

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Rubrik: I. La ductilité de l'acier: sa définition: manière d'en tenir compte dans la
conception et le calcul des ouvrages, notamment des ouvrages
hyperstatiques

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

I

La ductilité de l'acier. Sa définition.

Manière d'en tenir compte dans la conception et le calcul des ouvrages, notamment des ouvrages hyperstatiques.

Die Bedeutung der Zähigkeit des Stahles für die Berechnung und Bemessung von Stahlbauwerken, insbesondere von statisch unbestimmten Konstruktionen.

Importance of the toughness of steel for calculating and dimensioning steel structural work, especially when statically indeterminate.

Leere Seite
Blank page
Page vide

I 1

Théorie générale de la plasticité. Champs des lignes de cession.

Allgemeine Plastizitätstheorie, Gleitlinienfelder.

General Theory of Plasticity, Fields of Equal Yield Lines.

Dr. Ing. A. Freudenthal,
Warschau.

Introduction.

L'évolution de la théorie de la plasticité a accusé, au cours de ces dernières années, de tels progrès que l'exposé de ses résultats et conséquences doit faire, à ce Congrès, l'objet d'une séance de travail particulière. Quoiqu'il en soit, il subsiste encore dans ses principes essentiels de notables obscurités. Il est certain que les conceptions très évoluées de la physique moderne nous ont conduit à réviser en partie un grand nombre de nos points de vue habituels en ce qui concerne la résistance des matériaux et principalement ceux de ces points de vue qui portent sur les questions de structure. Les obscurités qui subsistent encore dans les notions fondamentales de la théorie de la plasticité débordent toutefois le cadre de ces conceptions et doivent plutôt être considérées comme résultant d'une imprécision dans l'interprétation de faits d'ordre phénoménologique.

La mécanique des corps solides est en grande partie régie par la loi de *Hooke*. Cette loi qui a permis d'établir une théorie assez poussée du régime élastique, n'est toutefois valable que dans une certaine limite. C'est pourquoi l'on s'est depuis longtemps efforcé d'établir des lois semblables qui seraient d'une validité générale et qui s'appliqueraient également à la mécanique d'états quelconques, de quelque côté qu'ils se trouvent de la limite ci-dessus. On s'est toutefois heurté là à des difficultés importantes, car si le comportement élastique est plus ou moins équivalent pour différentes matières, tout au moins du point de vue phénoménologique, par contre, le comportement après dépassement de la limite d'élasticité dépend essentiellement de la constitution de la matière considérée:

Les recherches mathématiques sur la théorie de la plasticité ont débuté par l'emploi de méthodes dont il était avéré qu'elles pouvaient être utilisées dans la théorie des états d'équilibre limite des masses sans cohésion, en vue du calcul des états plastiques des corps solides. On se basait ainsi sur la similitude entre les courbes limites de *Mohr* pour les corps sans cohésion et celles de différents corps solides. Etant donné les différences fondamentales de constitution que présentent entre eux ces différents corps solides, la méthode devait toutefois nécessairement échouer, ou tout au moins conduire à des résultats différant

sensiblement de la réalité. Il ne faut en effet jamais perdre de vue que les corps de structure cristalline doivent tout d'abord subir des déformations plus ou moins élastiques avant d'atteindre l'état plastique, dans lequel d'ailleurs les régimes élastique et plastique coexistent toujours pratiquement et chevauchent même le long de certaines surfaces, alors que les masses sans cohésion subissent généralement des perturbations d'équilibre par suite de leur passage à l'état plastique. La distinction introduite par *Hencky*¹ entre les cas d'équilibre isostatique et hyperstatique est donc essentielle pour l'étude des problèmes concernant la théorie de la plasticité. Par cas d'équilibre isostatique, *Hencky* entend en effet ceux dans lesquels les conditions d'équilibre et de plasticité sont ensemble suffisantes pour permettre de déterminer les contraintes en tout point donné, tandis que la résolution d'un cas d'équilibre hyperstatique rend nécessaire l'intervention d'une étude des déformations. Dans l'étude de l'état plastique des matériaux de construction, on se trouve presque exclusivement en présence de cas hyperstatiques, car dans les états limites considérés, on rencontre des zones plastiques de faible importance à côté de zones élastiques très importantes, de telle sorte que les deux états doivent être compatibles dans les zones de transition et ne peuvent être considérés que sous l'angle d'une interdépendance. L'étude mathématique de ces états est rendue considérablement plus difficile par cette interdépendance. Toutefois, et malgré les simplifications qu'elles seraient susceptibles d'apporter au calcul, il faut rejeter toutes hypothèses qui seraient en contradiction avec le comportement effectif des matériaux et qui ne serviraient qu'à permettre d'aboutir plus facilement à une solution mathématique du problème.

La plus importante de ces simplifications, qui porte sur presque toute la théorie mathématique de la plasticité, est l'hypothèse suivant laquelle les déformations élastiques peuvent être négligées par rapport aux déformations plastiques à cause de leurs valeurs relativement faibles. Cette hypothèse qui n'est pas autre chose qu'une déduction par analogie, tendant à conclure, à partir du comportement des corps sans cohésion, sur le comportement des corps de structure cristalline, est inadmissible en ce qui concerne les états d'équilibre dans lesquels coexistent le domaine élastique et le domaine plastique. On trouve déjà dans l'étude bien connue de *Haar* et *Kármán*² la démonstration du fait que dans le domaine semi-plastique, c'est-à-dire dans lequel $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 4k^2$ ($2k =$ limite d'écoulement), tandis que $(\sigma_2 - \sigma_3)^2 < 4k^2$ et $(\sigma_3 - \sigma_1)^2 < 4k^2$, les déformations plastiques sont de l'ordre de grandeur des déformations élastiques; il n'est donc pas admissible de négliger les dernières par rapport aux premières dans les cas où les deux types de déformations se manifestent.

Tous les essais antérieurs en vue de résoudre mathématiquement les problèmes plastiques concernant les corps de nature cristalline ont toutefois été plus ou moins appuyés sur cette hypothèse. Les exceptions à cette règle sont très peu nombreuses et le plus important des travaux dans lesquels on ait renoncé à cette hypothèse est une étude de *Hencky*³; or, dans le cas le plus simple, ce travail conduit déjà à des investigations mathématiques d'une telle difficulté que l'étude de cas moins simples est alors impossible avec les ressources qu'offrent actuellement les mathématiques.

Nous nous proposons dans ce qui suit, en tenant compte des obscurités

qui planent encore sur les notions de base de la théorie de la plasticité, d'analyser brièvement ces notions essentielles et d'examiner l'importance des phénomènes de déformation plastique des corps de nature cristalline, les uns par rapport aux autres. Notre étude portera avant tout sur les phénomènes qui sont désignés, dans la littérature scientifique, sous le nom de « figures d'écoulement ». Ainsi qu'il est courant dans la théorie de la plasticité, nous considérerons des processus évoluant avec une lenteur telle qu'ils puissent être envisagés comme constituant une succession d'états d'équilibre, ce qui nous dispensera d'une manière générale de faire intervenir effectivement les vitesses de déformation.

1° — Condition de plasticité.

La première question qui se pose dans l'étude de la théorie de la plasticité est celle de savoir dans quelles conditions la limite d'écoulement d'un matériau se trouve dépassée. Avant d'examiner brièvement les hypothèses actuellement existantes au sujet de l'écoulement, nous citerons une phrase de Roš, qui offre un intérêt capital tant pour l'interprétation des hypothèses concernant la rupture que pour l'interprétation de celles qui se rapportent à l'écoulement: « Par suite des différences foncières de comportement entre des matières qui présentent des structures tout à fait différentes les unes des autres, il est absolument impossible de mettre sur pied une théorie générale de la rupture qui ne tiendrait précisément pas compte de la structure propre de chaque matière. A chaque matière, correspond plutôt une théorie particulière de la rupture, théorie qui résulte de la structure interne et du mécanisme de déformation de la matière considérée ». L'existence de si nombreuses hypothèses s'explique aisément par ce fait qu'une affirmation aussi précise n'avait jamais été formulée auparavant et que l'on avait par suite tendance à généraliser les résultats expérimentaux que l'on obtenait au cours des recherches sur telle matière déterminée.

Les matières dont l'industrie dispose pour l'usinage et pour la construction sont en général des matières de nature cristalline, composées en fait d'ensembles d'éléments cristallins, mais qui se comportent d'une manière quasi-isotrope par suite de l'orientation non régulière de ces éléments cristallins. En ce qui concerne la structure de l'élément cristallin lui-même, on a presque exclusivement affaire, dans le cas des métaux industriels, au système ou réseau cubique, dont il existe trois types:

- 1° — le réseau simple qui est nettement déterminé par l'indication de l'intervalle entre les éléments de masse (intervalle d'identité);
- 2° — le réseau à faces centrées, qui comporte des éléments de masse centrés sur les faces du cube;
- 3° — le réseau à élément central qui comporte en son centre spatial un élément de masse.

Le fer α , le fer β , le fer δ cristallisent dans le système à élément central; le fer γ , l'acier au nickel et au manganèse, de même que le cuivre, l'aluminium, etc., cristallisent dans le système à faces centrées.

La disposition du réseau cristallin est également très importante du point de vue pratique, car la manière suivant laquelle la matière considérée passe à l'état

plastique et les phénomènes qui caractérisent cet état sont influencés d'une manière décisive par la constitution du réseau cristallin.

Parmi les hypothèses concernant l'écoulement, nous citerons ici comme constituant les plus intéressantes:

- 1° — L'hypothèse du cisaillement du *Guest-Mohr*⁴ qui se traduit par la relation:

$$\tau_{\max} = f(\sigma_x + \sigma_y)$$

et qui est déduite de l'ancienne théorie de *Coulomb* sur le frottement interne.⁵ La fonction $f(\sigma_x + \sigma_y)$ peut être adaptée aux résultats expérimentaux.

- 2° — L'hypothèse de *Beltrami* au sujet du travail constant de déformation, qui envisage, comme criterium du moment où l'on atteint la limite d'écoulement, une valeur déterminée du travail de déformation accumulé; cette hypothèse ne correspond toutefois pas avec les résultats des essais et elle a été émise sous une forme améliorée par *Huber*⁶ et, indépendamment de *Huber*, par *Mises* et *Hencky*,⁷ forme sous laquelle elle constitue l'hypothèse suivante:

- 3° — L'hypothèse du travail constant de déformation suivant la relation:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 8 k^2$$

- 4° — La modification de cette hypothèse suivant *Schleicher*⁸ sous la forme bien générale:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \sigma_c(p)$$

avec:

$$p = 1/3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Les nombreuses tentatives qui ont été faites en vue de la vérification de toutes les hypothèses ci-dessus et de certaines autres encore qui sont d'ailleurs totalement abandonnées aujourd'hui⁹ ont montré que l'hypothèse de *Huber-Hencky-Mises* définit le passage à l'état d'écoulement pour les métaux susceptibles de déformation plastique avec ou sans limite d'écoulement nettement définie par elle-même, tandis que c'est l'hypothèse de *Mohr* qui fournit les meilleures valeurs moyennes dans le cas des matières dures et cassantes, pour les états de contrainte voisins de la limite d'écoulement.

Il ne faut d'ailleurs pas perdre de vue, lorsqu'il s'agit d'interpréter les indications ci-dessus, qu'il ne saurait être ici question que de résultats provisoires, auxquels les investigations ultérieures apporteront peut-être de nouvelles modifications.

2° — Limite d'écoulement.

L'hypothèse d'écoulement est la condition que doivent remplir les contraintes principales pour que l'état d'écoulement soit atteint en un point. Cette condition est valable, et ceci est essentiel, pour l'état qui correspond immédiatement au dépassement de la limite d'écoulement; il n'exprime toutefois aucune indication sur la manière dont ce dépassement se produit. On constate des différences entre

les processus de déformation non seulement entre métaux différents comme par exemple entre l'acier et le cuivre, mais également entre les différentes formes que peut prendre un même métal et même, pour des formes absolument semblables, suivant la vie antérieure des métaux considérés.

La différence la plus marquée se manifeste entre les métaux possédant et ne possédant pas une limite d'écoulement nettement définie. Dans le dernier cas, le passage de l'état élastique à l'état plastique se fait d'une manière assez continue, car des contraintes faibles provoquent déjà des déformations plastiques. Par contre, dans les métaux du premier cas, les déformations sont jusqu'à une certaine limite entièrement réversibles, puis la matière jusque là très résistante cède brusquement et les déformations plastiques se manifestent brusquement, la charge ne restant souvent pas constante, mais diminuant dans des proportions importantes, de telle sorte qu'il semble qu'il existe une limite d'écoulement «supérieure» et une limite d'écoulement «inférieure».

*Bach*¹⁰ a déjà constaté une étroite dépendance entre cette limite supérieure d'écoulement et la forme de l'éprouvette et il a reconnu l'existence de cette limite comme constituant la limite d'un phénomène caractéristique d'instabilité (balancement de la charge). Les recherches modernes ont été plus loin encore et on explique actuellement l'existence de la limite «inférieure» d'écoulement comme constituant un phénomène de retard analogue à ceux que l'on observe dans d'autres branches de la physique (surchauffe, surfusion), ces phénomènes étant caractérisés par ce fait qu'une modification d'état escomptée conformément à une loi définie se produit avec un retard appréciable, mais d'une manière brusque, subite. L'ascension rectiligne de la courbe des déformations est maintenant considérée par *Moser*,¹¹ par exemple, comme constituant un phénomène de retard de ce genre et en particulier comme traduisant un retard des déformations permanentes, dû à des résistances internes de frottement. L'apparition brutale de la déformation plastique à la limite d'écoulement doit être alors considérée comme une tendance à réparer ce retard. Cette conception s'appuie également sur ce fait, constaté expérimentalement, que pour un acier admettant une finesse de grain donnée et dans les mêmes conditions de traitement préalable, la limite de proportionnalité se trouve d'autant plus rapprochée de la limite d'écoulement que le métal est plus homogène et que l'état de contrainte peut être produit dans ce métal dans des conditions plus dégagées de toute perturbation.

L'exactitude de la conception concernant la modalité d'existence de la limite d'écoulement présente dans la théorie de la plasticité une importance d'autant plus grande que ce n'est qu'en se basant sur cette conception que l'on peut donner leur interprétation essentielle aux phénomènes plastiques divers qui se manifestent à l'état de transition.

3° — *Figures d'écoulement.*

Sur des éprouvettes finement polies en fer doux, on constate au début des déformations permanentes, la formation d'une ou de plusieurs fines figures en relief, qui s'épaississent encore lorsque la charge croît. Ces lignes d'aspect mat, dont les sections correspondent à des couches fortement déformées de la

surface de l'éprouvette, accusent un profil soit en relief dans le cas de l'essai à la compression, soit en creux dans le cas de l'essai à la traction, soit sous forme d'une sorte de talus unilatéral. D'après les noms de leurs premiers observateurs, elles ont reçu les noms de lignes de *Lüders* ou de *Hartmann*; actuellement d'ailleurs, elles sont généralement connues dans la théorie de l'élasticité, sous la désignation de lignes de cession, quoique l'expression qui frappe le mieux à leur sujet soit celle de «figures d'écoulement». Leur propriété la plus importante est de coïncider avec les trajectoires des contraintes de cisaillement. Du fait même de cette propriété, ces lignes constitue un auxiliaire extrêmement précieux pour les investigations sur l'état des contraintes dans les corps solides, dans le domaine plastique.

Les figures de cession sont d'ailleurs mathématiquement caractérisées par un certain nombre de propriétés intéressantes de telle sorte qu'il devient parfaitement possible de résoudre le problème que représente l'état des contraintes dans le domaine plastique à partir de la connaissance de ces figures de cession.¹² La plus importante de ces propriétés est l'identité des figures de cession avec les caractéristiques de la condition de plasticité. La preuve de cette identité a été fournie par *Massau*¹³ pour la première fois, quoique dans sa forme générale. En se basant sur cette propriété, il est possible de composer non analytiquement, le long de ces lignes de cession, plusieurs intégrales, ce qui facilite grandement l'adaptation des solutions aux conditions effectives. Les quelques solutions qui existent de la théorie mathématique de la plasticité reposent presque uniquement sur cette propriété des lignes de cession.

Dans l'interprétation des possibilités d'application de la méthode ci-dessus à la résolution effective des problèmes que pose la théorie pratique de la plasticité, il faut toutefois ne pas perdre de vue que des conditions mathématiquement exactes de franchissement d'un état limite ne doivent pas être à priori considérées comme nécessairement admissibles dans leur application au domaine physique; lorsque par exemple nous partons d'une condition d'ordre physique établie mathématiquement pour établir pour certaines grandeurs des valeurs limites déterminées, ce processus est sans aucun doute légitime du point de vue mathématique. Il est toutefois possible, physiquement, que le comportement physique correspondant à cette limite se trouve modifié et que les points de vue qui ont conduit à l'établissement de la condition correspondante perdent leur validité à la limite considérée, ou soient en tout cas fortement modifiés. C'est le cas pour la condition de plasticité.

La condition de plasticité du corps envisagé comme plastique dans son ensemble, à l'état de contrainte plane, s'énonce comme suit:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} + \sin \rho \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = C$$

ρ désignant l'angle de frottement et C une valeur qui dépend de la cohésion. Pour les corps non cohérents qui constituent le point de départ des investigations sur les lignes de cession, on a $C = 0$. L'apparition d'une ligne de cession a pour première conséquence une perturbation de l'équilibre; les déformations réversibles qui précèdent la manifestation de la perturbation sont in-

finiment petites par rapport aux déformations «plastiques». Dans les métaux, par contre, on a $C = \text{constante}$ et $\rho = 0$. Par suite de leur grande cohésion, l'apparition des lignes de cession n'indique ici qu'une perturbation locale et passagère de l'équilibre; l'état de contrainte et de déformation élastique qui précède l'apparition des phénomènes d'écoulement eux-mêmes présente une importance notable en ce qui concerne la nature de l'écoulement et l'ordre de grandeur des déformations plastiques est le même que celui des déformations élastiques.

De ce qui précède, il résulte que les résultats obtenus par la théorie mathématique de la plasticité ne peuvent pas être considérés comme susceptibles d'une interprétation effective dans le domaine de la plasticité des matières cristallines et tout particulièrement des métaux, du point de vue pratique. Les hypothèses qui servent de base à ces résultats ne sont pas en effet remplies dans ce dernier cas. L'importance des lignes de cession pour l'étude des états plastiques des métaux qui jouent un rôle intéressant dans la pratique s'en trouve ainsi réduite. Ces lignes ne présentent par suite un intérêt certain que lorsque la déformation a suffisamment progressé pour qu'il ne subsiste plus aucun état élastique dans la zone considérée tout entière. De tels cas ne se présentent toutefois pas souvent et sont plutôt limités au domaine du travail des métaux.

Si l'on se libère du point de vue généralement admis au sujet de la grande importance que présentent les lignes de cession dans la théorie de la plasticité et si l'on cherche à estimer la valeur effective des nombreux résultats expérimentaux déjà obtenus sans aucune idée préconçue, on constate que le phénomène auquel correspondent les lignes de cession est lié, non pas à la déformation plastique en soi, mais seulement à la nature du phénomène de passage entre l'état élastique et l'état plastique. De même que pour la limite d'écoulement nettement définie, il s'agit ici de phénomènes de labilité (d'instabilité). La preuve en est fournie par une série d'observations telles que celles de *Ludwik*¹⁴ suivant lesquelles les lignes d'écoulement apparaissent principalement lorsque les corps considérés commencent à subir l'écoulement sous l'influence d'une charge décroissante, c'est-à-dire lorsque la formation des lignes de cession se trouve limitée à la partie descendante de la pointe du diagramme des déformations; cette observation est confirmée par *Nadai*¹⁵ et *v. Kármán* l'a souvent mentionnée. A ceci se rapporte également l'observation faite par *Nadai* et suivant laquelle le faisceau des lignes de cession est beaucoup plus dense lorsque les essais de compression sont effectués très rapidement que lorsque ces essais sont effectués lentement; il y a là une nouvelle preuve que les instabilités, que ce soient des instabilités de la charge ou des instabilités de la structure considérée, favorisent l'apparition des lignes de cession. Il est donc évident que l'apparition des lignes de cession doit également être favorisée par les perçages et les entailles ou discontinuités de section.

A ce propos, nous mentionnerons les mesures de dureté extrêmement intéressantes qui ont été effectuées par *Moser*¹⁶ sur des lignes d'écoulement; si l'on tient compte de l'observation suivant laquelle les métaux présentent une augmentation de dureté dans le domaine de l'écoulement, ces observations jettent un aperçu intéressant sur la nature et l'évolution des déformations plastiques. *Moser* a observé que la déformation permanente ne se produit dès le début que

par zones (lignes de cession), la déformation étant limitée dans chaque zone à l'apparition d'un degré de dureté déterminé. Il ne se produit une nouvelle augmentation générale de la dureté que lorsque l'éprouvette tout entière (essai de traction) se trouve recouverte d'un réseau de lignes de cession. La raison de ce fait réside dans une sorte de « blocage » des surfaces de cession : lorsque le blocage se manifeste dans une zone, l'élévation continue de la charge se manifeste, par une cession, sur une autre zone n'ayant pas encore subi la déformation. A chaque fois, la charge continue à augmenter quelque peu avant que la résistance à la cession ne soit surmontée dans la zone suivante, pour diminuer ensuite lorsque se forment les lignes de cession ; chaque pointe du diagramme des déformations correspond donc à une limite d'écoulement supérieure locale telle que lorsque cette limite particulière se trouve atteinte, une ligne d'écoulement apparaît avec diminution de la charge. Contrairement à ce qui se passe avec l'acier, on a constaté sur une éprouvette de cuivre une augmentation régulière de la dureté depuis le début de l'application de la charge ; il ne s'est donc pas manifesté une formation progressive et échelonnée de lignes d'écoulement, mais on a seulement observé une perte générale du poli.

Les essais qui précèdent viennent renforcer d'une manière très puissante le point de vue suivant lequel la limite d'écoulement de l'acier constitue une manifestation de « retard » à l'écoulement, les lignes de cession ne constituant un phénomène corrélatif que dans le cas des aciers dont la limite d'écoulement n'est pas nettement définie.

Cette conception est aujourd'hui encore confirmée par les résultats des essais d'*Ititaro Takaba* et de *Katumi Okuda*,¹⁷ essais qui montrent que :

- 1° — L'apparition des lignes de cession et du coude brusque de la courbe des déformations sont le résultat d'un seul et même processus, à savoir la déformation, par groupes, de quantités importantes de grains cristallins.
- 2° — Tous les métaux dans lesquels peuvent se manifester des lignes de cession ont une structure cristalline du type du réseau à élément central. Sur les aciers à structure austénitique et dont la constitution cristalline correspond au réseau à faces centrées, on n'observe pas la formation de lignes de cession.

On peut donc considérer que pour l'étude des états élastico-plastiques des matières de structure cristalline et tout particulièrement des métaux, l'observation des figures de cession ne constitue pas une méthode judicieuse, mais qu'au contraire les processus essentiels en la matière sont souvent dénaturés par les lignes de cession. Cette observation s'applique en tout premier lieu à l'apparition de la limite vraie entre l'état élastique et l'état plastique.

4° — *Courbes limites du domaine plastique.*

Si l'on a recours à l'une des méthodes connues, pour mettre en évidence le domaine de déformation plastique des métaux, et de préférence à la méthode de la recristallisation,¹⁸ on peut déterminer nettement les limites entre le domaine élastique et le domaine plastique (fig. 1). Ainsi que toutes les observations le montrent nettement, la forme de ces courbes n'a rien de commun avec les lignes

de cession elles-mêmes¹⁹ quoiqu'elles soient formées par celles de ces lignes qui correspondent aussi bien à l'état plastique qu'à l'état élastique des contraintes. La seule famille de courbes qui satisfait à ces exigences est la famille des courbes

$$\tau_{\max} = \text{constante}$$

de l'état élastique. Ce type de courbes-limites, indépendant de la forme que prend la transition entre les domaines élastique et plastique, peut être observé dans tous les états élastico-plastiques, dont il constitue le phénomène essentiel. Seules correspondent à la réalité les solutions du régime plastique des contraintes qui peuvent se raccorder régulièrement le long de chaque courbe $\tau_{\max} = \text{constante}$ sur le régime élastique correspondant. Toute solution du problème plastique doit donc précéder celle du problème élastique et il faut observer

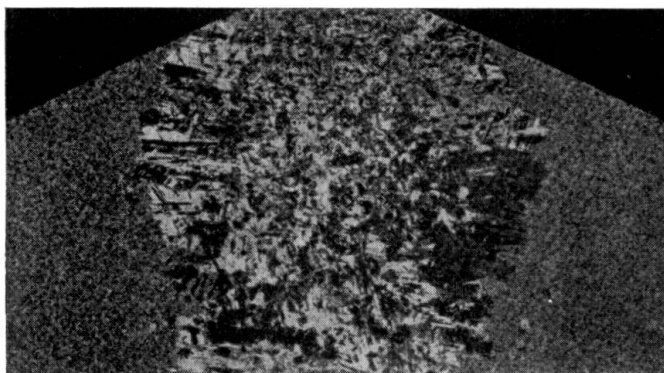


Fig. 1.

à ce sujet que la limite entre le domaine élastique et le domaine plastique n'est pas une limite fixe, mais bien une limite fluctuant avec les fluctuations de la charge et qui doit toutefois toujours correspondre aux courbes $\tau_{\max} = \text{constante}$ du champ élastique.

L'étude mathématique des problèmes élastico-plastiques sous les conditions précédemment exposées n'est pas facile; elle n'a été effectuée avec succès jusqu'à maintenant que pour quelques cas simples. On peut toutefois trouver une certaine simplification en ce fait que grâce à l'application des méthodes d'investigation optique des contraintes sur modèles, qui permettent de faire apparaître sous forme d'isochromes les courbes d'écart constant entre les contraintes principales, il est possible de déterminer à priori la limite du domaine plastique à partir d'un essai sur modèle.

5° — *La résistance à la pénétration.*

A titre d'exemple de résolution d'un problème pratique suivant le procédé indiqué ci-dessus, nous traiterons le problème de la résistance à la pénétration comme problème plan. Cet exemple présente d'autant plus d'intérêt qu'il constitue précisément l'exemple le plus connu de résolution d'un problème plastique à l'aide des figures de cession et que sa publication a donné en son temps une impulsion particulière au développement de la théorie mathématique moderne de la plasticité.²⁰

Il s'agit de déterminer la charge p uniformément répartie qui, agissant le long de AB (fig. 2), provoque l'écoulement à l'intérieur de la zone considérée. Cette

charge, qui est désignée sous le nom de résistance à la pénétration, doit être représentée comme fonction de la limite d'écoulement et de l'angle d'inclinaison du talus latéral. Comme on considère ici l'état de déformation dans le plan ($\varepsilon_x = 0$), la condition d'écoulement de *Huber-Hencky-Mises* s'énonce comme suit:

$$(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = \frac{16}{3}k^2.$$

On a ici pour la limite d'écoulement: $\sigma_F = 2k$.

Comme la solution du problème de la coupe par pénétration large ne peut être considérée ni comme problème élastique, ni comme problème plastique d'une manière stricte, on peut ici tourner la difficulté en considérant seulement l'angle A et en tenant compte du fait que dans cet angle, les courbes $\tau_{\max} = \text{constante}$ du problème que représente la figure 3 sont tangentes aux courbes $\tau_{\max} = \text{constante}$ du profil tronqué considéré. Pour la détermination de la charge critique, il est indifférent que nous déterminions les courbes $\tau_{\max} = \text{constante}$ elles-mêmes ou leurs tangentes.

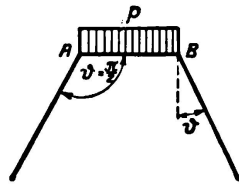


Fig. 2.

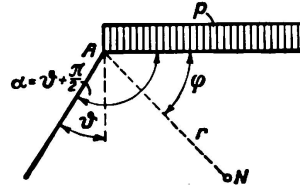


Fig. 3.

A partir de la solution élastique de l'angle lui-même, à l'aide de la fonction des contraintes d'Airy:

$$F = a r^2 + b r^2 \varphi + c r^2 \sin 2 \varphi + d r^2 \cos 2 \varphi \quad (1)$$

relation dans laquelle les quatre constantes a, b, c, d peuvent être déterminées à partir des 4 conditions marginales:

$$\begin{aligned} \text{pour } \varphi = 0 \quad \sigma_t &= -p \quad \tau = 0 \quad (\text{sans frottement}) \\ \text{pour } \varphi = \alpha \quad \sigma_t &= 0 \quad \tau = 0 \end{aligned}$$

nous obtenons pour les contraintes les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p (Q - 1) - 2 P \cdot p \cdot \varphi - p \cdot P \cdot \sin 2 \varphi + p \cdot Q \cos 2 \varphi \\ \sigma_t &= p (Q - 1) - 2 P \cdot p \cdot \varphi + p \cdot P \cdot \sin 2 \varphi - p \cdot Q \cos 2 \varphi \\ \tau &= p \cdot P - p \cdot P \cos 2 \varphi - p \cdot Q \sin 2 \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

avec:

$$P = -\frac{1}{2(\alpha - \operatorname{tg} \alpha)} \quad Q = -\frac{1}{2(\alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1)}$$

En posant pour abréger:

$$x = \frac{\tau_{\max}^2 - p^2 Q^2}{4 p^2 P^2}$$

on obtient l'équation des courbes $\tau_{\max} = \text{constante}$ après rapide calcul intermédiaire, sous la forme :

$$y = -\frac{x}{2(x-1)} \left[\operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 4x^2} \right] \quad (3)$$

Cette relation représente un couple de droites passant par A et qui sont réelles lorsque $\operatorname{tg}^2 \alpha \geq 4x^2$

La contrainte principale de cisaillement passe sur ces lignes par un maximum pour lequel on a :

$$\frac{\partial \tau_{\max}}{\partial \varphi} = 0.$$

Cette condition est remplie pour $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. La formation de la dérivée seconde montre en outre qu'il n'existe une valeur maximum le long de $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ que pour :

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

tandis que pour :

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

il apparaît là un minimum. Les dernières valeurs de α considérées ci-dessus sont toutefois sans intérêt du point de vue pratique. Pour $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ on obtient la valeur de la contrainte principale de cisaillement :

$$\tau_{\max}^2 = p^2 [Q^2 - 2P \cdot Q \cdot \sin \alpha + 2P^2 (1 - \cos \alpha)] \quad (4)$$

En introduisant la condition d'écoulement, nous obtenons pour la charge critique :

$$p = \sigma_F \cdot \frac{\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) \sin \vartheta + \cos \vartheta}{1 + \sin \vartheta} \quad (5)$$

Ceci représente la relation entre la résistance à la pénétration, l'angle du talus latéral et la limite d'écoulement.²¹

*Sachs*²² a étudié d'une manière très approfondie le problème de la résistance des métaux à la pénétration; à cet effet, il a également déterminé par recristallisation la zone plastiquement déformée en la considérant comme limitée par les courbes $\tau_{\max} = \text{constante}$ du champ des contraintes élastiques. On trouvera sur la fig. 4 les valeurs de la résistance à la pénétration déterminées par *Sachs* pour l'acier pour différents angles de talutage, comparées avec les valeurs calculées à partir de la relation (5) la concordance est satisfaisante. La solution du même problème à l'aide des lignes de cession, par *Prandtl*, a conduit à la relation :

$$p = \sigma_F (1 + \vartheta) \quad (6)$$

qui traduit la relation entre la résistance à la pénétration d'une part, et l'angle de coupe et la limite d'écoulement d'autre part. Cette relation a été également

portée sur la fig. 4 par comparaison. On constate qu'il y a concordance tout au moins pour les très petits angles, quoique les parties principales des courbes soient très différentes l'une de l'autre.

