l'équation (2a)} \\ \Delta S = c \Delta v \text{ et par conséquent } \Delta v &\text{ a le même signe que} \\ \Delta S \text{ et aussi } S, \end{aligned} \quad (6)$$

il est nécessaire et suffisant d'exiger des solutions parfaitement déterminées du système d'équation (5). La démonstration peut en être faite comme pour un matériau idéalement plastique [confère sous (3) du rapport cité].

Si au cours de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase les premières barres des μ barres dont nous avons parlé, acquièrent de nouveaux allongements permanents, il s'agit de résoudre le système d'équation

$$c_i \Delta v_i^{(\varphi+1)} + \sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)} = \Delta B_i^{(\varphi+1)} \quad (i = 1, 2 \dots \lambda) \quad (7)$$

qui résulte de (5) en remplaçant $\Delta S_i = c_i \Delta v_i$. Evidemment Δv_i ($i = 1, 2 \dots \lambda$) doit posséder le même signe que $S_i^{(\varphi)} = c_i v_i^{(\varphi)} + K_i$ ou que $S_i^{(\varphi)} = c_i v_i^{(\varphi)} + K'_i$ à la fin de la phase (φ) .

La forme quadratique qui se rapporte à la matrice:

$$\begin{vmatrix} q_{11} + c_1 & \dots & q_{1\lambda} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{\lambda 1} & \dots & q_{\lambda\lambda} + c_\lambda \end{vmatrix}$$

est

$$J = \sum \sum q_{ik} v_i v_k + \sum c_i v_i^2$$

forme certainement positive par définition, c'est-à-dire que pour tous les v que l'on peut choisir J a toujours une valeur positive et ne peut disparaître que lorsque tous les v sont nuls. Car si la première somme déjà devait disparaître J deviendrait positif à cause de la deuxième somme qui doit toujours être positive. D'après une loi connue de l'algèbre, sur les systèmes d'équation linéaires, on obtient pour les systèmes de valeurs ΔB_i un seul système de Δv_k ; en particulier dans ce cas pour «tous les $\Delta B_i = 0$ » on ne peut avoir comme seule solution

que tous les $\Delta v_i = 0$. Si l'on détermine les Δv au moyen des équations (7) on obtient $\Delta S_i^{(\varphi+1)} = c_i \Delta v_i^{(\varphi+1)}$, efforts dans les barres $i = 1, 2 \dots \lambda$. Pour les autres barres on a

$$\Delta S_j^{(\varphi+1)} = \Delta B_j^{(\varphi+1)} - \sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)} \quad (j = \lambda + 1, \lambda + 2 \dots \mu)$$

où pour les barres $\lambda + 1, \lambda + 2 \dots \mu$, $\Delta S_j^{(\varphi+1)}$ ne doit pas posséder le même signe que $S_j^{(\varphi)}$. Pour les barres $\mu + 1, \mu + 2 \dots r$ on doit avoir finalement:

$$K'_i + c_i (v_i^{(\varphi)} + \Delta v_i^{(\varphi+1)}) \leq S_i^{(\varphi)} + \Delta S_i^{(\varphi+1)} \leq c_i (v_i^{(\varphi)} + v_i^{(\varphi+1)}) + K_i.$$

Nous ajoutons que les grandeurs $-\sigma_i^{(\varphi)}$ que nous voulons désigner par «forces coercitives» et qui sont données par:

$$\sigma_i^{(\varphi)} = - \sum q_{ik} v_k^{(\varphi)}$$

représentent les efforts dans les barres du système complètement élastique lorsque chaque barre a subi un allongement permanent $v_k^{(\varphi)}$. L'équation suivante est naturellement aussi valable:

$$\Delta \sigma_i^{(\varphi+1)} = \sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)}$$

Nous montrons maintenant que l'on a une loi analogue à la loi de *H. Bleich*, pour les systèmes constitués d'un matériau idéalement plastique.

Cette loi est:

Dans un treillis dans lequel il existe entre les efforts dans les barres et les allongements la relation donnée par la fig. 2, on obtiendra, pour une surcharge variable quelconque et après un nombre de variations suffisamment grand, des limites finies déterminées \bar{v} des allongements permanents qui ne varient plus pour de nouvelles variations de la surcharge lorsque la condition suivante est remplie pour chaque barre:

$$B_i^{\max} - B_i^{\min} \leq K_i - K'_i$$

Les B_i^{\max} et B_i^{\min} représentent les valeurs maxima et minima des efforts dans les barres pour un matériau complètement élastique. Le système se comportera, lorsque les allongements permanents auront atteint la valeur \bar{v} , comme un système constitué d'un matériau complètement élastique.

