

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Principes de la théorie de la plasticité

Autor: Fritsche, J.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-2911>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

I 2

Principes de la théorie de la plasticité.

Grundlagen der Plastizitätstheorie.

Fundamental Principles of the Theory of Plasticity.

Dr. techn. J. Fritsche,

Professor an der Deutschen technischen Hochschule, Prag.

1^o -- *Introduction.*

Autrefois toutes les questions de résistance étaient basées sur l'hypothèse du comportement élastique du matériau. Aujourd'hui par contre, en se basant sur les mesures exécutées sur les ouvrages et, dans les laboratoires d'essai des matériaux, sur les éprouvettes étirées jusqu'aux environs de la limite de rupture, on reconnaît qu'une telle idéalisation du matériau ne peut correspondre partout à la même sécurité contre l'apparition d'états dangereux. Si l'on n'ignore plus depuis longtemps qu'un comportement purement élastique est lié à des limites relativement étroites de sollicitation, on a basé ce point de vue sur le fait que les sollicitations engendrées par la charge utile ne devraient pas sortir de ces limites d'élasticité. On croyait pouvoir déterminer sur la base des tensions calculées d'après la théorie de l'élasticité un critère du degré de sécurité de la construction et avant tout du degré de sécurité de toutes ses parties. On fixait une tension admissible et l'on exigeait qu'elle ne soit pas dépassée sur l'effet des charges utiles. Cette échelle des tensions est très agréable pour le dimensionnement pratique de nos ouvrages car elle libère l'ingénieur des questions soulevées et souvent inquiétantes au sujet de la sécurité de son projet; la question de la sécurité apparaît alors liée à la détermination des contraintes admissibles. On rencontre cependant dès le début des difficultés, car dans le calcul de la résistance on ne peut introduire que des valeurs simples de la résistance du matériau, comme par exemple la limite inférieure d'écoulement de l'acier σ_{Fu} que l'on peut déterminer par les essais ordinaires de traction. La limite de proportionnalité ne doit plus être prise en considération car l'on a reconnu que l'on calcule toujours avec suffisamment d'exactitude, en admettant un comportement purement élastique jusqu'à l'atteinte de la limite inférieure d'écoulement.

Tant que dans les ouvrages apparaissent les mêmes états de tensions que ceux que l'on peut provoquer sur une éprouvette, la question de la sécurité est claire; le coefficient de sécurité est alors $n = \frac{\sigma_{Fu}}{\sigma_{adm}}$. Pour la détermination des états de tension à plusieurs axes on a établi les conditions d'écoulement connues et l'on a contrôlé par des essais¹ quelle était l'hypothèse de *Mises-Huber-Hencky*, basée

¹ *M. Ros et Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. I. Flußstahl.*
Rapport No. 19 du Laboratoire Fédéral d'Essais des Matériaux, Zurich.

sur la comparaison du travail de déformation, qui correspondait le mieux à la réalité pour l'acier doux de construction. On a la forme suivante pour l'état plan de tension qui est souvent essayé:

$$\frac{\sigma_{Fu}}{n} = \sigma_{adm.} \geq \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}. \quad (1)$$

De tous les procédés de dimensionnement basés sur l'échelle des tensions on a retenu l'hypothèse que l'écoulement du matériau se produit à l'endroit où les tensions les plus défavorables atteignent la limite inférieure d'écoulement σ_{Fu} et qu'à ce moment le système portant est arrivé à sa limite de résistance. Des états de tension uniformes existent dans des treillis idéalement constitués. L'hypothèse ci-dessus nous conduit à la conclusion qu'un treillis ne peut plus rien supporter à partir du moment où une de ses barres a atteint la limite inférieure d'écoulement. Des considérations simples² nous font voir que cette conclusion n'est réalisée que pour des treillis isostatiques tandis que dans le cas des treillis hyperstatiques on peut encore avoir de fortes augmentations de charge avant que le système portant s'affaisse sous l'effet de la charge. Cette hypothèse n'est pas valable non plus pour la plastification d'une section rigide; de toute façon l'on a dans ce cas des états de tension irréguliers dont l'influence sur l'écoulement doit encore être recherchée. *Maier-Leibnitz*³ a montré par des essais objectifs que l'atteinte de la limite d'écoulement à l'endroit le plus défavorablement sollicité ne compromet pas l'existence d'un ouvrage; ces essais démontrent plutôt que les apparitions d'écoulement doivent avoir pénétré profondément dans la section pour engendrer un accroissement de la vitesse de déformation lors d'une augmentation de la surcharge.

C'est ici que se place la théorie de la plasticité qui a pour tâche la détermination de la résistance réelle d'une construction en tenant compte du processus d'écoulement. Par suite du fait que l'atteinte de la limite d'écoulement à l'endroit d'une pointe de tension élastique ne compromet pas du tout l'existence de l'ouvrage, la théorie de la plasticité écarte l'échelle des tensions et par le fait même le principe de la contrainte admissible pour introduire en tant que sécurité le rapport entre la charge supportable et la charge utile. Les procédés de dimensionnement basés sur la théorie de la plasticité seront souvent désignés par «procédé de l'équilibre plastique».

2° — *Le mécanisme de la déformation plastique.*

La conception exacte de l'influence du processus d'écoulement sur la résistance nous oblige à nous faire une représentation sur sa nature et ses propriétés physiques. L'acier est un agglomérat de cristaux et une étude sévère nous obligeraient de partir des déformations des cristaux pris individuellement pour en déduire la déformation du matériau; la disposition irrégulière des cristaux ne nous permet pas de procéder autrement que par méthode statistique. Le cristal lui-même est anisotrope dans ses propriétés de résistance tandis que l'agglomérat

² *M. Grüning*: Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung. Berlin 1926, J. Springer.

³ *Maier-Leibnitz*: Versuche mit eingespannten und einfachen Balken von I-Form aus Stahl 37. Bautechnik 1929, Heft 20, p. 313.

présente une quasi-isotropie lorsqu'on le considère mécaniquement, c'est-à-dire lorsque l'on considère un morceau du matériau contenant un grand nombre de cristaux. Pour une disposition déterminée de ses directions principales, un cristal se déforme d'abord élastiquement en étirant son réseau atomiques sous l'influence des forces extérieures. Lorsque cet étirement a atteint une certaine valeur, la stabilité du réseau est troublée et il en résulte un glissement des couches atomiques suivant des plans et des directions déterminées définies par la cristallographie. On peut, d'une manière très approximative, représenter le diagramme des tensions-allongements d'un cristal par celui d'un corps idéalement plastique. Un écart ne se produit que pour les grandes déformations car on obtient alors une nouvelle stabilité du réseau par apparition d'une solidification. Par suite de la disposition variée dans un agglomérat des directions principales des cristaux, ces derniers glisseront vers des tensions limites très différentes pour une direction déterminée des forces extérieures. Les glissements sont naturellement très petits de telle sorte que des instruments d'une précision extra-ordinaire sont nécessaires pour les déterminer; si l'on tient compte de ces relations, l'on aura aucune déformation continue de l'agglomérat; la déformation est en réalité irrégulière et étagée. Les observations de *Kollbrunner*⁴ en sont une excellente démonstration. Les hypothèses d'écoulement de *Böker*⁵ et *Brandtzaeg*⁶ reposent sur la représentation d'îles plastiques, dont les environs sont élastiques, qui deviennent toujours plus grandes et plus nombreuses avec l'accroissement de la surcharge. Ces hypothèses ne sont malheureusement pas encore assez connues des intéressés.

Dans les aciers au carbone il s'ajoute une deuxième apparition, conditionnée par la structure du matériau. Ces aciers se composent principalement de grains tendres de ferrite insérés dans une charpente de cimentite ou de perlite qui peut fortement entraver le processus de glissement dans les grains de ferrite. Pour une surcharge extérieure déterminée, cette charpente de perlite s'écroule ce qui provoque simultanément le processus de glissement dans beaucoup de grains de ferrite et il se produit alors ce que l'on entend par écoulement de l'acier dans un sens mécanique. Les observations de *Köster*⁷ montrent clairement que la limite d'écoulement n'est pas liée aux propriétés de résistance du fer lui-même, chimiquement pur. D'après ces essais la limite et la longueur d'écoulement peuvent être fortement modifiées par changement de la grosseur des grains tandis que la résistance à la rupture et la striction ne sont atteintes. Ce processus mécanique d'écoulement correspond à une sérieuse modification de la structure; ceci explique les apparitions de recristallisation observées après l'écoulement ainsi que tous les phénomènes que l'on désigne par vieillissement de l'acier. A la fin de l'écoulement ce sont les grains de ferrite seuls qui portent; de toute façon, ce détournement des forces extérieures limite les grandes déformations plastiques.

⁴ C. F. *Kollbrunner*: Schichtenweises Fließen in Balken aus Baustahl. III^e Volume des Mémoires de l'A. I. P. C., Zurich 1935, p. 222.

⁵ R. *Böker*: Die Mechanik der bleibenden Formänderungen in kristallinisch aufgebauten Körpern. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 175—176. Berlin 1915, V. D. I.-Verlag.

⁶ A. *Brandtzaeg*: Failure of a material composed of non-isotropic elements. Trondhjem 1927.

⁷ W. *Köster*, H. v. *Köckritz* und E. H. *Schulz*: Zur Kenntnis der Form der Spannungs-Dehnungs-Kurven auf Grund der Messung des zeitlichen Verlaufes der Alterung weichen Stahles. Archiv für das Eisenhüttenwesen 6, 1932/33.

Il faut considérer le fait qu'une telle transformation de la structure ne peut pas être un processus qui croît régulièrement avec l'accroissement de la surcharge. Il est plus vraisemblable que ce processus s'étend en même temps à de grands domaines du matériau, respectivement de la section.