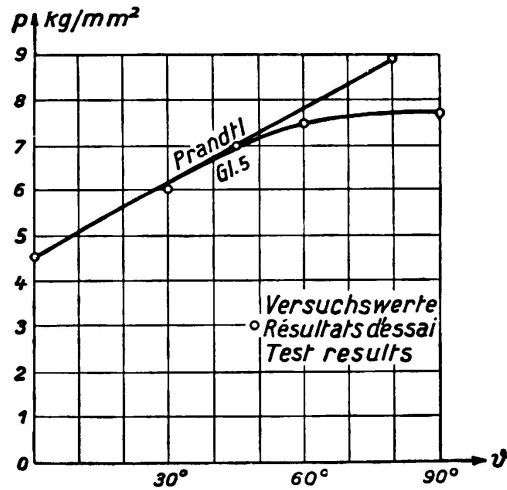


Fig. 4.

L'exemple ainsi cité montre que pour traiter les problèmes plastiques concernant les matières de structure cristalline, il faut toujours partir des courbes limites du domaine plastique. L'adoption des lignes de cession comme constituant cette limite et l'établissement de solutions à partir des propriétés des lignes de cession elles-mêmes conduira toujours à des résultats qui ne correspondent pas à la réalité.

Résumé.

Les bases de la théorie générale de la plasticité contiennent encore de notables obscurités qui doivent être attribuées au fait que l'interprétation et la mise en valeur des phénomènes d'écoulement des corps de structure cristalline manquent encore d'unité et de clarté.

L'auteur analyse donc rapidement les notions essentielles de la théorie de la plasticité: condition d'écoulement, limite d'écoulement et lignes de cession; le résultat le plus important de cette analyse est que la limite d'écoulement de même que les lignes de cession doivent être considérées comme constituant des phénomènes d'instabilité qui dépendent essentiellement de la structure interne du corps considéré, ces phénomènes exerçant une influence spécifique sur le mode de passage du domaine élastique au domaine plastique; toutefois, ces phénomènes ont, vis-à-vis de la déformation plastique générale, une importance plus faible que l'on ne le suppose d'une manière générale. Ceci est d'autant plus net que ces deux phénomènes ne sont observés que dans le cas d'une structure cristalline très nettement déterminée, celle du réseau cubique à élément central, tandis que dans le cas des autres structures, le passage du domaine élastique au domaine plastique se fait d'une manière continue et progressive.

Indépendamment de l'aspect de cette transition, la limite du domaine plastique est constituée par les courbes $\tau_{\max} = \text{constante}$ du régime élastique des contraintes.

L'exemple de la résistance à la pénétration montre la différence qui existe entre la résolution du problème plastique, d'une part en partant des points de vue précisés dans ce qui précède, d'autre part en partant du point de vue mathématique de la théorie de la plasticité; cette théorie est en effet, dans sa base même, une théorie des lignes de cession. On constate ainsi que dans le cas des métaux, la théorie mathématique de la plasticité ne concorde pas avec la réalité.

Littérature.

- ¹ *Hencky*, Zeitschrift für angewandte Mathem. und Mech., 1923, page 241.
- ² *Haar* et *Kármán*, Göttinger Nachrichten, math. nat. Klasse, 1909, page 204.
- ³ *Hencky*, Zeitschrift für angewandte Math. u. Mech. 1924, page 323.
- ⁴ *Guest*, Philosophical Mag., 1900, vol. 5. page 69. — *Mohr*, Zeitschr. VDI, 1900, 44, page 1524.
- ⁵ *Voigt*, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbeff., 1907, page 4.
- ⁶ *Huber*: Czasopismo Techniczny, 1904, Lemberg.
- ⁷ *Mises*, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1925, page 147.
- ⁸ *Schleicher*, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1926, n° 3.
- ⁹ *Kármán*, Verh. 2. Int. Congr. f. Techn. Mech., Zürich 1936. — *Böker*, Forschungsheft VDI, 175/176. — *Roš* et *Eichinger*, Diskussionsberichte der ETH Zürich, 1926—1929.
- ¹⁰ *Bach*: Forschungsarbeiten d. VDI, n° 29.
- ¹¹ *Moser*, Forschungsheft d. VDI, n° 29.
- ¹² *Reißner*, Proceedings I. Int. Congr. Mech. Delft, 1924.
- ¹³ *Cartheodory* et *Schmidt*, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1923, page 468.
- ¹⁴ *Ludwik*, Technologische Mechanik, Berlin, 1909.
- ¹⁵ *Nadai*, Schweizer. Bauzeitung, 1924, page 157.
- ¹⁶ *Moser*, Stahl und Eisen, 1928, page 1601.
- ¹⁷ *Okuda* et *Takaba*, Werkstoffausschuß d. Ver. d. Eisenhüttenleute, publication n° 119.
- ¹⁸ *Oberhoffer*, Das Technische Eisen, Berlin, 1925.
- ¹⁹ *Nadai*, Zeitschr. für angew. Math. u. Mech., 1921, page 20. — *Sachs*, Naturwissenschaften, 1926, page 1219. — *Sachs*, Zeitschr. f. Techn. Physik, 1927, page 132. — *Körber* et *Siebel* Mittl. Inst. f. Eisenforschung, Düsseldorf, 1928. — *Siebel*, Ber. d. Werkstoffaussch. deutsch. Eisenhüttenleute, 122,
- ²⁰ *Prandtl*, Göttinger Nachrichten, 1920, page 74.
- ²¹ *Freudenthal*, Dissertation, Prague 1930,
- ²² *Sachs*, Zeitschr. f. techn. Physik, 1927, page 132.

Leere Seite
Blank page
Page vide

I 2

Principes de la théorie de la plasticité.

Grundlagen der Plastizitätstheorie.

Fundamental Principles of the Theory of Plasticity.

Dr. techn. J. Fritsche,

Professor an der Deutschen technischen Hochschule, Prag.

1° — Introduction.

Autrefois toutes les questions de résistance étaient basées sur l'hypothèse du comportement élastique du matériau. Aujourd'hui par contre, en se basant sur les mesures exécutées sur les ouvrages et, dans les laboratoires d'essai des matériaux, sur les éprouvettes étirées jusqu'aux environs de la limite de rupture, on reconnaît qu'une telle idéalisation du matériau ne peut correspondre partout à la même sécurité contre l'apparition d'états dangereux. Si l'on n'ignore plus depuis longtemps qu'un comportement purement élastique est lié à des limites relativement étroites de sollicitation, on a basé ce point de vue sur le fait que les sollicitations engendrées par la charge utile ne devraient pas sortir de ces limites d'élasticité. On croyait pouvoir déterminer sur la base des tensions calculées d'après la théorie de l'élasticité un critère du degré de sécurité de la construction et avant tout du degré de sécurité de toutes ses parties. On fixait une tension admissible et l'on exigeait qu'elle ne soit pas dépassée sur l'effet des charges utiles. Cette échelle des tensions est très agréable pour le dimensionnement pratique de nos ouvrages car elle libère l'ingénieur des questions soulevées et souvent inquiétantes au sujet de la sécurité de son projet; la question de la sécurité apparaît alors liée à la détermination des contraintes admissibles. On rencontre cependant dès le début des difficultés, car dans le calcul de la résistance on ne peut introduire que des valeurs simples de la résistance du matériau, comme par exemple la limite inférieure d'écoulement de l'acier σ_{Fu} que l'on peut déterminer par les essais ordinaires de traction. La limite de proportionnalité ne doit plus être prise en considération car l'on a reconnu que l'on calcule toujours avec suffisamment d'exactitude, en admettant un comportement purement élastique jusqu'à l'atteinte de la limite inférieure d'écoulement.

Tant que dans les ouvrages apparaissent les mêmes états de tensions que ceux que l'on peut provoquer sur une éprouvette, la question de la sécurité est claire; le coefficient de sécurité est alors $n = \frac{\sigma_{Fu}}{\sigma_{adm}}$. Pour la détermination des états de tension à plusieurs axes on a établi les conditions d'écoulement connues et l'on a contrôlé par des essais¹ quelle était l'hypothèse de *Mises-Huber-Hencky*, basée

¹ M. Ros et Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. I. Flußstahl. Rapport No. 19 du Laboratoire Fédéral d'Essais des Matériaux, Zurich.

sur la comparaison du travail de déformation, qui correspondait le mieux à la réalité pour l'acier doux de construction. On a la forme suivante pour l'état plan de tension qui est souvent essayé :

$$\frac{\sigma_{Fu}}{n} = \sigma_{adm.} \geq \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}. \quad (1)$$

De tous les procédés de dimensionnement basés sur l'échelle des tensions on a retenu l'hypothèse que l'écoulement du matériau se produit à l'endroit où les tensions les plus défavorables atteignent la limite inférieure d'écoulement σ_{Fu} et qu'à ce moment le système portant est arrivé à sa limite de résistance. Des états de tension uniformes existent dans des treillis idéalement constitués. L'hypothèse ci-dessus nous conduit à la conclusion qu'un treillis ne peut plus rien supporter à partir du moment où une de ses barres a atteint la limite inférieure d'écoulement. Des considérations simples² nous font voir que cette conclusion n'est réalisée que pour des treillis isostatiques tandis que dans le cas des treillis hyperstatiques on peut encore avoir de fortes augmentations de charge avant que le système portant s'affaisse sous l'effet de la charge. Cette hypothèse n'est pas valable non plus pour la plastification d'une section rigide; de toute façon l'on a dans ce cas des états de tension irréguliers dont l'influence sur l'écoulement doit encore être recherchée. *Maier-Leibnitz*³ a montré par des essais objectifs que l'atteinte de la limite d'écoulement à l'endroit le plus défavorablement sollicité ne compromet pas l'existence d'un ouvrage; ces essais démontrent plutôt que les apparitions d'écoulement doivent avoir pénétré profondément dans la section pour engendrer un accroissement de la vitesse de déformation lors d'une augmentation de la surcharge.

C'est ici que se place la théorie de la plasticité qui a pour tâche la détermination de la résistance réelle d'une construction en tenant compte du processus d'écoulement. Par suite du fait que l'atteinte de la limite d'écoulement à l'endroit d'une pointe de tension élastique ne compromet pas du tout l'existence de l'ouvrage, la théorie de la plasticité écarte l'échelle des tensions et par le fait même le principe de la contrainte admissible pour introduire en tant que sécurité le rapport entre la charge supportable et la charge utile. Les procédés de dimensionnement basés sur la théorie de la plasticité seront souvent désignés par «procédé de l'équilibre plastique».

2° — *Le mécanisme de la déformation plastique.*

La conception exacte de l'influence du processus d'écoulement sur la résistance nous oblige à nous faire une représentation sur sa nature et ses propriétés physiques. L'acier est un agglomérat de cristaux et une étude sévère nous obligerait de partir des déformations des cristaux pris individuellement pour en déduire la déformation du matériau; la disposition irrégulière des cristaux ne nous permet pas de procéder autrement que par méthode statistique. Le cristal lui-même est anisotrope dans ses propriétés de résistance tandis que l'agglomérat

² *M. Grüning*: Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung. Berlin 1926, J. Springer.

³ *Maier-Leibnitz*: Versuche mit eingespannten und einfachen Balken von I-Form aus Stahl 37. Bautechnik 1929, Heft 20, p. 313.

présente une quasi-isotropie lorsqu'on le considère mécaniquement, c'est-à-dire lorsque l'on considère un morceau du matériau contenant un grand nombre de cristaux. Pour une disposition déterminée de ses directions principales, un cristal se déforme d'abord élastiquement en étirant son réseau atomiques sous l'influence des forces extérieures. Lorsque cet étirement a atteint une certaine valeur, la stabilité du réseau est troublée et il en résulte un glissement des couches atomiques suivant des plans et des directions déterminées définies par la cristallographie. On peut, d'une manière très approximative, représenter le diagramme des tensions-allongements d'un cristal par celui d'un corps idéalement plastique. Un écart ne se produit que pour les grandes déformations car on obtient alors une nouvelle stabilité du réseau par apparition d'une solidification. Par suite de la disposition variée dans un agglomérat des directions principales des cristaux, ces derniers glisseront vers des tensions limites très différentes pour une direction déterminée des forces extérieures. Les glissements sont naturellement très petits de telle sorte que des instruments d'une précision extra-ordinaire sont nécessaires pour les déterminer; si l'on tient compte de ces relations, l'on aura aucune déformation continue de l'agglomérat; la déformation est en réalité irrégulière et étagée. Les observations de *Kollbrunner*⁴ en sont une excellente démonstration. Les hypothèses d'écoulement de *Böker*⁵ et *Brandtzaeg*⁶ reposent sur la représentation d'îles plastiques, dont les environs sont élastiques, qui deviennent toujours plus grandes et plus nombreuses avec l'accroissement de la surcharge. Ces hypothèses ne sont malheureusement pas encore assez connues des intéressés.

Dans les aciers au carbone il s'ajoute une deuxième apparition, conditionnée par la structure du matériau. Ces aciers se composent principalement de grains tendres de ferrite insérés dans une charpente de cimentite ou de perlite qui peut fortement entraver le processus de glissement dans les grains de ferrite. Pour une surcharge extérieure déterminée, cette charpente de perlite s'écroule ce qui provoque simultanément le processus de glissement dans beaucoup de grains de ferrite et il se produit alors ce que l'on entend par écoulement de l'acier dans un sens mécanique. Les observations de *Köster*⁷ montrent clairement que la limite d'écoulement n'est pas liée aux propriétés de résistance du fer lui-même, chimiquement pur. D'après ces essais la limite et la longueur d'écoulement peuvent être fortement modifiées par changement de la grosseur des grains tandis que la résistance à la rupture et la striction ne sont atteintes. Ce processus mécanique d'écoulement correspond à une sérieuse modification de la structure; ceci explique les apparitions de recristallisation observées après l'écoulement ainsi que tous les phénomènes que l'on désigne par vieillissement de l'acier. A la fin de l'écoulement ce sont les grains de ferrite seuls qui portent; de toute façon, ce détournement des forces extérieures limite les grandes déformations plastiques.

⁴ C. F. Kollbrunner: Schichtenweises Fließen in Balken aus Baustahl. III^e Volume des Mémoires de l'A. I. P. C., Zurich 1935, p. 222.

⁵ R. Böker: Die Mechanik der bleibenden Formänderungen in kristallinisch aufgebauten Körpern. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 175—176. Berlin 1915, V. D. I.-Verlag.

⁶ A. Brandtzaeg: Failure of a material composed of non-isotropic elements. Trondhjem 1927.

⁷ W. Köster, H. v. Köckritz und E. H. Schulz: Zur Kenntnis der Form der Spannungs-Dehnungs-Kurven auf Grund der Messung des zeitlichen Verlaufes der Alterung weichen Stahles. Archiv für das Eisenhüttenwesen 6, 1932/33.

Il faut considérer le fait qu'une telle transformation de la structure ne peut pas être un processus qui croît régulièrement avec l'accroissement de la surcharge. Il est plus vraisemblable que ce processus s'étend en même temps à de grands domaines du matériau, respectivement de la section.

C'est un fait connu que lors de l'application d'un état de tension uniforme et suivant un axe, à une éprouvette d'acier plus doux on observe une limite supérieure et une limite inférieure d'écoulement (Fig. 1). Comme la limite supérieure d'écoulement n'a qu'une durée passagère, il est clair que l'on doit se rapporter à la limite inférieure d'écoulement pour l'examen des états de

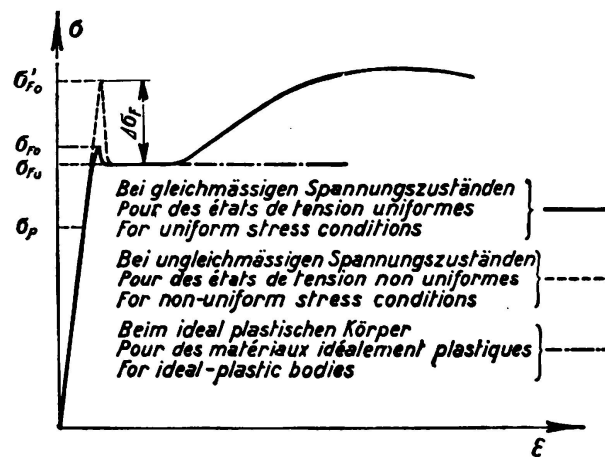


Fig.1.

tension uniformes. L'apparition d'une limite supérieure d'écoulement est considérée par Moser⁸ comme un retard à l'écoulement et Prager⁹ la compare à un retard à l'ébullition sans cependant pouvoir donner à cette comparaison une relation autre que purement formelle. L'origine de ce fait n'est pas encore éclaircie; il ne semble pas exclu que les sollicitations extérieures favorisent une amélioration de la structure du réseau à la limite des grains et provoquent ainsi un accroissement de la résistance aux déformations purement élastiques dans la charpente de perlite. La réduction de tension, de la limite supérieure à la limite inférieure d'écoulement, se produit avec la formation des lignes d'écoulement qui sont un critère certain du processus d'écoulement; leur observation exacte montre qu'elles ne croissent pas de façon uniforme mais qu'elles se développent plutôt par bonds. Toutes ces apparitions se produisent assez régulièrement dans les états de tension uniformes même lorsqu'il faut reconnaître que la grandeur du processus est soumise à une série de faits accidentels ce qui conduit à une dissémination inévitable des essais.

Depuis longtemps déjà on a émis des doutes sur la question de savoir si toutes ces apparitions ne se modifient pas sensiblement et suivant une régularité reconnaissable lors de l'application d'états de tension non uniformes. C'est pourquoi l'on a exprimé l'avis de limiter la condition d'écoulement (1) aux états de tensions uniformes. Les essais exécutés à ce sujet n'ont pas permis de tirer des

⁸ M. Moser: Ver. deutscher Eisenhüttenleute, Werkstoff-Aussch. Ber. 96.

⁹ W. Prager: Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1933.

conclusions; un groupe de ces essais^{10, 11, 12} justifie l'hypothèse que la limite supérieure d'écoulement est influencée par un état de tension non uniforme en ce sens que σ_{F_0} est d'autant plus grand que la pointe de tension élastique croît plus rapidement et la zone sur laquelle elle s'étend est plus petite tandis que d'autres essais¹³ ne permettent pas de reconnaître cette apparition ou seulement dans une faible mesure. Quant à la limite inférieure d'écoulement, on peut affirmer qu'elle ne subit aucune influence de ce genre.¹⁴ Il paraît certain que l'élévation de la limite d'écoulement se produit de façon tout-à-fait différente pour les différentes sortes d'acier: pour les aciers doux cet élèvement est plus grand et pour les aciers durs plus faible et il ne paraît se produire que pour les sortes d'acier qui, dans les essais de traction, présentent une limite d'écoulement supérieure très marquée. La cause d'un tel élèvement de la limite supérieure n'a pas encore été établie d'une manière satisfaisante. Au point de vue de l'effet atomiques des forces il est difficile de comprendre que des parties de la section moins sollicitées puissent soutenir les parties plus sollicitées et y retarder le processus d'écoulement. *Thum*¹¹ et *Wunderlich* ont admis que l'apparition de lignes d'écoulement n'est pas possible dans les domaines arbitrairement petits car les environs encore élastiques empêchent cet écoulement. La limite inférieure d'écoulement doit être dépassée jusqu'à une profondeur assez grande de la section de telle sorte que l'énergie d'écoulement emmagasinée soit assez grande pour pouvoir percer d'une manière quelconque l'étreinte élastique.

En se basant sur ces observations il s'est formé, au cours du développement de la théorie de la plasticité deux conceptions totalement distinctes sur les circonstances qui déterminent les processus d'écoulement dans une zone de tension; on distingue par conséquent une « ancienne » et une « nouvelle » condition d'écoulement. D'avance nous pouvons affirmer que nous conserverons les deux idéalizations des processus réels; elles correspondent en un certain sens à des cas limités et il est très probable que les apparitions effectives se trouvent entre ces limites. Il est certain que, sans une idéalisation de ces observations, on ne peut venir à bout des grandes difficultés que l'on rencontre lors de la détermination de leur influence sur la résistance de nos constructions.

L'« ancienne condition d'écoulement » admet que l'état de tension local est seul déterminant pour l'apparition du processus d'écoulement; elle peut par conséquent se déduire de la condition d'écoulement (1) pour états de tensions uniformes. Pour le cas de la flexion, en négligeant les efforts de cisaillement, la zone de tension élastique est à un seul axe et la condition (1) se réduit à la forme simple $\sigma \leq \sigma_F$. Il est clair que d'après ce que nous avons dit ci-dessus on a introduit pour σ_F la limite inférieure d'écoulement σ_{Fu} car on doit juger

¹⁰ *F. Nakanishi*: On the yield point of mild steel. World Eng. Congress. Tokyo 1929, Proc. Vol. III.

¹¹ *A. Thum* und *F. Wunderlich*: Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1932.

¹² *H. Möller* und *J. Barbers*: Über die röntgenographische Messung elastischer Spannungen. Mitt. d. Kaiser-Wilh.-Inst. f. Eisenforschung. Düsseldorf 1934.

¹³ *F. Rinagl*: voir annexe.

¹⁴ *E. Siebel* und *H. F. Vieregge*: Über die Abhängigkeit des Fließbeginns von Spannungsverteilung und Werkstoff. Mitt. d. Kaiser-Wilh.-Inst. f. Eisenforschung. Düsseldorf, Abhandlung 270, 1934.

de la résistance après l'écoulement local limite et parce que l'on veut savoir combien cet endroit peut encore supporter après l'écoulement pour le maintien de l'équilibre entre les forces intérieures et extérieures. Une conséquence de cette hypothèse est l'apparition, sous l'effet de charges croissantes, d'une zone d'écoulement continue et graduelle s'étendant d'elle-même ainsi qu'une réduction plastique des pointes de tension;¹⁵ pour terminer un état complètement plastique de la section est atteint lorsque l'écoulement s'étend à toute la profondeur de la section. Le diagramme des tensions se compose alors d'un rectangle de traction et d'un rectangle de compression de la grandeur de la limite inférieure d'écoulement σ_{Fu} . Le moment des tensions internes a atteint sa valeur maxima M_T qui ne peut être dépassée; lors d'une plus ample déformation cette section agit comme une articulation plastique.

La «nouvelle condition d'écoulement» affirme que toutes ces hypothèses ne correspondent pas à la réalité, que la zone d'écoulement s'étend beaucoup plus

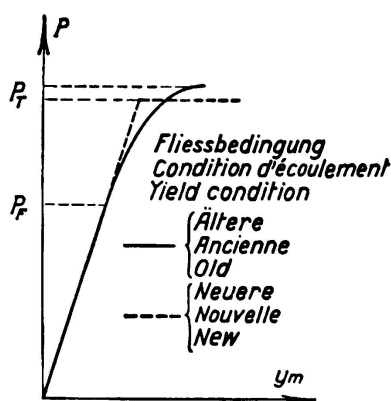


Fig. 2.

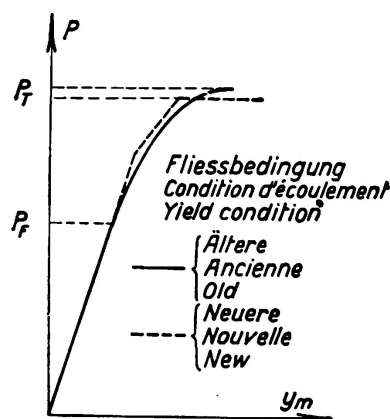


Fig. 3.

par sauts vers le bas, que d'une façon approximative la résistance à la déformation est déjà affaiblie lors de la première apparition d'écoulement dans la section de telle sorte qu'elle ne peut plus participer vraiment à la transmission de l'accroissement de la charge. Elle se déduit de l'observation de l'accroissement des pointes élastiques; on doit entendre pas limite d'écoulement la limite supérieure d'écoulement car cette dernière seule est influencée par l'irrégularité du champ de tension. Par conséquent il faut introduire dans la condition d'écoulement la répartition des tensions dans toute la section. Dans le cas de la flexion sans force normale, l'élévation de la limite d'écoulement, $\Delta\sigma_F = \sigma_{Fo} - \sigma_{Fu}$, devient essentiellement une fonction de la forme de la section. Cet élèvement s'écroule durant l'écoulement et la limite d'écoulement s'abaisse à la limite inférieure sans que soit cependant atteinte la répartition des tensions de l'état purement plastique dans le sens de l'ancienne condition d'écoulement.

La différence entre les deux conditions d'écoulement se remarque le plus distinctement lorsque l'on représente une grandeur quelconque de déformation dans ses rapports avec la charge. Pour le fléchissement d'une poutre simple en son milieu (fig. 2) on obtient d'après l'ancienne condition d'écoulement, une courbe régulière qui se raccorde à la droite de la déformation purement

¹⁵ J. Fritsche: Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens. Der Bauingenieur 1930, Heft 49, 50 und 51.

élastique. A l'extrémité de cette courbe la tangente doit être horizontale afin de permettre un équilibre entre les forces intérieures et extérieures. D'après la nouvelle condition d'écoulement la droite de la déformation purement élastique se prolonge jusqu'à l'atteinte de la résistance où elle se transforme directement et brusquement en ligne horizontale conservée jusqu'à l'apparition des phénomènes de durcissement. Les essais de *E. Siebel*¹⁴ et *H. F. Vieregge* montrent que de telles lignes $y(P)$ peuvent être effectivement observées quoique l'on doit reconnaître que des lignes du premier type³ se rencontrent beaucoup plus souvent dans la littérature.

Dans le cas d'une poutre continue hyperstatique on a de nouveau, d'après l'ancienne condition d'écoulement, dans les zones élastiques et plastiques une courbe continue qui doit se terminer par une tangente horizontale tandis que d'après la nouvelle condition d'écoulement on obtient pour la fonction $y(P)$ une ligne polygonale qui cependant ne s'éloigne pas beaucoup de la courbe continue (fig. 3). Les sommets du polygone correspondent à la plastification brusque d'une section rigide qui peut être remplacé par une articulation plastique pour obtenir une disposition labile. Au sujet d'une restriction à cette représentation, il faut dire ceci: chaque système intermédiaire statiquement moins déterminé et naturellement le système fondamental isostatique doivent être stables dans toutes leurs parties. Il faut par conséquent exclure la poutre continue dont les travées latérales sont très longues car le degré de stabilité du système fondamental isostatique engendré par la plastification du milieu de la poutre de l'ouverture centrale, devient toujours plus faible et disparaît même.

Les essais effectués jusqu'à présent ne permettent pas de répondre objectivement à la question de l'exactitude de l'une ou de l'autre de ces conditions d'écoulement et dans la discussion des essais les plus importants nous démontrerons, suivant la difficulté de l'interprétation, d'après l'une ou l'autre théorie. La nouvelle condition d'écoulement présente le gros avantage d'être une base simple de la théorie de la plasticité. Si l'on admet que l'élévation de la limite d'écoulement n'est pas encore suffisamment prouvée par l'expérience, on a toujours la possibilité de considérer la nouvelle condition d'écoulement comme une approximation pratique de l'ancienne car elle permet de simplifier la solution de bien des problèmes qui ne paraissent plus solubles d'après l'ancienne condition.

3° — Conception mathématique des différentes conditions d'écoulement.

L'ancienne condition d'écoulement se base, pour les champs de tension à un axe généralement à étudier, sur la condition que nous venons d'énoncer $\sigma \leq \sigma_F$, où par σ_F il faut entendre la limite inférieure d'écoulement. Elle a servi de fondement à presque tous les essais effectués jusqu'à ce jour mais elle présente le gros inconvénient d'exiger, même en admettant que le matériau est un corps idéalement plastique, une méthode de calcul extraordinairement développée et étendue^{16,17} et ne peut par conséquent presque pas être utilisée pour les

¹⁶ *J. Fritsche*: Arbeitsgesetze bei elastisch-plastischer Balkenbiegung. Zeitschrift f. ang. Math. u. Mech. 1931.

¹⁷ *K. Jezek*: Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal-plastischen Stahle. Sitzungsberichte d. Wiener Akademie d. Wissensch., Math.-Naturw. Klasse, Abt. IIa, 143. Bd., 1934.

problèmes importants de la pratique. Au point de vue du calcul de la charge supportable qui peut être très facilement et très rapidement déterminée par suite de la mise en équilibre des moments,¹⁵ la détermination d'une grandeur de déformation ou du jeu des efforts internes ne peut plus être effectuée pour une plastification partielle de la section déterminante en considérant la forme réelle de cette dernière. De tels problèmes ne sont pas seulement intéressants au point de vue théorique; dans la détermination de la résistance d'une colonne métallique comprimée excentriquement, on ne peut se dispenser de calculer le fléchissement au milieu de la barre car la valeur de la résistance n'est pas atteinte par plastification de la section la plus dangereusement sollicitée, mais une instabilité entre les forces intérieures et extérieures apparaît déjà lors d'une plastification partielle. On a utilisé l'intégration graphique des équations différentielles s'y rapportant mais le calcul reste cependant très conséquent. Lorsque l'on considère la solution de ce problème, construite sur l'ancienne condition d'écoulement par *Chwalla*,¹⁸ *Jezek*,¹⁷ *Eggenschwyler*¹⁹ etc., on peut se demander si le degré d'exactitude possible justifie un procédé si long surtout si l'on tient compte de l'incertitude des bases; par exactitude on entend ici la concordance entre le calcul et l'expérience. Au nombre des inexactitudes de la condition d'écoulement on peut citer: les oscillations inévitables dans la hauteur de la limite inférieure d'écoulement, qui peuvent atteindre facilement 10 %; les variations importantes des lois admises disant que les sections restent planes, ces variations augmentent avec l'accroissement de la plastification; l'influence négligée des efforts de cisaillement, etc. Il en résulte la nécessité de simplifier les méthodes de calcul dans les recherches sur la théorie de la plasticité.

La 1^{ère} conception mathématique de la nouvelle condition d'écoulement fut établie par *Kuntze*.²⁰ D'après cette théorie, la résistance d'une section est atteinte lorsque la valeur moyenne de la résistance σ_M , introduite par *Kuntze*, atteint la limite inférieure d'écoulement σ_{Fu} . Dans les pointes de tension élastique la limite d'écoulement σ_{Fu} est dépassée. On obtient la valeur moyenne de la résistance σ_M en divisant en deux parties de même volume le corps des tensions par une section parallèle aux bords. Par corps des tensions on entend ici un prisme ayant la section comme base et qui peut être limité par une section oblique de telle façon que la hauteur du corps corresponde à la tension. L'équilibre des volumes, respectivement l'équilibre interne entre les parties plus et moins sollicitées du corps des tensions ne peut naturellement pas être pris comme fondement physique pour l'apparition de l'écoulement même si l'on pense que l'énergie d'écoulement accumulée peut être égale au contenu de la partie plus sollicitée du corps des tensions et que le processus d'écoulement peut être bloqué par la partie restée élastique de la section aussi longtemps que son action entravante n'est pas vaincue. Elle doit être considérée par conséquent comme une simple hypothèse aussi longtemps qu'elle n'aura pas de fondement physique.