Cette loi se démontre comme l'auteur l'a fait sous (3) dans le rapport cité pour un matériau idéalement plastique. Si l'on remplace le signe d'inégalité par le signe d'égalité, notre loi doit aussi être valable pour le cas limite:

$$\bar{B}_i^{\max} - \bar{B}_i^{\min} = K_i - K'_i;$$

il est certain qu'elle est aussi valable pour les valeurs plus petites $B_i^{\max} - B_i^{\min}$.

Dans la fig. 3 on a porté aux points $1, 2 \dots r$ les efforts \bar{B}_i^{\max} et \bar{B}_i^{\min} . On a représenté aussi l'état à la fin de la phase φ , on doit avoir à ce moment les valeurs $B_i^{(\varphi)}$. On doit avoir le système de forces coercitives $\sigma_i^{(\varphi)}$ correspondant aux allongements permanents $v_i^{(\varphi)}$. Les véritables efforts dans les barres sont donnés par $S_i^{(\varphi)} B_i^{(\varphi)} - \sigma_i^{(\varphi)}$. Dans la phase suivante $(\varphi + 1)$, seules supporteront des allongements permanents $v_i^{(\varphi)} + \Delta v_i^{(\varphi+1)} = v_i^{(\varphi+1)}$ les barres pour

lesquelles $B_j^{(\varphi)}$ coïncide avec une limite de l'intervalle $\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K_i$ on $\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K'_i$; la grandeur de l'intervalle est par hypothèse

$$(\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K_i) - (\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K'_i) = K_i - K'_i = \bar{B}_i^{\max} - \bar{B}_i^{\min}.$$

Pour la barre représentée par exemple, ceci n'est valable que pour la limite supérieure, où $B_j^{\max} - (\sigma_j^{(\varphi)} + c_j v_j^{(\varphi)} + K_j) > 0$ tandis que la limite inférieure ne peut pas être atteinte par $B_j^{(\varphi)}$. Par conséquent on ne peut avoir que des $\Delta v_j^{(\varphi+1)}$ positifs pour la barre j au cours de la $(\varphi + 1)$ ème phase.

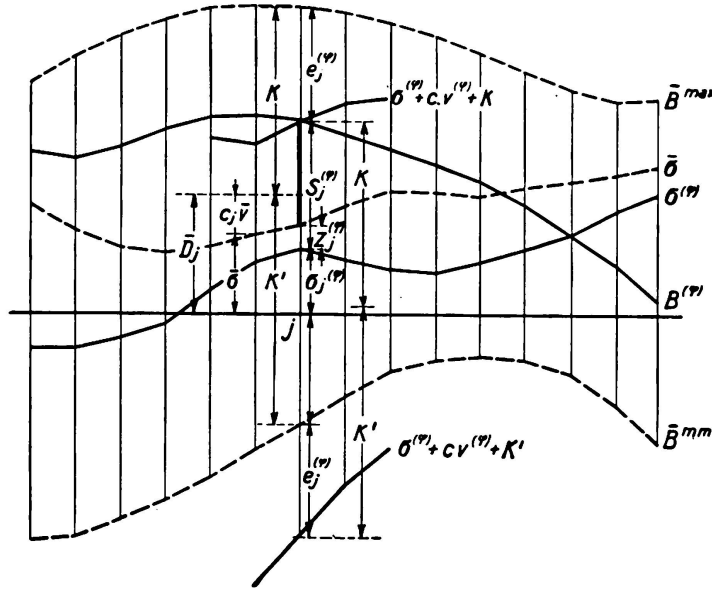


Fig. 3.

Soit $\bar{\sigma}$ le système de forces coercitives qui appartient aux \bar{v} dont nous avons déjà parlé et qui se présente après un nombre suffisamment grand de variations de la surcharge; de la fig. 3 on peut tirer sans autre pour chaque barre i:

$$\bar{\sigma}_i + c_i \bar{v}_i = \bar{B}_i^{\max} - K_i = \bar{B}_i^{\min} - K'_i = \bar{D}_i$$