C'est un fait connu que lors de l'application d'un état de tension uniforme et suivant un axe, à une éprouvette d'acier plus doux on observe une limite supérieure et une limite inférieure d'écoulement (Fig. 1). Comme la limite supérieure d'écoulement n'a qu'une durée passagère, il est clair que l'on doit se rapporter à la limite inférieure d'écoulement pour l'examen des états de

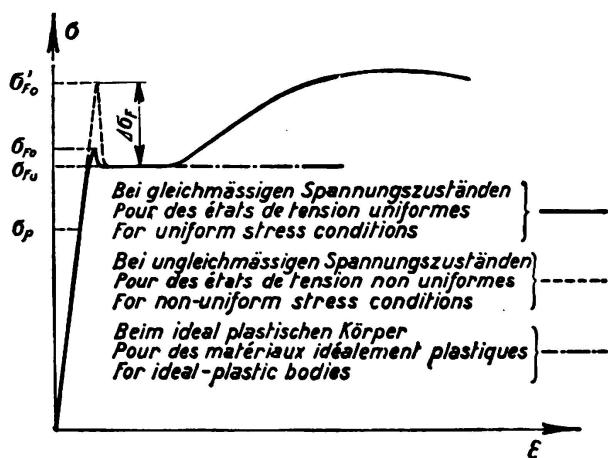


Fig. 1.

tension uniformes. L'apparition d'une limite supérieure d'écoulement est considérée par *Moser*⁸ comme un retard à l'écoulement et *Prager*⁹ la compare à un retard à l'ébullition sans cependant pouvoir donner à cette comparaison une relation autre que purement formelle. L'origine de ce fait n'est pas encore éclaircie; il ne semble pas exclu que les sollicitations extérieures favorisent une amélioration de la structure du réseau à la limite des grains et provoquent ainsi un accroissement de la résistance aux déformations purement élastiques dans la charpente de perlite. La réduction de tension, de la limite supérieure à la limite inférieure d'écoulement, se produit avec la formation des lignes d'écoulement qui sont un critère certain du processus d'écoulement; leur observation exacte montre qu'elles ne croissent pas de façon uniforme mais qu'elles se développent plutôt par bonds. Toutes ces apparitions se produisent assez régulièrement dans les états de tension uniformes même lorsqu'il faut reconnaître que la grandeur du processus est soumise à une série de faits accidentels ce qui conduit à une dissemination inévitable des essais.

Depuis longtemps déjà on a émis des doutes sur la question de savoir si toutes ces apparitions ne se modifient pas sensiblement et suivant une régularité reconnaissable lors de l'application d'états de tension non uniformes. C'est pourquoi l'on a exprimé l'avis de limiter la condition d'écoulement (1) aux états de tensions uniformes. Les essais exécutés à ce sujet n'ont pas permis de tirer des

⁸ *M. Moser*: Ver. deutscher Eisenhüttenleute, Werkstoff-Aussch. Ber. 96.

⁹ *W. Prager*: Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1933.

conclusions; un groupe de ces essais¹⁰, ¹¹, ¹² justifie l'hypothèse que la limite supérieure d'écoulement est influencée par un état de tension non uniforme en ce sens que σ_{F_0} est d'autant plus grand que la pointe de tension élastique croît plus rapidement et la zone sur laquelle elle s'étend est plus petite tandis que d'autres essais¹³ ne permettent pas de reconnaître cette apparition ou seulement dans une faible mesure. Quant à la limite inférieure d'écoulement, on peut affirmer qu'elle ne subit aucune influence de ce genre.¹⁴ Il paraît certain que l'élévement de la limite d'écoulement se produit de façon tout-à-fait différente pour les différentes sortes d'acier: pour les aciers doux cet élèvement est plus grand et pour les aciers durs plus faible et il ne paraît se produire que pour les sortes d'acier qui, dans les essais de traction, présentent une limite d'écoulement supérieure très marquée. La cause d'un tel élèvement de la limite supérieure n'a pas encore été établie d'une manière satisfaisante. Au point de vue de l'effet atomiques des forces il est difficile de comprendre que des parties de la section moins sollicitées puissent soutenir les parties plus sollicitées et y retarder le processus d'écoulement. *Thum*¹¹ et *Wunderlich* ont admis que l'apparition de lignes d'écoulement n'est pas possible dans les domaines arbitrairement petits car les environs encore élastiques empêchent cet écoulement. La limite inférieure d'écoulement doit être dépassée jusqu'à une profondeur assez grande de la section de telle sorte que l'énergie d'écoulement emmagasinée soit assez grande pour pouvoir percer d'une manière quelconque l'étreinte élastique.

En se basant sur ces observations il s'est formé, au cours du développement de la théorie de la plasticité deux conceptions totalement distinctes sur les circonstances qui déterminent les processus d'écoulement dans une zone de tension; on distingue par conséquent une «ancienne» et une «nouvelle» condition d'écoulement. D'avance nous pouvons affirmer que nous conserverons les deux idéalisations des processus réels; elles correspondent en un certain sens à des cas limités et il est très probable que les apparitions effectives se trouvent entre ces limites. Il est certain que, sans une idéalisation de ces observations, on ne peut venir à bout des grandes difficultés que l'on rencontre lors de la détermination de leur influence sur la résistance de nos constructions.

L'«ancienne condition d'écoulement» admet que l'état de tension local est seul déterminant pour l'apparition du processus d'écoulement; elle peut par conséquent se déduire de la condition d'écoulement (1) pour états de tensions uniformes. Pour le cas de la flexion, en négligeant les efforts de cisaillement, la zone de tension élastique est à un seul axe et la condition (1) se réduit à la forme simple $\sigma \leq \sigma_F$. Il est clair que d'après ce que nous avons dit ci-dessus on a introduit pour σ_F la limite inférieure d'écoulement σ_{F_u} car on doit juger

¹⁰ *F. Nakanishi*: On the yield point of mild steel. World Eng. Congress. Tokyo 1929, Proc. Vol. III.

¹¹ *A. Thum* und *F. Wunderlich*: Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1932.

¹² *H. Möller* und *J. Barbers*: Über die röntgenographische Messung elastischer Spannungen. Mitt. d. Kaiser-Wilh.-Inst. f. Eisenforschung. Düsseldorf 1934.

¹³ *F. Rinagl*: voir annexe.

¹⁴ *E. Siebel* und *H. F. Vieregge*: Über die Abhängigkeit des Fließbeginns von Spannungsverteilung und Werkstoff. Mitt. d. Kaiser-Wilh.-Inst. f. Eisenforschung. Düsseldorf, Abhandlung 270, 1934.

de la résistance après l'écoulement local limite et parce que l'on veut savoir combien cet endroit peut encore supporter après l'écoulement pour le maintien de l'équilibre entre les forces intérieures et extérieures. Une conséquence de cette hypothèse est l'apparition, sous l'effet de charges croissantes, d'une zone d'écoulement continue et graduelle s'étendant d'elle-même ainsi qu'une réduction plastique des pointes de tension;¹⁵ pour terminer un état complètement plastique de la section est atteint lorsque l'écoulement s'étend à toute la profondeur de la section. Le diagramme des tensions se compose alors d'un rectangle de traction et d'un rectangle de compression de la grandeur de la limite inférieure d'écoulement σ_{Fu} . Le moment des tensions internes a atteint sa valeur maxima M_T qui ne peut être dépassée; lors d'une plus ample déformation cette section agit comme une articulation plastique.

La «nouvelle condition d'écoulement» affirme que toutes ces hypothèses ne correspondent pas à la réalité, que la zone d'écoulement s'étend beaucoup plus

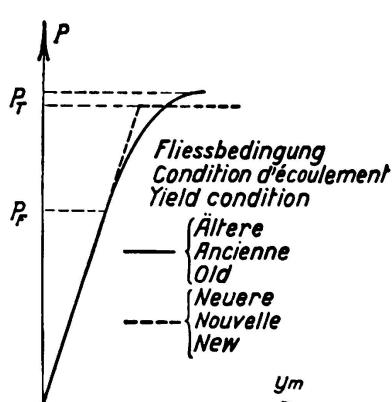


Fig. 2.

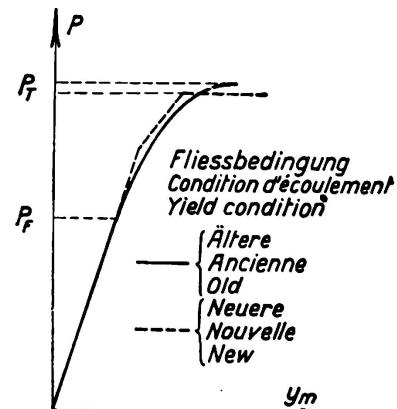


Fig. 3.

par sauts vers le bas, que d'une façon approximative la résistance à la déformation est déjà affaiblie lors de la première apparition d'écoulement dans la section de telle sorte qu'elle ne peut plus participer vraiment à la transmission de l'accroissement de la charge. Elle se déduit de l'observation de l'accroissement des pointes élastiques; on doit entendre pas limite d'écoulement la limite supérieure d'écoulement car cette dernière seule est influencée par l'irrégularité du champ de tension. Par conséquent il faut introduire dans la condition d'écoulement la répartition des tensions dans toute la section. Dans le cas de la flexion sans force normale, l'élévation de la limite d'écoulement, $\Delta\sigma_F = \sigma_{Fo} - \sigma_{Fu}$, devient essentiellement une fonction de la forme de la section. Cet élèvement s'écroule durant l'écoulement et la limite d'écoulement s'abaisse à la limite inférieure sans que soit cependant atteinte la répartition des tensions de l'état purement plastique dans le sens de l'ancienne condition d'écoulement.

La différence entre les deux conditions d'écoulement se remarque le plus distinctement lorsque l'on représente une grandeur quelconque de déformation dans ses rapports avec la charge. Pour le fléchissement d'une poutre simple en son milieu (fig. 2) on obtient d'après l'ancienne condition d'écoulement, une courbe régulière qui se raccorde à la droite de la déformation purement

¹⁵ J. Fritsche: Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens. Der Bauingenieur 1930, Heft 49, 50 und 51.

élastique. A l'extrémité de cette courbe la tangente doit être horizontale afin de permettre un équilibre entre les forces intérieures et extérieures. D'après la nouvelle condition d'écoulement la droite de la déformation purement élastique se prolonge jusqu'à l'atteinte de la résistance où elle se transforme directement et brusquement en ligne horizontale conservée jusqu'à l'apparition des phénomènes de durcissement. Les essais de *E. Siebel*¹⁴ et *H. F. Vieregge* montrent que de telles lignes y (P) peuvent être effectivement observées quoique l'on doivent reconnaître que des lignes du premier type³ se rencontrent beaucoup plus souvent dans la littérature.

Dans le cas d'une poutre continue hyperstatique on a de nouveau, d'après l'ancienne condition d'écoulement, dans les zones élastiques et plastiques une courbe continue qui doit se terminer par une tangente horizontale tandis que d'après la nouvelle condition d'écoulement on obtient pour la fonction y (P) une ligne polygonale qui cependant ne s'éloigne pas beaucoup de la courbe continue (fig. 3). Les sommets du polygone correspondent à la plastification brusque d'une section rigide qui peut être remplacé par une articulation plastique pour obtenir une disposition labile. Au sujet d'une restriction à cette représentation, il faut dire ceci: chaque système intermédiaire statiquement moins déterminé et naturellement le système fondamental isostatique doivent être stables dans toutes leurs parties. Il faut par conséquent exclure la poutre continue dont les travées latérales sont très longues car le degré de stabilité du système fondamental isostatique engendré par la plastification du milieu de la poutre de l'ouverture centrale, devient toujours plus faible et disparaît même.