¹⁸ E. Shwalla: Theorie des außermittig gedrückten Stabes aus Baustahl. Stahlbau 1934, Heft 21, 22 und 23, p. 161.

¹⁹ A. Eggenschwyler: Die Knickfestigkeit von Stäben aus Baustahl. Schaffhouse 1935, Edition personnelle.

²⁰ W. Kuntze: Ermittlung des Einflusses ungleichförmiger Spannungen und Querschnitte auf die Streckgrenze. Stahlbau 1933, Heft 7, p. 49.

Puisqu'elle correspond bien aux essais, on peut admettre qu'elle doit être conservée comme bonne approximation de cette condition d'écoulement encore inconnue, théoriquement fondée d'une façon irréprochable.

La condition d'écoulement de *Kuntze* est fondée complètement sur les essais et doit être modifiée quand elle ne joue plus. Un tel cas se présente lorsque l'on veut l'utiliser, ainsi qu'on le montrera plus tard, pour décrire la résistance d'une colonne métallique excentriquement comprimée. Pour rester en accord avec ces essais, il faut la modifier de la façon suivante: il faut partir d'un corps des

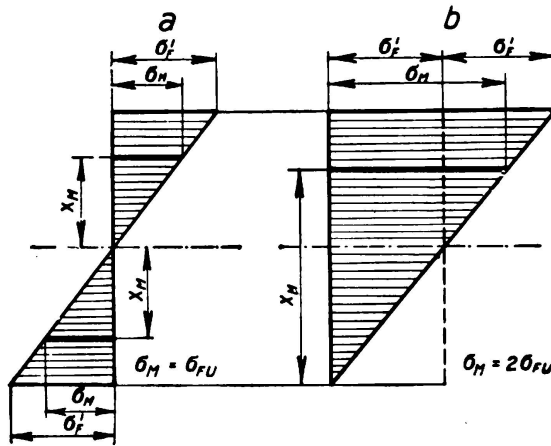


Fig. 4.

Interprétation de la condition d'écoulement de Kuntze,
a, originale et b, modifiée.

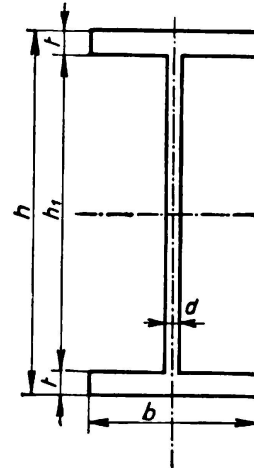


Fig. 5.

tensions qui comprend la non uniformité des tensions dans toute la section; on peut l'obtenir en réduisant d'abord les tensions de telle sorte que la tension soit nulle pour une fibre extrême (fig. 4). La valeur moyenne de résistance σ_M divise maintenant le corps des tensions réduites en deux parties de même contenu, mais il faut introduire, dans les sections à deux axes de symétrie, $\sigma_M = 2\sigma_F$ afin de rester en accord avec les essais. Pour un profile en I on calcule^{20a} la limite relevée d'écoulement σ'_F dans les poutres de tension élastique au moyen de

$$\sigma'_F = \sqrt{\frac{2}{1 + \alpha(1 - \beta)}} \sigma_F \quad (2)$$

si l'on prend $\alpha = \frac{h_1}{h}$ et $\beta = \frac{d}{b}$ (Fig. 5).

Cette relation n'est valable que pour autant que la valeur moyenne de résistance tombe dans l'aile de la section, c'est-à-dire pour autant que $x_M \geq h_1 + t$. Il en résulte que l'équation (2) n'est valable qu'aussi longtemps que l'on a $1 - \alpha(\alpha + 2\beta) \geq 0$. Si cette condition n'est plus remplie, on a

$$\sigma'_F = \sqrt{\frac{4\beta}{(1 + \beta) - \alpha^2(1 - \beta)}} \sigma_F. \quad (3)$$

^{20a} Un tel essai permettrait peut-être de liquider la question de l'exactitude de l'une ou de l'autre des conditions d'écoulement.

La grandeur σ'_F , limite supérieure d'écoulement relevée a la signification d'une « limite d'écoulement par flexion » car lorsque l'on a de la flexion l'écoulement se produit lorsque la plus grande tension à la fibre extrême atteint cette valeur. Cette limite d'écoulement par flexion n'est donc pas constante mais dépend de la forme de la section. On a

$$\sigma'_F = \psi \sigma_F \quad \text{ou} \quad \psi = \frac{\sigma'_F}{\sigma_F} = \frac{\sigma_{F0}}{\sigma_{Fu}}. \quad (4)$$

Une conséquence, qui n'a pas encore été vérifiée, de cette condition d'écoulement est que, dans une déformation purement élastique, des parties sans tension aux environs de la fibre neutre auraient une influence, jusqu'à un certain point favorable, sur la résistance d'une poutre et que par exemple un profil en croix

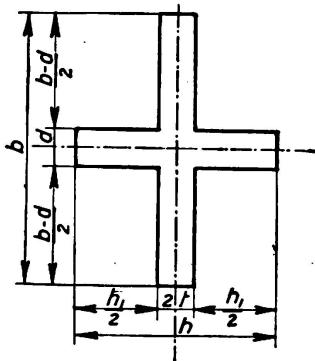


Fig. 6.

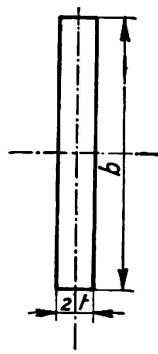


Fig. 7.

serait plus résistant que le même profil auquel on aurait coupé les ailes horizontales en ce sens que les parties sans tension entravent le processus d'écoulement dans les fibres extrêmes. Pour le profil en croix (fig. 6) on a :

$$\sigma'_F = \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha}}} \cdot \sigma_F \quad (5)$$

et pour le rectangle seulement, avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$

$$\sigma'_F = 1,414 \sigma_F \quad (6)$$

Pour un profil constitué de deux poutrelles T 10.5 à large semelle on a, pour $\alpha = 0,830$ et $\beta = 0,085$, le rapport de la limite d'écoulement par flexion à la limite inférieure d'écoulement $\psi = 1,85$ lors d'un essai de traction alors que pour le profil rectangulaire on obtient $\psi = 1,41$. Ce profil en croix devrait par conséquent supporter environ 30 % de plus que le profil rectangulaire correspondant. On doit avoir quelque chose de semblable pour un profilé H quand il est plié dans le plan de symétrie perpendiculaire à l'âme; cependant il faut remarquer qu'une âme infiniment haute ne permettra pas de relever à l'infini la limite d'écoulement par flexion. Il faut admettre que seules les parties de l'âme proches des ailes pourront entraver le processus d'écoulement dans les fibres extrêmes et l'on peut recommander d'évaluer la partie de l'âme à introduire dans la condition d'écoulement à $\frac{b}{2}$ de chaque côté (fig. 7).

Ce résultat théorique paraît étonnant et il sera probablement bientôt possible de le vérifier par des essais.²¹ Il est possible que seuls des essais exécutés avec des sections de ce genre sur la résistance de colonnes métalliques chargées excentriquement ne donnent une confirmation sur la nécessité de cette hypothèse.

La 2^{ème} conception de la condition d'écoulement en tenant compte du relèvement de la limite d'écoulement dans les pointes de tension est de *Prager*;⁹ sur le processus d'écoulement, il admet que le domaine élastique relevé avec tension limite σ'_F dans le diagramme de tension du stade totalement plastique se transforme en la tension limite σ_F et que ce processus s'accomplit sans réduction de la résistance à la flexion de la poutre en voie de plastification (fig. 8). Désignons

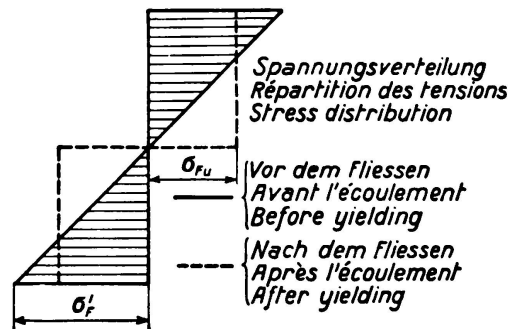


Fig. 8.

par W le moment résistant de la section et par T le moment statique des deux moitiés de la section par rapport à l'axe neutre, on peut écrire: $\sigma'_F W = \sigma_F T$

$$\text{et par conséquent } \sigma'_F = \frac{T}{W} \cdot \sigma_F \quad \text{et} \quad \psi = \frac{\sigma_{F0}}{\sigma_{Fu}}. \quad (7)$$

La conception de *Prager* qui apparaît comme très vraisemblable représente aussi lors d'un examen critique une idéalisation des processus d'écoulement; elle ne repose pas plus que la conception de *Kuntze* sur des bases physiques et n'est pas plus en concordance fondamentale avec les faits. Son extension au calcul de la résistance de colonnes métalliques comprimées excentriquement fournit des valeurs évidemment trop grandes vis-à-vis de l'expérience de telle sorte même si l'on ne peut donner un jugement définitif on doit cependant donner la préférence à la conception de *Kuntze* de la condition d'écoulement.

4^u — Contrôle des conditions d'écoulement par des essais.

Les essais de flexion de *Thum*¹¹ et *Wunderlich* sont essentiels pour la nouvelle condition d'écoulement. Les 8 essais effectués sur des éprouvettes polies de différents types de section en I (fig. 9) donnent, en tenant compte d'une limite inférieure d'écoulement lors des essais de traction de $\sigma_F = 2,47 \text{ t/cm}^2$, les valeurs σ'_F , calculées d'après les conditions d'écoulement de *Kuntze* et de *Prager*, contenues dans le tableau 1 où elles sont comparées aux valeurs mesurées. Si l'on fait abstraction des essais 2 et 3, dont les gros écarts autorisent évidemment d'autres explications, la concordance avec les valeurs de *Kuntze* est certainement satisfaisante alors que les valeurs calculées d'après *Prager* sont

²¹ *J. Fritsche*: Der Einfluß der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stahlstützen. Stahlbau 1936.

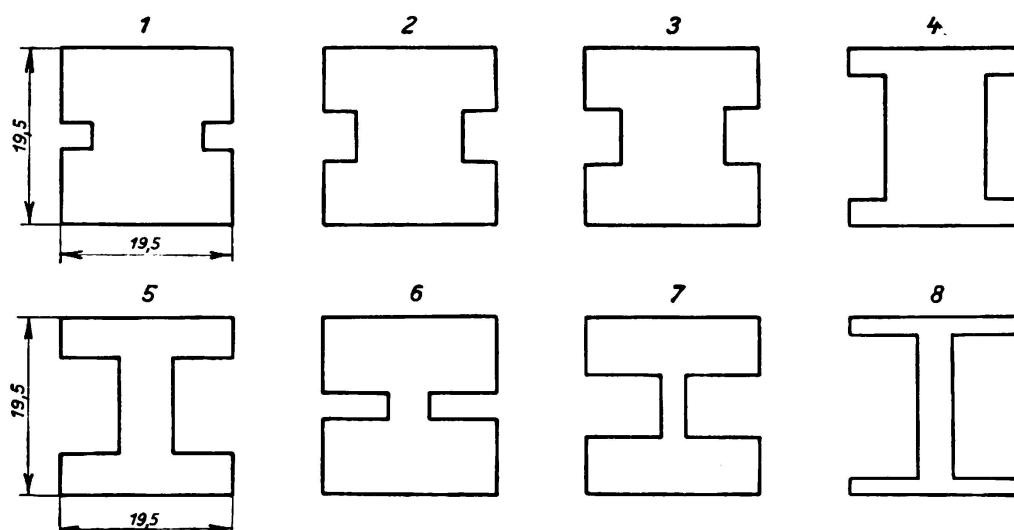


Fig. 9.

Sections des 8 poutres d'essai de Thum et Wunderlich.

presque toutes au-dessus des valeurs mesurées; on peut en conclure que la répartition des tensions du stade complètement plastique ne doit pas nécessairement correspondre aux hypothèse de l'ancienne théorie.

Tableau 1.

Les essais de Thum et Wunderlich.

No. de l'essai	σ_{Fo} mesuré	σ_{Fo} calculé d'après Kuntze	Ecart en % de la valeur mesurée	σ_{Fo} calculé d'après Prager	Ecart en % de la valeur mesurée
1	3,50	3,41	+ 2,56	3,68	— 5,14
2	3,64	3,31	+ 9,07	3,61	+ 0,82
3	3,78	3,28	+ 13,20	3,60	+ 5,14
4	3,42	3,38	+ 1,17	3,45	— 0,80
5	2,91	2,96	— 1,72	3,32	— 14,10
6	3,44	3,31	+ 4,03	3,66	— 6,40
7	3,15	3,06	+ 2,96	3,43	— 8,88
8	2,61	2,72	— 4,20	3,05	— 16,84

Les essais de *Thum* et *Wunderlich* sont les bases les plus importantes de la nouvelle condition d'écoulement et si elles paraissent livrer un contrôle objectif pour une limite supérieure d'écoulement relevée σ'_F , on peut toujours supposer en tenant compte des observations faites lors de la détermination de la résistance à la fatigue, que la transformation artificielle de la surface par polissage peut avoir une influence sur la limite d'écoulement en surface car là seulement on peut effectuer les mesures.

En ce qui concerne le relèvement de la limite supérieure d'écoulement pour les différentes sortes d'acier, on ne peut liquider cette question que par des essais dont on ne possède pas un nombre suffisant pour pouvoir tirer un jugement définitif. Les essais de *Siebel* et *Vierregge*¹⁴ sur des poutres quadratiques montrent ainsi que l'on peut le voir dans le tableau 2, que cet effet n'est

Tableau 2.
Les essais de Siebel et Vieregge effectués sur une poutre carrée.

No. de l'essai	limite inf. d'éc. σ_{Fu}	résistance à la rupture	$\psi = \frac{\sigma_{Fo}}{\sigma_{Fu}}$ mesuré	ψ (théorique)	
				Kuntze	Prager
1	1,89	3,09	1,66	1,41	1,50
2	2,52	4,88	1,34	1,41	1,50
3	3,77	7,50	1,07	—	—
4	5,46	7,10	1,05	—	—

prononcé que pour les aciers doux tandis que l'on ne peut pas l'observer pour les aciers à haute résistance. Quant à la question de savoir quelle condition d'écoulement est exacte, ces essais n'entrent pas en ligne de compte car la limite d'écoulement doit être déterminée par calcul en admettant certaines répartitions des tensions et non pas par observation directe au lieu de l'écoulement. On peut encore étudier si la résistance est atteinte par plastification régulière ou par relèvement de la limite d'écoulement dans les pointes de tension.

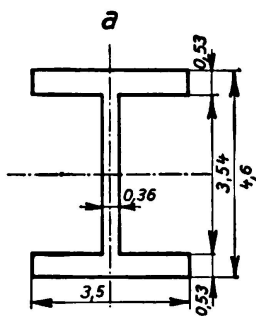


Fig. 10 a.

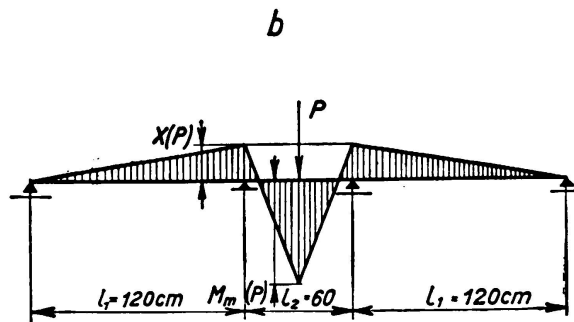


Fig. 10 b.

Section de la poutre et disposition des charges sur la poutre d'essai de Stüssi et Kollbrunner.

Dans les poutres hyperstatiques les processus de plastification ont une influence beaucoup plus grande sur le jeu des efforts internes et les lois de déformation que dans la poutre simple, déjà par suite de l'égalisation des moments, indépendamment du mode de la condition d'écoulement. On peut supposer qu'un mesurage des processus pourra fournir une conclusion sur l'exactitude de l'une ou de l'autre condition d'écoulement. De tels essais (fig. 10a et b) furent exécutés ces derniers temps par Stüssi et Kollbrunner²² à Zurich avec une extraordinaire exactitude. J'ai exploité des résultats dans un travail²³ paru dans le „Stahlbau“; la condition d'écoulement de Kuntze fut employée dans sa forme originale. En se basant sur les essais de compression exécutés sur des colonnes d'acier on doit apporter quelques modifications et l'on obtient de l'équation (2) $\sigma'_F = 1,09 \sigma_F$ et $\Delta \sigma_F = \sigma_{Fo} - \sigma_{Fu} = 303 \text{ kg/cm}^2$. De là $M_T = W \cdot \sigma_F = 26,70 \text{ tcm}$ et $P_T = \frac{8 \cdot 26,70}{60} = 3,56 \text{ t}$. A la tension au milieu de la travée centrale égale

²² F. Stüssi und Kollbrunner: Beitrag zum Traglastverfahren. Bautechnik 1935, Heft 21 p. 264.

²³ J. Fritsche: Grundsätzliches zur Plastizitätstheorie. Stahlbau 1936, Heft 9, p. 65.

à la limite d'écoulement relevée σ'_F correspond la charge P'_F . Pour $\alpha = \frac{3 l_2}{4 l_1 + 6 l_2} = \frac{3}{14}$ $P'_F = \frac{4 M_T}{(1-\alpha) l_2} = 2,27 \text{ t}$; la valeur correspondante du moment sur appui est $X'_F = -7,28 \text{ tcm}$. Après la mise hors fonction du milieu de la poutre il reste un système fondamental isostatique composé de deux poutres simples, reliées par une articulation plastique, possédant des encorbellements de la longueur $\frac{l_2}{2}$. P peut croître encore aussi longtemps que sur les appuis le moment d'écoulement M_T n'est pas atteint dans le système fondamental, ce qui se produit lorsque $\frac{1}{2} (P_T - P'_F) \frac{l_2}{2} = M_T - X'_F$. On obtient ainsi la valeur que l'on avait calculée directement auparavant: $P_T = 3,56 \text{ t}$. Le fléchissement au milieu de la poutre est $f_2 = 0,0872 P$ pour le système 2 fois statiquement indé-

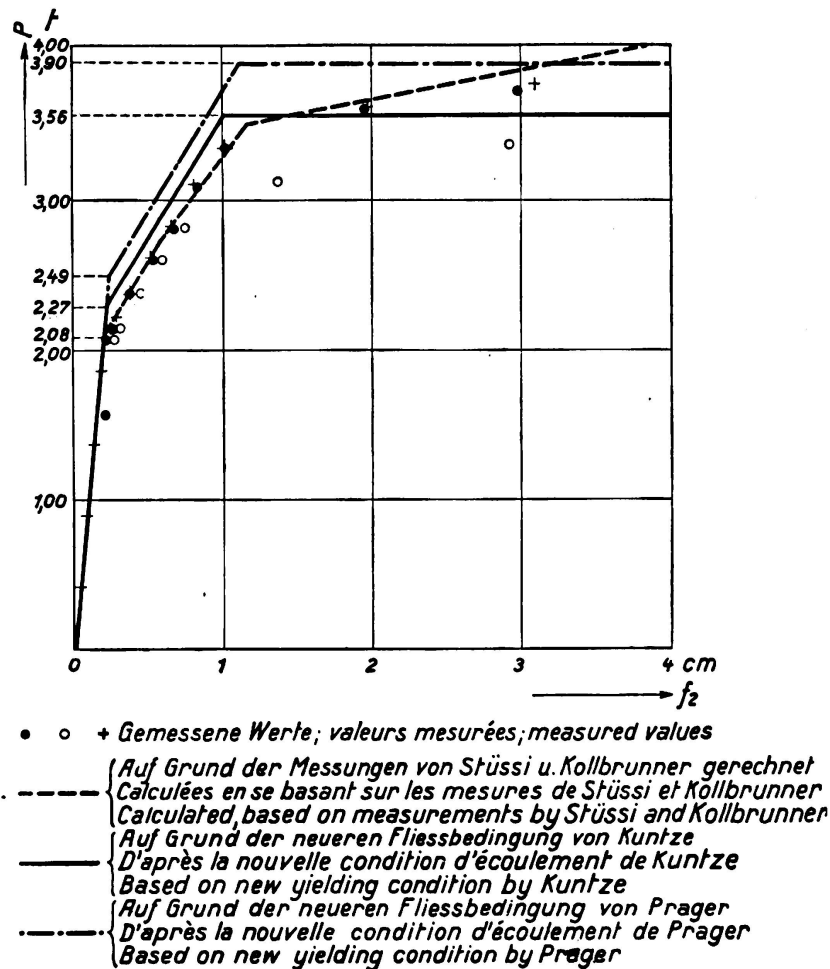


Fig. 11.

miné lors d'une déformation purement élastique, tandis qu'on peut calculer $f_2 = 0,198 + 0,642 (P - 2,27)$ après l'introduction d'une articulation plastique au milieu. Stüssi et Kollbrunner ont mesuré les fléchissements $f_2 (P)$ et ils ont déterminé l'allure des résistance internes $M_m (P)$ et $X (P)$ à partir de la déformation de l'axe par une méthode tout-à-fait approfondie. Les fig. 11 et 12 don-

nent les résultats de leurs mesures en comparaison avec les résultats des calculs d'après les différentes conditions d'écoulement et l'on peut y voir que, dans ce cas aussi, la nouvelle condition d'écoulement de *Kuntze* correspond le mieux. Le coude brusque des lignes mesurées $f_2(P)$, $M_m(P)$ et $X(P)$ lors de l'atteinte de P_f et $M_f = W\sigma_F$ montre qu'aucun relèvement de la limite d'écoulement ne semble s'être produit ici mais cependant les essais ne permettent pas à ce point

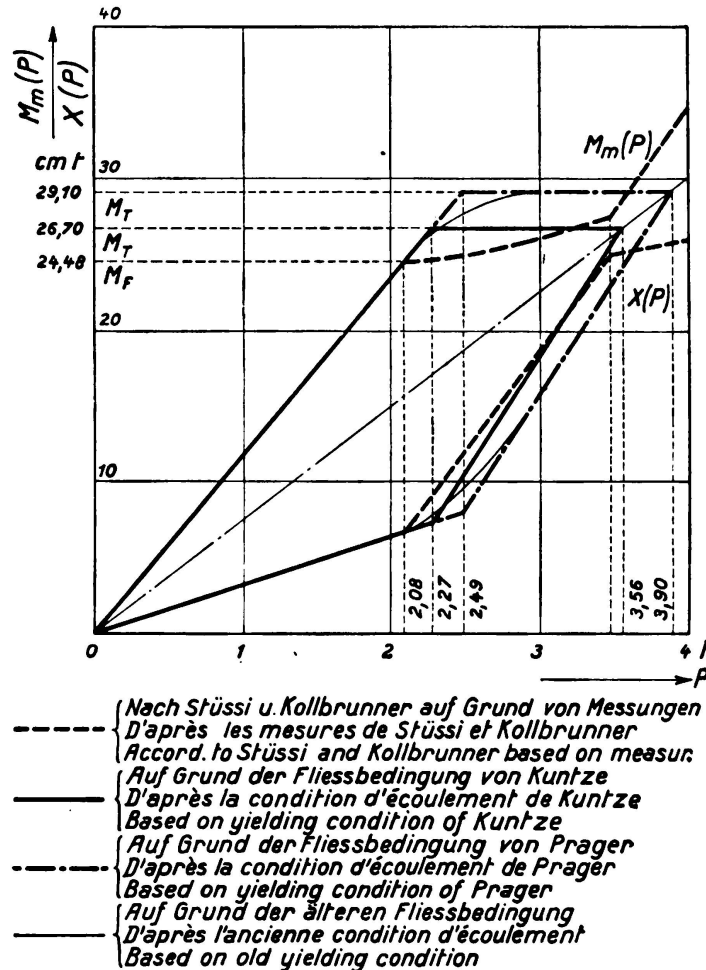


Fig. 12.

de vue de tirer une interprétation certaine car l'effet ne peut se produire qu'à une hauteur d'environ 10 % de σ_F et peut être recouverte par des variations dans les limites d'écoulement.

Les essais de *Maier-Leibnitz*³ dont nous avons parlé montrent en général un passage plus progressif du domaine purement élastique au domaine plastico-élastique; j'ai aussi démontré²³ que ces essais s'accordent à la condition d'écoulement de *Kuntze*, pour autant que l'on peut le contrôler; le polygone des fléchissements (P) joue assez bien avec les courbes mesurées.

Comme résultat de l'observation des essais les plus importants, on peut dire ce qui suit: un relèvement des limites d'écoulement n'est pas possible et demande encore une plus ample confirmation expérimentale. Tant que ceci ne sera pas fait on pourra considérer la nouvelle condition d'écoulement comme une bonne

approximation de l'ancienne et c'est elle que l'on devra utiliser dans les calculs car elle permet une simplification excellente et nécessaire.

5° — *La colonne métallique comprimée excentriquement.*

Si la théorie de la plasticité basée sur la condition d'écoulement de *Kuntze* est utilisable, elle doit nous donner aussi la résistance des colonnes métalliques comprimées excentriquement en concordance avec l'expérience. Cette question fut traitée ces derniers temps d'une façon très approfondie sur la base de l'ancienne condition d'écoulement^{17, 18, 19} sans cependant avoir fourni des résultats satisfaisants²⁴ au point de vue de l'influence de la forme de la section, avec raison prise en considération. En admettant un domaine d'écoulement s'étendant d'une façon continue, on se trouve en présence d'un problème de charges critiques en ce sens que la plastification croissante de la section médiane épuise de plus en plus l'équilibre entre les forces extérieures et intérieures jusqu'à une certaine profondeur du domaine d'écoulement longtemps avant que l'état complètement plastique étant atteint dans la section la plus défavorablement sollicitée, aucune forme d'équilibre stable n'est plus possible. Le calcul de cette charge critique ne peut être exactement effectué que pour une section rectangulaire car les équations différentielles, dans le cas d'un corps idéalement plastique sont très compliquées et ne permettent, dans le cas d'un diagramme général des forces-déformations, qu'une intégration graphique très laborieuse. Lorsque l'on parle de solution exacte, il ne s'agit ici que d'un processus purement mathématique. Dans le sens de la résistance des matériaux qui tend vers une description plus exacte de l'expérience, elles restent malgré tout des solutions approchées car elles reposent sur une série d'hypothèses plus ou moins bien satisfaites.

La solution de ce problème est très simplifiée par la nouvelle condition d'écoulement car l'on peut, sans grandes difficultés, considérer la véritable forme de la section. Le processus est d'après cette conception tel que son caractère purement élastique est conservé jusqu'à la limite relevée d'écoulement σ'_F ; ce n'est qu'alors que la zone d'écoulement s'étend subitement jusqu'à une grande profondeur de la section ce qui engendre, dans le cas d'une barre isostatique, l'épuisement direct de la capacité de résistance. Sans aucun doute cette représentation n'est qu'une idéalisation du processus réel et les essais ont démontré qu'une petite augmentation des charges est toujours possible même si l'on peut nettement observer les lignes d'écoulement; la brisure brusque de la ligne y_m (P) (fig. 13) est supprimée par un écoulement graduel mais cette apparition ne peut pas avoir une grosse influence.

Dans le cas de la flexion avec compression longitudinale le relèvement de la limite d'écoulement σ'_F doit dépendre non seulement de la forme de la section mais aussi fortement de la tension longitudinale σ_o . Pour saisir cette dépendance il est d'abord nécessaire de considérer les deux cas limites $\sigma_o = 0$ et $\sigma_o = \sigma_F$. $\sigma_o = 0$ correspond à la flexion pure pour laquelle la valeur $\Delta\sigma_F(0)$ paraît déterminée; $\sigma_o = \sigma_F$ est une pure sollicitation normale et lorsque l'on exclut le cas du flambage, la limite de la résistance est précisément atteinte alors.

²⁴ E. Chwalla: Der Einfluß der Querschnittsform auf das Tragvermögen außermittig gedrückter Baustahlstäbe. Stahlbau 1935, Heft 25 und 26.

Principalement les essais de W. Rein²⁵ ont démontré que dans un tel cas l'apparition d'un moment n'est plus du tout nécessaire pour obtenir un accroissement constant de la déformation sous une charge constante. Ceci comprend aussi la conception précédente car l'irrégularité de l'état de tension disparaît d'où il résulte que l'on doit avoir $\Delta\sigma_F (\sigma_F) = 0$. Il s'agit maintenant de procéder

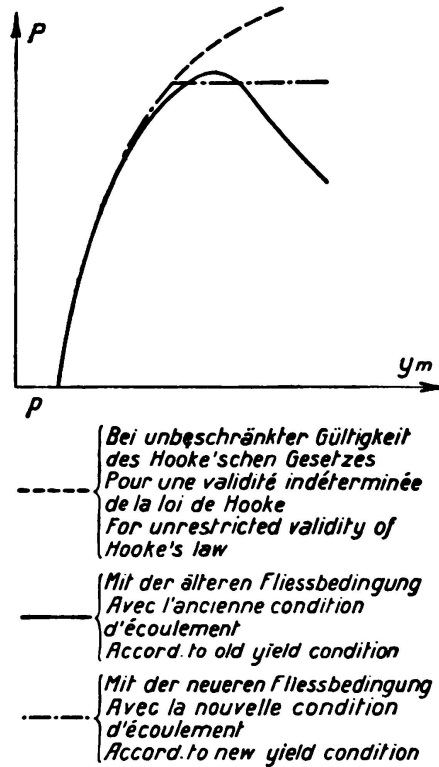


Fig. 13.

Le fléchissement transversal
du point milieu d'une barre
comprimée excentriquement.

à la mise en équation linéaire de $\Delta\sigma_F$ pour les valeurs intermédiaires des σ_o car l'expérience nous a montré que l'équation la plus simple fournit souvent les résultats les plus satisfaisants. Ainsi que je l'ai justifié²¹ on peut poser l'équation :

$$\sigma'_F - \sigma_o = \psi (\sigma_F - \sigma_o) = \frac{1}{\nu} (\sigma_F - \sigma_o) \quad (8)$$

où ψ est une valeur qui ne dépend que de la forme de la section et représente le rapport de la limite d'écoulement par flexion à la limite inférieure d'écoulement par traction (fig. 14). J'ai aussi démontré que le report sensé de la condition d'écoulement de Prager⁹ doit conduire à une fonction quadratique $\Delta\sigma_F (\sigma_o)$ dont le maximum est atteint pour $\sigma_o = \frac{\sigma_F}{3}$ avec $\Delta\sigma_F = \frac{2}{3} \sigma_F$. La condition d'écoulement de Prager nous conduit à la conclusion difficile à se représenter, que la capacité de résister à un moment de flexion doit croître entre certaines limites pour un σ_o croissant; ceci nous donne une autre explication du fait que cette condition d'écoulement fournit des charges critiques trop grandes vis-à-vis des essais.²⁶

²⁵ W. Rein: Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau, Ausgabe B, Heft 4; Versuche zur Ermittlung der Knickspannung für verschiedene Baustähle.