Comme $\bar{\sigma}_i = \sum q_{ik} \bar{v}_k$, on obtient pour les \bar{v} le système d'équation

$$c_i \bar{v}_i + \sum q_{ik} \bar{v}_k = \bar{D}_i$$

et d'après les remarques que nous avons faites auparavant, il est certain que ce système d'équation doit posséder des solutions \bar{v}_i très déterminées pour des valeurs quelconques de \bar{D}_i . Il existera certainement un tel système de \bar{v}_i et $\bar{\sigma}_i$. Considérons encore la valeur $e_j^{(\varphi)}$ qui se laisse calculer d'après la figure

$$e_j^{(\varphi)} = \bar{D}_j - (\sigma_j^{(\varphi)} + c_j v_j^{(\varphi)})$$

et qui est positive pour la barre j . Nous pouvons poser les alternatives suivantes:

ou bien $\Delta v_i^{(\varphi+1)} > 0$, alors on a aussi $e_i^{(\varphi)} > 0$ et à la fin de la $(\varphi + 1)$ ème phase $e_i^{(\varphi+1)} \geq 0$

ou bien $\Delta v_i^{(\varphi+1)} < 0$, alors on a aussi $e_i^{(\varphi)} < 0$ et à la fin de la $(\varphi + 1)$ ème phase $e_i^{(\varphi+1)} \leq 0$.

Notre loi est vraisemblablement démontrée lorsque l'on montre que pour un nombre suffisamment grand de variations de la surcharge, un peu après la fin de ε phases $e^{(\varphi+\varepsilon)} = \bar{e} = 0$ doit disparaître pour toutes les barres. Car lorsque ceci se produit pour toutes les barres, l'effort S_i ne peut plus dépasser les limites de l'intervalle

$$\bar{\sigma}_i + c_i \bar{v}_i + K'_i \leq S_i \leq \bar{\sigma}_i + c_i \bar{v}_i + K_i$$

qui coïncident avec \bar{B}_i^{\max} et \bar{B}_i^{\min} . Afin de démontrer que $e_i^{(\varphi)}$ tend vers 0 avec un φ croissant pour toutes les barres nous posons

$$\bar{v}_i - v_i^{(\varphi)} = w_i^{(\varphi)}$$

et ensuite $\bar{\sigma}_i - \sigma_i^{(\varphi)} = z_i^{(\varphi)}$

de telle sorte $\Delta w_i^{(\varphi+1)} = w_i^{(\varphi+1)} - w_i^{(\varphi)} = \Delta v_i^{(\varphi+1)}$

et $\Delta z_i^{(\varphi+1)} = z_i^{(\varphi+1)} - z_i^{(\varphi)} = -\Delta \sigma_i^{(\varphi+1)}$

et à cause du système d'équation

$$\sum q_{ik} \bar{v}_k = \bar{\sigma}_i \text{ et } \sum q_{ik} v_k^{(\varphi)} = \sigma_i^{(\varphi)}$$

on a aussi le système

$$\sum q_{ik} w_k^{(\varphi)} = z_i^{(\varphi)} \text{ et } \sum q_{ik} \Delta w_k^{(\varphi+1)} = \Delta z_i^{(\varphi+1)}$$

Considérons la forme quadratique

$$J^{(\varphi)} = \sum (z_i^{(\varphi)} + c_i w_i^{(\varphi)}) w_i^{(\varphi)} = \sum \sum q_{ik} w_i^{(\varphi)} w_k^{(\varphi)} + \sum c_i w_i^{(\varphi)2}$$

qui d'après ce que nous avons déjà dit est toujours positive pour des valeurs quelconques de w et qui peut disparaître lorsque tous les $w = 0$. Considérons encore $J^{(\varphi+1)}$ à la fin de la $(\varphi+1)^{\text{ème}}$ phase

$$J^{(\varphi+1)} = \sum (z_i^{(\varphi+1)} + c_i w_i^{(\varphi+1)}) w_i^{(\varphi+1)}$$

la variation de J au cours de la $(\varphi+1)^{\text{ème}}$ phase est donc:

$$\Delta J^{(\varphi+1)} = \sum [z_i^{(\varphi+1)} + c_i w_i^{(\varphi+1)}] w_i^{(\varphi+1)} - [z_i^{(\varphi)} + c_i w_i^{(\varphi)}] w_i^{(\varphi)} = \\ \sum z_i^{(\varphi)} \Delta w_i^{(\varphi+1)} + \Delta z_i^{(\varphi+1)} w_i^{(\varphi)} + \Delta z_i^{(\varphi+1)} \Delta w_i^{(\varphi+1)} + c_i (2w_i^{(\varphi)} \Delta w_i^{(\varphi+1)} + \Delta w_i^{(\varphi+1)2})$$