Les essais effectués jusqu'à présent ne permettent pas de répondre objectivement à la question de l'exactitude de l'une ou de l'autre de ces conditions d'écoulement et dans la discussion des essais les plus importants nous démontrerons, suivant la difficulté de l'interprétation, d'après l'une ou l'autre théorie. La nouvelle condition d'écoulement présente le gros avantage d'être une base simple de la théorie de la plasticité. Si l'on admet que l'élévation de la limite d'écoulement n'est pas encore suffisamment prouvé par l'expérience, on a toujours la possibilité de considérer la nouvelle condition d'écoulement comme une approximation pratique de l'ancienne car elle permet de simplifier la solution de bien des problèmes qui ne paraissent plus solubles d'après l'ancienne condition.

3^o — *Conception mathématique des différentes conditions d'écoulement.*

L'ancienne condition d'écoulement se base, pour les champs de tension à un axe généralement à étudier, sur la condition que nous venons d'énoncer $\sigma \leq \sigma_F$, où par σ_F il faut entendre la limite inférieure d'écoulement. Elle a servi de fondement à presque tous les essais effectués jusqu'à ce jour mais elle présente le gros inconvénient d'exiger, même en admettant que le matériau est un corps idéalement plastique, une méthode de calcul extraordinairement développée et étendue^{16,17} et ne peut par conséquent presque pas être utilisée pour les

¹⁶ *J. Fritsche*: *Arbeitsgesetze bei elastisch-plastischer Balkenbiegung*. Zeitschrift f. ang. Math. u. Mech. 1931.

¹⁷ *K. Jezek*: *Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal-plastischen Stahle*. Sitzungsberichte d. Wiener Akademie d. Wissensch., Math.-Naturw. Klasse, Abt. IIa, 143. Bd., 1934.

problèmes importants de la pratique. Au point de vue du calcul de la charge supportable qui peut être très facilement et très rapidement déterminée par suite de la mise en équilibre des moments,¹⁵ la détermination d'une grandeur de déformation ou du jeu des efforts internes ne peut plus être effectuée pour une plastification partielle de la section déterminante en considérant la forme réelle de cette dernière. De tels problèmes ne sont pas seulement intéressants au point de vue théorique; dans la détermination de la résistance d'une colonne métallique comprimée excentriquement, on ne peut se dispenser de calculer le fléchissement au milieu de la barre car la valeur de la résistance n'est pas atteinte par plastification de la section la plus dangereusement sollicitée, mais une instabilité entre les forces intérieures et extérieures apparaît déjà lors d'une plastification partielle. On a utilisé l'intégration graphique des équations différentielles s'y rapportant mais le calcul reste cependant très conséquent. Lorsque l'on considère la solution de ce problème, construite sur l'ancienne condition d'écoulement par *Chwalla*,¹⁶ *Jezeck*,¹⁷ *Eggenschwyler*¹⁹ etc., on peut se demander si le degré d'exactitude possible justifie un procédé si long surtout si l'on tient compte de l'incertitude des bases; par exactitude on entend ici la concordance entre le calcul et l'expérience. Au nombre des inexactitudes de la condition d'écoulement on peut citer: les oscillations inévitables dans la hauteur de la limite inférieure d'écoulement, qui peuvent atteindre facilement 10 %; les variations importantes des lois admises disant que les sections restent planes, ces variations augmentent avec l'accroissement de la plastification; l'influence négligée des efforts de cisaillement, etc. Il en résulte la nécessité de simplifier les méthodes de calcul dans les recherches sur la théorie de la plasticité.

La 1^{ère} conception mathématique de la nouvelle condition d'écoulement fut établie par *Kuntze*.²⁰ D'après cette théorie, la résistance d'une section est atteinte lorsque la valeur moyenne de la résistance σ_M , introduite par *Kuntze*, atteint la limite inférieure d'écoulement σ_{Fu} . Dans les pointes de tension élastique la limite d'écoulement σ_{Fu} est dépassée. On obtient la valeur moyenne de la résistance σ_M en divisant en deux parties de même volume le corps des tensions par une section parallèle aux bords. Par corps des tensions on entend ici un prisme ayant la section comme base et qui peut être limité par une section oblique de telle façon que la hauteur du corps corresponde à la tension. L'équilibre des volumes, respectivement l'équilibre interne entre les parties plus et moins sollicitées du corps des tensions ne peut naturellement pas être pris comme fondement physique pour l'apparition de l'écoulement même si l'on pense que l'énergie d'écoulement accumulée peut être égale au contenu de la partie plus sollicitée du corps des tensions et que le processus d'écoulement peut être bloqué par la partie restée élastique de la section aussi longtemps que son action entravante n'est pas vaincue. Elle doit être considérée par conséquent comme une simple hypothèse aussi longtemps qu'elle n'aura pas de fondement physique.

¹⁸ *E. Shwalla*: Theorie des außermittig gedrückten Stabes aus Baustahl. *Stahlbau* 1934, Heft 21, 22 und 23, p. 161.

¹⁹ *A. Eggenschwyler*: Die Knickfestigkeit von Stäben aus Baustahl. *Schaffhouse* 1935, Edition personnelle.

²⁰ *W. Kuntze*: Ermittlung des Einflusses ungleichförmiger Spannungen und Querschnitte auf die Streckgrenze. *Stahlbau* 1933, Heft 7, p. 49.

Puisqu'elle correspond bien aux essais, on peut admettre qu'elle doit être conservée comme bonne approximation de cette condition d'écoulement encore inconnue, théoriquement fondée d'une façon irréprochable.

La condition d'écoulement de *Kuntze* est fondée complètement sur les essais et doit être modifiée quand elle ne joue plus. Un tel cas se présente lorsque l'on veut l'utiliser, ainsi qu'on le montrera plus tard, pour décrire la résistance d'une colonne métallique excentriquement comprimée. Pour rester en accord avec ces essais, il faut la modifier de la façon suivante: il faut partir d'un corps des

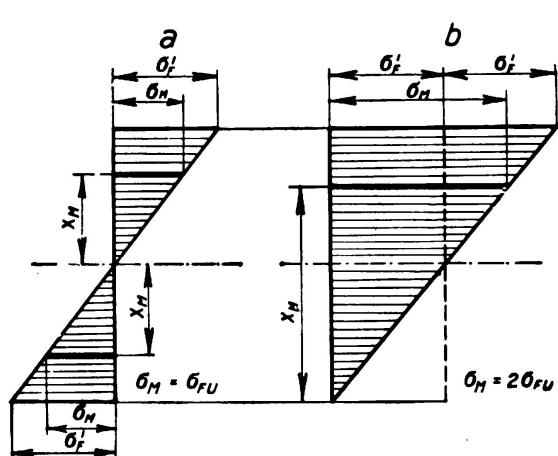


Fig. 4.

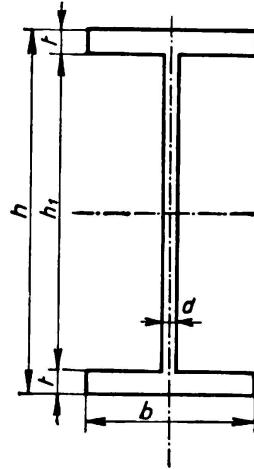


Fig. 5.

Interprétation de la condition d'écoulement de Kuntze, a, originale et b, modifiée.

tensions qui comprend la non uniformité des tensions dans toute la section; on peut l'obtenir en réduisant d'abord les tensions de telle sorte que la tension soit nulle pour une fibre extrême (fig. 4). La valeur moyenne de résistance σ_M divise maintenant le corps des tensions réduites en deux parties de même contenu, mais il faut introduire, dans les sections à deux axes de symétrie, $\sigma_M = 2\sigma_F$ afin de rester en accord avec les essais. Pour un profile en I on calcule^{20a} la limite relevée d'écoulement σ'_F dans les poutres de tension élastique au moyen de

$$\sigma'_{\mathbf{F}} = \sqrt{\frac{2}{1 + \alpha(1 - \beta)}} \sigma_{\mathbf{F}} \quad (2)$$

si l'on prend $\alpha = \frac{h_1}{h}$ et $\beta = \frac{d}{h}$ (Fig. 5).

Cette relation n'est valable que pour autant que la valeur moyenne de résistance tombe dans l'aile de la section, c'est-à-dire pour autant que $x_M \geq h_1 + t$. Il en résulte que l'équation (2) n'est valable qu'aussi longtemps que l'on a $1 - \alpha(\alpha + 2\beta) \geq 0$. Si cette condition n'est plus remplie, on a

$$\sigma'_{\text{F}} = \sqrt{\frac{4\beta}{(1+\beta) - \alpha^2(1-\beta)}} \sigma_{\text{F}}. \quad (3)$$

^{20a} Un tel essai permettrait peut-être de liquider la question de l'exactitude de l'une ou de l'autre des conditions d'écoulement.

La grandeur σ'_F , limite supérieure d'écoulement relevée a la signification d'une «limite d'écoulement par flexion» car lorsque l'on a de la flexion l'écoulement se produit lorsque la plus grande tension à la fibre extrême atteint cette valeur. Cette limite d'écoulement par flexion n'est donc pas constante mais dépend de la forme de la section. On a

$$\sigma'_F = \psi \sigma_F \quad \text{ou} \quad \psi = \frac{\sigma'_F}{\sigma_F} = \frac{\sigma_{F0}}{\sigma_{Fu}}. \quad (4)$$

Une conséquence, qui n'a pas encore été vérifiée, de cette condition d'écoulement est que, dans une déformation purement élastique, des parties sans tension aux environs de la fibre neutre auraient une influence, jusqu'à un certain point favorable, sur la résistance d'une poutre et que par exemple un profil en croix

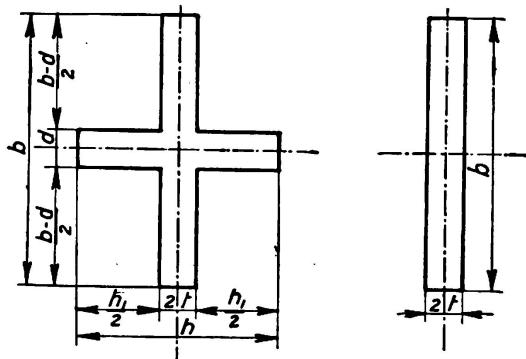


Fig. 6.