²⁶ J. Fritsche: Näherungsverfahren zur Berechnung der Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stäbe aus Baustahl. Stahlbau 1935, Heft 18, p. 137.

L'équation (8) détermine σ'_F ; la rupture de la colonne est maintenant liée à la condition $\sigma_i = \sigma'_F$. On obtient (fig. 15):

$$\sigma_i = \sigma'_F = \sigma_o + \frac{P y_m}{W} = \sigma_o \left(1 + \frac{p}{k_i} \sec \frac{\kappa l}{2} \right)$$

où $\kappa^2 = \frac{P}{EJ}$ et $k_i = \frac{W_i}{F}$ représente la distance du noyau de la fibre interne de la section. Si l'on introduit pour $\frac{P}{k_i}$ le degré d'excentricité m , on obtient

$$\sigma'_F = \sigma_o \left(1 + m \sec \frac{\kappa l}{2} \right) \text{ ou } \sigma'_F - \sigma_o = \sec \frac{\kappa l}{2}$$

et avec la condition d'écoulement (8)

$$\sigma_o m \sec \frac{\kappa l}{2} = \frac{1}{\nu} (\sigma_F - \sigma_o)$$

d'où l'on peut tirer $\sigma_{o \text{ crit}}$. Il est recommandable d'employer pour $\sec \frac{\kappa l}{2}$ l'approximation donnée par Timoshenko²⁷

$$\sec \frac{\kappa l}{2} = \frac{\sigma_E + 0,234 \sigma_o}{\sigma_E - \sigma_o} \quad (9)$$

où σ_E représente pour la barre la tension d'Euler $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$. Si l'on désigne par $m' = \nu m$ le degré d'excentricité « corrigé », on obtient pour $\sigma_{o \text{ crit}}$ l'équation quadratique suivante

$$\sigma_{o \text{ crit}}^2 (1 - 0,234 m') - \sigma_{o \text{ crit}} [\sigma_F + \sigma_E (1 + m')] + \sigma_F \sigma_E = 0 \quad (10)$$

et si l'on veut représenter $\sigma_{o \text{ crit}}$ en fonction directe du degré d'élancement $\lambda = \frac{l}{i}$, on a:

$$\sigma_{o \text{ crit}}^2 \lambda^2 (1 - 0,234 m') - \sigma_{o \text{ crit}} [\lambda^2 \sigma_F + \pi^2 E (1 + m')] + \pi^2 E \sigma_F = 0 \quad (11)$$

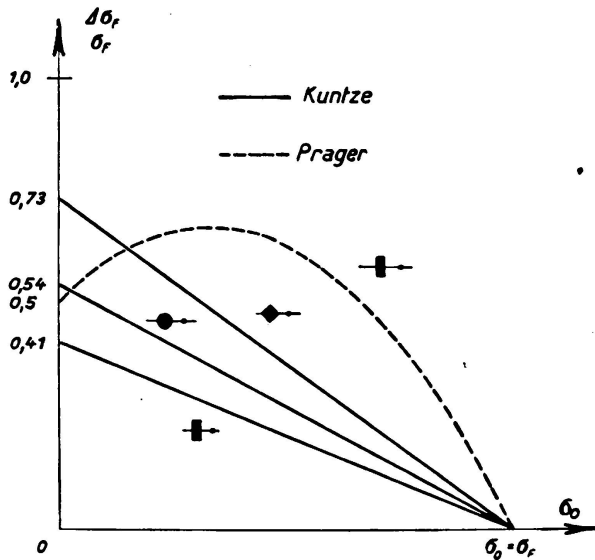


Fig. 14.

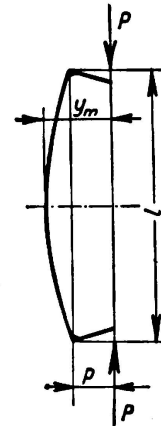


Fig. 15.

²⁷ Timoshenko: Strength of Materials, Band II, 1931.

La résolution de cette équation quadratique se heurte accidentellement à des difficultés; on obtient sous forme de différence et lorsque les deux chiffres sont du même ordre de grandeur, on doit pousser très loin la précision du calcul et l'emploi de la règle n'est plus possible. Dans de tels cas on peut représenter cette expression par une racine de la forme $\sqrt{1-x}$ où x est une grandeur très petite; si l'on développe la racine en une série de binomes et si on la coupe à partir du deuxième membre, on obtient déjà une solution suffisamment approchée

$$\bar{\sigma}_{o \text{ crit}} = \frac{\sigma_F \sigma_E}{\sigma_F + \sigma_E (1 + m')} \quad (12)$$

tandis que l'on peut obtenir, en tenant compte du troisième membre, une valeur plus exacte de la forme

$$\bar{\sigma}_{o \text{ crit}} = \bar{\sigma}_{o \text{ crit}} \left[1 + \sigma_{o \text{ crit}} \frac{1 - 0,234 m'}{\sigma_F + \sigma_E (1 + m')} \right] \quad (13)$$

6° — Contrôle des essais.

Les relations que nous avons obtenues doivent être comparées au grand nombre de résultats d'essais afin de démontrer l'exactitude et la possibilité d'emploi de la méthode de calcul basée sur la nouvelle condition d'écoulement. En première

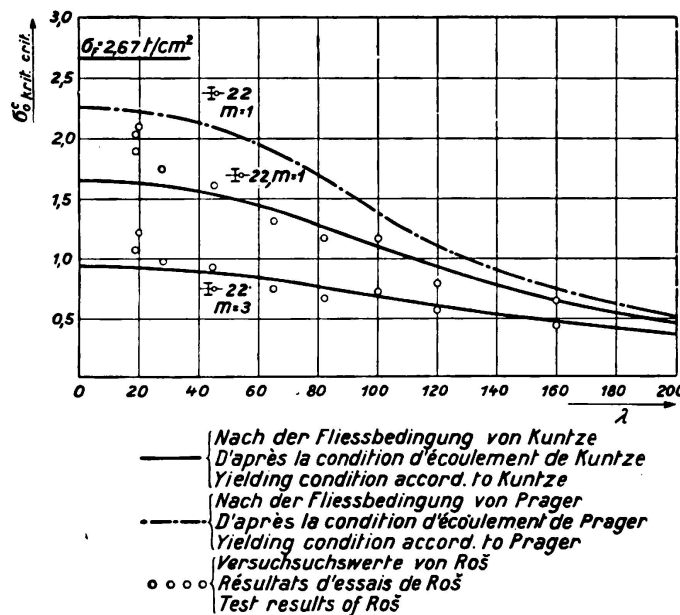


Fig. 16.

Tiré de J. Fritsche: „Der Einfluß der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stahlstützen.“ Stahlbau 1936.

ligne il nous faut nommer les essais fondamentaux de Roš²⁸ sur des profilés I 22 et 32; leur contrôle que j'ai déjà publié²¹ fournit une concordance parfaite entre le calcul et l'essai. La fig. 16 que j'ai tirée de ma publication

²⁸ M. Ros, Die Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe auf Knickung. Comptes-Rendu du 2^{me} Congrès international de Construction des Ponts et Charpentes, Vienne 1928, p. 282.

dans le «Stahlbau», montre clairement que les lignes calculées $\sigma_{o, \text{crit}}(\lambda)$ sert de moyenne aux essais. On peut voir encore que l'on doit supprimer de cette représentation les degrés d'élancement $\lambda < 25$ car dans de tels cas la solidification peut jouer un rôle et masquer les processus d'écoulement eux-mêmes. Les essais de Roš justifient la modification que nous avons apportée sous 3 à la condition d'écoulement de Kuntze; si l'on n'introduit pas dans le calcul la possibilité d'un retardement du moins partiel de l'écoulement des fibres extrêmes, retardement produit par l'âme moins sollicitée, il n'est pas possible d'introduire numériquement cette possibilité.

Les essais du «Deutscher Stahlbauverband», pour autant qu'ils me sont connus par une publication de G. Grüning²⁹ fournissent ainsi que je l'ai montré²¹ une excellente confirmation de ce procédé de calcul quoiqu'il serait très souhaitable d'exécuter d'autres essais de ce genre avec différentes formes de section afin de pouvoir contrôler cette théorie dans toutes ses conclusions.

Très intéressants sont aussi les essais de A. Ostfeld³⁰ exécutés en 1928/29 au laboratoire de statique de l'Ecole Polytechnique de Copenhague sur lesquels M. le Dr. Čizek m'a rendu très amicalement attentif. Ostfeld ainsi que J. Melan, Prague, est parti bien avant que l'on ait expliqué ces considérations par la théorie de la plasticité du point de vue que la véritable sécurité ne pouvait pas être déterminée par l'échelle des tensions et qu'il était nécessaire de se baser sur la rupture ou l'état d'instabilité de l'équilibre tel qu'il est engendré par l'écoulement. Il arrivait à la conclusion que l'on pouvait établir la véritable sécurité de colonnes comprimées excentriquement qu'en comparant la contrainte admissible au point le plus défavorable à une tension dans la fibre extrême de la grandeur

$$\sigma_{\text{res}} = \sigma_o \left(1 + \beta m \sec \frac{\pi l}{2} \right) \quad (14)$$

La valeur β ne peut pas s'expliquer par une échelle de tension basée sur la théorie de l'élasticité; c'était en général une valeur tirée de l'expérience, qui dépendait de la section et du degré d'élancement et qui permettait de relier la plus forte tension dans la fibre extrême à la résistance. Ostfeld donne une définition théorique de β qui n'est que peu satisfaisante actuellement. Il utilise des représentations qui correspondent à l'ancienne condition d'écoulement avec réduction plastique des pointes de tension. Afin de pouvoir s'adapter d'une façon satisfaisante aux résultats des essais il devait dans certains cas admettre une réduction de 10 à 20 % du module d'élasticité E qui était déterminé de telle sorte que l'équation suivante soit satisfaite lorsque la résistance était atteinte.

$$y_m = p \cdot \sec \frac{\pi l}{2}. \quad (15)$$

Pour cette raison on ne peut pas comparer directement cette valeur β avec la la valeur ν que nous avons introduite; son sens est le même, car elle doit «corriger» le degré d'excentricité donné.

²⁹ G. Grüning: Knickversuche mit außermittig gedrückten Stahlstützen. Mitteilungen aus dem staatlichen Materialprüfungsamte in Berlin-Dahlem. Stahlbau 1936, Heft 3, p. 17.

³⁰ A. Ostfeld: Exzentrisch beanspruchte Säulen, Versuche mit Stahlsäulen, Querschnittsbemessung. Ingeniorvidenskabelige Skrifter A No. 21. Kopenhagen 1930.

Pour la section rectangulaire *Ostenfeld* trouve $\beta = 0,69$ alors que théoriquement on obtient la valeur $\nu = 0,71$. La concordance est très bonne. Le tableau 3

Tableau 3.
Essais de Ostenfeld sur des colonnes carrées.
 $\nu = 0,707$ $E = 2100 \text{ t/cm}^2$

No. de l'essai	σ_{Fu} en t/cm^2	λ	m	$\sigma_{o \text{ crit}}$		Ecart en % de la valeur mesurée
				calculé	mesuré	
1	2,44	49,2	2,15	892	912	+ 2,4
2	2,37	49,1	5,80	441	465	+ 5,1
3	2,12	72,6	2,09	732	727	— 0,7
4	2,13	72,6	5,98	370	353	— 4,8
5	2,37	99,6	2,26	672	627	— 7,2
6	2,44	98,0	6,30	370	341	— 8,5
7	2,64	123,3	2,62	581	519	— 11,9
8	2,69	123,6	6,63	349	338	— 3,3

contient ses mesures à une colonne métallique à section rectangulaire comparées aux valeurs calculées $\sigma_{o \text{ crit}}$. Les écarts sont faibles; si les valeurs calculées sont un peu plus grandes que les valeurs mesurées cela provient des variations dans la limite d'écoulement σ_F . La valeur du moment des forces extérieures est constante dans un plus grand domaine et il est clair que l'écoulement se produira là où la limite d'écoulement a une valeur plus faible. Ceci correspond à l'expérience qui montre que les premières lignes d'écoulement ne se produisent pas toujours exactement au milieu de la colonne.

Le deuxième groupe d'essais fut exécuté sur des fers carrés placés de coin. Dans ce cas l'hypothèse de l'égalité du corps de tension plus sollicité et moins sollicité fournit la relation suivante pour le calcul de $\nu = \frac{\sigma_F}{\sigma'_F}$ (fig. 17),

$$\nu^3 - 1,5 \nu^2 + 0,3124 = 0 \quad (16)$$

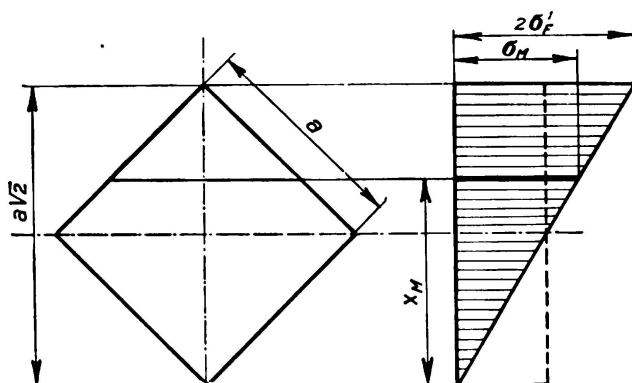


Fig. 17.

que l'on résoud le plus facilement par tâtonnements. On en tire $\nu = 0,58$ alors que *Ostenfeld* calcule avec $\beta = 0,53$; une comparaison des deux chiffres n'est pas possible à cause de la correction de E. Dans le tableau 4 on a comparé

Tableau 4.

Essais de Ostenfeld sur des colonnes carrées (posées de coin).

$$\nu = 0,580 \quad F = 2100 \text{ t/cm}^2$$

No. de l'essai	σ_{Fu} en t/cm^2	λ	m	$\sigma_{o \text{ crit}}$		Ecart en % de la valeur mesurée
				calculé	mesuré	
1	2,63	48,3	2,44	1000	1160	+ 13,8
2	2,68	48,5	6,21	547	579	+ 5,5
3	2,15	73,8	2,51	743	713	— 4,2
4	2,20	73,9	6,11	431	456	+ 5,5
5	2,63	98,0	3,09	688	672	+ 2,4
6	2,68	98,2	7,10	421	408	— 3,2
7	2,74	122,8	2,25	694	616	— 12,6
8	2,12	124,2	6,65	330	325	— 1,5

les valeurs mesurées $\sigma_{o \text{ crit}}$ avec les valeurs calculées. Là aussi la concordance est satisfaisante car les écarts + 13,8 et — 12,6 % sont compatibles avec l'exactitude que l'on peut obtenir. En tenant compte de la largeur des parties de section moins sollicitées on obtient la limite supérieure d'écoulement théorique exigée dans les pointes de tension élastique pour $\sigma_o = 0$ avec $\sigma'_F = 1,73 \sigma_F$ qui par ces essais peut être considéré comme possible. De toute façon l'ancienne condition d'écoulement fournit aussi dans ce cas pour une surcharge croissante, une augmentation toujours plus lente du domaine d'écoulement en tenant compte de la forte résistance qui se développe contre l'accroissement de la plastification; on obtiendrait de même une grande résistance car le rapport $\frac{T}{W}$ est très grand et l'on voit que l'ancienne et la nouvelle condition d'écoulement sont parallèles et qu'elles ne se distinguent que par des processus intermédiaires qui conduisent à peu près au même résultat final.

Le troisième groupe d'essais concerne les barres comprimées, à section cylindrique (fig. 18). La largeur de la fibre est $b_x = 2\sqrt{x(d-x)}$ et la condition d'écoulement s'écrit:

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot \sigma'_F = 2 \int_0^{x_M} \frac{4 \cdot \sigma'_F}{d} x \sqrt{x(d-x)} dx$$

d'où l'on tire, après résolution de l'intégrale déterminée, l'équation pour ν :

$$3\pi = \frac{3}{2} \arcsin(2\nu - 1) + (8\nu^2 - 2\nu - 3) \sqrt{\nu(1-\nu)}.$$

Si l'on pose, ce qui peut toujours être fait, pour les valeurs de ν qui se présentent ici: $\arcsin(2\nu - 1) = (2\nu - 1) + 2\pi$ on obtient:

$$\frac{3}{2} (2\nu - 1) + (8\nu^2 - 2\nu - 3) \sqrt{\nu(1-\nu)} = 0. \quad (17)$$

De cette équation on peut tirer $\nu = 0,65$, alors que Ostenfeld a calculé avec $\beta = 0,58$. Dans le tableau 5 nous avons de nouveau comparé les valeurs de

$\sigma_{o\text{crit}}$ calculées et mesurées. Pour la deuxième fois on obtient pour des petits degrés d'élancement, une valeur de 10 % plus petite et il n'est pas exclu que l'erreur provienne du fait que l'on ne peut complètement éviter un certain petit encastrement dans les appareils d'appui. Ceci donne un certain renforcement aux extrémités de la barre ce qui peut certainement avoir une petite influence surtout lorsque les barres sont courtes.

Tableau 5.
Essais de Osterfeld sur des colonnes cylindriques.
 $\nu = 0,650$ $E = 2100 \text{ t/cm}^2$

No. de l'essai	σ_{Fu} en t/cm^2	λ	m	$\sigma_{o\text{crit}}$		Ecart en % de la valeur mesurée
				calculé	mesuré	
1	3,25	44,2	2,70	1082	1260	+ 14,1
2	3,25	44,4	6,20	608	668	+ 9,0
3	3,25	95,3	2,97	775	763	— 1,6
4	2,86	95,3	6,20	455	447	+ 1,8

Une autre série d'essais concerne des profilés en I fléchis perpendiculairement au plan de l'âme; dans ce cas *Osterfeld* prend $\beta = 0,58$ tandis que le calcul d'après l'équation (5) donne $\nu = 0,61$.

Tableau 6.
Essais de Osterfeld sur des colonnes constituées par un profilé $\square 10$.
a) les ailes sont comprimées.
 $\nu_1 = 0,682$, $E = 2100 \text{ t/cm}^2$

No. de l'essai	σ_{Fu} en t/cm^2	λ	$m = \frac{P}{k_1}$	$\sigma_{o\text{crit}}$		Ecart en % de la valeur mesurée
				calculé	mesuré	
1	3,04	31,9	1,95	1250	1200	— 4,2
2	3,04	31,9	5,85	592	551	— 7,4
3	2,95	56,8	1,86	1132	1070	— 5,8
4	3,23	57,4	6,06	572	510	— 12,1
5	2,95	82,0	2,01	939	875	— 7,3
6	2,95	82,0	5,76	502	479	— 4,8
7	2,94	106,0	2,12	774	707	— 9,5
8	2,94	106,0	6,00	440	406	— 8,4
9	3,04	134,0	2,35	616	567	— 8,6
10	3,17	134,0	6,32	394	360	— 9,5

D'autres essais très intéressants sont ceux exécutés sur des profilés en $\square$ pour lesquels j'ai calculé la limite d'écoulement par flexion et la valeur ν .²¹ Ces profils non symétriques donnent des résistances très différentes suivant que la charge agit d'un côté ou de l'autre du centre de gravité. Si les deux ailes subissent la plus forte compression, le fléchissement se produit du côté fermé de la section et l'on a

$$\nu_1 = 0,707 \sqrt{\frac{1 - \alpha \beta^2}{1 - \alpha}} \quad (18)$$

où $\alpha = \frac{h_1}{h}$ et $\beta = \frac{d}{b}$ (fig. 19). Pour le profilé $\square 10$ que nous avons essayé, $\alpha = 0,83$, $\beta = 0,12$ d'où $\nu = 0,682$, tandis qu'*Ostenfeld* a calculé dans ce cas avec $\beta = 0,69$. La comparaison entre les valeurs calculées et mesurées se trouve au tableau 6 qui contient aussi les écarts en % des valeurs mesurées.

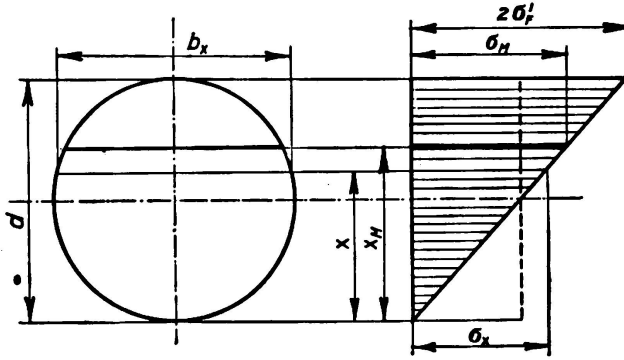


Fig. 18.

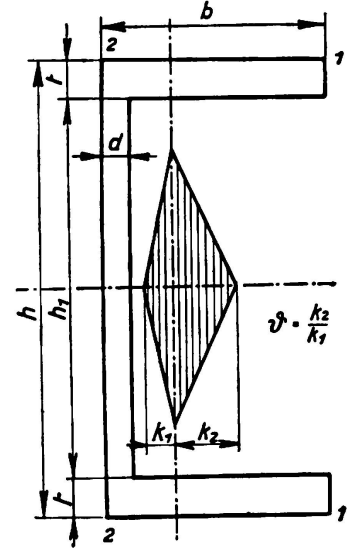


Fig. 19.

Lorsque le point d'application de la force se trouve au côté du centre de gravité, l'âme supporte la plus forte compression et le fléchissement se fait du côté ouvert de la section. En ce qui concerne la résistance, il y a deux possibilités tout-à-fait distinctes à considérer: elle peut être atteinte soit par écoulement dans la partie comprimée, soit par écoulement dans la partie tendue. La plus forte contrainte de compression est:

$$\sigma_2 = \sigma_0 \left(1 + m \sec \frac{\alpha l}{2} \right)$$

et celle de traction:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \left(-1 + m \frac{k_2}{k_1} \sec \frac{\alpha l}{2} \right)$$

où $m = \frac{p}{k_2}$ représente le degré d'excentricité mesuré par rapport au côté opposé;

La condition d'écoulement s'énonce dans le 1^{er} cas

$$\sigma'_F - \sigma_0 = \sigma_0 m \sec \frac{\alpha l}{2} = \frac{1}{\nu_2} (\sigma_F - \sigma_0) \quad (19)$$

tandis que dans le cas 2 on peut l'écrire

$$\sigma'_F + \sigma_0 = \sigma_0 m \frac{k_2}{k_1} \sec \frac{\alpha l}{2} = \frac{1}{\nu_1} (\sigma_F + \sigma_0) \quad (20)$$

ν_2 fut calculé auparavant avec $\nu_2 = 0,707 \sqrt{(1 + \alpha) - \alpha\beta(2 - \beta)}$; ν_1 doit naturellement avoir en tenant compte du champ de tension réduit, la même valeur que lorsque le fléchissement se produit du côté fermé. Le cas 1 se produit pour les petites valeurs de σ_0 et pour de petites excentricités p tandis que pour le cas

2 c'est le contraire. La tension limite σ_{oG} pour laquelle l'écoulement apparaît simultanément aux deux fibres extrêmes peut être calculé des deux équations (19) et (20) avec

$$\sigma_{oG} = \frac{\nu_1 \vartheta - \nu_2}{\nu_1 \vartheta + \nu_2} \quad \text{où} \quad \vartheta = \frac{k_2}{k_1} \quad (21)$$

Pour le profilé $\square$ 10 que nous avons essayé, $k_1 = 0,629$, $k_2 = 1,400$ cm, $\nu_1 = 0,682$ d'où l'on tire $\sigma_{oG} = 0,253 \sigma_F$. Dans les essais de *Ostenfeld* l'écoulement s'est produit en partie dans l'âme et en partie dans les ailes tendues lorsque la charge avait son point d'application du côté de l'âme selon les relations établies ci-dessus. Dans la plupart des essais les valeurs de m étaient si grandes que l'on se trouvait en présence du cas 2. C'est pourquoi la tension critique se calcule à partir de (20) avec

$$\sigma_{o \text{ crit}}^2 (1 + 0,234 m' \vartheta) + \sigma_{o \text{ crit}} [\sigma_F - \sigma_E (1 - m' \vartheta)] - \sigma_E \sigma_F = 0 \quad (22)$$

Pour le profilé $\square$ 10 on avait $\nu_1 = 0,68$ tandis que *Ostenfeld* admet $\beta = 0,63$. Les essais sont très nombreux et il suffit de contrôler ceux qui ont de petites valeurs ϑ_m car ils suscitent le plus grand intérêt. Les résultats du calcul sont contenus dans le tableau 7. Si l'on considère la condition théorique que l'écoulement ne peut se produire dans les ailes que lorsque $\sigma_{o \text{ crit}} < \sigma_{oG}$, deux des essais cités y sont contraires. Ceci ne doit pas surprendre; la valeur σ_{oG} ne peut pas représenter une limite exacte de deux apparitions opposées mais simplement avoir une validité approchée. Avant tout les variations des limites d'écoulement jouent un grand rôle surtout si l'on tient compte du fait que la limite d'écoulement entre en ligne de compte une fois dans l'âme et une autre fois dans les ailes, cas qui par expérience ne sont jamais égaux. Il serait possible de considérer ces différentes limites d'écoulement dans le calcul de σ_{oG} . Deux essais parallèles seulement montrèrent l'apparition de l'écoulement dans l'âme. Les résultats de ces essais se trouvent dans le tableau 7 sous N° 1; dans ce cas aussi on a une concordance satisfaisante.

Tableau 7.

Essais de *Ostenfeld* sur des colonnes constituées par un profilé $\square$ 10

b) l'âme est comprimée.

$\nu_2 = 0,903$, $\nu_1 = 0,682$, $\vartheta = 2,23$, $E = 2100 \text{ t/cm}^2$

No. de l'essai	σ_{Fu} en t/cm^2	λ	$m = \frac{P}{k_2}$	$\sigma_{o \text{ crit}}$		Ecart en % de la valeur mesurée	σ_{oG}
				calculé	mesuré		
1	2,59	50,7	1,76	1000	1140	+ 12,1	655
2	2,57	82,2	1,95	800	776	— 3,1	650
3	2,82	108,0	1,84	698	625	— 11,7	712
4	2,71	132,4	2,03	527	498	— 5,8	685
5	2,78	82,5	1,96	830	828	— 0,3	703
6	2,97	57,4	5,79	351	382	+ 8,1	750
7	2,57	82,2	5,73	291	305	+ 4,6	650

Remarque: Dans l'essai 1 l'écoulement se produit dans l'âme comprimée; dans les autres essais dans les ailes tendues.

Pour terminer, on peut dire sur les nombreux essais de *Ostenfeld*, qu'ils peuvent être considérés comme une bonne confirmation, du fait qu'ils permettent une représentation fondamentale de la nouvelle condition d'écoulement et qu'ils permettent de calculer la résistance d'une colonne métallique sans calculs trop compliqués. Si ces essais ne donnent aucune confirmation de l'exactitude physique de la nouvelle condition d'écoulement, ils justifient cependant son emploi dans la résistance pratique des matériaux. On peut encore contrôler le procédé de calcul développé ici par les nombreux essais de la « American Society of Civil Engineers » qui a créé une commission spéciale pour l'étude de la résistance des colonnes métalliques. Les résultats des essais qui se rapportent aux sections les plus variées, ont été publiés dans « Proceedings of the American Society of Civil Engineers » de février 1929; la place que nous avons à notre disposition ne nous permet malheureusement pas de nous étendre sur ces essais.

Résumé.

Tandis que l'ancienne condition d'écoulement utilise directement la valeur de la résistance, tirée de l'essai ordinaire de traction, pour la détermination du danger d'écoulement local, — car elle ne considère que l'état de tension local, — la nouvelle condition d'écoulement fait varier la valeur de la résistance suivant la forme du champ de tension. Si l'on ne considère pas comme démontré le relèvement de la limite supérieure d'écoulement dans les pointes de tension du champ élastique et si l'on reste exclusivement sur le plan de l'ancienne condition d'écoulement, on ne peut cependant pas écarter la nouvelle condition dans ses conclusions; on peut toujours encore la considérer comme une approximation, fournissant des résultats utilisables et satisfaisants, de l'ancienne condition d'écoulement. Le présent travail s'occupe aussi du calcul des barres excentriquement comprimées, sur la base de la nouvelle théorie de la plasticité. La nouvelle condition d'écoulement a l'avantage de donner des méthodes de calcul claires et simples, dont les résultats concordent avec les essais. On peut souhaiter que la question de la condition d'écoulement sera plus largement encore étudiée.

I 3

Sur les limites d'écoulement et les diagrammes de flexion.

Über Fließgrenzen und Biegekennlinien.

Yield Limits and Characteristic Deflection Lines.

Dr. Ing. F. Rinagl,

Professor an der Technischen Hochschule, Wien.

Pour cause rédactionnelle ce rapport est publié en annexe.

Aus redaktionellen Gründen erscheint das Referat im Anhang.

For editorial reasons this report appears in the appendix.

Leere Seite
Blank page
Page vide

I 4

Théorie des systèmes hyperstatiques.

Theorie statisch unbestimmter Systeme.

Theorie of Statically Indeterminate Systems.

Dr. Ing. E. Melan,

Professor an der Technischen Hochschule, Wien.

A) Matériau idéalement plastique.

A) Idealplastischer Baustoff.

A) Ideal-Plastic Material.

I.

La statique de construction a pour objet la détermination des forces intérieures et des déformations des systèmes composés de barres minces. Cette détermination se fait au moyen de trois groupes d'équations: le premier indique que le système est en équilibre, le deuxième représente les conditions de connexité géométrique tandis que le troisième exprime le rapport qui existe entre les forces intérieures d'une part et les déformations d'autre part. Lorsque le système est statiquement déterminé, le premier groupe d'équations suffit pour déterminer les forces intérieures, les autres groupes ne servant qu'à la détermination des déformations. Par contre lorsque le système est statiquement indéterminé, le premier groupe d'équations ne suffit pas à la détermination des forces intérieures. Il est dans ce cas absolument nécessaire de tenir compte des deux autres groupes d'équations et même de connaître le rapport existant entre les déformations et les tensions. La théorie usitée admet la validité illimitée de la loi de Hooke, c'est-à-dire admet que les allongements d'une barre sont proportionnels à la force normale et que les déformations angulaires d'une pièce courbe sont proportionnelles au moment de flexion agissant au point considéré.

Ainsi que nous l'avons déjà mentionné ailleurs, l'expérience nous montre que la validité de la loi de Hooke est limitée et que la relation linéaire entre la force et la déformation n'existe que dans certaines limites. Ces limites ne sont par contre pas invariables, elles dépendent non seulement de l'allongement constaté au moment considéré mais aussi de la rapidité avec laquelle la surcharge varie. Il est encore important de savoir si, en dehors du domaine de validité de la loi de Hooke, les allongements subissent un accroissement ou une diminution.