Mais maintenant $\sum z_i^{(\varphi)} \Delta w_i^{(\varphi+1)} = \sum \Delta z_i^{(\varphi+1)} w_i^{(\varphi)}$ ainsi que l'on peut facilement l'établir lorsque l'on introduit $z_i^{(\varphi)} = \sum q_{ik} w_k^{(\varphi)}$ et $\Delta z_i^{(\varphi+1)} = \sum q_{ik} \Delta w_k^{(\varphi+1)}$ d'où il résulte dans les deux cas la forme bilinéaire $\sum \sum q_{ik} w_i^{(\varphi)} \Delta w_k^{(\varphi+1)}$ de telle sorte que l'on a

$$\Delta J^{(\varphi+1)} = \sum [2z_i^{(\varphi)} + \Delta z_i^{(\varphi+1)} + c_i (2w_i^{(\varphi)} + \Delta w_i^{(\varphi+1)})] \Delta w_i^{(\varphi+1)}.$$

Pour terminer on a

$$z_i^{(\varphi)} = \bar{\sigma}_i - \sigma_i^{(\varphi)} = (\bar{D}_i - c_i \bar{v}_i) - (\bar{D}_i - c_i v_i^{(\varphi)} - e_i^{(\varphi)}) = e_i^{(\varphi)} - c_i w_i^{(\varphi)}$$

et de même

$$z_i^{(\varphi+1)} = e_i^{(\varphi+1)} - c_i w_i^{(\varphi+1)}$$

d'où

$$\Delta J^{(\varphi+1)} = -\sum (e_i^{(\varphi+1)} + e_i^{(\varphi)}) \Delta w_i^{(\varphi+1)}$$

Mais comme $e_i^{(\varphi+1)}$ et $e_i^{(\varphi)}$ doivent avoir le même signe que $\Delta v_i^{(\varphi+1)}$, $\Delta J^{(\varphi+1)}$ sera toujours négatif. Il en résulte que l'expression de J qui est toujours positive doit décroître de façon continue de phase en phase et seulement rester invariable lorsque toutes les barres conservent le même allongement au cours d'une phase. Après un nombre suffisamment grand de phases, J doit devenir égal à 0. Ceci exige absolument que $w^{(\varphi+\varepsilon)} = 0$, donc que $v^{(\varphi+\varepsilon)} - \bar{v} = 0$ et par conséquent aussi que $\bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi+\varepsilon)} = 0$. Il se présente effectivement alors un système de forces coercitives pour lequel les allongements permanents ne peuvent plus varier et le système se comporte dès lors comme un système constitué par un matériau complètement élastique.

Si l'on compare aux systèmes portants constitués par un matériau idéalement plastique, on constate de notre cas le fait important qu'il n'est plus du tout nécessaire de rechercher un système de forces coercitives. Il est tout à fait suffisant dans ce cas de remplir pour chaque barre la condition $B^{\max} - B^{\min} \leq K - K'$. De plus, à cause du terme $c_i w_i^2$ qui se présente dans la forme quadratique, il est impossible que des formes semi par définition se présentent, formes qui exigeraient des recherches spéciales au point de vue de la parfaite détermination des solutions. Il est d'autant plus certain qu'à chaque valeur finie $\bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)}$ appartient une valeur finie, parfaitement déterminée $\bar{v} - v^{(\varphi)}$. Naturellement c'est une autre question que de savoir si la déformation finale et totale \bar{v} n'atteint pas des valeurs inadmissibles qui peut-être se trouvent près de l'allongement à la rupture, question que l'on peut tout aussi bien poser pour un matériau idéalement plastique. La réponse sous forme générale à cette question est difficile.

Résumé

Après un court aperçu des les travaux les plus importants exécutés jusqu'à ce jour, l'auteur expose dans la partie A une démonstration générale d'une loi de *H. Bleich* pour les poutres réticulées constituées d'un matériau idéalement plastique. Cette loi sert de base au dimensionnement des systèmes hyperstatiques et elle a été partiellement admise dans les prescriptions officielles sous le nom de méthode de l'équilibre plastique („Traglastverfahren“). Elle repose en grande partie sur le fait qu'une certaine forme quadratique positive ne peut que décroître et par conséquent doit une fois s'annuler. Au delà des données connues, il est nécessaire d'apporter quelques restrictions à la validité de cette loi. Ces restrictions consistent en l'exclusion de certains cas de surcharge aussitôt que le système est devenu totalement élastique. Il faudra donc limiter ces cas de surcharge à un intervalle de temps infiniment court en supposant que la vitesse d'écoulement est finie. Dans la partie B l'auteur étend ses investigations à un matériau à zone de solidification linéaire.

Leere Seite
Blank page
Page vide