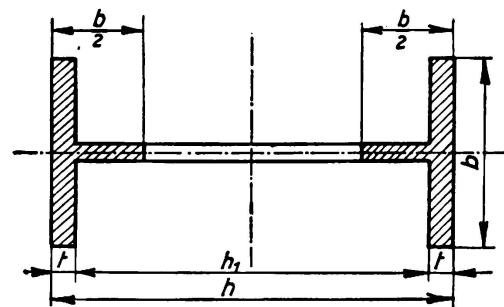


Fig. 7.

serait plus résistant que le même profil auquel on aurait coupé les ailes horizontales en ce sens que les parties sans tension entravent le processus d'écoulement dans les fibres extrêmes. Pour le profil en croix (fig. 6) on a:

$$\sigma'_F = \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{\alpha \beta}{1 - \alpha}}} \cdot \sigma_F \quad (5)$$

et pour le rectangle seulement, avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$

$$\sigma'_F = 1,414 \sigma_F \quad (6)$$

Pour un profil constitué de deux poutrelles T 10.5 à large semelle on a, pour $\alpha = 0,830$ et $\beta = 0,085$, le rapport de la limite d'écoulement par flexion à la limite inférieure d'écoulement $\psi = 1,85$ lors d'un essai de traction alors que pour le profil rectangulaire on obtient $\psi = 1,41$. Ce profil en croix devrait par conséquent supporter environ 30 % de plus que le profil rectangulaire correspondant. On doit avoir quelque chose de semblable pour un profilé $\text{I} \times \text{I}$ quand il est plié dans le plan de symétrie perpendiculaire à l'âme; cependant il faut remarquer qu'une âme infiniment haute ne permettra pas de relever à l'infini la limite d'écoulement par flexion. Il faut admettre que seules les parties de l'âme proches des ailes pourront entraver le processus d'écoulement dans les fibres extrêmes et l'on peut recommander d'évaluer la partie de l'âme à introduire dans la condition d'écoulement à $\frac{b}{2}$ de chaque côté (fig. 7).

Ce résultat théorique paraît étonnant et il sera probablement bientôt possible de le vérifier par des essais.²¹ Il est possible que seuls des essais exécutés avec des sections de ce genre sur la résistance de colonnes métalliques chargées excentriquement ne donnent une confirmation sur la nécessité de cette hypothèse.

La 2^{ème} conception de la condition d'écoulement en tenant compte du relèvement de la limite d'écoulement dans les pointes de tension est de *Prager*;⁹ sur le processus d'écoulement, il admet que le domaine élastique relevé avec tension limite σ'_F dans le diagramme de tension du stade totalement plastique se transforme en la tension limite σ_F et que ce processus s'accomplit sans réduction de la résistance à la flexion de la place en voie de plastification (fig. 8). Désignons

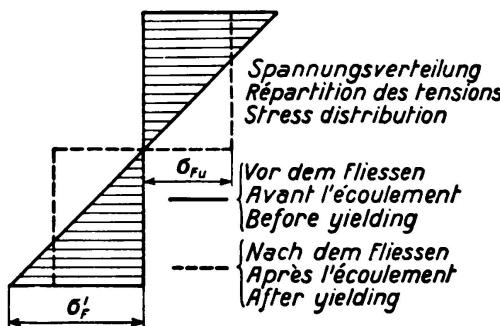


Fig. 8.

par W le moment résistant de la section et par T le moment statique des deux moitiés de la section par rapport à l'axe neutre, on peut écrire: $\sigma'_F W = \sigma_F T$

$$\text{et par conséquent } \sigma'_F = \frac{T}{W} \cdot \sigma_F \quad \text{et} \quad \psi = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Fu}}. \quad (7)$$

La conception de *Prager* qui apparaît comme très vraisemblable représente aussi lors d'un examen critique une idéalisation des processus d'écoulement; elle ne repose pas plus que la conception de *Kuntze* sur des bases physiques et n'est pas plus en concordance fondamentale avec les faits. Son extension au calcul de la résistance de colonnes métalliques comprimées excentriquement fournit des valeurs évidemment trop grandes vis-à-vis de l'expérience de telle sorte même si l'on ne peut donner un jugement définitif on doit cependant donner la préférence à la conception de *Kuntze* de la condition d'écoulement.

4^a — Contrôle des conditions d'écoulement par des essais.

Les essais de flexion de *Thum*¹¹ et *Wunderlich* sont essentiels pour la nouvelle condition d'écoulement. Les 8 essais effectués sur des éprouvettes polies de différents types de section en I (fig. 9) donnent, en tenant compte d'une limite inférieure d'écoulement lors des essais de traction de $\sigma_F = 2,47 \text{ t/cm}^2$, les valeurs σ'_F , calculées d'après les conditions d'écoulement de *Kuntze* et de *Prager*, contenues dans le tableau 1 où elles sont comparées aux valeurs mesurées. Si l'on fait abstraction des essais 2 et 3, dont les gros écarts autorisent évidemment d'autres explications, la concordance avec les valeurs de *Kuntze* est certainement satisfaisante alors que les valeurs calculées d'après *Prager* sont

²¹ *J. Fritsche*: Der Einfluß der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stahlstützen. *Stahlbau* 1936.

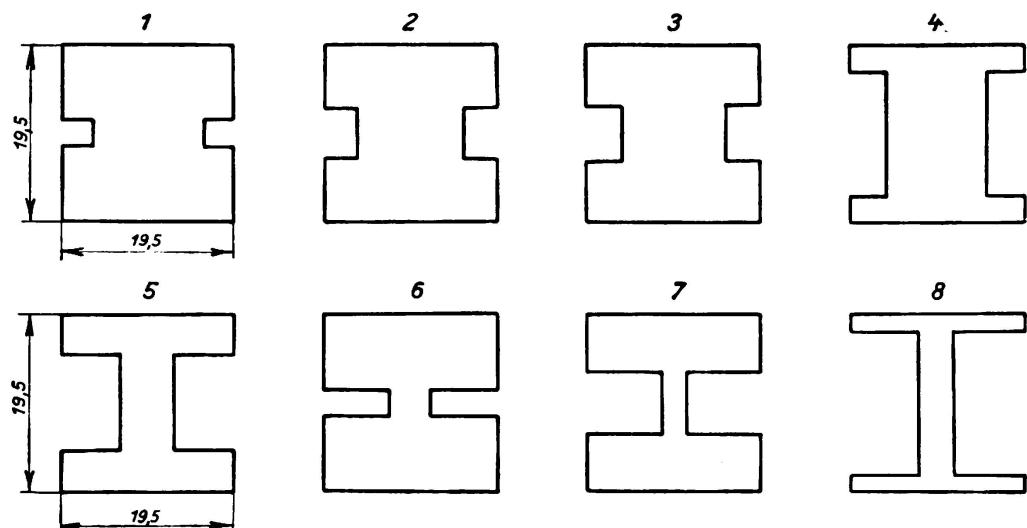


Fig. 9.

Sections des 8 poutres d'essai de Thum et Wunderlich.

presque toutes au-dessus des valeurs mesurées; on peut en conclure que la répartition des tensions du stade complètement plastique ne doit pas nécessairement correspondre aux hypothèses de l'ancienne théorie.

Tableau 1.
Les essais de Thum et Wunderlich.

No. de l'essai	σ_{F_0} mesuré	σ_{F_0} calculé d'après Kuntze	Ecart en % de la valeur mesurée	σ_{F_0} calculé d'après Prager	Ecart en % de la valeur mesurée
1	3,50	3,41	+ 2,56	3,68	- 5,14
2	3,64	3,31	+ 9,07	3,61	+ 0,82
3	3,78	3,28	+ 13,20	3,60	+ 5,14
4	3,42	3,38	+ 1,17	3,45	- 0,80
5	2,91	2,96	- 1,72	3,32	- 14,10
6	3,44	3,31	+ 4,03	3,66	- 6,40
7	3,15	3,06	+ 2,96	3,43	- 8,88
8	2,61	2,72	- 4,20	3,05	- 16,84

Les essais de *Thum* et *Wunderlich* sont les bases les plus importantes de la nouvelle condition d'écoulement et si elles paraissent livrer un contrôle objectif pour une limite supérieure d'écoulement relevée σ'_{F_0} , on peut toujours supposer en tenant compte des observations faites lors de la détermination de la résistance à la fatigue, que la transformation artificielle de la surface par polissage peut avoir une influence sur la limite d'écoulement en surface car là seulement on peut effectuer les mesures.

En ce qui concerne le relèvement de la limite supérieure d'écoulement pour les différentes sortes d'acier, on ne peut liquider cette question que par des essais dont on ne possède pas un nombre suffisant pour pouvoir tirer un jugement définitif. Les essais de *Siebel* et *Vieregge*¹⁴ sur des poutres quadratiques montrent ainsi que l'on peut le voir dans le tableau 2, que cet effet n'est

Tableau 2.
Les essais de Siebel et Vieregge effectués sur une poutre carrée.

No. de l'essai	limite inf. d'éc. σ_{Fu}	résistance à la rupture	$\psi = \frac{\sigma_{Fo}}{\sigma_{Fu}}$ mesuré	ψ (théorique)	
	Kuntze	Prager			
1	1,89	3,09	1,66	1,41	1,50
2	2,52	4,88	1,34	1,41	1,50
3	3,77	7,50	1,07	—	—
4	5,46	7,10	1,05	—	—

prononcé que pour les aciers doux tandis que l'on ne peut pas l'observer pour les aciers à haute résistance. Quant à la question de savoir quelle condition d'écoulement est exacte, ces essais n'entrent pas en ligne de compte car la limite d'écoulement doit être déterminée par calcul en admettant certaines répartitions des tensions et non pas par observation directe au lieu de l'écoulement. On peut encore étudier si la résistance est atteinte par plastification régulière ou par relèvement de la limite d'écoulement dans les pointes de tension.

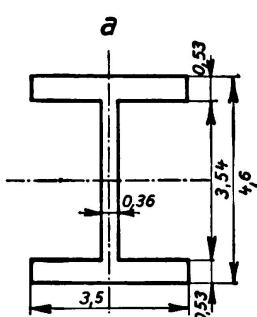


Fig. 10 a.

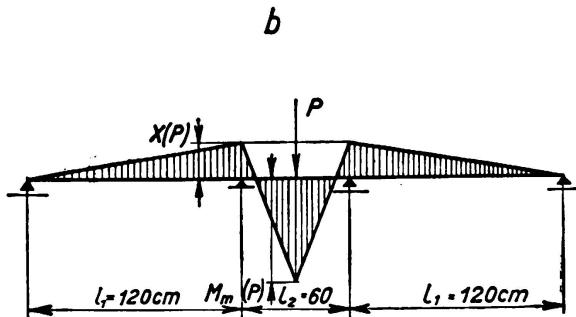


Fig. 10 b.