Si l'on veut obtenir des résultats exacts en tenant compte de l'état réel, il faut remplacer la loi de Hooke en dehors de son domaine de validité par une autre hypothèse qui tienne mieux compte des résultats des essais. Cette hypothèse, dans

le cas des systèmes hyperstatiques, ne se rapporte qu'au calcul de la déformation du système, ainsi que nous l'avons déjà dit plus haut, et dans le cas des systèmes hyperstatiques au contraire, elle nous conduit à la détermination de forces intérieures tout-à-fait différentes. Afin d'obtenir des résultats pratiquement utilisables, il est nécessaire d'idéaliser un peu cette relation par rapport à l'état réel. Avant tout l'on admet que la vitesse avec laquelle varie la surcharge est sans influence, en d'autres termes que les forces intérieures ne varient que lentement ainsi que la statique le conçoit lorsque l'on exclu les considérations d'ordre élastico-cinétique. Si l'on considère la figure 1a, il nous est possible de fonder la théorie. Contentons-nous d'une reproduction moins exacte de cette figure; on peut par exemple admettre le diagramme déformations/forces de la figure 1b. En général on idéalise encore un peu plus ce diagramme pour le cas d'un matériau de «plasticité parfaite» et ceci comme le montre la figure 1c. Cette dernière hypothèse est basée sur les essais que nous mentionnons ensuite; nous la formulerons

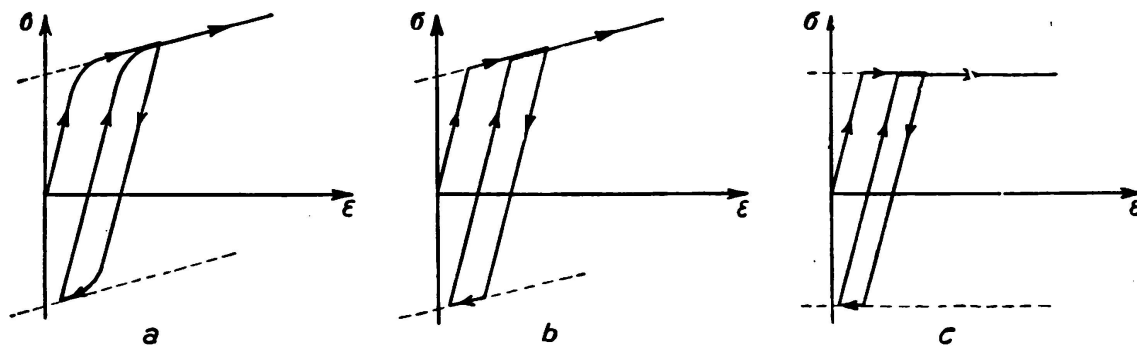


Fig. 1.

dans la deuxième partie de ce rapport. Elle repose sur les hypothèses faites par *Haar-Karman*, *Mises* et *Hencky*¹ sur la répartition des tensions suivant les trois axes.

Les résultats des essais de tension-déformation peuvent directement être appliqués aux barres tendues des treillis. Dans le cas des barres comprimées, la surcharge limite est généralement donnée par la charge de flambage. Si l'on veut étendre le diagramme de la figure 1c aux tensions négatives, il faut admettre que, au-dessous de la charge de flambage, l'axe de la barre peut se déformer d'une façon quelconque. En ce moment-là il est évident que la charge de flambage atteint sa valeur critique qui ne peut en aucun cas être dépassée. Au moment de la décharge il existe de nouveau une relation linéaire entre la force et la déformation.

D'une manière générale, cette théorie de la plasticité parfaite est d'une importance beaucoup moins grande pour les poutres en treillis que pour les systèmes rigides. Ainsi que nous le montrent les recherches générales, les systèmes constitués par un matériau idéalement plastique ont cette propriété remarquable de supprimer les pointes de tension qui se produisent dans un

¹ A. Haar et Th. von Karman, „Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien“. Nachr. der kgl. Ges. der Wiss. Göttingen 1909.

v. Mises, „Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand“. Idem 1913.

H. Hencky, „Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen“. Zeitschr. für angew. Math. und Mech. 1924.

matériau totalement élastique aux dépens des parties moins sollicitées dans un matériau plastique. En d'autres termes, il faut considérer les réserves du matériau qui cependant sont beaucoup plus faibles dans une poutre en treillis exactement dimensionnée que dans le cas d'une poutre continue de même profil reposant sur plusieurs appuis. Nous avons choisi comme exemple pour nos recherches la poutre en treillis pour les raisons suivantes: les recherches analytiques nous conduisent à des relations ayant un nombre fini de variables, ce qui n'est pas le cas pour les systèmes composés de barres rigides; ensuite les relations mathématiques sont beaucoup plus expressives pour le lecteur. Une généralisation à un nombre infini de variables est toujours possible et ainsi les résultats obtenus pour la poutre en treillis peuvent toujours être rapportés aux systèmes composés de barres rigides.

Pour les recherches concernant les systèmes composés de barres rigides de plasticité parfaite, on admet en général, ce qui est d'une précision suffisante, les mêmes relations entre le moment et la déformation angulaire que celles indiquées dans la figure 1c pour les tensions et les allongements. Il faut cependant faire remarquer que ces deux hypothèses ne s'accordent pas parfaitement. Sur ce sujet ainsi que sur d'autres questions y relatives, on lira avec le plus grand intérêt une contribution de *Eisenman* parue dans le «*Stahlbau*» de 1933. Notons encore une autre contribution de *W. Prager* („Über das Verhalten statisch unbestimmter Konstruktionen aus Stahl nach Überschreitung der Elastizitätsgrenze“) parue dans le «*Bauingenieur*» de 1933. Dans cette dernière étude il est démontré par un exemple déterminé que dans un système hyperstatique les déplacements sont beaucoup plus influencés que les moments par l'admission d'une loi d'élasticité spéciale et que cette loi est inconcevable pour déterminer la relation existant entre les moments intérieurs et les déformations angulaires.

Je voudrais encore faire remarquer deux points très importants qui, comme conséquence du remplacement de la loi de Hooke par une relation non linéaire ne sont pas assez mis en évidence dans la plupart des publications destinées aux ingénieurs. Premièrement, la validité de la loi de la superposition, par suite du fait que les équations ne sont plus linéaires, n'existe plus ou plutôt est limitée au calcul des forces intérieures des systèmes statiquement déterminés. A l'exception de ce dernier cas il est par conséquent impossible de dessiner des lignes d'influence. Secondement il est impossible de déterminer l'état de tension d'un système hyperstatique si les surcharges antérieures ne sont pas connues. Il faut aussi faire attention à ce dernier point dans tous les cas où il est question d'une seule surcharge comme par exemple dans les travaux de *J. Fritsche*, *Schaim*, *Kazinczi* et *Girkmann*² qui traitent spécialement de systèmes constitués

² *J. Fritsche*, „Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens“. Bautechnik 1930.

G. H. Schaim, „Der Durchlaufträger unter Berücksichtigung der Plastizität“. Stahlbau 1930.

G. v. Kazinczi, „Statisch unbestimmte Tragwerke unter Berücksichtigung der Plastizität“. Stahlbau 1931 et „Bemessung unvollkommen eingespannter Stahl-I-Deckenträger unter Berücksichtigung der plastischen Formänderungen“. Assoc. intern. des ponts et charpentes 1933/34. 2ème volume des Mémoires.

K. Girkmann, „Bemessung von Rahmentragwerken unter Zugrundelegung eines idealplastischen Stahles“. Sitzungsbericht der Akademie der Wiss. Wien 1931 et „Über die Auswirkung der Selbsthilfe des Baustahles in rahmenartigen Stabwerken“. Stahlbau 1932.

par des matériaux de plasticité parfaite. Il est tacitement supposé dans toutes ces recherches que les forces extérieures croissent progressivement de zéro à leur valeur finale. Il en est de même pour les recherches concernant des surcharges répétées, dans ce cas l'on suppose que la surcharge varie entre deux valeurs déterminées. A cette place il ne faut pas oublier de citer en première ligne le mémoire de *M. Grüning* „Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl mit beliebig häufig wiederholter Belastung“, Berlin 1926. La conclusion la plus importante à tirer de ce travail est qu'un système chargé un nombre suffisant de fois par une force variant entre deux limites déterminées, finit par ne se déformer que dans une marge déterminée. Les recherches de *Grüning* supposent le cas moins spécialisé de la figure 1a. Les recherches de portée générale se trouvent dans un travail spécial de *J. Fritsche* sur la poutre continue chargée un grand nombre de fois et constituée par un matériau idéalement plastique.

H. Bleich a étendu les résultats de *Grüning* à un matériau de plasticité parfaite (voir le *Bauingenieur* 1932). Dans ce mémoire il est démontré que, même pour une surcharge variable quelconque, c'est-à-dire non pas seulement pour une surcharge variant entre deux limites, le système considéré finit par travailler comme un système constitué par un matériau totalement élastique ceci après un certain nombre de variations de la surcharge. Cette proposition qui fera l'objet de la deuxième partie de ce rapport, sert de base au dimensionnement des systèmes hyperstatiques constitués par un matériau de plasticité parfaite. Sur ce principe s'est bâti un nouveau procédé appelé «procédé de l'équilibre plastique». Le lecteur que cette question intéresse pourra se renseigner par exemple dans le livre intitulé „Stahlhochbauten“ de *F. Bleich* publié à Berlin en 1932.

Cet aperçu des travaux les plus importants traitant la théorie des systèmes hyperstatiques n'a pas la prétention d'être complet, il faut cependant lui ajouter quelques études qui traitent la théorie de ces systèmes d'une manière plus générale. Citons tout d'abord un mémoire de *J. Fritsche* paru dans „*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*“ en 1931, ainsi qu'un travail de *Hohenemser* paru dans „*Ingenieurarchiv*“ de 1931. Ces deux études traitent la question de l'énergie potentielle dans de tels systèmes. Par contre nos recherches, qui ont pour but principal une démonstration générale de la loi de *H. Bleich*, utilisent les équations d'équilibre dont il a été parlé au début de ce travail, en liaison avec la loi de l'élasticité d'un matériau idéalement plastique. L'indétermination des allongements qui, à ma connaissance n'était pas prise en considération jusqu'à maintenant, de même que les restrictions nécessaires pour la validité de la loi de *H. Bleich*, sont des conséquences de l'hypothèse d'une loi de tensions/déformations en dehors du domaine de la loi de Hooke. Si l'on remplace ce diagramme par celui de la figure 1a ou 1b, toutes les solutions indéterminées tombent ainsi que toutes les considérations qui en dépendent. Cette simplification n'est rendue possible que par l'introduction d'une nouvelle constante du matériau, à savoir, l'inclinaison de la droite limite.

II.

1^o) La démonstration que donne *H. Bleich*, dans le mémoire que nous avons cité, de sa loi sur les systèmes hyperstatiques constitués d'un matériau idéale-

ment plastique n'est pas du tout simple et n'est faite que pour des systèmes au plus deux fois statiquement indéterminés. On peut considérer comme impossible un développement de sa démonstration pour des systèmes d'un plus haut degré d'indétermination et ceci à cause de l'excès de calculs.

Dans ce qui suit nous allons exposer une démonstration valable pour des systèmes d'un degré quelconque d'indétermination. Cette démonstration est assez simple lorsque l'on a étudié certaines propriétés des systèmes constitués d'un matériau idéalement plastique. Les explications que nous donnerons ensuite pour cette démonstration nous permettront d'avoir un aperçu beaucoup plus profond sur la manière dont se comportent de tels systèmes. Nous avons besoin ici de quelques lois très simples sur les systèmes d'équations linéaires que l'on peut trouver dans tous les livres d'algèbre. Afin de ne pas avoir affaire à un nombre infini de variables, nous bornerons notre étude aux poutres en treillis. Le passage à un nombre infini de variables, nécessaire pour les systèmes à barres rigides, se fait comme dans la théorie de l'intégration et ne présente aucune difficulté fondamentale.

Rappelons tout d'abord que l'allongement d'une barre constituée par un matériau idéalement plastique est donné par la relations:

$$\Delta S = v + \rho S, \quad (1)$$

ρ est une constante dépendant du module d'élasticité, de la longueur et du profil de la barre, v est la déformation permanente et S l'effort dans la barre. Lorsque S se trouve dans l'intervalle $T' < S < T$, où T' et T représentent les limites

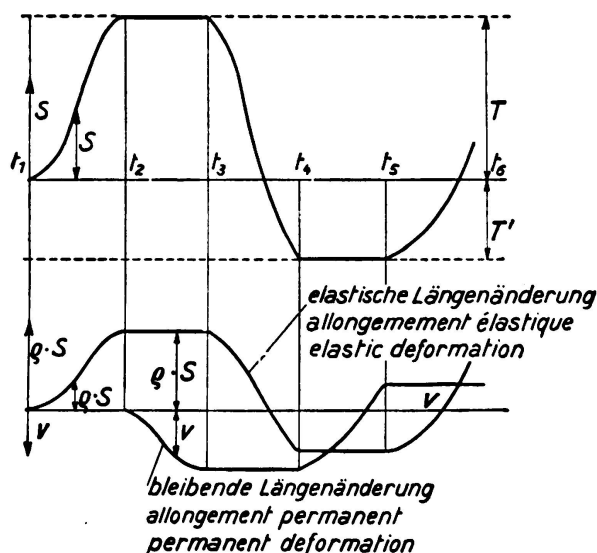


Fig. 2.

d'écoulement relatives à la compression et à la traction, v est une constante. Ce n'est que lorsque $S = T$ ou $S = T'$ que v croît ou décroît suivant que $S = T$ ou $S = T'$. On dit alors que la barre s'écoule. Il est impossible que $S < T'$ et $S > T$. Les relations que nous venons d'écrire sont représentées dans la figure 2, en abscisse est porté le temps. Dans ce diagramme, les ordonnées représentent: en-haut l'effort dans la barre et en-bas les allongements. La barre se comporte comme totalement élastique dans les intervalles de temps $t_1 < t < t_2$, $t_3 < t < t_4$ et $t_5 < t$ tandis que dans les autres intervalles elle s'écoule. Nous

supposons encore que dv/dt a une valeur finie, c'est-à-dire que l'allongement permanent se produit avec une vitesse d'écoulement finie, sans pouvoir faire de sauts.

2°) Dans une poutre en treillis hyperstatique, nous pouvons distinguer deux sortes de barres, les barres qui sont absolument nécessaires, c'est-à-dire que l'on ne pourrait supprimer sans provoquer une déformation cinématique de la poutre et les barres qui ne sont pas absolument nécessaires, donc que l'on pourrait enlever sans obtenir une déformation de la poutre. Par définition, dans une poutre en treillis v -fois statiquement indéterminée, il existe toujours un groupe d'au moins v barres que l'on pourrait supprimer sans provoquer une déformation de la poutre en treillis qui de statiquement indéterminée devient alors statiquement déterminée.

Considérons notre poutre en treillis à un moment déterminé auquel les surcharges extérieures ont atteint une certaine valeur. Chaque barre a subi un allongement permanent par suite de cette surcharge de telle sorte que l'effort S est atteint dans la barre. Si le système était totalement élastique, il existerait dans les barres, d'après la théorie usitée pour les systèmes hyperstatiques, un effort B . Il existe entre S , B et v la relation suivante:

$$S_i + \sum q_{ik} \cdot v_k = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (2)$$

Il est simple de comprendre la signification de q_{ik} qui représente l'effort dans la barre i lorsque le système n'est pas chargé (tous les $B = 0$) et que tous les allongements v , à l'exception de celui de la barre k sont nuls. Dans ce cas on prend $v_k = -1$. Si l'on introduit cette valeur dans l'équation 2), on obtient:

$$S_i = q_{ik}$$

Ceci nous montre que pour les poutres nécessaires $q_{ik} = 0$ et que $q_{ik} = q_{ki}$, ce qui fait que la somme dans l'équation 2) peut tout au plus s'étendre aux barres non nécessaires 1, 2, ... v . Du fait que la matrice est symétrique, c'est-à-dire que $q_{ik} = q_{ki}$, on peut constater que nous avons affaire à une réciprocité des efforts dans les barres, identique à la réciprocité des déplacements dans la loi de Maxwell. Cette loi qui peut être facilement contrôlée par la résolution des équations d'élasticité exprime que l'effort dans la barre i engendré par un allongement permanent $v_k = -1$ de la barre k (q_{ik}) est égal à l'effort dans la barre k engendré par un allongement $v_i = -1$ de la barre i (q_{ki}), c'est-à-dire que

$$q_{ik} = q_{ki}$$

Cette loi n'est évidemment valable que pour les systèmes hyperstatiques et seulement pour les barres non indispensables sans quoi notre équation devient:

$$q_{ik} = q_{ki} = 0$$

Introduisons dans l'équation (2) l'expression $\sigma_i = B_i - S_i$ nous obtenons le système d'équations:

$$\sigma_i = \sum q_{ik} \cdot v_k \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (3)$$

Le système des σ_i peut être défini comme un système de forces coercitives. Ces σ_i représentent les efforts qui existent dans les barres du système déchargé et qui sont provoqués par la déformation résultant d'une surcharge antérieure. Si l'on multiplie chaque équation de la série par v_i et que l'on additionne, on obtient la forme quadratique suivante:

$$J = \sum_i \sigma_i v_i = \sum_i \sum_k q_{ik} v_i v_k \quad (4)$$

J doit pour notre démonstration toujours être positif; il faudra donc choisir les v_k en conséquence. Pour le démontrer partons du principe des déplacements virtuels:

$$\sum S \Delta s = \sum P \delta$$

La sommation doit se faire, pour le membre de droite sur toutes les forces extérieures et pour le membre de gauche sur toutes les barres du treillis. Les S et les P représentent un système en équilibre. Les allongements Δs peuvent être choisis arbitrairement tout en étant cependant compatibles avec les conditions de connexité géométrique, ce qui signifie que dans un système v -fois statiquement indéterminé, on ne peut choisir plus de v valeurs arbitraires. Ces Δs représentent les valeurs de $v + \rho S$ et de ρB , allongements du système constitué respectivement d'un matériau idéalement plastique et totalement élastique. La différence $v + \rho (S - B) = v - \rho \sigma$ est certainement un système compatible d'allongements. Quant à δ , il exprime le déplacement du point d'application des forces extérieures dans la direction de ces forces lorsque chaque barre du treillis s'est allongée de la valeur Δs .

Posons $\Delta s = v - \rho \sigma$ et écrivons ensuite le principe des déplacements virtuels soit pour le système idéalement plastique, soit pour le système totalement élastique. Si nous remarquons que les efforts S et B sont engendrés par les mêmes forces extérieures et que dans les deux cas $\delta = v - \rho \sigma$, nous obtenons par soustraction:

$$\sum (v - \rho \sigma) \sigma = 0$$

d'où il résulte que:

$$J = \sum v \sigma = \sum \rho \sigma^2 = 0 \quad (4a)$$

ce qui démontre que J ne peut pas être négatif car $\rho = s/EF$ n'est pas négatif et par conséquent $\sum \rho \sigma^2$ ne peut être que positif. J ne peut disparaître que lorsque tous les σ sont nuls, ce qui ne prouve pas que dans ce cas tous les v seront nuls.

Considérons le treillis idéalement plastique au moment déterminé où les efforts dans les barres ont atteint la valeur S et les efforts dans les barres $1, 2, \dots, \mu$ la limite d'écoulement, $S_1 = T_1, S_2 = T_2, \dots, S_\mu = T_\mu$. Si l'on modifie la surcharge, S devient égal à $S + \Delta S$, v à $v + \Delta v$ et B à $B + \Delta B$. Nous pouvons écrire l'équation suivante:

$$(S_i + \Delta S_i) + \sum q_{ik} (v_k + \Delta v_k) = (B_i + \Delta B_i)$$

Soustrayons maintenant de cette équation l'équation (2), nous obtenons:

$$\Delta S_i + \sum q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mu) \quad (5)$$

et:

$$\Delta \sigma_i = \sum q_{ik} \Delta v_k \quad (6)$$

où $\Delta\sigma_i$ représente la modification des forces coércitives. La somme $\sum_{ik} \Delta v_k$ ne peut s'étendre qu'au nombre μ de barres car par la définition même d'un matériau idéalement plastique seules les barres pour lesquelles $S = T'$ et $S = T$ peuvent s'écouler. Il faut supposer que ΔB a été choisi suffisamment petit pour que seules les μ premières barres aient atteint la limite d'écoulement. Tant que ces barres seules s'écoulent, nous avons affaire à une phase bien déterminée. Une autre phase commence lorsque des barres cessent de s'écouler ou encore lorsque de nouvelles barres commencent à s'écouler. Pour la phase qui suit le moment que nous considérons le système d'équations 5) est valable si nous remarquons qu'ensuite des propriétés d'un matériau idéalement plastique, il peut se présenter les deux alternatives suivantes pour les μ premières barres:

ou bien $\Delta S_i = 0$ et Δv_i a la même signe que $S_i = T_i$
respectivement $S_i = T'_i$

ou bien $\Delta v_i = 0$ et Δv_i n'a pas le même signe que

$$S_i = T_i \text{ resp. } S_i = T'_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mu) \quad (5a)$$

Il n'y a que les μ premières équations de 5) qui sont intéressantes car lorsque nous avons tiré les Δv_k des μ premières équations, il n'y a plus aucune difficulté à tirer S_j ($\mu < j \leq r$) des autres équations. Pour cette phase qui a été engendrée par un ΔB relativement petit, l'équation suivante est valable

$$S_j + \Delta S_j \leq T_j \quad \text{resp. } T'_j.$$

3°) Il est facile de démontrer au moyen du principe des déplacements virtuels que l'équation 5a) suffit pour déterminer les valeurs ΔS de l'équation 5)

$$\Delta S_i + \sum_{ik} q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

Les charges extérieures $\bar{P} = P + \Delta P$, ainsi que les valeurs $S' = S + \Delta S'$ sont tout aussi admissibles que les valeurs $S'' = S + \Delta S''$ si les ΔS ne sont pas parfaitement déterminés. Il en serait de même pour les allongements $v' + \rho S'$ et $v'' + \rho S''$. Si l'on écrit le principe des déplacements virtuels dans les quatre combinaisons possibles, on obtient:

$$\begin{aligned} \sum S'' (v'' + \rho S'') &= \sum \bar{P} \delta'' & \sum S' (v'' + \rho S'') &= \sum \bar{P} \delta'' \\ \sum S'' (v' + \rho S') &= \sum \bar{P} \delta' & \sum S' (v' + \rho S') &= \sum \bar{P} \delta' \end{aligned}$$

Dans ces équations les déplacements de noeuds δ'' se rapportent à $v'' + \rho S''$ et δ' à $v' + \rho S'$. Si l'on soustrait de la différence des deux équations de droite la différence des deux équations de gauche, on obtient:

$$\sum (S'' - S') (v'' - v') + \rho (S'' - S')^2 = 0$$

ou encore:

$$\sum (\Delta S'' - \Delta S') (\Delta v'' - \Delta v') + \sum (\Delta S'' - \Delta S')^2 \rho = 0 \quad (7)$$

A cause du carré, $\sum (\Delta S'' - \Delta S')^2$ n'est plus négatif et il en est de même de $\sum (\Delta S'' - \Delta S') (\Delta v'' - \Delta v')$. Si la barre s'écoule dans les deux cas, $\Delta S'' = \Delta S' = 0$ tandis que si la barre ne s'écoule dans aucun cas $\Delta v'' = \Delta v' = 0$; la somme

disparaît donc chaque fois. Lorsque la barre s'écoule dans un cas et non dans l'autre, $\Delta S'' = 0$ et $\Delta v''$ a le même signe que $S = T$ tandis que $\Delta v' = 0$ et $\Delta S'$ a un signe opposé à celui de $S = T$. Dans ce cas le premier terme de notre équation se réduit à $-\Delta S' \Delta v''$. S' et v'' ne pouvant avoir le même signe, l'expression $-\Delta S' \Delta v''$ ne peut être négative. Lorsque S'' et S' n'ont pas la même valeur, l'équation 7) est formée par une somme de termes positifs et par conséquent ne peut être nulle que si $S'' = S'$. Une nouvelle phase bien déterminée ne peut se produire que lorsque les ΔB ou plus exactement les dB/dt sont donnés. Tout ceci nous démontre que les tensions dans les barres sont parfaitement déterminées mais non les allongements permanents. Il est possible dans certains cas d'obtenir plusieurs solutions pour les Δv .

Au début de cette phase, les λ premières barres doivent avoir atteint la limite d'écoulement. Il s'agit de trouver les solutions des deux équations suivantes, l'une pour les barres qui s'écoulent.

$$\sum_1^{\lambda} q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i = \Delta \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda) \quad (8a)$$

l'autre pour les barres qui ne s'écoulent pas encore:

$$\Delta S_j + \sum_1^{\lambda} q_{jk} \Delta v_k = \Delta B_j \quad (\lambda < j \leq r). \quad (8b)$$

D'après une loi connue de l'algèbre, les équations 8a) ne peuvent avoir des solutions bien déterminées que lorsque la matrice $(q_{11} \dots q_{\lambda\lambda})$ n'est pas singulière, c'est-à-dire lorsque les déterminants

$$\begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1\lambda} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{\lambda 1} & \dots & q_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

ne disparaissent pas. Il est suffisant mais non pas nécessaire pour cela que la matrice $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$ ne soit pas singulière. Dans ce cas, $\Delta v = 0$ est la seule condition pour que tous les $\Delta B = 0$. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation de la forme quadratique

$$J = \sum \sum q_{ik} \Delta v_i \Delta v_k$$

s'annule.

Les Δv ne sont plus déterminés lorsque la matrice $(q_{11} \dots q_{\lambda\lambda})$ est singulière et est du rang $\vartheta < \lambda$, c'est-à-dire lorsque non seulement tous ses déterminants mais aussi tous les déterminants mineurs de plus de ϑ rangées sont nuls quand au moins une ϑ rangée est nulle. Les solutions peuvent être représentées au moyen de l'emploi des constantes arbitraires, c_p dans la forme:

$$\Delta v_i = \Delta v_i^* + \sum_{p=\vartheta+1}^{\lambda} c_p v_{ip} \quad (9)$$

où les Δv_i^* sont les solutions du système

$$\sum q_{ik} \Delta v_k^* = \Delta B_i = \Delta \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, \vartheta)$$

lorsque $\Delta v_k^* = 0$ pour $k = \vartheta + 1, \vartheta + 2, \dots, \lambda$

Comme nous devons avoir dans ce cas au moins une matrice $(q_{11} \dots q_{\vartheta \vartheta})$ non singulière, les solutions Δv_i^* doivent être parfaitement déterminées. Les v_{ip} sont les solutions du système d'équations homogènes

$$\sum q_{ik} v_{kp} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda)$$

qui a comme solution $\lambda - \vartheta$ différents systèmes fondamentaux : v_{kp} ($p = \vartheta + 1, \vartheta + 2, \dots, \lambda$). On peut démontrer que ces v_{kp} satisfont aussi aux autres équations

$$\sum q_{ik} v_{kp} = 0 \quad (i = \lambda + 1, \lambda + 2, \dots, r).$$

Ceci résulte du fait que la matrice

$$\begin{array}{ccccccc} q_{11} & \dots & q_{1\lambda} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & & & & \\ q_{r1} & \dots & q_{r\lambda} & & & & \end{array} \quad (r > \lambda)$$

ne peut pas être d'un rang supérieur à ϑ , ce qui signifie que tous les déterminants mineurs d'un nombre de rangées et de colonnes plus grand que ϑ ne peuvent pas être d'un rang supérieur à ϑ lorsque le déterminant principal a le rang ϑ et que la forme quadratique s'y rapportant $J = \sum \sum q_{ik} v_i v_k$ est nettement positive.

Nous avons de nouveau deux cas à considérer, ou bien il est impossible de choisir les valeurs arbitraires c_p de telle sorte que l'expression $\sum c_p v_{ip}$ ait le signe exigé par l'alternative 5a). Si l'équation

$$\Delta v_i = \Delta v_i^* + \sum c_p v_{ip}$$

a le signe exigé, l'équation

$$\Delta v_i = \Delta v_i^* + \sum (c_p + \delta c_p) v_{ip}$$

ne peut avoir le même signe que si ϑ_c est choisi suffisamment petit. Dans ce cas les Δv_i ne sont plus parfaitement déterminés mais cependant entre des limites finies déterminées. Supposons maintenant que $\sum c_p v_{ip}$ remplisse la condition exigée pour le signe, l'expression $\sum k c_p v_{ip}$ a la même signe pour un k positif quelconque. Si k devient infiniment grand, la solution

$$\Delta v_i = \Delta v_i^* + k \sum c_p v_{ip}$$

devient elle-même infiniment grande.

Pour la démonstration de la loi que nous avons énoncée au début, il est encore utile de connaître le fait suivant. Si les valeurs z_i et w_i sont liées par la relation

$$z_i = \sum_{k=1}^r q_{ik} w_k \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

l'équation suivante est valable

$$\sum_{k=1}^r z_k v_{kp} = 0 \quad (10)$$

On peut contrôler l'exactitude de cette équation en y introduisant les valeurs

$$z_k = \sum_i q_{ki} w_i.$$

Il en résulte que

$$\sum_k z_k v_{kp} = \sum_k \sum_i q_{ki} w_i v_{kp}$$

et en modifiant la suite des sommations

$$\sum_i w_i \sum_k q_{ik} v_{kp}.$$

Comme par définition $\sum_k q_{ik} v_{kp} = 0$ il en résulte que $\sum_k z_k v_{kp} = 0$.

Pour compléter notre exposé faisons encore la remarque suivante. Ecrivons le principe des déplacements virtuels avec les allongements ΔB_p , ce qui est certainement compatible avec les conditions de connexité géométrique de la poutre en treillis. Utilisons à cet effet une première fois les efforts ΔS produits par la charge ΔP et une seconde fois les efforts ΔB . Soustrayons les deux équations et nous obtenons en remplaçant σ par sa valeur ($\sigma = \Delta S - \Delta B$)

$$\sum \Delta \sigma \Delta B_p = 0.$$

Il en résulte que $\Delta \sigma$ et ΔB ne peuvent jamais avoir le même signe pour toutes les barres sans quoi la somme serait toujours positive et ne pourrait pas être nulle, ainsi que nous l'exigeons, puisque ρ est toujours positif. C'est là l'expression de la faculté d'adaptation d'un système constitué par un matériau idéalement plastique. Dans un tel système on constate que les tensions diminuent en certains points pour augmenter en d'autres.

4) Les résultats que nous avons obtenus jusqu'à présent seront peut-être rendus plus expressifs pour l'ingénieur si nous expliquons les relations qui existent au cours d'une phase déterminée dans la poutre en treillis que nous avons considérée. Dans ce but nous modifions notre treillis en coupant certaines barres non indispensables et en installant à la coupure un mécanisme permettant un déplacement dans une seule direction déterminée. Pour certaines barres on admettra que seul un écartement des deux bords de la coupure doit être possible. Ceci sera réalisable en coupant la barre perpendiculairement à son axe et en posant les deux extrémités bout à bout sans aucune liaison. Pour d'autres barres on ne tolérera qu'un rapprochement des deux parties, ce qui est facile à réaliser en remplaçant la barre considérée par un câble.

Appliquons à notre treillis les surcharges ΔP , les efforts dans les barres de notre nouveau système seront ΔS . Il existe entre ces ΔS et les ΔB que nous avons définis plus haut la relation suivante:

$$\Delta S_i + \sum_i^{\mu} q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Dans cette équation les Δv représentent les déplacements opposés des bords de la coupure des μ premières barres. Le système d'équations suivant est valable pour les μ premières barres

$$\Delta S_i + \sum_k q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mu)$$

Dans cette équation il y a deux cas à considérer

$$\begin{aligned} &\text{ou } \Delta S = 0 \text{ et dans ce cas } \Delta v \geq 0 \\ &\text{ou } \Delta S \geq 0 \text{ et dans ce cas } \Delta v = 0 \end{aligned}$$

Le sens de l'inégalité est donné par le genre du mécanisme construit. Ce sont là les mêmes équations que celles que nous avons posées 5) et 5a) pour le système constitué par un matériau idéalement plastique.

Nous pouvons donc dire que le treillis constitué par un matériau idéalement plastique peut être remplacé au début d'une phase par un nouveau treillis dans lequel nous avons appliqué le mécanisme en question aux barres qui ont atteint la limite d'écoulement dans le treillis primitif. Si l'on surcharge ce nouveau treillis avec l'augmentation des forces extérieures provoquant cette phase, les efforts ΔS dans les barres seront égaux aux modifications des efforts se produisant dans les barres du treillis primitif au cours de la même phase. Si les barres coupées n'ont pas une matrice singulière $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$, nous pouvons affirmer que le nouveau treillis (sans tenir compte du mécanisme installé) n'a subi aucune déformation, car dans ce cas la solution du système d'équations homogènes

$$\sum q_{ik} v_{kp} = 0$$

est que tous les v soient nuls. Nous pouvons constater encore que le système:

$$\Delta S_i + \sum q_{ik} \Delta v_k = B_i$$

ne peut posséder pour une valeur quelconque de ΔB qu'une solution très déterminée pour les ΔS et les Δv . Admettons que la matrice $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$

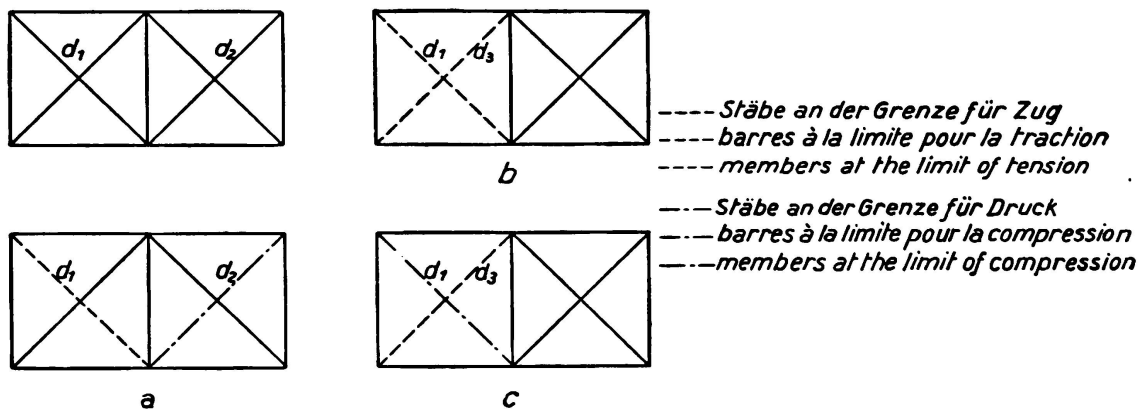


Fig. 3.

est singulière et de rang ϑ , nous avons alors deux cas à considérer. Ou bien le nouveau treillis est «bloqué de lui-même» par le mécanisme installé, c'est-à-dire que les solutions du système d'équations homogènes n'ont pas le signe imposé par le mécanisme. Le système est indéformé et l'on peut résoudre les équations pour tous les ΔB possibles, même lorsque les Δv ne sont pas parfaitement déterminés mais se trouvent cependant entre deux limites finies. Ou bien le nouveau treillis est déformé et il existe des solutions du système d'équations homogènes, solutions ayant le signe imposé. On ne peut plus choisir les ΔB arbitrairement dans ce cas car les Δv peuvent croître au-dessus de toute limite finie. Illustrons cette théorie par l'exemple d'un cas déterminé pour lequel nous ferons quelques considérations d'ordre cinématique. Prenons comme exemple la poutre en treillis de la figure 3. Supposons que les deux barres d_1 et d_2 ont

atteint la limite d'écoulement; notre nouveau treillis sera celui de la figure 3a. Il ne sera pas déformé, et les mécanismes peuvent être établis aux coupures. La matrice

$$\begin{array}{cc} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{array}$$

n'est en aucun cas singulière et comme la surcharge variera au cours de la phase qui suivra, nous aurons un état d'équilibre. Si ce sont les barres d_1 et d_3 qui atteignent la limite d'écoulement (fig. 3b), la matrice

$$\begin{array}{cc} q_{11} & q_{13} \\ q_{31} & q_{33} \end{array}$$

est singulière et le treillis est d'abord déformé. Mais si par contre les deux barres atteignent en même temps soit la limite de compression T' , soit la limite de traction T , les mécanismes appropriés supprimeront la possibilité de déformation et, à une variation quelconque des surcharges correspondra un état d'équilibre car nous avons affaire en ce cas à un système bloqué de lui-même. Dans le cas où une barre atteint la limite de compression et l'autre celle de traction (fig. 3c), lors d'une modification de la surcharge entraînant un véritable écoulement des deux barres, les ΔB doivent être tels que l'équilibre soit possible et qu'il existe des solutions. Les Δv peuvent dans ce cas dépasser toutes les limites finies.

5) Après ces différentes remarques, nous allons démontrer la loi que nous avons énoncée au début de ce travail. Cette loi est la suivante: Dans une poutre en treillis constituée par un matériau idéalement plastique, chargée de forces variables quelconques et dont les tensions dans les barres se trouvent dans un intervalle fixé d'avance $B_i^{\max} \geq B_i \geq B_i^{\min}$, les déformations permanentes tendent vers une limite finie pour une surcharge variant un nombre suffisant de fois. Nous devons supposer cependant qu'il est possible de trouver un système de forces coercitives $\bar{\sigma}$ pour lesquelles dans toutes les barres

$$-\bar{\sigma}_i + B_i^{\max} \leq T_i \quad \text{et} \quad -\bar{\sigma}_i + B_i^{\min} \geq T'_i.$$

Posons maintenant:

$$B_i^{\max} - T_i = t_i \quad \text{et} \quad B_i^{\min} - T'_i = t'_i.$$

il doit exister un système de forces coercitives $\bar{\sigma}$ pour lequel l'expression suivante est valable:

$$t'_i \leq \bar{\sigma}_i \leq t_i.$$

Supposons qu'un tel système de $\bar{\sigma}$ nous soit donné, formons les valeurs

$$\bar{B}_i^{\max} = \bar{\sigma}_i + T_i \quad \text{resp.} \quad \bar{B}_i^{\min} = \bar{\sigma}_i + T'_i$$

il en résulte clairement que si notre loi est exacte, elle est aussi valable pour des surcharges variables B_i

$$\bar{B}_i^{\max} \geq B_i \geq \bar{B}_i^{\min}$$

expression dans laquelle

$$\bar{B}_i^{\max} \geq B_i^{\max} \quad \text{et} \quad B_i^{\min} \geq \bar{B}_i^{\min}$$

(voir la figure 4).

Considérons une poutre en treillis après une série de variations de la surcharge. Il se peut qu'après l'expiration de φ phases, le système présente, après la phase φ , les forces coercitives $\sigma^{(\varphi)}$. Alors on pourra observer, au début de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase des barres pour lesquelles $\sigma^{(\varphi)} > \bar{\sigma}$ commencent à couler lorsque S est devenu égal à T' . Par contre les valeurs $S = T$ sont exclues car même quand $B = \bar{B}^{\max}$, l'effort dans les barres $S = \bar{B}^{\max} - \sigma^{(\varphi)}$ est plus petit que $T = \bar{B}^{\max} - \bar{\sigma}$. Une telle barre ne peut avoir pour $\sigma^{(\varphi)} > \bar{\sigma}$ qu'un allongement permanent négatif au cours de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase. Cependant

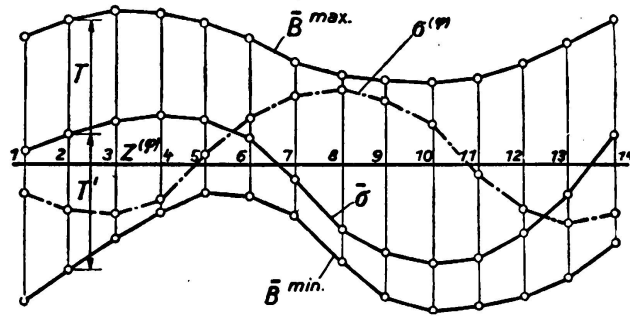


Fig. 4.

la condition $\sigma > \bar{\sigma}$ doit être conservée durant toute la phase pour une barre qui s'écoule, il en résulte encore que pour la fin de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase, respectivement de la $(\varphi + 2)^{\text{ème}}$ phase, la relation $\sigma^{(\varphi+1)} \geq \bar{\sigma}$ doit toujours exister. Inversément $\Delta v^{(\varphi+1)}$ doit être plus grand que 0 pour les barres pour lesquelles $\sigma^{(\varphi)} < \bar{\sigma}$. En résumé nous avons pour une barre qui s'écoule au cours de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase

$$\left. \begin{aligned}
 & z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} > 0 \\
 & \Delta v^{(\varphi+1)} > 0 \\
 \text{et en outre} \\
 & z^{(\varphi+1)} = z^{(\varphi)} - \Delta \sigma^{(\varphi+1)} \geq 0 \\
 \text{et lorsque} \\
 & z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} < 0 \\
 & \Delta v^{(\varphi+1)} < 0 \\
 \text{et en outre} \\
 & z^{(\varphi+1)} = z^{(\varphi)} - \Delta \sigma^{(\varphi+1)} \leq 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Il est entendu qu'au cours des phases qui suivent il ne peut se produire aucune modification des forces coercitives, lorsque pour toutes les barres $z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} = 0$. Notre démonstration se divise en deux parties, dans la première nous démontrerons que la condition $\bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} = z^{(\varphi)} = 0$ se produit effectivement une fois pour toutes les barres et dans la seconde que les allongements permanents produits jusqu'alors ne peuvent acquérir qu'un accroissement fini.

Entre les grandeurs $\bar{\sigma}$ et les allongements permanents $\bar{v}$ il existe évidemment la relation donnée par le système d'équations suivant:

$$\bar{\sigma}_i = \sum q_{ik} \bar{v}_k \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

tandis que les allongements $v^{(\varphi)}$ au début de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase se rapportent aux forces coercitives $\sigma^{(\varphi)}$ selon le système d'équations:

$$\sigma_i^{(\varphi)} = \sum q_{ik} \bar{v}_k^{(\varphi)} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

Les sommes ci-dessus s'étendent à toutes les barres et de même que dans les sommes suivantes, il n'est pas exclu que certains $\bar{v}_k$, respectivement v disparaissent. Désignons par w et z les expressions suivantes

$$w^{(\varphi)} = \bar{v} - v^{(\varphi)} \quad \text{et} \quad z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)}$$

nous obtenons:

$$z_i^{(\varphi)} = \sum q_{ik} w_k^{(\varphi)}$$

et de même pour la fin de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase

$$z_i^{(\varphi+1)} = \sum q_{ik} w_k^{(\varphi+1)}$$

où

$$z_i^{(\varphi+1)} = z_i^{(\varphi)} - \Delta \sigma_i^{(\varphi+1)} \quad \text{et} \quad w_i^{(\varphi+1)} = w_i^{(\varphi)} - \Delta v_i^{(\varphi+1)} \quad (12)$$

Considérons maintenant la différence des deux formes quadratiques

$$\Delta K^{(\varphi+1)} = K^{(\varphi+1)} - K^{(\varphi)} = \sum (z^{(\varphi+1)} w^{(\varphi+1)} - z^{(\varphi)} w^{(\varphi)})$$

et remplaçons-y z et w par leur valeur donnée par l'équation (12) nous obtenons:

$$\Delta K^{(\varphi+1)} = - \sum z^{(\varphi)} \Delta v^{(\varphi+1)} - \sum \Delta \sigma^{(\varphi+1)} w^{(\varphi)} + \sum \Delta v^{(\varphi+1)} \Delta \sigma^{(\varphi+1)}$$

Les deux premières sommes sont maintenant identiques si l'on remplace dans la première $z^{(\varphi)}$ par $\sum q_{ik} w_k^{(\varphi)}$ et dans la seconde $\Delta \sigma^{(\varphi+1)}$ par $\sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)}$, l'on a dans les deux cas

$$\sum \sum q_{ik} \Delta v_i^{(\varphi+1)} w_k^{(\varphi)}$$

et l'on obtient:

$$\Delta K^{(\varphi+1)} = \sum (-2 z^{(\varphi)} + \Delta \sigma^{(\varphi+1)}) \Delta v^{(\varphi+1)} = - \sum (z^{(\varphi+1)} + z^{(\varphi)}) \Delta v^{(\varphi+1)}$$

D'après ce qui a déjà été dit, $z^{(\varphi+1)}$ ne peut jamais avoir un signe contraire à celui de $\Delta v^{(\varphi+1)}$ et $z^{(\varphi)}$ le même signe que $\Delta v^{(\varphi+1)}$ de telle sorte que $\Delta K^{(\varphi+1)}$ ne peut jamais être positif. Il en résulte que K ne peut jamais croître d'une phase à l'autre. Si les forces coercitives varient, K décroît et lorsque le système des forces coercitives reste constant au cours d'une phase, K reste lui-même constant. Ainsi que nous le démontrerons plus tard, ce dernier cas n'est possible que si tous les Δv s'annulent au cours de la phase considérée, c'est-à-dire que si K est nul. Puisque l'expression K lorsqu'elle varie ne peut que décroître, et ne peut d'après les équations 4), resp. 4a), jamais être négative, elle doit certainement être une fois nulle. Mais si K est nul, tous les z sont certainement nuls et à partir de ce moment-là il ne peut se produire aucun nouveau changement.

Il nous reste encore à démontrer que les allongements permanents se produisant alors $\bar{v} = \sum \Delta v$ ne sont pas infinis. Aussi longtemps que les $\Delta z^{(\varphi)} = \sigma^{(\varphi)} - \sigma^{(\varphi+1)}$ sont finis, les Δv le sont aussi. Il y a cependant une exception lorsque l'on a une matrice singulière pour laquelle les solutions

primaires $\sum_p c_p v_{ip}$ ont déjà le signe exigé. Dans ce cas seulement, pour des $\Delta z^{(\varphi)}$ finis on peut avoir des Δv infinis. Ce cas ne peut exister, si l'on tient compte de notre hypothèse sur l'existence d'un système de forces coercitives $\bar{\sigma}$ que lorsque tous les z sont nuls. Donc les z_i doivent avoir le même signe que les Δv_i c'est-à-dire dans notre cas le même signe $\sum_p c_p v_{ip}$.

Mais
$$\sum_p \sum_i c_p v_{ip} z_i = \sum_p c_p \sum_i z_i v_{ip} = 0$$

parce que d'après l'équation 10) $\sum_i z_p v_{ip} = 0$

Il en résulte que z_i et $\sum_p c_p v_{ip}$ ne peuvent pas avoir le même signe pour tous les i car sans cela $\sum_p \sum_i c_p v_{ip} z_i$ serait certainement positif et non pas nul. Nous pouvons conclure que le cas de phases au cours desquelles les Δv croissent au-dessus de toute mesure est impossible. Ce n'est que lorsque tous les z sont nuls, c'est-à-dire lorsque l'état des forces coercitives est déjà atteint que nous pouvons avoir des Δv infinis. Ceci ne peut se produire que lorsque la surcharge B a atteint les limites $\bar{B}^{\max}$ ou $\bar{B}^{\min}$ à μ endroits du système hyperstatique dont la matrice $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$ est singulière et dont le nouveau treillis n'est pas bloqué de lui-même. Pour terminer nous devons encore ajouter que les B peuvent s'approcher à volonté des limites $\bar{B}^{\max}$ et $\bar{B}^{\min}$ sans jamais les atteindre ou que s'ils peuvent les atteindre durant un intervalle de temps infiniment petit dt , il ne peut se produire alors aucune déformation permanente infinie pour une vitesse d'écoulement finie. D'ailleurs de tels allongements permanents croissant au delà de toute limite sont exclus par la solidification du matériau.

Nous avons déjà dit dans l'introduction de notre travail que cette démonstration peut être faite d'une manière tout-à-fait analogue pour les systèmes à barres rigides. Il est d'autre part vraisemblable que la loi que nous avons démontrée ici pour la poutre en treillis soit aussi valable pour la poutre continue constituée par un matériau idéalement plastique pour autant que l'on définisse les propriétés d'un tel milieu idéalement plastique.

B) Matériau à zone de solidification linéaire.

B) Baustoff mit linearem Verfestigungsbereich.

B) Material with Linear Range of Hardening.

Dans un autre rapport l'auteur s'est occupé de la théorie des systèmes hyperstatiques constitués par un matériau idéalement plastique. Il a démontré que le choix d'une loi d'élasticité avait une grande importance et il veut rechercher dans ce qui suit, la forme à donner à la loi de *H. Bleich* ainsi que le procédé de l'équilibre plastique qui s'y rapporte, lorsque l'on emploie un matériau avec zone de solidification linéaire. Il s'agit donc d'une généralisation des recherches de *M. Grüning* pour une surcharge variable quelconque. De même que dans le rapport cité il faut donner une nouvelle base de la théorie qui, malgré la généralisation, doit représenter une simplification importante vis-à-vis à la démonstration actuelle.

Les recherches suivantes concernent donc les systèmes hyperstatiques, soumis à une surcharge variable quelconque et constitués d'un matériau dont le dia-

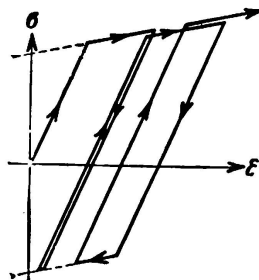


Fig. 1.

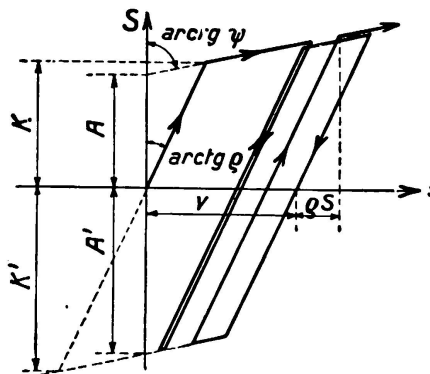


Fig. 2.

gramme des tensions est représenté à la fig. 1. Afin de simplifier le calcul, nous avons apporté une idéalisation plus poussée que l'hypothèse de *M. Grüning*.

Si nous limitons nos recherches, ainsi que l'ont fait les deux auteurs cités, aux poutres en treillis, c'est afin d'avoir un nombre fini de variables. Ainsi les efforts *S* et les allongements *s* sont reliés entre eux d'après la fig. 2 par la même relation que les tensions et les déformations. L'allongement *s*, produit par un certain effort *S*, est donné par la relation

$$s = v + \rho \cdot S \quad (1)$$

où *v* représente l'allongement «permanent» et $\rho \cdot S$ l'allongement «élastique». $\rho = l/EF$ est une constante dépendant de la longueur de la barre *l*, de sa section *F* et du module d'élasticité *E*, cette constante est naturellement toujours positive. Ainsi que le montre la fig. 2, *v* reste invariable aussi longtemps que *S* se trouve dans l'intervalle

$$c v + K' < S < c v + K \quad (2)$$

où, ainsi que l'on peut le trouver facilement:

$$c = \frac{1}{\psi - \rho}, \quad K' = A' \frac{\psi}{\psi - \rho} \quad \text{et} \quad K = A \frac{\psi}{\psi - \rho}$$

c est dans tous les cas positif tandis que K' est négatif et K positif.

Lorsque S atteint une de ces limites, dans l'intervalle de temps suivant, v ne reste constant que lorsque la valeur absolue de S ne croît pas, donc lorsque la modification ΔS n'a pas le même signe que $S = c v + K'$ ou $S = c v + K$. Mais lorsque la valeur absolue de S croît, ΔS a par conséquent le même signe que S et Δv croît en valeur absolue et l'on a pour la variation de Δv l'équation:

$$\Delta S = c \cdot \Delta v \quad (2a)$$

ou Δv à cause du signe positif de c doit toujours posséder le même signe que ΔS et aussi que S .

Nous désignerons dans la suite par matériau complètement élastique un matériau pour lequel la loi de *Hooke* est valable sans limite. Dans ce cas on aurait, pour une surcharge déterminée, les efforts B tels qu'ils sont fournis par la théorie usuelle des systèmes hyperstatiques. Entre ces B et les efforts S qui sont engendrés dans notre système par la même surcharge, on a la relation suivante:

$$S_i + \sum q_{ik} v_k = B_i \quad (3)$$

La signification de q_{ik} est facile à voir. Dans le système non chargé, complètement élastique (tous les $B = 0$) q_{ik} représente l'effort dans la barre i lorsque tous les v sont nuls et qu'une seule barre K a subi un allongement permanent $v_k = -1$. On peut très simplement démontrer que $q_{ik} = q_{ki}$ car d'après un théorème semblable à celui de *Maxwell*, l'effort S_i engendré par $v_k = -1$, (q_{ik}) est identique à l'effort S_k dans la barre k produit par un allongement $v_i = -1$ de la barre i , (q_{ki}). La matrice suivante est alors symétrique

$$\begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{r1} & \dots & q_{rr} \end{vmatrix}$$

elle possède encore une autre propriété caractéristique, à savoir que la forme quadratique:

$$J = \sum \sum q_{ik} v_i v_k \geq 0$$

est semi par définition positive, c'est-à-dire que pour toutes les valeurs de v_i que l'on peut choisir, l'expression de J ne peut en aucun cas être négative. La démonstration, au moyen du principe des déplacements virtuels, n'en est pas difficile et se trouve dans le rapport cité plus haut sous (3).

Lorsque les forces extérieures varient, les efforts B varient de ΔB dans le système complètement élastique, les efforts S de ΔS dans le système élastico-plastique et les allongements permanents v de Δv . Aussi longtemps que les ΔB se trouvent dans les limites suffisamment petites, les Δv ne se produiront que pour ces barres elles-mêmes; nous parlons alors d'une certaine phase; une nouvelle phase ne commence que lorsque les allongements permanents commencent

à varier pour d'autres nouvelles barres ou lorsque pour certaines barres les Δv disparaissent.

Nous admettons qu'au début d'une certaine phase (φ) les valeurs $S^{(\varphi)}$, $B^{(\varphi)}$ et $v^{(\varphi)}$ sont données et qu'alors les μ premières barres du treillis ont précisément atteint les valeurs limites $S^{(\varphi)} = cv^{(\varphi)} + K$ ou $S^{(\varphi)} = cv^{(\varphi)} + K'$. Si maintenant les $B^{(\varphi)}$ varient de $\Delta B^{(\varphi+1)}$ dans la phase suivante ($\varphi + 1$), dans toutes les barres en général les $S^{(\varphi)}$ se modifieront de $\Delta S^{(\varphi+1)}$; de nouveaux allongements permanents ne peuvent se produire que dans les μ premières barres. On a donc le système d'équation:

$$S^{(\varphi)} + \Delta S^{(\varphi+1)} + \sum q_{ik} (v_k^{(\varphi)} + \Delta v_k^{(\varphi+1)}) = B_i^{(\varphi)} + \Delta B_i^{(\varphi+1)}$$

et si l'on soustrait de cette relation l'équation (3), on obtient

$$\Delta S_i^{(\varphi+1)} + \sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)} = \Delta B_i^{(\varphi+1)} \quad (i = 1, 2 \dots r) \quad (5)$$

Il suffit de considérer ici les μ premières équations qui contiennent cependant 2μ inconnus, à savoir les valeurs ΔS et les valeurs Δv . On peut montrer que l'on a pour les premières barres les alternatives suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta S \text{ a un signe opposé à } S \text{ et alors } \Delta v &= 0, \text{ ou} \\ \Delta S \text{ a le même signe que } S \text{ et alors } \Delta v &\text{ suivant l'équation (2a)} \\ \Delta S = c \Delta v \text{ et par conséquent } \Delta v &\text{ a le même signe que} \\ \Delta S \text{ et aussi } S, \end{aligned} \quad (6)$$

il est nécessaire et suffisant d'exiger des solutions parfaitement déterminées du système d'équation (5). La démonstration peut en être faite comme pour un matériau idéalement plastique [confère sous (3) du rapport cité].

Si au cours de la $(\varphi + 1)^{\text{ème}}$ phase les premières barres des μ barres dont nous avons parlé, acquièrent de nouveaux allongements permanents, il s'agit de résoudre le système d'équation

$$c_i \Delta v_i^{(\varphi+1)} + \sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)} = \Delta B_i^{(\varphi+1)} \quad (i = 1, 2 \dots \lambda) \quad (7)$$

qui résulte de (5) en remplaçant $\Delta S_i = c_i \Delta v_i$. Evidemment Δv_i ($i = 1, 2 \dots \lambda$) doit posséder le même signe que $S_i^{(\varphi)} = c_i v_i^{(\varphi)} + K_i$ ou que $S_i^{(\varphi)} = c_i v_i^{(\varphi)} + K'_i$ à la fin de la phase (φ).

La forme quadratique qui se rapporte à la matrice:

$$\begin{vmatrix} q_{11} + c_1 & \dots & q_{1\lambda} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{\lambda 1} & \dots & q_{\lambda\lambda} + c_\lambda \end{vmatrix}$$

est

$$J = \sum \sum q_{ik} v_i v_k + \sum c_i v_i^2$$

forme certainement positive par définition, c'est-à-dire que pour tous les v que l'on peut choisir J a toujours une valeur positive et ne peut disparaître que lorsque tous les v sont nuls. Car si la première somme déjà devait disparaître J deviendrait positif à cause de la deuxième somme qui doit toujours être positive. D'après une loi connue de l'algèbre, sur les systèmes d'équation linéaires, on obtient pour les systèmes de valeurs ΔB_i un seul système de Δv_k ; en particulier dans ce cas pour «tous les $\Delta B_i = 0$ » on ne peut avoir comme seule solution

que tous les $\Delta v_i = 0$. Si l'on détermine les Δv au moyen des équations (7) on obtient $\Delta S_i^{(\varphi+1)} = c_i \Delta v_i^{(\varphi+1)}$, efforts dans les barres $i = 1, 2 \dots \lambda$. Pour les autres barres on a

$$\Delta S_j^{(\varphi+1)} = \Delta B_j^{(\varphi+1)} - \sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)} \quad (j = \lambda + 1, \lambda + 2 \dots \mu)$$

où pour les barres $\lambda + 1, \lambda + 2 \dots \mu$, $\Delta S_j^{(\varphi+1)}$ ne doit pas posséder le même signe que $S_j^{(\varphi)}$. Pour les barres $\mu + 1, \mu + 2 \dots r$ on doit avoir finalement:

$$K'_i + c_i (v_i^{(\varphi)} + \Delta v_i^{(\varphi+1)}) \leq S_i^{(\varphi)} + \Delta S_i^{(\varphi+1)} \leq c_i (v_i^{(\varphi)} + v_i^{(\varphi+1)}) + K_i.$$

Nous ajoutons que les grandeurs $-\sigma_i^{(\varphi)}$ que nous voulons désigner par «forces coercitives» et qui sont données par:

$$\sigma_i^{(\varphi)} = - \sum q_{ik} v_k^{(\varphi)}$$

représentent les efforts dans les barres du système complètement élastique lorsque chaque barre a subi un allongement permanent $v_k^{(\varphi)}$. L'équation suivante est naturellement aussi valable:

$$\Delta \sigma_i^{(\varphi+1)} = \sum q^{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)}$$

Nous montrons maintenant que l'on a une loi analogue à la loi de *H. Bleich*, pour les systèmes constitués d'un matériau idéalement plastique.

Cette loi est:

Dans un treillis dans lequel il existe entre les efforts dans les barres et les allongements la relation donnée par la fig. 2, on obtiendra, pour une surcharge variable quelconque et après un nombre de variations suffisamment grand, des limites finies déterminées $\bar{v}$ des allongements permanents qui ne varient plus pour de nouvelles variations de la surcharge lorsque la condition suivante est remplie pour chaque barre:

$$B_i^{\max} - B_i^{\min} \leq K_i - K'_i$$

Les $B_i^{\max}$ et $B_i^{\min}$ représentent les valeurs maxima et minima des efforts dans les barres pour un matériau complètement élastique. Le système se comportera, lorsque les allongements permanents auront atteint la valeur $\bar{v}$, comme un système constitué d'un matériau complètement élastique.

Cette loi se démontre comme l'auteur l'a fait sous (3) dans le rapport cité pour un matériau idéalement plastique. Si l'on remplace le signe d'inégalité par le signe d'égalité, notre loi doit aussi être valable pour le cas limite:

$$\bar{B}_i^{\max} - \bar{B}_i^{\min} = K_i - K'_i;$$

il est certain qu'elle est aussi valable pour les valeurs plus petites $B_i^{\max} - B_i^{\min}$.

Dans la fig. 3 on a porté aux points $1, 2 \dots r$ les efforts $\bar{B}_i^{\max}$ et $\bar{B}_i^{\min}$. On a représenté aussi l'état à la fin de la phase φ , on doit avoir à ce moment les valeurs $B_i^{(\varphi)}$. On doit avoir le système de forces coercitives $\sigma_i^{(\varphi)}$ correspondant aux allongements permanents $v_i^{(\varphi)}$. Les véritables efforts dans les barres sont donnés par $S_i^{(\varphi)} B_i^{(\varphi)} - \sigma_i^{(\varphi)}$. Dans la phase suivante $(\varphi + 1)$, seules supporteront des allongements permanents $v_i^{(\varphi)} + \Delta v_i^{(\varphi+1)} = v_i^{(\varphi+1)}$ les barres pour

lesquelles $B_j^{(\varphi)}$ coïncide avec une limite de l'intervalle $\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K_i$ on $\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K'_i$; la grandeur de l'intervalle est par hypothèse

$$(\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K_i) - (\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K'_i) = K_i - K'_i = \bar{B}_i^{\max} - \bar{B}_i^{\min}.$$

Pour la barre représentée par exemple, ceci n'est valable que pour la limite supérieure, où $B_j^{\max} - (\sigma_j^{(\varphi)} + c_j v_j^{(\varphi)} + K_j) > 0$ tandis que la limite inférieure ne peut pas être atteinte par $B_j^{(\varphi)}$. Par conséquent on ne peut avoir que des $\Delta v_j^{(\varphi+1)}$ positifs pour la barre j au cours de la $(\varphi + 1)$ ème phase.

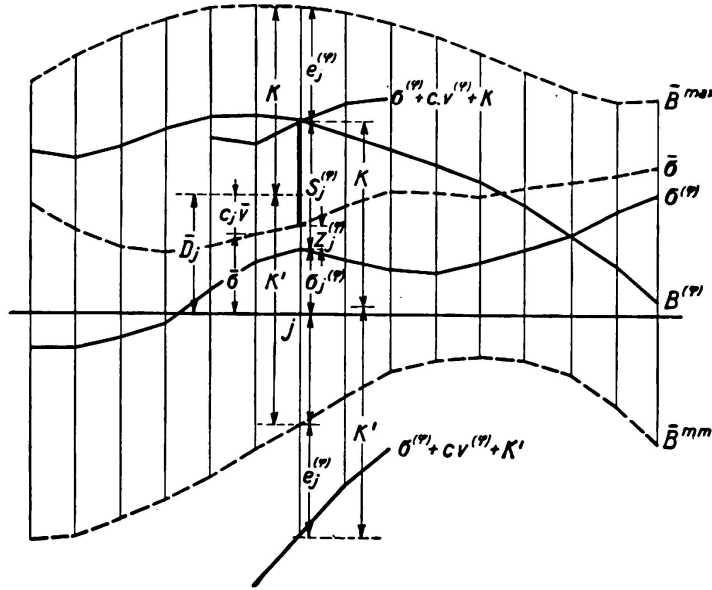


Fig. 3.