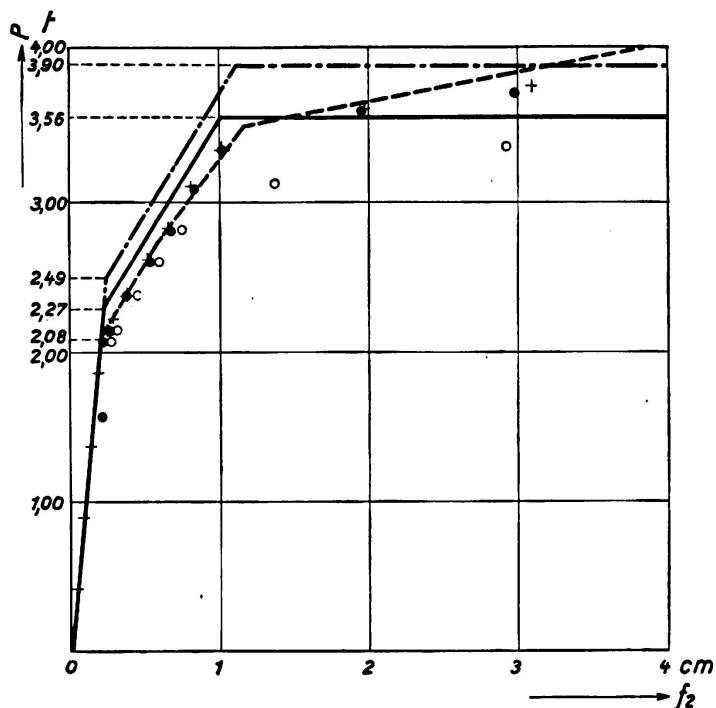
Section de la poutre et disposition des charges sur la poutre d'essai de Stüssi et Kollrunner.

Dans les poutres hyperstatiques les processus de plastification ont une influence beaucoup plus grande sur le jeu des efforts internes et les lois de déformation que dans la poutre simple, déjà par suite de l'égalisation des moments, indépendant du mode de la condition d'écoulement. On peut supposer qu'un mesurage des processus pourra fournir une conclusion sur l'exactitude de l'une ou de l'autre condition d'écoulement. De tels essais (fig. 10a et b) furent exécutés ces derniers temps par *Stüssi* et *Kollrunner*²² à Zurich avec une extraordinaire exactitude. J'ai exploité des résultats dans un travail²³ paru dans le „*Stahlbau*“; la condition d'écoulement de *Kuntze* fut employée dans sa forme originale. En se basant sur les essais de compression exécutés sur des colonnes d'acier on doit apporter quelques modifications et l'on obtient de l'équation (2) $\sigma'_F = 1,09 \sigma_F$ et $\Delta \sigma_F = \sigma_{Fo} - \sigma_{Fu} = 303 \text{ kg/cm}^2$. De là $M_T = W \cdot \sigma_F = 26,70 \text{ tcm}$ et $P_T = \frac{8 \cdot 26,70}{60} = 3,56 \text{ t}$. A la tension au milieu de la travée centrale égale

²² *F. Stüssi und Kollrunner*: Beitrag zum Traglastverfahren. *Bautechnik* 1935, Heft 21 p. 264.

²³ *J. Fritsche*: Grundsätzliches zur Plastizitätstheorie. *Stahlbau* 1936, Heft 9, p. 65.

à la limite d'écoulement relevée σ'_F correspond la charge P'_F . Pour $\alpha = \frac{3 l_2}{4 l_1 + 6 l_2} = \frac{3}{14} P'_F = \frac{4 M_T}{(1-\alpha) l_2} = 2,27$ t; : la valeur correspondante du moment sur appui est $X'_F = -7,28$ tcm. Après la mise hors fonction du milieu de la poutre il reste un système fondamental isostatique composé de deux poutres simples, reliées par une articulation plastique, possédant des encorbellements de la longueur $\frac{l_2}{2}$. P peut croître encore aussi longtemps que sur les appuis le moment d'écoulement M_T n'est pas atteint dans le système fondamental, ce qui se produit lorsque $\frac{1}{2} (P_T - P'_F) \frac{l_2}{2} = M_T - X'_F$. On obtient ainsi la valeur que l'on avait calculée directement auparavant: $P_T = 3,56$ t. Le fléchissement au milieu de la poutre est $f_2 = 0,0872 P$ pour le système 2 fois statiquement indéter-



- • + *Gemessene Werte; valeurs mesurées; measured values*
- — *Auf Grund der Messungen von Stüssi u. Kollbrunner gerechnet*
Calculées en se basant sur les mesures de Stüssi et Kollbrunner
Calculated, based on measurements by Stüssi and Kollbrunner
- — *Auf Grund der neueren Fließbedingung von Kuntze*
D'après la nouvelle condition d'écoulement de Kuntze
Based on new yielding condition by Kuntze
- — *Auf Grund der neueren Fließbedingung von Prager*
D'après la nouvelle condition d'écoulement de Prager
Based on new yielding condition by Prager

Fig. 11.

miné lors d'une déformation purement élastique, tandis qu'on peut calculer $f_2 = 0,198 + 0,642 (P - 2,27)$ après l'introduction d'une articulation plastique au milieu. Stüssi et Kollbrunner ont mesuré les fléchissements f_2 (P) et ils ont déterminé l'allure des résistances internes M_m (P) et X (P) à partir de la déformation de l'axe par une méthode tout-à-fait approfondie. Les fig. 11 et 12 don-

uent les résultats de leurs mesures en comparaison avec les résultats des calculs d'après les différentes conditions d'écoulement et l'on peut y voir que, dans ce cas aussi, la nouvelle condition d'écoulement de *Kuntze* correspond le mieux. Le coude brusque des lignes mesurées $f_2(P)$, $M_m(P)$ et $X(P)$ lors de l'atteinte de P_f et $M_f = W\sigma_F$ montre qu'aucun relèvement de la limite d'écoulement ne semble s'être produit ici mais cependant les essais ne permettent pas à ce point

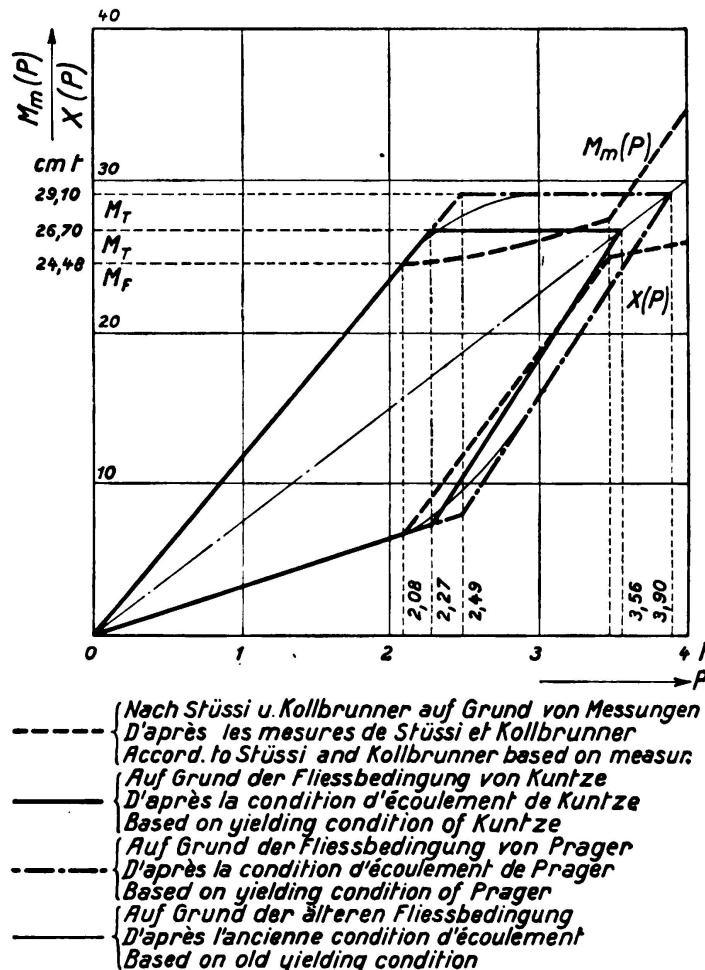


Fig. 12.

de vue de tirer une interprétation certaine car l'effet ne peut se produire qu'à une hauteur d'environ 10 % de σ_F et peut être recouvert par des variations dans les limites d'écoulement.

Les essais de *Maier-Leibnitz*³ dont nous avons parlé montrent en général un passage plus progressif du domaine purement élastique au domaine plastico-élastique; j'ai aussi démontré²³ que ces essais s'accordent à la condition d'écoulement de *Kuntze*, pour autant que l'on peut le contrôler; le polygone des fléchissements (P) joue assez bien avec les courbes mesurées.

Comme résultat de l'observation des essais les plus importants, on peut dire ce qui suit: un relèvement des limites d'écoulement n'est pas possible et demande encore une plus ample confirmation expérimentale. Tant que ceci ne sera pas fait on pourra considérer la nouvelle condition d'écoulement comme une bonne

approximation de l'ancienne et c'est elle que l'on devra utiliser dans les calculs car elle permet une simplification excellente et nécessaire.

5° — *La colonne métallique comprimée excentriquement.*

Si la théorie de la plasticité basée sur la condition d'écoulement de *Kuntze* est utilisable, elle doit nous donner aussi la résistance des colonnes métalliques comprimées excentriquement en concordance avec l'expérience. Cette question fut traitée ces derniers temps d'une façon très approfondie sur la base de l'ancienne condition d'écoulement^{17, 18, 19} sans cependant avoir fourni des résultats satisfaisants²⁴ au point de vue de l'influence de la forme de la section, avec raison prise en considération. En admettant un domaine d'écoulement s'étendant d'une façon continue, on se trouve en présence d'un problème de charges critiques en ce sens que la plastification croissante de la section médiane épouse de plus en plus l'équilibre entre les forces extérieures et intérieures jusqu'à une certaine profondeur du domaine d'écoulement longtemps avant que l'état complètement plastique étant atteint dans la section la plus défavorablement sollicitée, aucune forme d'équilibre stable n'est plus possible. Le calcul de cette charge critique ne peut être exactement effectué que pour une section rectangulaire car les équations différentielles, dans le cas d'un corps idéalement plastique sont très compliquées et ne permettent, dans le cas d'un diagramme général des forces-déformations, qu'une intégration graphique très laborieuse. Lorsque l'on parle de solution exacte, il ne s'agit ici que d'un processus purement mathématique. Dans le sens de la résistance des matériaux qui tend vers une description plus exacte de l'expérience, elles restent malgré tout des solutions approchées car elles reposent sur une série d'hypothèses plus ou moins bien satisfaites.

La solution de ce problème est très simplifiée par la nouvelle condition d'écoulement car l'on peut, sans grandes difficultés, considérer la véritable forme de la section. Le processus est d'après cette conception tel que son caractère purement élastique est conservé jusqu'à la limite relevée d'écoulement σ'_F ; ce n'est qu'alors que la zone d'écoulement s'étend subitement jusqu'à une grande profondeur de la section ce qui engendre, dans le cas d'une barre isostatique, l'épuisement direct de la capacité de résistance. Sans aucun doute cette représentation n'est qu'une idéalisation du processus réel et les essais ont démontré qu'une petite augmentation des charges est toujours possible même si l'on peut nettement observer les lignes d'écoulement; la brisure brusque de la ligne y_m (P) (fig. 13) est supprimée par un écoulement graduel mais cette apparition ne peut pas avoir une grosse influence.

Dans le cas de la flexion avec compression longitudinale le relèvement de la limite d'écoulement σ'_F doit dépendre non seulement de la forme de la section mais aussi fortement de la tension longitudinale σ_o . Pour saisir cette dépendance il est d'abord nécessaire de considérer les deux cas limites $\sigma_o = 0$ et $\sigma_o = \sigma_F$. $\sigma_o = 0$ correspond à la flexion pure pour laquelle la valeur $\Delta\sigma_F$ (0) paraît déterminée; $\sigma_o = \sigma_F$ est une pure sollicitation normale et lorsque l'on exclut le cas du flambage, la limite de la résistance est précisément atteinte alors.

²⁴ E. Chwalla: Der Einfluß der Querschnittsform auf das Tragvermögen außermittig gedrückter Baustahlstäbe. Stahlbau 1935, Heft 25 und 26.

Principalement les essais de *W. Rein*²⁵ ont démontré que dans un tel cas l'apparition d'un moment n'est plus du tout nécessaire pour obtenir un accroissement constant de la déformation sous une charge constante. Ceci comprend aussi la conception précédente car l'irrégularité de l'état de tension disparaît d'où il résulte que l'on doit avoir $\Delta\sigma_F (\sigma_F) = 0$. Il s'agit maintenant de procéder

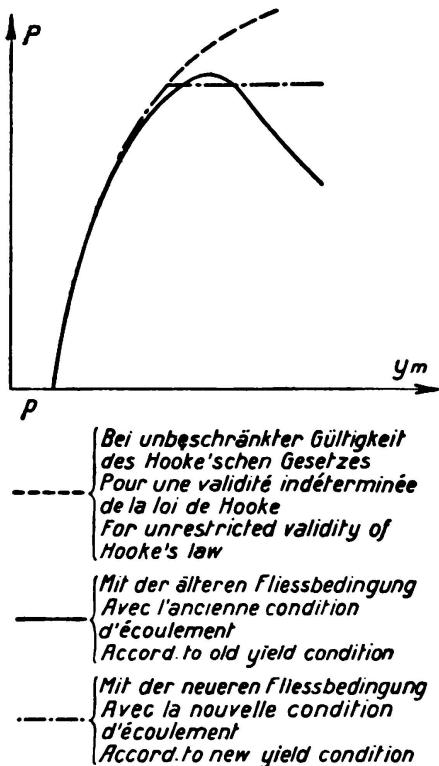


Fig. 13.

Le fléchissement transversal du point milieu d'une barre comprimée excentriquement.

à la mise en équation linéaire de $\Delta\sigma_F$ pour les valeurs intermédiaires des σ_o car l'expérience nous a montré que l'équation la plus simple fournit souvent les résultats les plus satisfaisants. Ainsi que je l'ai justifié²¹ on peut poser l'équation:

$$\sigma'_F - \sigma_o = \psi (\sigma_F - \sigma_o) = \frac{1}{\nu} (\sigma_F - \sigma_o) \quad (8)$$

où ψ est une valeur qui ne dépend que de la forme de la section et représente le rapport de la limite d'écoulement par flexion à la limite inférieure d'écoulement par traction (fig. 14). J'ai aussi démontré que le report sensé de la condition d'écoulement de *Prager*⁹ doit conduire à une fonction quadratique $\Delta\sigma_F (\sigma_o)$

dont le maximum est atteint pour $\sigma_o = \frac{\sigma_F}{3}$ avec $\Delta\sigma_F = \frac{2}{3} \sigma_F$. La condition

d'écoulement de *Prager* nous conduit à la conclusion difficile à se représenter, que la capacité de résister à un moment de flexion doit croître entre certaines limites pour un σ_o croissant; ceci nous donne une autre explication du fait que cette condition d'écoulement fournit des charges critiques trop grandes vis-à-vis des essais.²⁶

²⁵ *W. Rein*: Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau, Ausgabe B, Heft 4; Versuche zur Ermittlung der Knickspannung für verschiedene Baustähle.

²⁶ *J. Fritsche*: Näherungsverfahren zur Berechnung der Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stäbe aus Baustahl. Stahlbau 1935, Heft 18, p. 137.

L'équation (8) détermine σ'_F ; la rupture de la colonne est maintenant liée à la condition $\sigma_i = \sigma'_F$. On obtient (fig. 15):

$$\sigma_i = \sigma'_F = \sigma_o + \frac{P y_m}{W} = \sigma_o \left(1 + \frac{P}{k_i} \sec \frac{x l}{2} \right)$$

où $x^2 = \frac{P}{EJ}$ et $k_i = \frac{W_i}{F}$ représente la distance du noyau de la fibre interne de la section. Si l'on introduit pour $\frac{P}{k_i}$ le degré d'excentricité m , on obtient

$$\sigma'_F = \sigma_o \left(1 + m \sec \frac{x l}{2} \right) \text{ ou } \sigma'_F - \sigma_o = \sec \frac{x l}{2}$$

et avec la condition d'écoulement (8)

$$\sigma_o m \sec \frac{x l}{2} = \frac{1}{v} (\sigma_F - \sigma_o)$$

d'où l'on peut tirer $\sigma_{o\text{crit}}$. Il est recommandable d'employer pour $\sec \frac{x l}{2}$ l'approximation donnée par Timoshenko²⁷

$$\sec \frac{x l}{2} = \frac{\sigma_E + 0,234 \sigma_o}{\sigma_E - \sigma_o} \quad (9)$$

où σ_E représente pour la barre la tension d'Euler $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$. Si l'on désigne par $m' = v m$ le degré d'excentricité «corrigé», on obtient pour $\sigma_{o\text{crit}}$ l'équation quadratique suivante

$$\sigma_{o\text{crit}}^2 (1 - 0,234 m') - \sigma_{o\text{crit}} [\sigma_F + \sigma_E (1 + m')] + \sigma_F \sigma_E = 0 \quad (10)$$

et si l'on veut représenter $\sigma_{o\text{crit}}$ en fonction directe du degré d'élancement $\lambda = \frac{l}{i}$, on a:

$$\sigma_{o\text{crit}} \lambda^2 (1 - 0,234 m') - \sigma_{o\text{crit}} [\lambda^2 \sigma_F + \pi^2 E (1 + m')] + \pi^2 E \sigma_F = 0 \quad (11)$$

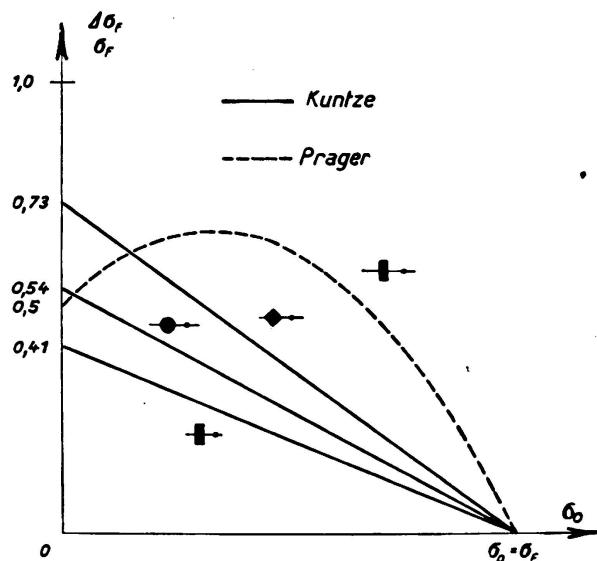


Fig. 14.

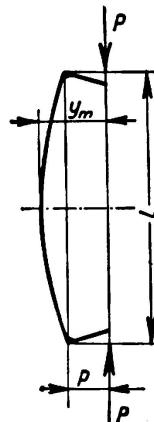


Fig. 15.

²⁷ Timoshenko: Strength of Materials, Band II, 1931.

La résolution de cette équation quadratique se heurte accidentellement à des difficultés; on obtient sous forme de différence et lorsque les deux chiffres sont du même ordre de grandeur, on doit pousser très loin la précision du calcul et l'emploi de la règle n'est plus possible. Dans de tels cas on peut représenter cette expression par une racine de la forme $\sqrt{1-x}$ où x est une grandeur très petite; si l'on développe la racine en une série de binomes et si on la coupe à partir du deuxième membre, on obtient déjà une solution suffisamment approchée

$$\bar{\sigma}_{0 \text{ crit}} = \frac{\sigma_F \sigma_E}{\sigma_F + \sigma_E (1 + m')} \quad (12)$$

tandis que l'on peut obtenir, en tenant compte du troisième membre, une valeur plus exacte de la forme

$$\bar{\sigma}_{0 \text{ crit}} = \bar{\sigma}_{0 \text{ crit}} \left[1 + \bar{\sigma}_{0 \text{ crit}} \frac{1 - 0,234 m'}{\sigma_F + \sigma_E (1 + m')} \right] \quad (13)$$

6° — Contrôle des essais.

Les relations que nous avons obtenues doivent être comparées au grand nombre de résultats d'essais afin de démontrer l'exactitude et la possibilité d'emploi de la méthode de calcul basée sur la nouvelle condition d'écoulement. En première

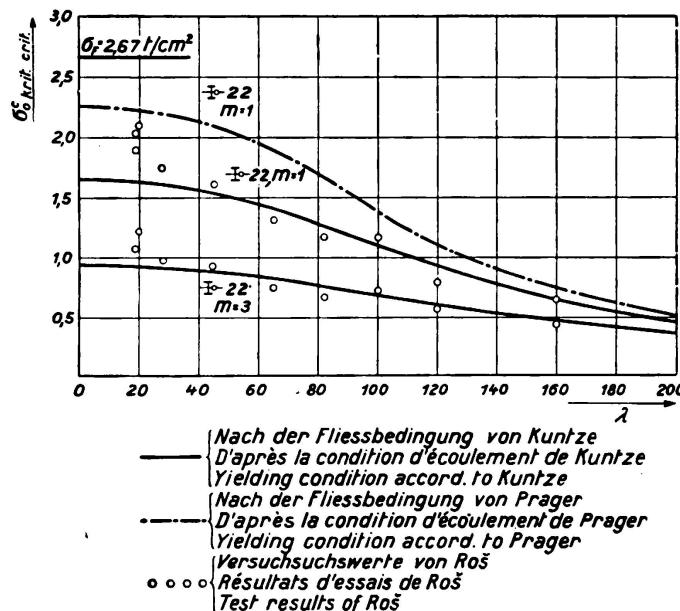


Fig. 16.