Soit $\bar{\sigma}$ le système de forces coercitives qui appartient aux $\bar{v}$ dont nous avons déjà parlé et qui se présente après un nombre suffisamment grand de variations de la surcharge; de la fig. 3 on peut tirer sans autre pour chaque barre i:

$$\bar{\sigma}_i + c_i \bar{v}_i = \bar{B}_i^{\max} - K_i = \bar{B}_i^{\min} - K'_i = \bar{D}_i$$

Comme $\bar{\sigma}_i = \sum q_{ik} \bar{v}_k$, on obtient pour les $\bar{v}$ le système d'équation

$$c_i \bar{v}_i + \sum q_{ik} \bar{v}_k = \bar{D}_i$$

et d'après les remarques que nous avons faites auparavant, il est certain que ce système d'équation doit posséder des solutions $\bar{v}_i$ très déterminées pour des valeurs quelconques de $\bar{D}_i$. Il existera certainement un tel système de $\bar{v}_i$ et $\bar{\sigma}_i$. Considérons encore la valeur $e_j^{(\varphi)}$ qui se laisse calculer d'après la figure

$$e_j^{(\varphi)} = \bar{D}_j - (\sigma_j^{(\varphi)} + c_j v_j^{(\varphi)})$$

et qui est positive pour la barre j . Nous pouvons poser les alternatives suivantes:

ou bien $\Delta v_i^{(\varphi+1)} > 0$, alors on a aussi $e_i^{(\varphi)} > 0$ et à la fin de la $(\varphi + 1)$ ème phase $e_i^{(\varphi+1)} \geq 0$

ou bien $\Delta v_i^{(\varphi+1)} < 0$, alors on a aussi $e_i^{(\varphi)} < 0$ et à la fin de la $(\varphi + 1)$ ème phase $e_i^{(\varphi+1)} \leq 0$.

Notre loi est vraisemblablement démontrée lorsque l'on montre que pour un nombre suffisamment grand de variations de la surcharge, un peu après la fin de ε phases $e^{(\varphi+\varepsilon)} = \bar{e} = 0$ doit disparaître pour toutes les barres. Car lorsque ceci se produit pour toutes les barres, l'effort S_i ne peut plus dépasser les limites de l'intervalle

$$\bar{\sigma}_i + c_i \bar{v}_i + K'_i \leq S_i \leq \bar{\sigma}_i + c_i \bar{v}_i + K_i$$

qui coïncident avec $\bar{B}_i^{\max}$ et $\bar{B}_i^{\min}$. Afin de démontrer que $e_i^{(\varphi)}$ tend vers 0 avec un φ croissant pour toutes les barres nous posons

$$\bar{v}_i - v_i^{(\varphi)} = w_i^{(\varphi)}$$

et ensuite $\bar{\sigma}_i - \sigma_i^{(\varphi)} = z_i^{(\varphi)}$

de telle sorte $\Delta w_i^{(\varphi+1)} = w_i^{(\varphi+1)} - w_i^{(\varphi)} = \Delta v_i^{(\varphi+1)}$

et $\Delta z_i^{(\varphi+1)} = z_i^{(\varphi+1)} - z_i^{(\varphi)} = -\Delta \sigma_i^{(\varphi+1)}$

et à cause du système d'équation

$$\sum q_{ik} \bar{v}_k = \bar{\sigma}_i \text{ et } \sum q_{ik} v_k^{(\varphi)} = \sigma_i^{(\varphi)}$$

on a aussi le système

$$\sum q_{ik} w_k^{(\varphi)} = z_i^{(\varphi)} \text{ et } \sum q_{ik} \Delta w_k^{(\varphi+1)} = \Delta z_i^{(\varphi+1)}$$

Considérons la forme quadratique

$$J^{(\varphi)} = \sum (z_i^{(\varphi)} + c_i w_i^{(\varphi)}) w_i^{(\varphi)} = \sum \sum q_{ik} w_i^{(\varphi)} w_k^{(\varphi)} + \sum c_i w_i^{(\varphi)2}$$

qui d'après ce que nous avons déjà dit est toujours positive pour des valeurs quelconques de w et qui peut disparaître lorsque tous les $w = 0$. Considérons encore $J^{(\varphi+1)}$ à la fin de la $(\varphi+1)^{\text{ème}}$ phase

$$J^{(\varphi+1)} = \sum (z_i^{(\varphi+1)} + c_i w_i^{(\varphi+1)}) w_i^{(\varphi+1)}$$

la variation de J au cours de la $(\varphi+1)^{\text{ème}}$ phase est donc:

$$\Delta J^{(\varphi+1)} = \sum [z_i^{(\varphi+1)} + c_i w_i^{(\varphi+1)}] w_i^{(\varphi+1)} - [z_i^{(\varphi)} + c_i w_i^{(\varphi)}] w_i^{(\varphi)} = \\ \sum z_i^{(\varphi)} \Delta w_i^{(\varphi+1)} + \Delta z_i^{(\varphi+1)} w_i^{(\varphi)} + \Delta z_i^{(\varphi+1)} \Delta w_i^{(\varphi+1)} + c_i (2w_i^{(\varphi)} \Delta w_i^{(\varphi+1)} + \Delta w_i^{(\varphi+1)2})$$

Mais maintenant $\sum z_i^{(\varphi)} \Delta w_i^{(\varphi+1)} = \sum \Delta z_i^{(\varphi+1)} w_i^{(\varphi)}$ ainsi que l'on peut facilement l'établir lorsque l'on introduit $z_i^{(\varphi)} = \sum q_{ik} w_k^{(\varphi)}$ et $\Delta z_i^{(\varphi+1)} = \sum q_{ik} \Delta w_k^{(\varphi+1)}$ d'où il résulte dans les deux cas la forme bilinéaire $\sum \sum q_{ik} w_i^{(\varphi)} \Delta w_k^{(\varphi+1)}$ de telle sorte que l'on a

$$\Delta J^{(\varphi+1)} = \sum [2z_i^{(\varphi)} + \Delta z_i^{(\varphi+1)} + c_i (2w_i^{(\varphi)} + \Delta w_i^{(\varphi+1)})] \Delta w_i^{(\varphi+1)}.$$

Pour terminer on a

$$z_i^{(\varphi)} = \bar{\sigma}_i - \sigma_i^{(\varphi)} = (\bar{D}_i - c_i \bar{v}_i) - (\bar{D}_i - c_i v_i^{(\varphi)} - e_i^{(\varphi)}) = e_i^{(\varphi)} - c_i w_i^{(\varphi)}$$

et de même

$$z_i^{(\varphi+1)} = e_i^{(\varphi+1)} - c_i w_i^{(\varphi+1)}$$

d'où

$$\Delta J^{(\varphi+1)} = -\sum (e_i^{(\varphi+1)} + e_i^{(\varphi)}) \Delta w_i^{(\varphi+1)}$$

Mais comme $e_i^{(\varphi+1)}$ et $e_i^{(\varphi)}$ doivent avoir le même signe que $\Delta v_i^{(\varphi+1)}$, $\Delta J^{(\varphi+1)}$ sera toujours négatif. Il en résulte que l'expression de J qui est toujours positive doit décroître de façon continue de phase en phase et seulement rester invariable lorsque toutes les barres conservent le même allongement au cours d'une phase. Après un nombre suffisamment grand de phases, J doit devenir égal à 0. Ceci exige absolument que $w^{(\varphi+\varepsilon)} = 0$, donc que $v^{(\varphi+\varepsilon)} - \bar{v} = 0$ et par conséquent aussi que $\bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi+\varepsilon)} = 0$. Il se présente effectivement alors un système de forces coercitives pour lequel les allongements permanents ne peuvent plus varier et le système se comporte dès lors comme un système constitué par un matériau complètement élastique.

Si l'on compare aux systèmes portants constitués par un matériau idéalement plastique, on constate de notre cas le fait important qu'il n'est plus du tout nécessaire de rechercher un système de forces coercitives. Il est tout à fait suffisant dans ce cas de remplir pour chaque barre la condition $B^{\max} - B^{\min} \leq K - K'$. De plus, à cause du terme $c_i w_i^2$ qui se présente dans la forme quadratique, il est impossible que des formes semi par définition se présentent, formes qui exigeraient des recherches spéciales au point de vue de la parfaite détermination des solutions. Il est d'autant plus certain qu'à chaque valeur finie $\bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)}$ appartient une valeur finie, parfaitement déterminée $\bar{v} - v^{(\varphi)}$. Naturellement c'est une autre question que de savoir si la déformation finale et totale $\bar{v}$ n'atteint pas des valeurs inadmissibles qui peut-être se trouvent près de l'allongement à la rupture, question que l'on peut tout aussi bien poser pour un matériau idéalement plastique. La réponse sous forme générale à cette question est difficile.

Résumé

Après un court aperçu des les travaux les plus importants exécutés jusqu'à ce jour, l'auteur expose dans la partie A une démonstration générale d'une loi de *H. Bleich* pour les poutres réticulées constituées d'un matériau idéalement plastique. Cette loi sert de base au dimensionnement des systèmes hyperstatiques et elle a été partiellement admise dans les prescriptions officielles sous le nom de méthode de l'équilibre plastique („Traglastverfahren“). Elle repose en grande partie sur le fait qu'une certaine forme quadratique positive ne peut que décroître et par conséquent doit une fois s'annuler. Au delà des données connues, il est nécessaire d'apporter quelques restrictions à la validité de cette loi. Ces restrictions consistent en l'exclusion de certains cas de surcharge aussitôt que le système est devenu totalement élastique. Il faudra donc limiter ces cas de surcharge à un intervalle de temps infiniment court en supposant que la vitesse d'écoulement est finie. Dans la partie B l'auteur étend ses investigations à un matériau à zone de solidification linéaire.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Résistance des poutres réticulées.

Tragfähigkeit von Fachwerkträgern.

Carrying Capacity of Trussed Steel Work.

Dr. Ing. E. Kohl,
Professor an der Technischen Hochschule, Hannover.

Nous nous proposons d'étudier quelques questions fondamentales qui sont importantes pour la détermination de la résistance d'une poutre réticulée métallique et de les appliquer à un exemple simple.

1° — *Position invariable de la charge.*

Le système de la fig. 1 représente une poutre simple dont la barre de la membrure inférieure U_3 ainsi que les diagonales D_2 et D_5 sont constituées de $\text{I} 70 \cdot 70 \cdot 7$ alors que les autres barres sont des $\text{I} 90 \cdot 90 \cdot 9$. Si l'on néglige les efforts réduits, produits dans les barres par le poids propre, on obtient pour une charge concentrée P au point 3 les efforts S_0 du tableau I.

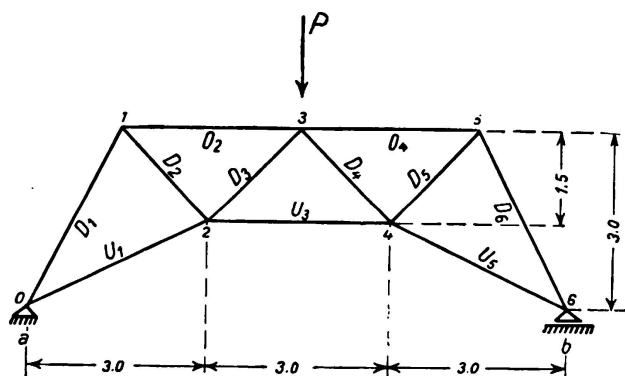


Fig. 1.

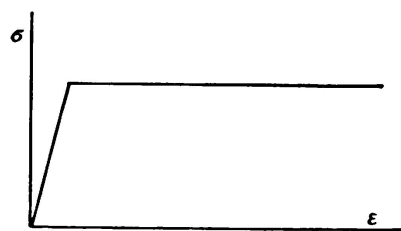


Fig. 2.

En tenant compte de la réduction de la section des barres tendues pour des rivets de 20 mm et en se basant, d'après les normes allemandes, sur une limite d'écoulement $\sigma_s = 2,4 \text{ t/cm}^2$ et sur un effort de flambage σ_k les contraintes limites de la résistance de chaque barre sont:

$$S_{Gr} = F_n \cdot \sigma_s \text{ pour les barres tendues,}$$

$$S_{Gr} = F \cdot \sigma_k \text{ pour les barres comprimées.}$$

Ces valeurs sont contenues dans la deuxième colonne du tableau. La colonne 3 contient la valeur limite P_{Gr} de la charge P pour laquelle la valeur limite de l'effort dans la barre est atteinte lorsque l'on admet une validité illimitée à loi de Hooke.

Tableau I:

Barre	Effort dans la barre S_0	Effort limite dans la barre S_{Gr}		Charge limite P_{Gr}
		pour la traction	pour la compression	
U_1	$+0,3727 P$	$+70 \text{ t}$	$-43,4 \text{ t}$	$70/0,3727 = 188 \text{ t}$
U_3	$+1,5 P$	$+41,8 \text{ t}$	$-19,5 \text{ t}$	$41,8/1,5 = 27,9 \text{ t}$
O_2	$-1,0 P$	$+70 \text{ t}$	-53 t	53 t
D_1	$-0,7453 P$	$+70 \text{ t}$	$-43,4 \text{ t}$	$43,4/0,7453 = 58,2 \text{ t}$
D_2	$+0,9427 P$	$+41,8 \text{ t}$	-39 t	$41,8/0,9427 = 44,4 \text{ t}$
D_3	$-0,707 P$	$+70 \text{ t}$	$-69,8 \text{ t}$	$69,8/0,707 = 98,6 \text{ t}$

La plus petite valeur $P_{Gr} = 27,9 \text{ t}$, pour laquelle la limite d'écoulement est atteinte dans la barre U_3 , est déterminante pour la résistance de la poutre considérée. L'atteinte de la limite d'écoulement dans *une seule* barre détermine la résistance de la poutre lorsque l'on admet des assemblages articulés à tous les noeuds et lorsque l'on se base sur le diagramme des tensions/allongements de la fig. 2, car des allongements illimités de la barre U_3 sont possibles sans augmentation de la charge.

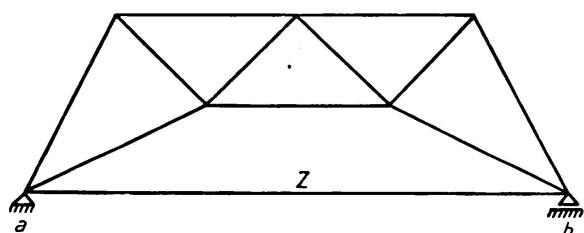


Fig. 3 a.

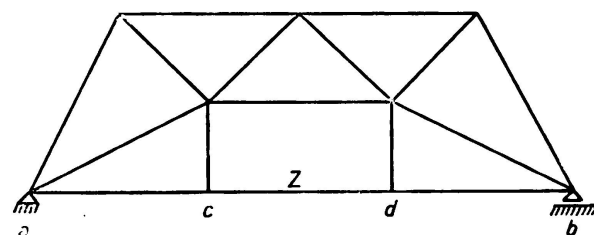


Fig. 3 b.

Si l'on relie des appuis a et b par un tirant Z (fig. 3) le jeu des forces et la capacité de résistance sont complètement modifiés. D'après les règles de la statique pour le calcul des systèmes hyperstatiques, l'effort dans le tirant est $Z = X_a = \delta_{a0}/\delta_{aa}$ lorsque S_a sont les efforts résultant de $X_a = -1$ appliqué au système isostatique:

$$\text{Le numérateur est } E \cdot F_c \sum S_0 S_a \text{ s } \frac{F_c}{F} = 34,5 P$$

$$\text{et le dénominateur } E \cdot F_c \sum S_a^2 \text{ s } \frac{F_c}{F} = 50,64 + l_z \frac{F_c}{F_z},$$

lorsque l_z représente la longueur et F_z la section du tirant. Il faut distinguer les deux cas suivants:

- a) le tirant a une section constante sur toute la longueur de 9 m (fig. 3a),
 b) le tirant est constitué de 2 $\angle 70 \cdot 70 \cdot 7$ en a—c et b—d et F_z est la section c—d (fig. 3b).

Lorsque l'on admet pour le système hyperstatique, comme limite de la résistance, la charge pour laquelle la tension atteint la limite d'écoulement dans une barre, le tirant est déterminant, dans les rapports de sections que nous avons choisis, pour autant que sa section ne dépasse pas une certaine valeur. A l'intérieur de ce domaine la capacité de résistance du système dépend de la section du tirant seulement. Cette dépendance de la charge limite P'_{Gr} de la section F_z du tirant est donnée par la relation

$$Z = F_z \cdot \sigma_s^1 = \frac{34,5 P'_{Gr}}{50,64 + l_z \frac{F_c}{F_z}} \text{ pour le cas a}$$

$$Z = F_z \cdot \sigma_s = \frac{34,5 P'_{Gr}}{60,54 + l_z \frac{F_c}{F_z}} \text{ pour le cas b}$$

d'où pour $l_z = 9$ m et $l_z = 3$ m et pour $F_c = 31$ cm² il résulte que

$$P'_{Gr} = 19,40 + 3,52 F_z \text{ pour le cas a} \quad (1a)$$

$$P'_{Gr} = 6,47 + 4,21 F_z \text{ pour le cas b} \quad (1b)$$

Lorsque le tirant est faible on peut voir que la résistance de la poutre simple est réduite par l'adjonction d'un tirant car lorsque $F_z \rightarrow 0$, $P'_{Gr} \rightarrow 19,4$ t ou $P'_{Gr} \rightarrow 6,47$ t alors que l'on avait 27,9 t pour la résistance de la poutre simple. Ce n'est que pour $F_z = 2,42$ cm² ou $F_z = 5,1$ cm² (fig. 5) que le système hyperstatique avec tirant possède la même résistance que le système sans tirant avec ailleurs les mêmes sections. En croyant renforcer la poutre par un tirant on l'a sensiblement affaiblie dans notre cas. Il est possible que la résistance réelle puisse s'abaisser encore au-dessous de celle de la poutre simple tant que sa section est maintenue invariable. Nous avons ici une contradiction dont il faut chercher l'explication dans la définition de la résistance.

Ces considérations nous conduisent nécessairement à la conclusion que la résistance d'un système une fois statiquement indéterminé n'est en aucun cas détruite lorsqu'une barre est sollicitée jusqu'à la limite d'écoulement. Pour la détermination de la résistance ou de la charge de rupture l'échelle admise pour les treillis isostatiques n'est plus utilisable pour les constructions hyperstatiques. Comme après l'atteinte de la tension d'écoulement dans une barre en surnombre, la déformation seule est déterminée par les membres du système stable restant et ne peut croître infiniment, une rupture ou une grande déformation inadmissible ne sont pas possibles aussi longtemps qu'une barre au moins du système isostatique restant n'a pas atteint la limite d'écoulement, c'est-à-dire que jusqu'à ce moment, la charge peut croître sans danger de rupture. En général, ainsi que l'a démontré Gruning dans son écrit connu „Die Tragfähig-

¹ On n'a fait aucune réduction de la section et le tirant est une barre fixée à ses extrémités par un boulon unique.

keit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung“, la limite de la résistance d'un système n fois statiquement indéterminé est caractérisée par l'apparition de la tension d'écoulement dans au moins $n + 1$ barres.

Afin de déterminer la résistance de notre poutre en treillis avec tirant, il faut fixer la relation qui existe entre les efforts dans les barres du système

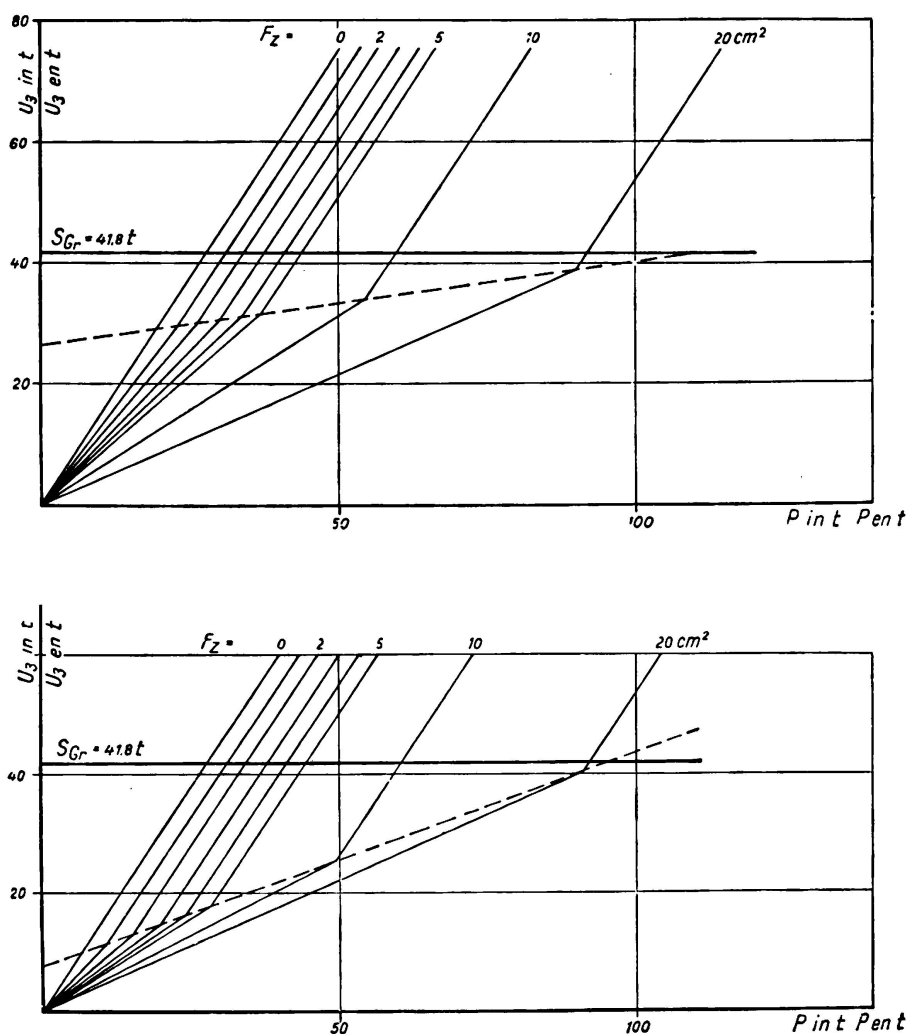


Fig. 4.

Effort dans la barre U_3 en fonction de la charge P et de la section du tirant F_z .

isostatique et la force extérieure P en tenant compte d'une force $F_z \cdot \sigma_s$ dans le tirant, constante et indépendante de P . On a

$$S = S_0 - S_a \cdot F_z \cdot \sigma_s \quad (2)$$

La fig. 4 représente l'allure de l'effort dans la barre U_3 en rapport avec P et pour différentes valeurs de F_z . Pour une validité illimitée de la loi de *Hooke* on aurait:

$$U_3 = 1,5 P - 2 \cdot \frac{34,5 P}{50,64 + 1_z \cdot \frac{F_c}{F_z}}.$$

A partir du moment où le tirant s'écoule, les efforts dans les barres croissent plus fortement et pour U_3 on a :

$$U_3 = 1,5 P - 2 F_z \cdot \sigma_s = 1,5 P - 4,8 \cdot F_z.$$

Les points de rupture sont déterminés par :

$$U_3 = 26,4 + 0,137 P \quad \text{pour le cas a,}$$

$$U_3 = 7,36 + 0,362 P \quad \text{pour le cas b.}$$

L'effort limite dans la barre U_3 est de 41,8 t de telle sorte que l'on peut lire dans la fig. 4 sur l'axe des abscisses, pour chaque valeur de F_z , la charge limite qui amène la tension en U_3 jusqu'à la limite d'écoulement.

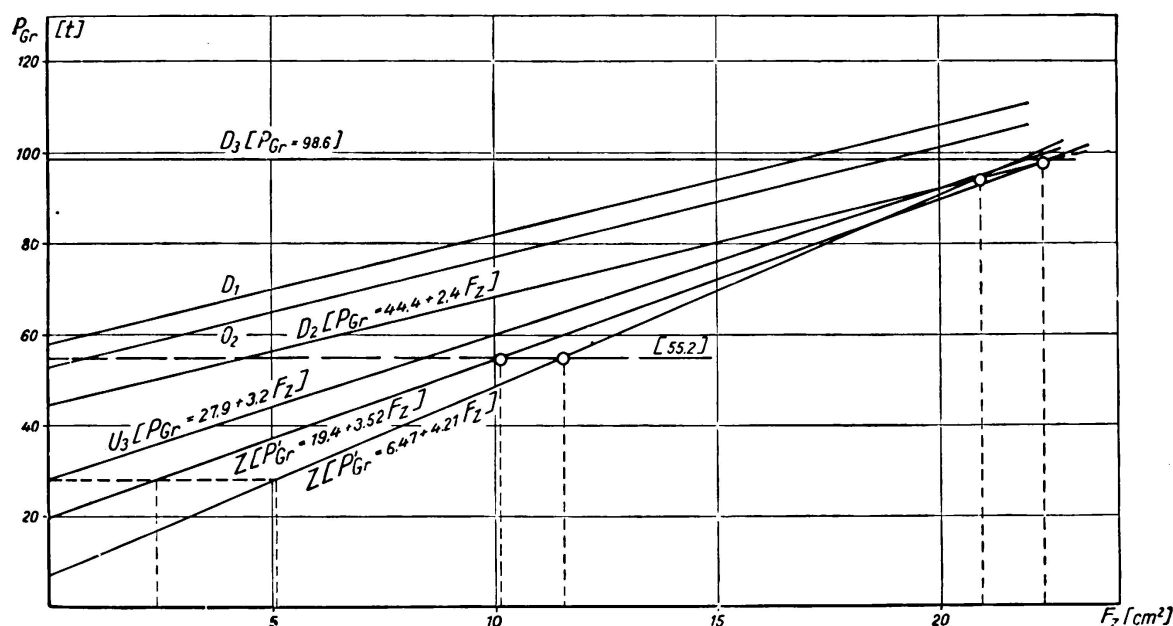


Fig. 5.

Charges limites P_{Gr} en fonction de la section du tirant F_z .

La fig. 5 permet de voir mieux et en même temps pour toutes les barres ces relations. Les charges limites P_{Gr} sont tirées pour les différentes barres de :

$$S = S_0 - S_a \cdot F_z \cdot \sigma_s = S_{Gr} \quad (3)$$

ce qui donne en fonction de F_z

$$\begin{aligned} \text{pour } U_1 (S_a = +1,49067) : & P_{Gr} = 188 + 9,6 F_z \\ \text{pour } U_3 (S_a = +2) : & P_{Gr} = 27,9 + 3,2 F_z \\ \text{pour } O_2 (S_a = -1) : & P_{Gr} = 53 + 2,4 F_z \\ \text{pour } D_1 (S_a = -0,7453) : & P_{Gr} = 58,2 + 2,4 F_z \\ \text{pour } D_2 (S_a = +0,9427) : & P_{Gr} = 44,4 + 2,4 F_z \\ \text{pour } D_3 (S_a = 0) : & P_{Gr} = 98,6 \end{aligned} \quad (4)$$

Les équations 4 sont aussi bien valables pour le cas a que pour le cas b. Dans la fig. 5 ces charges limites sont représentées pour toutes les barres du système en fonction de la section du tirant. Pour toutes les barres cette charge limite croît (cependant pas dans la même mesure) avec la section F_z du tirant, à l'exception de la barre D_3 dont l'effort ne dépend pas du tirant.

Jusqu'à une certaine valeur de F_z on obtient la plus petite charge limite pour U_3 à part le tirant; la résistance est donc limitée par l'équation

$$P_{Gr} = 27,9 + 3,2 F_z \quad (5)$$

ce qui correspond pour $F_z = 0$ avec la résistance de la poutre simple.

Lorsque l'on a $F_z = 20,6 \text{ cm}^2$ on obtient la même charge limite $P_{Gr} = 93,9 \text{ t}$ pour les barres D_2 et U_3 ; pour des valeurs plus grandes de F_z la limite d'écoulement est plus vite atteinte en D_2 lorsque la charge croît encore. La validité de l'équation 4 est interrompue avec $F_z = 22,3 \text{ cm}^2$ dans le cas a et avec $F_z = 20,9 \text{ cm}^2$ dans le cas b car pour $P = 97,9 \text{ t}$ ou $94,5 \text{ t}$ la tension d'écoulement dans le tirant et dans les diagonales D_2 et D_5 est atteinte en même temps. Un relèvement de la résistance ou de la sécurité, fondé sur l'indétermination statique, ne se produit pas. Un agrandissement de la section du tirant ne change rien car pour des valeurs $F_z > 22,3 \text{ cm}^2$ ou $F_z > 20,9 \text{ cm}^2$ les deux diagonales D_2 et D_5 s'écoulent d'abord. Les autres barres constituent alors un système labile. Le rapport de la résistance relevée P_{Gr} du système hyperstatique à l'apparition de la tension d'écoulement dans le tirant déterminée par la valeur limite P'_{Gr} est

$$\frac{27,9 + 3,2 F_z}{19,4 + 3,52 F_z} \text{ pour le cas a et } \frac{27,9 + 3,2 F_z}{6,47 + 4,21 F_z} \text{ pour le cas b.}$$

Les résultats du calcul sont donnés à la fig. 6.

La propriété d'«équilibrage des tensions» dans les systèmes hyperstatiques ne se présente pas dans tous les cas et dans toutes les circonstances; il faut admettre pour cela un surplus de section dans certaines barres très déterminées. Dans notre exemple on n'a aucun relèvement pratique de la résistance pour une section du tirant au-dessus de 20 cm^2 car une charge de 90 à 95 t élève en même temps dans plusieurs barres les tensions jusqu'à la limite d'écoulement.

Si la barre D_3 , dont l'effort ne dépend pas de Z , était constituée de $2 \text{ L } 70 \cdot 70 \cdot 7$, son effort limite serait porté à environ 39 t seulement et la charge limite à $\frac{39}{0,707} =$ environ 55,2 t. Lorsque $F_z = 10,15 \text{ cm}^2$ ou $11,55 \text{ cm}^2$ (fig. 5) la résistance est atteinte par l'apparition simultanée de l'effort de flambage dans les deux diagonales D_3 et D_4 et de la tension d'écoulement dans le tirant. Dans ce cas aussi un agrandissement de la section du tirant ne peut pas relever la résistance car pour D_3 et D_4 la charge limite $P_{Gr} = 55,2 \text{ t}$ reste déterminante.