Tiré de J. Fritsche: „Der Einfluß der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stahlstützen.“ Stahlbau 1936.

ligne il nous faut nommer les essais fondamentaux de Ros²⁸ sur des profilés I 22 et 32; leur contrôle que j'ai déjà publié²¹ fournit une concordance parfaite entre le calcul et l'essai. La fig. 16 que j'ai tirée de ma publication

²⁸ M. Ros, Die Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe auf Knickung. Compte-Rendu du 2^{me} Congrès international de Construction des Ponts et Charpentes, Vienne 1928, p. 282.

dans le «Stahlbau», montre clairement que les lignes calculées $\sigma_{o\text{crit}} (\lambda)$ sert de moyenne aux essais. On peut voir encore que l'on doit supprimer de cette représentation les degrés d'élancement $\lambda < 25$ car dans de tels cas la solidification peut jouer un rôle et masquer les processus d'écoulement eux-mêmes. Les essais de *Roš* justifient la modification que nous avons apportée sous 3 à la condition d'écoulement de *Kuntze*; si l'on n'introduit pas dans le calcul la possibilité d'un retardement du moins partiel de l'écoulement des fibres extrêmes, retardement produit par l'âme moins sollicitée, il n'est pas possible d'introduire numériquement cette possibilité.

Les essais du «Deutscher Stahlbauverband», pour autant qu'ils me sont connus par une publication de *G. Grüning*²⁹ fournissent ainsi que je l'ai montré²¹ une excellente confirmation de ce procédé de calcul quoiqu'il serait très souhaitable d'exécuter d'autres essais de ce genre avec différentes formes de section afin de pouvoir contrôler cette théorie dans toutes ses conclusions.

Très intéressants sont aussi les essais de *A. Ostenfeld*³⁰ exécutés en 1928/29 au laboratoire de statique de l'Ecole Polytechnique de Copenhague sur lesquels M. le Dr. Čizek m'a rendu très amicalement attentif. *Ostenfeld* ainsi que *J. Melan*, Prague, est parti bien avant que l'on ait expliqué ces considérations par la théorie de la plasticité du point de vue que la véritable sécurité ne pouvait pas être déterminée par l'échelle des tensions et qu'il était nécessaire de se baser sur la rupture ou l'état d'instabilité de l'équilibre tel qu'il est engendré par l'écoulement. Il arrivait à la conclusion que l'on pouvait établir la véritable sécurité de colonnes comprimées excentriquement qu'en comparant la contrainte admissible au point le plus défavorable à une tension dans la fibre extrême de la grandeur

$$\sigma_{res} = \sigma_o \left(1 + \beta m \sec \frac{\chi l}{2} \right) \quad (14)$$

La valeur β ne peut pas s'expliquer par une échelle de tension basée sur la théorie de l'élasticité; c'était en général une valeur tirée de l'expérience, qui dépendait de la section et du degré d'élancement et qui permettait de relier la plus forte tension dans la fibre extrême à la résistance. *Ostenfeld* donne une définition théorique de β qui n'est que peu satisfaisante actuellement. Il utilise des représentations qui correspondent à l'ancienne condition d'écoulement avec réduction plastique des pointes de tension. Afin de pouvoir s'adapter d'une façon satisfaisante aux résultats des essais il devait dans certains cas admettre une réduction de 10 à 20 % du module d'élasticité E qui était déterminé de telle sorte que l'équation suivante soit satisfaite lorsque la résistance était atteinte.

$$y_m = p \cdot \sec \frac{\chi l}{2}. \quad (15)$$

Pour cette raison on ne peut pas comparer directement cette valeur β avec la la valeur ν que nous avons introduite; son sens est le même, car elle doit «corriger» le degré d'excentricité donné.

²⁹ *G. Grüning*: Knickversuche mit außermittig gedrückten Stahlstützen. Mitteilungen aus dem staatlichen Materialprüfungsamt in Berlin-Dahlem. Stahlbau 1936, Heft 3, p. 17.

³⁰ *A. Ostenfeld*: Exzentrisch beanspruchte Säulen, Versuche mit Stahlsäulen, Querschnittsbemessung. Ingeniorvidenskabelige Skrifter A No. 21. Kopenhagen 1930.

Pour la section rectangulaire *Ostenfeld* trouve $\beta = 0,69$ alors que théoriquement on obtient la valeur $\nu = 0,71$. La concordance est très bonne. Le tableau 3

Tableau 3.
Essais de *Ostenfeld* sur des colonnes carrées.
 $\nu = 0,707$ $E = 2100 \text{ t/cm}^2$

No. de l'essai	σ_{F_u} en t/cm^2	λ	m	$\sigma_{o \text{ crit}}$		Ecart en % de la valeur mesurée
				calculé	mesuré	
1	2,44	49,2	2,15	892	912	+ 2,4
2	2,37	49,1	5,80	441	465	+ 5,1
3	2,12	72,6	2,09	732	727	- 0,7
4	2,13	72,6	5,98	370	353	- 4,8
5	2,37	99,6	2,26	672	627	- 7,2
6	2,44	98,0	6,30	370	341	- 8,5
7	2,64	123,3	2,62	581	519	- 11,9
8	2,69	123,6	6,63	349	338	- 3,3

contient ses mesures à une colonne métallique à section rectangulaire comparées aux valeurs calculées $\sigma_{o \text{ crit}}$. Les écarts sont faibles; si les valeurs calculées sont un peu plus grandes que les valeurs mesurées cela provient des variations dans la limite d'écoulement σ_F . La valeur du moment des forces extérieures est constante dans un plus grand domaine et il est clair que l'écoulement se produira là où la limite d'écoulement a une valeur plus faible. Ceci correspond à l'expérience qui montre que les premières lignes d'écoulement ne se produisent pas toujours exactement au milieu de la colonne.

Le deuxième groupe d'essais fut exécuté sur des fers carrés placés de coin. Dans ce cas l'hypothèse de l'égalité du corps de tension plus sollicité et moins sollicité fournit la relation suivante pour le calcul de $\nu = \frac{\sigma_F}{\sigma'_F}$ (fig. 17),

$$\nu^3 - 1,5 \nu^2 + 0,3124 = 0 \quad (16)$$

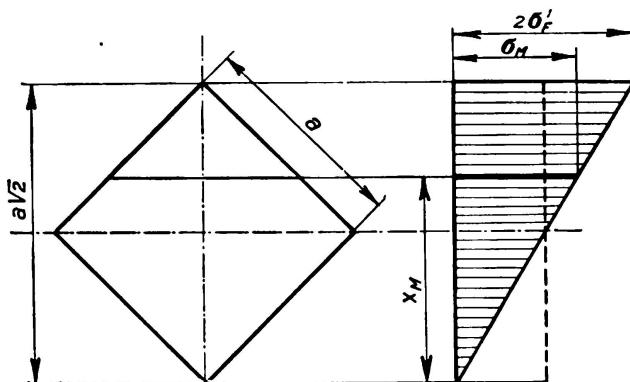


Fig. 17.

que l'on résoud le plus facilement par tâtonnements. On en tire $\nu = 0,58$ alors que *Ostenfeld* calcule avec $\beta = 0,53$; une comparaison des deux chiffres n'est pas possible à cause de la correction de E. Dans le tableau 4 on a comparé

Tableau 4.

Essais de Ostenfeld sur des colonnes carrées (posées de coin).

$$\nu = 0,580 \quad F = 2100 \text{ t/cm}^2$$

No. de l'essai	σ_{Fu} en t/cm^2	λ	m	σ_o crit		Ecart en % de la valeur mesurée
				calculé	mesuré	
1	2,63	48,3	2,44	1000	1160	+ 13,8
2	2,68	48,5	6,21	547	579	+ 5,5
3	2,15	73,8	2,51	743	713	- 4,2
4	2,20	73,9	6,11	481	456	+ 5,5
5	2,63	98,0	3,09	688	672	+ 2,4
6	2,68	98,2	7,10	421	408	- 3,2
7	2,74	122,8	2,25	694	616	- 12,6
8	2,12	124,2	6,65	330	325	- 1,5

les valeurs mesurées σ_o crit avec les valeurs calculées. Là aussi la concordance est satisfaisante car les écarts + 13,8 et - 12,6 % sont compatibles avec l'exactitude que l'on peut obtenir. En tenant compte de la largeur des parties de section moins sollicitées on obtient la limite supérieure d'écoulement théorique exigée dans les pointes de tension élastique pour $\sigma_o = 0$ avec $\sigma'_F = 1,73 \sigma_F$ qui par ces essais peut être considéré comme possible. De toute façon l'ancienne condition d'écoulement fournit aussi dans ce cas pour une surcharge croissante, une augmentation toujours plus lente du domaine d'écoulement en tenant compte de la forte résistance qui se développe contre l'accroissement de la plastification; on obtiendrait de même une grande résistance car le rapport $\frac{T}{W}$ est très grand et l'on voit que l'ancienne et la nouvelle condition d'écoulement sont parallèles et qu'elles ne se distinguent que par des processus intermédiaires qui conduisent à peu près au même résultat final.

Le troisième groupe d'essais concerne les barres comprimées, à section cylindrique (fig. 18). La largeur de la fibre est $b_x = 2\sqrt{x(d-x)}$ et la condition d'écoulement s'écrit:

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot \sigma'_F = 2 \int_0^{x_M} \frac{4 \cdot \sigma'_F}{d} x \sqrt{x(d-x)} dx$$

d'où l'on tire, après résolution de l'intégrale déterminée, l'équation pour ν :
 $3\pi = \frac{3}{2} \arcsin(2\nu - 1) + (8\nu^2 - 2\nu - 3) \sqrt{\nu(1-\nu)}$.

Si l'on pose, ce qui peut toujours être fait, pour les valeurs de ν qui se présentent ici: $\arcsin(2\nu - 1) = (2\nu - 1) + 2\pi$ on obtient:

$$\frac{3}{2} (2\nu - 1) + (8\nu^2 - 2\nu - 3) \sqrt{\nu(1-\nu)} = 0. \quad (17)$$

De cette équation on peut tirer $\nu = 0,65$, alors que Ostenfeld a calculé avec $\beta = 0,58$. Dans le tableau 5 nous avons de nouveau comparé les valeurs de

$\sigma_{o\text{crit}}$ calculées et mesurées. Pour la deuxième fois on obtient pour des petits degrés d'élancement, une valeur de 10 % plus petite et il n'est pas exclu que l'erreur provienne du fait que l'on ne peut complètement éviter un certain petit encastrement dans les appareils d'appui. Ceci donne un certain renforcement aux extrémités de la barre ce qui peut certainement avoir une petite influence surtout lorsque les barres sont courtes.

Tableau 5.
Essais de Ostenfeld sur des colonnes cylindriques.
 $\nu = 0,650$ $E = 2100 \text{ t/cm}^2$

No. de l'essai	σ_{Fu} en t/cm^2	λ	m	$\sigma_{o\text{crit}}$		Ecart en % de la valeur mesurée
				calculé	mesuré	
1	3,25	44,2	2,70	1082	1260	+ 14,1
2	3,25	44,4	6,20	608	668	+ 9,0
3	3,25	95,3	2,97	775	763	- 1,6
4	2,86	95,3	6,20	455	447	+ 1,8

Une autre série d'essais concerne des profilés en I fléchis perpendiculairement au plan de l'âme; dans ce cas Ostenfeld prend $\beta = 0,58$ tandis que le calcul d'après l'équation (5) donne $\nu = 0,61$.

Tableau 6.
Essais de Ostenfeld sur des colonnes constituées par un profilé I 10.
a) les ailes sont comprimées.
 $\nu_1 = 0,682$, $E = 2100 \text{ t/cm}^2$

No. de l'essai	σ_{Fu} en t/cm^2	λ	$m = \frac{P}{k_1}$	$\sigma_{o\text{crit}}$		Ecart en % de la valeur mesurée
				calculé	mesuré	
1	3,04	31,9	1,95	1250	1200	- 4,2
2	3,04	31,9	5,85	592	551	- 7,4
3	2,95	56,8	1,86	1132	1070	- 5,8
4	3,23	57,4	6,06	572	510	- 12,1
5	2,95	82,0	2,01	939	875	- 7,3
6	2,95	82,0	5,76	502	479	- 4,8
7	2,94	106,0	2,12	774	707	- 9,5
8	2,94	106,0	6,00	440	406	- 8,4
9	3,04	134,0	2,35	616	567	- 8,6
10	3,17	134,0	6,32	394	360	- 9,5

D'autres essais très intéressants sont ceux exécutés sur des profilés en I pour lesquels j'ai calculé la limite d'écoulement par flexion et la valeur $\nu^{(2)}$. Ces profils non symétriques donnent des résistances très différentes suivant que la charge agit d'un côté ou de l'autre du centre de gravité. Si les deux ailes subissent la plus forte compression, le fléchissement se produit du côté fermé de la section et l'on a

$$\nu_1 = 0,707 \sqrt{\frac{1 - \alpha \beta^2}{1 - \alpha}} \quad (18)$$

où $\alpha = \frac{h_1}{h}$ et $\beta = \frac{d}{b}$ (fig. 19). Pour le profilé U 10 que nous avons essayé, $\alpha = 0,83$, $\beta = 0,12$ d'où $\nu = 0,682$, tandis qu'Ostenfeld a calculé dans ce cas avec $\beta = 0,69$. La comparaison entre les valeurs calculées et mesurées se trouve au tableau 6 qui contient aussi les écarts en % des valeurs mesurées.

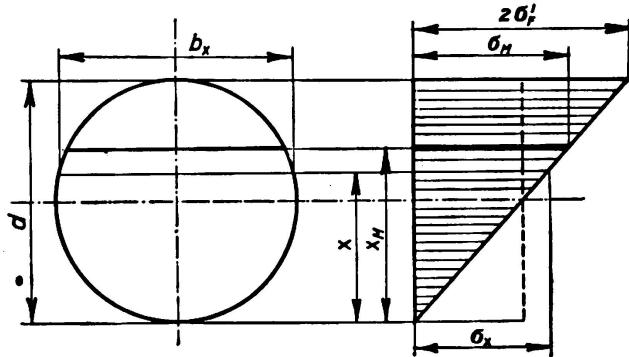


Fig. 18.

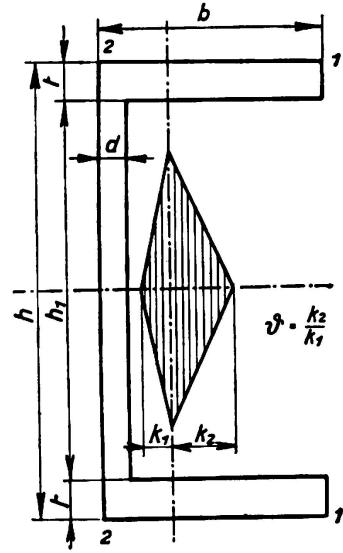


Fig. 19.

Lorsque le point d'application de la force se trouve au côté du centre de gravité, l'âme supporte la plus forte compression et le fléchissement se fait du côté ouvert de la section. En ce qui concerne la résistance, il y a deux possibilités tout-à-fait distinctes à considérer: elle peut être atteinte soit par écoulement dans la partie comprimée, soit par écoulement dans la partie tendue. La plus forte contrainte de compression est:

$$\sigma_2 = \sigma_0 \left(1 + m \sec \frac{\chi l}{2} \right)$$

et celle de traction:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \left(-1 + m \frac{k_2}{k_1} \sec \frac{\chi l}{2} \right)$$

où $m = \frac{p}{k_2}$ représente le degré d'excentricité mesuré par rapport au côté opposé;

La condition d'écoulement s'énonce dans le 1^{er} cas

$$\sigma'_F - \sigma_0 = \sigma_0 m \sec \frac{\chi l}{2} = \frac{1}{\nu_2} (\sigma_F - \sigma_0) \quad (19)$$

tandis que dans le cas 2 on peut l'écrire

$$\sigma'_F + \sigma_0 = \sigma_0 m \frac{k_2}{k_1} \sec \frac{\chi l}{2} = \frac{1}{\nu_1} (\sigma_F + \sigma_0) \quad (20)$$

ν_2 fut calculé auparavant avec $\nu_2 = 0,707 \sqrt{(1 + \alpha) - \alpha \beta (2 - \beta)}$; ν_1 doit naturellement avoir en tenant compte du champ de tension réduit, la même valeur que lorsque le fléchissement se produit du côté fermé. Le cas 1 se produit pour les petites valeurs de σ_0 et pour de petites excentricités p tandis que pour le cas

2 c'est le contraire. La tension limite σ_{oG} pour laquelle l'écoulement apparaît simultanément aux deux fibres extrêmes peut être calculé des deux équations (19) et (20) avec

$$\sigma_{oG} = \frac{v_1 \vartheta - v_2}{v_1 \vartheta + v_2} \quad \text{où} \quad \vartheta = \frac{k_2}{k_1} \quad (21)$$

Pour le profilé $\square 10$ que nous avons essayé, $k_1 = 0,629$, $k_2 = 1,400$ cm, $v_1 = 0,682$ d'où l'on tire $\sigma_{oG} = 0,253 \sigma_F$. Dans les essais de *Ostenfeld* l'écoulement s'est produit en partie dans l'âme et en partie dans les ailes tendues lorsque la charge avait son point d'application du côté de l'âme selon les relations établies ci-dessus. Dans la plupart des essais les valeurs de m étaient si grandes que l'on se trouvait en présence du cas 2. C'est pourquoi la tension critique se calcule à partir de (20) avec

$$\sigma_{o\text{crit}}^2 (1 + 0,234 m' \vartheta) + \sigma_{o\text{crit}} [\sigma_F - \sigma_E (1 - m' \vartheta)] - \sigma_E \sigma_F = 0 \quad (22)$$

Pour le profilé $\square 10$ on avait $v_1 = 0,68$ tandis que *Ostenfeld* admet $\beta = 0,63$. Les essais sont très nombreux et il suffit de contrôler ceux qui ont de petites valeurs ϑ_m car ils suscitent le plus grand intérêt. Les résultats du calcul sont contenus dans le tableau 7. Si l'on considère la condition théorique que l'écoulement ne peut se produire dans les ailes que lorsque $\sigma_{o\text{crit}} < \sigma_{oG}$, deux des essais cités y sont contraires. Ceci ne doit pas surprendre; la valeur σ_{oG} ne peut pas représenter une limite exacte de deux apparitions opposées mais simplement avoir une validité approchée. Avant tout les variations des limites d'écoulement jouent un grand rôle surtout si l'on tient compte du fait que la limite d'écoulement entre en ligne de compte une fois dans l'âme et une autre fois dans les ailes, cas qui par expérience ne sont jamais égaux. Il serait possible de considérer ces différentes limites d'écoulement dans le calcul de σ_{oG} . Deux essais parallèles seulement montreraient l'apparition de l'écoulement dans l'âme. Les résultats de ces essais se trouvent dans le tableau 7 sous N° 1; dans ce cas aussi on a une concordance satisfaisante.

Tableau 7.

Essais de *Ostenfeld* sur des colonnes constituées par un profilé $\square 10$

b) l'âme est comprimée.

$$v_2 = 0,903, \quad v_1 = 0,682, \quad \vartheta = 2,23, \quad E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

No. de l'essai	σ_{Fu} en t/cm ²	λ	$m = \frac{P}{k_2}$	$\sigma_{o\text{crit}}$	Ecart en % de la valeur mesurée	σ_{oG}
				calculé mesuré		
1	2,59	50,7	1,76	1000 1140	+ 12,1	655
2	2,57	82,2	1,95	800 776	- 3,1	650
3	2,82	108,0	1,84	698 625	- 11,7	712
4	2,71	132,4	2,03	527 498	- 5,8	685
5	2,78	82,5	1,96	830 828	- 0,3	703
6	2,97	57,4	5,79	351 382	+ 8,1	750
7	2,57	82,2	5,73	291 305	+ 4,6	650

Remarque: Dans l'essai 1 l'écoulement se produisit dans l'âme comprimée; dans les autres essais dans les ailes tendues.

Pour terminer, on peut dire sur les nombreux essais de *Ostenfeld*, qu'ils peuvent être considérés comme une bonne confirmation, du fait qu'ils permettent une représentation fondamentale de la nouvelle condition d'écoulement et qu'ils permettent de calculer la résistance d'une colonne métallique sans calculs trop compliqués. Si ces essais ne donnent aucune confirmation de l'exactitude physique de la nouvelle condition d'écoulement, ils justifient cependant son emploi dans la résistance pratique des matériaux. On peut encore contrôler le procédé de calcul développé ici par les nombreux essais de la « American Society of Civil Engineers » qui a créé une commission spéciale pour l'étude de la résistance des colonnes métalliques. Les résultats des essais qui se rapportent aux sections les plus variées, ont été publiés dans « Proceedings of the American Society of Civil Engineers » de février 1929; la place que nous avons à notre disposition ne nous permet malheureusement pas de nous étendre sur ces essais.

Résumé.

Tandis que l'ancienne condition d'écoulement utilise directement la valeur de la résistance, tirée de l'essai ordinaire de traction, pour la détermination du danger d'écoulement local, — car elle ne considère que l'état de tension local, — la nouvelle condition d'écoulement fait varier la valeur de la résistance suivant la forme du champ de tension. Si l'on ne considère pas comme démontré le relèvement de la limite supérieure d'écoulement dans les pointes de tension du champ élastique et si l'on reste exclusivement sur le plan de l'ancienne condition d'écoulement, on ne peut cependant pas écarter la nouvelle condition dans ses conclusions; on peut toujours encore la considérer comme une approximation, fournissant des résultats utilisables et satisfaisants, de l'ancienne condition d'écoulement. Le présent travail s'occupe aussi du calcul des barres excentriquement comprimées, sur la base de la nouvelle théorie de la plasticité. La nouvelle condition d'écoulement a l'avantage de donner des méthodes de calcul claires et simples, dont les résultats concordent avec les essais. On peut souhaiter que la question de la condition d'écoulement sera plus largement encore étudiée.