Il reste encore à discuter s'il faut aussi s'attendre à un relèvement de la résistance du treillis hyperstatique lorsqu'une barre comprimée atteint en premier la valeur de la tension critique. Au contraire de ce qui se passe pour une barre tendue qui dans un système hyperstatique peut encore être un membre important lorsqu'elle a atteint la limite d'écoulement, une barre comprimée ne joue plus aucun rôle dès qu'elle flambe effectivement. Le flambage d'une barre comprimée suppose un fléchissement déterminé ainsi qu'un déplacement de noeud qui ne peuvent se produire dans un système isostatique sans être influencés par les autres barres. Dans les systèmes hyperstatiques, le déplacement des extrémités d'une barre comprimée est soumis aux conditions de déformation du système stable restant, qui opposent une résistance au fléchissement de la barre. La

condition de flambage pour une barre comprimée d'un treillis hyperstatique est nettement différente de la condition de flambage de la barre seule; *Grüning* l'a démontré dans l'écrit que nous avons cité plus haut (p. 28).

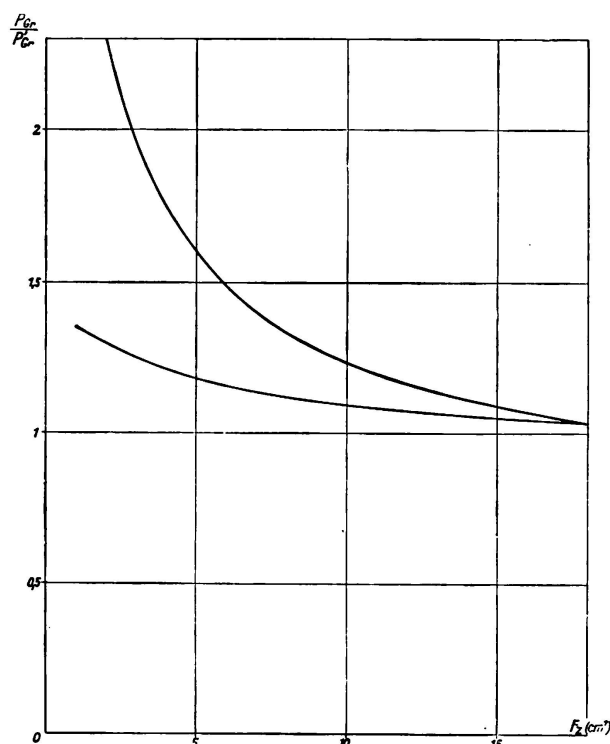


Fig. 6.

2° — Position variable de la charge.

Il nous faut encore étudier le cas où une charge P peut aussi agir au point 2 afin de répondre à la question de savoir quelle est la section minima que peut avoir le tirant pour relever la résistance de la poutre simple à une valeur déterminée $P_{Gr} = (\text{charge utile} \times \text{coefficient de sécurité})$. On se basera sur le système de la fig. 3b. Les efforts S_0 dans les barres de la poutre sans tirant ainsi que les charges limites pour les différentes barres sont donnés au tableau II.

Tableau II:

Barre	Effort S_0 dans la barre	Charge limite P_{Gr}
U_1	$+ 0,4969 P$	141 t
U_3	$+ 1,0 P$	41,8 t
U_5	$+ 0,2485 P$	282 t
O_2	$- 1,333 P$	39,7 t
O_4	$- 0,666 P$	79,5 t
D_1	$- 0,9938 P$	43,6 t
D_2	$+ 1,257 P$	33,25 t
D_3	$+ 0,4713 P$	148 t
D_4	$- 0,4713 P$	148 t
D_5	$+ 0,6285 P$	66,5 t
D_6	$- 0,4969 P$	87,2 t

L'effort dans le tirant est de:

$$Z = X_a = \frac{29,57 P}{60,54 + \frac{93}{F_z}}$$

La limite d'écoulement sera atteinte dans le tirant pour

$$P'_{Gr} = 7,55 + 4,91 F_z \quad (6)$$

et aussi longtemps que le tirant, en tant que barre la plus sollicitée, s'écoulera le premier, les charges limites pour les barres U_3 , O_2 , D_1 et D_2 seront déterminées par les équations suivantes, représentées à la fig. 7 (on ne tient pas compte des autres barres car leurs efforts restent bien en dessous de la limite d'écoulement)

$$\begin{aligned} \text{pour } U_3: & P_{Gr} = 41,8 + 4,8 F_z \\ \text{pour } O_2: & P_{Gr} = 39,7 + 1,8 F_z \\ \text{pour } D_1: & P_{Gr} = 43,6 + 1,8 F_z \\ \text{pour } D_2: & P_{Gr} = 33,25 + 1,8 F_z \end{aligned} \quad (7)$$

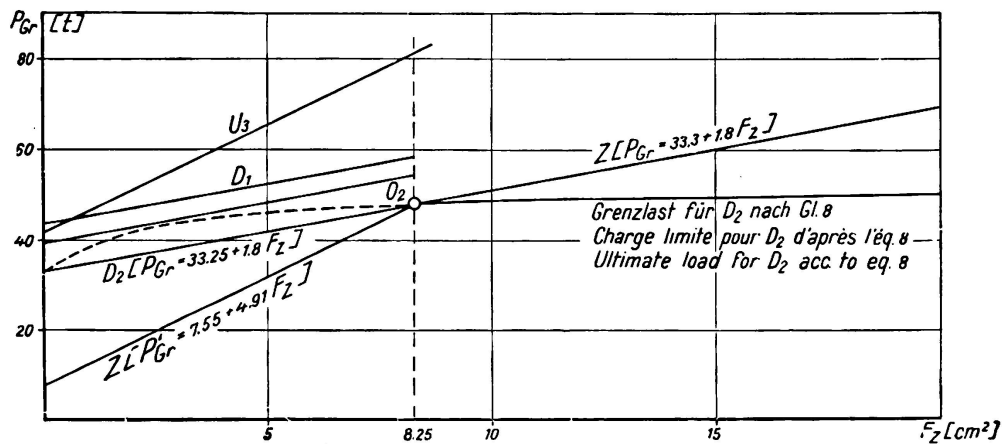


Fig. 7.

$P = 48,05$ t engendre pour $F_z = 8,25$ cm² la tension d'écoulement en même temps dans le tirant et dans D_2 . Lorsque $F_z < 8,25$ cm², la résistance est limitée par la dernière équation de (4); pour $F_z > 8,25$ cm² l'équation 5 n'est plus valable car D_2 est alors la barre la plus sollicitée et connue telle s'écoule la première. On calcule la charge limite pour D_2 en fonction de F_z en partant de l'effort dans la barre du système hyperstatique

$$D_2 = 1,257 P - 0,9427 \cdot \frac{29,57 P}{60,54 + \frac{93}{F_z}} = S_{Gr} = 41,8$$

et l'on obtient

$$P'_{Gr} = \frac{60,54 F_z + 93}{1,15 F_z + 2,8} \quad (8)$$

Cette courbe est représentée à la fig. 7. La charge limite pour D_2 ne varie que peu avec un F_z croissant; elle croît de 48,05 t pour $F_z = 8,25$ cm² à 50,4 t

pour $F_z = 20 \text{ cm}^2$. Lorsque $F_z > 8,25 \text{ cm}^2$ on a pour toutes les autres barres, à partir du moment où D_2 s'écoule, des conditions d'équilibre qui sont à établir pour la charge P au point 2 et pour les deux charges $F_{D_2} \cdot \sigma_s$ aux points 1 et 2 pour le système isostatique résultant de l'écoulement de la barre D_2 . Ces charges peuvent être calculées par adjonction à l'effort S_0 (tableau II) d'un état de tensions résiduelles:

$$S = S_0 + (F_{D_2} \cdot \sigma_s - D_{20}) \frac{S_a}{D_{2a}} \quad (9)$$

Les efforts calculés ainsi sont

$$\begin{aligned} U_1 &= + 66 - 1,49 P \\ U_3 &= + 88,8 - 1,666 P \\ U_5 &= + 66 - 1,74 P \\ O_2 &= - 44,4 \\ O_4 &= - 44,4 + 0,666 P \\ D_1 &= - 33,2 \\ D_2 &= + 41,8 \\ D_3 &= + 0,4713 P \\ D_4 &= - 0,4713 P \\ D_5 &= + 41,8 - 0,6285 P \\ D_6 &= - 33,2 + 0,4969 P \\ Z &= - 44,4 + 1,333 P \end{aligned} \quad (10)$$

Leur grandeur est indépendante de F_z . Mais comme la charge limite pour D_2 dépend de la section du tirant, la validité de l'équation (10) ne commence que pour des valeurs $F > 8,25 \text{ cm}^2$ et $P \geq P'_{Gr}$ d'après l'équation 8. La charge limite pour laquelle le tirant s'écoule, et qui permet de déterminer la résistance pour $F_z > 8,25 \text{ cm}^2$, s'obtient en partant de la dernière des équations (10)

$$- 44,4 + 1,333 P_{Gr} = F_z \cdot \sigma_s$$

et l'on obtient:

$$P_{Gr} = 33,3 + 1,8 F_z \quad (11)$$

De l'équation (10) on peut tirer les charges limites pour toutes les autres barres. Les efforts dans les barres O_2 , D_1 et D_2 sont constants et indépendants de P . Les plus petites valeurs de P_{Gr} s'obtiennent pour les barres de la membrure inférieure à savoir:

$$\begin{aligned} \text{pour } U_1 &\text{ de } + 66 - 1,49 P_{Gr} = - 43,4 \text{ d'où } P_{Gr} = 73,5 \text{ t} \\ \text{pour } U_3 &\text{ de } + 88,8 - 1,666 P_{Gr} = + 41,8 \text{ d'où } P_{Gr} = 65 \text{ t} \\ \text{pour } U_5 &\text{ de } + 66 - 1,74 P_{Gr} = - 43,4 \text{ d'où } P_{Gr} = 63 \text{ t} \end{aligned}$$

$P = 63 \text{ t}$ est donc la plus grande charge supportable quelle que soit la section F_z du tirant et pour autant que

$$33,3 + 1,8 F_z \geq 63$$

ou

$$F_z \geq 16,5 \text{ cm}^2.$$

Un agrandissement de la section du tirant n'empêchera pas les barres D_2 et U_5 de s'écouler pour $P = 63 \text{ t}$.

Pour répondre à la question posée plus haut, le tirant doit être dimensionné de telle façon que la résistance de la poutre simple soit portée de 27,9 t à 45 t ou 60 t et le dimensionnement doit se faire d'après le principe de la même sécurité, dans le sens que nous avons donné ci-dessus, lorsque la charge peut agir aussi bien au point 3 qu'au point 2.

Pour la charge limite de 45 t il faut tirer des fig. 5 et 7 ou des équations 5 et 7 la section nécessaire

$$F_z = 6,35 \text{ cm}^2 \text{ pour la charge au point 3}$$

$$F_z = 6,50 \text{ cm}^2 \text{ pour la charge au point 2}$$

où la valeur la plus grande est déterminante pour le dimensionnement. Si l'on admet que la résistance est détruite par l'apparition de l'écoulement dans le tirant, les sections nécessaires sont (d'après les fig. 5 et 7; les équations 1b et 6) $F_z = 9,15 \text{ cm}^2$ ou $F_z = 7,65 \text{ cm}^2$.

Si la charge doit monter à 60 t, la position de la charge au point 3 exige une section de 10 cm^2 pour le tirant (contre $12,7 \text{ cm}^2$ d'après l'équation 1b) et la position de la charge en 2 une section $F_z = 14,8 \text{ cm}^2$. Cette dernière section est nécessaire. Si l'on admet que la résistance prend fin avec l'apparition de l'écoulement dans une barre, on peut en conclure que l'on n'obtient pas un relèvement de la résistance jusqu'à 60 t par l'adjonction d'un tirant tel que nous avons prévu, car lorsque la charge est en 2 la charge limite pour D_2 (cf. fig. 7) reste d'après l'équation 8 constamment plus petite que 60 t.

3° — Limitation de la résistance par la déformation.

Les équations 4 pour les charges limites qui engendrent les efforts limites dans les barres sont valables d'après les équations 3a ou 3b indépendamment de l'adjonction du tirant. Une même charge limite amène la tension dans la barre U_3 jusqu'à la limite d'écoulement pour un F_z déterminé de telle sorte que la résistance des deux systèmes est la même. On peut se demander si vraiment les deux systèmes sont indépendants de l'adjonction d'un tirant au point de vue de leur résistance. Pour répondre à cette question il faut étudier la déformation des systèmes. Tant que la tension d'écoulement n'existera que dans le tirant, la déformation de la poutre sera déterminée par les allongements des barres du système stable restant. La variation de la distance $a-b$ est pour le système 3a de

$$EF_c \Delta ab = \sum S \cdot S_a \cdot s \cdot \frac{F_c}{F}$$

où la sommation est à étendre à toutes les barres excepté le tirant. Avec

$$S = S_o - S_a F_z \sigma_s$$

on a:

$$EF_c \Delta ab = \delta_{ao} - F_z \sigma_s \cdot \sum S_a^2 \cdot s \cdot \frac{F_c}{F}$$

$$EF_c \Delta ab = 34,5 P - 121,5 F_z.$$

Si la charge croît jusqu'à la limite de la résistance de U_3 on a pour $P = 27,9 + 3,2 F_z$

$$EF_c \cdot \Delta ab = 963 - 11,1 F_z$$

et pour $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ et $F_c = 31 \text{ cm}^2$

$$\Delta ab = 1,48 - 0,017 F_z \text{ (en cm)} \quad (12)$$

Pour le système 3b les calculs correspondants donnent une variation de la distance c—d

$$\Delta cd = 1,48 - 0,0536 F_z \text{ (en cm)} \quad (13)$$

L'allongement admissible dans le domaine d'écoulement, c'est-à-dire l'allongement que l'on peut attendre lors de la rupture à la fatigue, n'est pas exactement déterminé. Comme il s'agit ici de considérations fondamentales je l'admettrai de $5^0/00$; le plus grand allongement admissible du tirant est donc

$$\text{pour } l_z = 9 \text{ m de longueur} \quad \Delta l = 4,5 \text{ cm}$$

$$\text{pour } l_z = 3 \text{ m de longueur} \quad \Delta l = 1,5 \text{ cm}$$

Ainsi que l'on peut le voir, l'allongement effectif Δab ou Δcd , pour la charge limite avant l'écoulement de U_3 , est plus petit que l'allongement admissible à l'intérieur du domaine d'écoulement de telle sorte que la déformation ne joue aucun rôle pour la détermination, dans les deux cas, de la résistance.

Si l'on constitue le tirant de $2 \perp 70 \cdot 70 \cdot 7$ jusque sur une partie centrale de 10 cm de longueur seulement, les équations (4) conservent leur validité et la variation de la distance des deux extrémités du tirant de $l_z = 10 \text{ cm}$ est pour

$$\sum S_a^2 \cdot s \cdot \frac{F_c}{F} = 65,33$$

$$\text{de} \quad \Delta = 1,48 - 0,0713 F_z \text{ (en cm)} \quad (14)$$

L'allongement admissible à l'intérieur du domaine d'écoulement n'est que de 0,05 cm et sera, dans certains cas, nettement dépassé par la déformation réelle avant que la tension en U_3 atteigne la limite d'écoulement. Il est donc possible que la barre s'écoulant la première se brise avant qu'une autre barre participe plus fortement à la transmission des forces. L'équilibrage des efforts dans les barres ne peut pas ou qu'imparfaitement se produire. Ces considérations sont confirmées par des essais exécutés à Hannover sur une poutre réticulée continue.²

La détermination de la résistance des systèmes hyperstatiques d'après les points de vue ci-dessus admet que les allongements des barres qui s'écoulent restent à l'intérieur de certaines limites du domaine d'écoulement. Cette admission doit en général être satisfaite.

4° — Variations de température. (Appuis élastiques.)

Si l'on admet à part la charge P au point 3 une variation de température de $\pm t^\circ$ du tirant par rapport aux autres barres du treillis, la charge limite P'_{Gr} du tirant sera influencée; pour un relèvement ou un abaissement de température de 15^0 dans le tirant on aura pour le système 3a par exemple

$$P'_{Gr} = 19,4 + 3,52 F_z \pm 3,06.$$

Les équations (4) conservent leur validité; l'influence de la température ne se fait sentir que dans la grandeur de la déformation. Une considération simple nous montre que l'allongement des barres qui s'écoulent peut croître sans limite dès que l'on admet une variation répétée de la température du tirant. Admettons que la charge P reste un peu au-dessous de la charge limite de U_3 d'après l'équation (4) et admettons un relèvement de la température des barres du treillis de t° par rapport au tirant. Rien n'est changé à l'état d'équilibre, le tirant subit un surplus d'allongement de $\varepsilon \cdot t \cdot l_z$. Si maintenant le tirant subit un relèvement de température, la barre U_3 atteint la limite d'écoulement et pour des oscillations entre $-t^\circ$ et $+t^\circ$ le tirant et la barre U_3 seront alternativement soumis à des allongements supplémentaires qui n'ont aucune limite. Nous nous appuyons ici sur les résultats des essais cités ci-dessus² au cours desquels on releva et on abaissa les appuis extérieurs, ce qui permit d'observer l'influence de températures différentes dans les membrures.

Pour le cas où des variations de température doivent être prises en considération, la grandeur des déformations doit servir aussi à la détermination de la résistance. Des déplacements élastiques des appuis ont la même signification. Par contre des déplacements inélastiques (affaissement du terrain) sont sans influence sur la résistance.

Résumé.

La résistance d'une poutre réticulée hyperstatique ne dépend pas en général de la tension critique des différentes barres qui déterminent la résistance dans les systèmes isostatiques. Quelques questions fondamentales qui sont importantes pour la détermination de la résistance sont discutées pour une poutre en treillis avec tirant. Pour différentes positions de la charge on a fixé la véritable charge limite (charge utile $\times$ coefficient de sécurité) en fonction de la section du tirant. On a montré ensuite différentes relations pour lesquelles un relèvement de la résistance ou de la sécurité par rapport aux systèmes isostatiques et basées sur des indéterminations statiques n'existent pas.

² *Grüning-Kohl*: Tragfähigkeitsversuche an einem durchlaufenden Fachwerkbalken aus Stahl. Der Bauingenieur 1933, p. 67/72 (Série d'essais II).

Sécurité des constructions.

Sicherheit der Bauwerke.

The Safety of Structures.

R. Lévi,

Ingénieur en Chef Adjoint au Service de la Voie et des
Bâtiments des Chemins de fer de l'Etat, Paris.

Généralités

I — La nécessité s'est imposée, depuis quelques années, de faire état, dans la résistance des charpentes, des propriétés inélastiques de la matière.

La résistance des matériaux avait été fondée en premier lieu sur l'hypothèse que, lorsque les forces auxquelles est soumis un système s'accroissent, les déformations et les taux de travail augmentent partout d'une manière linéaire.

Or, la propriété purement élastique admise ainsi n'est exacte, pour tous les matériaux, qu'en première approximation. Cette hypothèse doit être abandonnée chaque fois que les circonstances se rapprochent de celles qui produisent la rupture des pièces ou simplement des déformations de grande amplitude.

L'effet des propriétés inélastiques des matériaux est, suivant les cas, favorable ou contraire à la stabilité.

Contraire à la stabilité quand il s'agit de la tendance au flambement d'une barre comprimée longitudinalement, l'effet est généralement considéré comme de nature à augmenter la stabilité des systèmes hyperstatiques.

II — Nous nous proposons de discuter cette assertion. Nous notons, dans ce but que, pour connaître le degré de sécurité d'une construction, il faut envisager la manière dont elle se comporte vis-à-vis des charges croissantes jusqu'à ce qu'une rupture ou une déformation d'importance vitale se produise.

Il devient alors nécessaire de faire intervenir, au lieu du coefficient d'élasticité E de la période élastique, des coefficients d'élasticité instantanés H' , correspondant à de très petits efforts supplémentaires. Ces coefficients d'élasticité H' seront variables d'un point à un autre et seront même différents suivant que l'effort supplémentaire considéré augmente ou diminue la tension préexistante.

Il n'est pas inutile de rappeler que cette considération de coefficients d'élasticité instantanés éclaire les résultats des expériences sur le flambement poursuivies à l'Ecole Polytechnique de *Zurich*, sous la direction de *M. Roš*.

Sous l'effet d'une force transversale, par exemple, la flexion qui se manifeste dans une pièce comprimée en bout (fig. 1) augmente l'état de compression du côté concave, en la diminuant du côté convexe, et les points figuratifs de la

déformation linéaire, dans le sens parallèle à l'axe, décrivent des courbes qui ne sont pas dans le prolongement l'une de l'autre (fig. 2).

Le coefficient d'élasticité moyen, à faire intervenir dans la formule d'Euler, est toujours inférieur au coefficient d'élasticité habituel, de telle sorte que la limite peut être atteinte lorsque la compression est inférieure à la limite fixée par le calcul habituel.

De même, dans un système hyperstatique, les déformations peuvent s'accuser rapidement à partir du moment où les charges ont fait dépasser la limite élastique des matériaux et il y a danger à se contenter d'hypothèses trop simples pour apprécier le degré de sécurité.

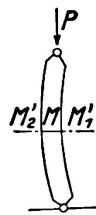


Fig. 1.

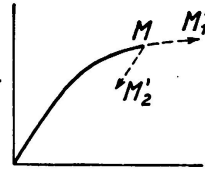


Fig. 2.

III — La remarque suivante permet de diriger la discussion:

La relation qui existe entre les déformations d'une pièce et les sollicitations traduit une propriété de la matière. C'est une loi *intrinsèque* qui relie ces variables (fig. 3).

Mais, dans une construction, aucune de ces variables ne peut être considérée en général comme une donnée et il n'est pas plus logique de dire que la déformation est fonction de l'effort que de prétendre que l'effort est fonction de la déformation.

En réalité, dans une pièce A B d'une construction déterminée, l'équilibre entre les déformations et les sollicitations se fait dans des conditions qui mettent en jeu, non seulement l'élasticité de la matière à l'intérieur de la pièce A B, mais aussi l'élasticité du système à l'extérieur de A B.

Par exemple, si l'on tire sur une éprouvette au moyen d'un vérin à vis avec un ressort comme intermédiaire (fig. 4) la traction a pour effet de déformer

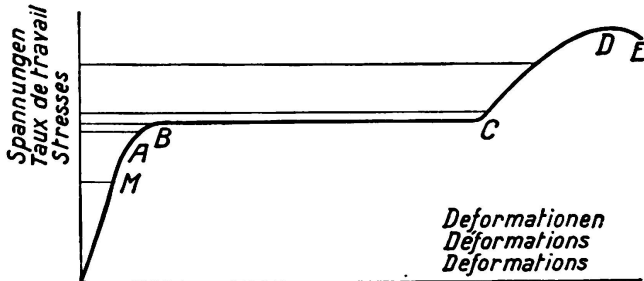


Fig. 3.

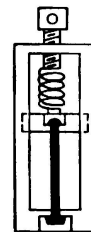


Fig. 4.

à la fois l'éprouvette et le ressort et il faut connaître l'élasticité de ce dernier pour juger de ce qui se passe dans l'éprouvette. Pour chaque position de la vis, ce point figuratif du diagramme déformations / forces doit être recherché à la rencontre de la courbe *intrinsèque* et d'une courbe exprimant la loi *extrinsèque* qui lie la distance des mâchoires à l'effort qu'elles transmettent.

De même, si l'on applique à un système hyperstatique des charges croissantes, le point figuratif correspondant à la barre qui travaille au taux le plus élevé se trouve successivement à la rencontre de la courbe intrinsèque déformations/forces et d'une série de courbes extrinsèques (fig. 5). Ces courbes sont inclinées, car dans chaque cas l'effort appliqué à la barre considérée diminue quand sa déformation s'accroît.

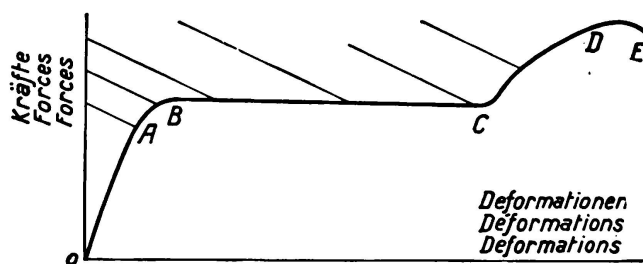


Fig. 5.

Comparons la situation de deux barres du même métal appartenant respectivement à un système isostatique et à un système hyperstatique et qui, pour certaines charges faibles, travaillent au même taux. Supposons proportionnels aux charges les efforts qui leur seraient appliqués si elles n'étaient pas elles-mêmes déformées (fig. 6).

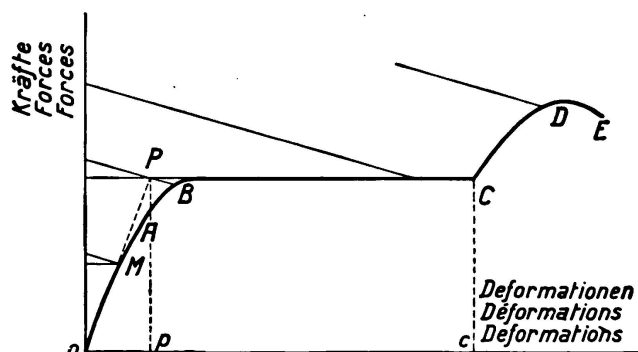


Fig. 6.

Si l'on multiplie, en effet, les déformations et les forces par un certain facteur, on substitue aux points M confondus qui figurent l'état des barres, un point P situé sur l'horizontale du palier d'élasticité et très près de la courbe A B. Si l'on multiplie la charge par un coefficient moindre, les deux barres se trouvent dans des situations équivalentes. Mais si l'on multiplie par un coefficient supérieur, la première barre aborde immédiatement la zone C D des grandes déformations permanentes, alors que la seconde progresse tout d'abord le long du palier de la limite d'élasticité. Le gain est d'autant plus grand que le rapport

$$n = \frac{p c}{O p} = \frac{\text{déformation du dépassement de la limite d'élasticité}}{\text{déformation élastique}}$$

est plus grand.

Il est également d'autant plus élevé que la loi extrinsèque de déformation du système est rapidement dégressive.

On peut appeler nombre de ductilité le rapport n qui joue un rôle essentiel dans la discussion.

Pour l'acier de construction $42/25$, les données numériques usuelles sont les suivantes :

La déformation relative après le palier est égale à 0.027.

Le coefficient d'élasticité est de $22 \cdot 10^3 \text{ K}:\text{mm}^2$.

La limite d'élasticité est de $26 \text{ K}:\text{m}^2$.

D'où

$$n = \frac{0,027 - \frac{26}{22000}}{\frac{26}{22000}} = 22$$

IV — Les considérations qui précèdent peuvent être appliquées, non seulement aux systèmes hyperstatiques, où la répartition des efforts n'est déterminée qu'en ayant égard aux déformations, mais aux éléments fléchis des systèmes iso-statiques. La ductilité intervient alors dans la répartition des efforts dans une section.

En définitive, lorsque les efforts s'accroissent dans une construction hyperstatique ou dans une pièce fléchie, les zones qui travaillent au taux le plus élevé subissent des déformations inélastiques à partir du moment où la limite élastique y est atteinte. Les conditions de charge de la construction peuvent alors s'aggraver sans que le taux de travail augmente dans les zones les plus chargées.

Cette propriété est ce que l'on nomme la ductilité.

La déformation inélastique survenant à la limite d'élasticité représente le produit par un coefficient n dépendant de la nature du métal, de la déformation élastique correspondant à la limite d'élasticité. Le coefficient n est, en général, voisin de 22.

L'écart entre la charge pour laquelle la limite d'élasticité est atteinte et celle pour laquelle elle est dépassée est relativement d'autant plus grand que le nombre n est élevé. Il est également d'autant plus grand que la pièce ou l'élément de pièce soumis à étirement est astreint à un effort plus rapidement décroissant avec la déformation.

Cas d'une charge constante

I — Considérons plusieurs barres B parallèles, solidarisées par leurs abouts de telle sorte que les allongements soient égaux et appliquons à l'ensemble une charge F croissant une fois pour toutes. Le point figuratif des déformations et du taux de travail $\frac{f_1}{s}$ décrit, pour une barre déterminée B_1 , une portion de la courbe caractéristique du métal. Si H est la fonction qui représente $\frac{f}{s}$ en fonction de l'allongement relatif, la loi intrinsèque dont il est question plus haut s'écrit :

$$\frac{df_1}{s} = H'_1 \frac{dl}{l} \quad (1)$$

Quant à la loi extrinsèque, elle s'obtient en sommant les lois intrinsèques des autres barres.

Plus simplement, si l'on fait la somme (membre à membre), des équations (1) écrites pour toutes les barres, on a

$$dF = d\sum \frac{sH'}{l} \quad (2)$$

Pour la barre considérée, le quantum de l'effort supplémentaire absorbé par elle s'exprime donc par le rapport:

$$\frac{df_1}{dF} = \frac{sH'_1}{\sum sH'} \quad (3)$$

Ce quantum est évidemment constant si les points figuratifs de toutes les barres coïncident; mais il n'en est ainsi que si toutes ont été fixées dans leurs extrémités sans aucun effort interne.

Il en est autrement:

a) s'il existe des différences entre les longueurs des diverses barres mesurées à l'état neutre ou entre les distances de leurs fixations;

b) si certaines barres ont été mises sous tension avant que n'ait eu lieu la solidarisation des autres barres,

ou lorsque ces deux facteurs interviennent.

Les points figuratifs décrivent alors la même courbe sans être confondus. Mais d'après ce qui a été dit plus haut, les différences de longueur, c'est-à-dire aussi les différences des abscisses, se conservent.

Le quantum d'effort supplémentaire donné par (3) pour la barre la plus déformée décroît lorsque cette barre approche de la limite d'élasticité. Il en est ainsi ensuite des autres barres, jusqu'à ce que, la limite d'élasticité étant atteinte partout, les efforts supplémentaires soient repris par les barres les plus déformées.

Dans les conditions de la pratique, comme le nombre n est très élevé, l'égalisation se produit en fait, c'est-à-dire que les barres les moins chargées atteignent la limite d'élasticité avant que ne reprenne la croissance des efforts dans les barres les plus chargées.

Si l'on compare ce résultat à celui que donne la théorie de l'élasticité, on voit immédiatement que l'étirement du métal apporte une simplification dans le processus de la déformation. Il égalise les tensions et rend la condition de dépassement de la limite d'élasticité indépendante des conditions initiales où s'est trouvé le système.

Quant à l'exception indiquée plus haut, elle n'aurait lieu que si la barre la plus chargée dépassait la limite d'élasticité N avant que la barre la moins chargée ne l'atteigne. Ceci signifierait que les différences entre les allongements relatifs dépasseraient la longueur du palier $B C$, c'est-à-dire environ n fois l'allongement élastique $\frac{N}{E}$ à la limite d'élasticité. Pareille circonstance peut être considérée comme exceptionnelle et inadmissible.

II — Ce qui précède s'applique sans restriction au cas des pièces effectivement associées «en parallèle» comme les semelles d'une poutre. Les erreurs de montage n'ont pas de répercussion sur leur capacité de résistance à la limite d'élasticité.

De même pour les barres de treillis disposées dans le même sens ou en sens contraire.

De même encore dans le cas où un treillis est renforcé par des barres posées sans tension.

III — Un cas plus général est celui où des barres associées se déforment inégalement, mais suivant des rapports constants. On a alors

$$\frac{dl_1}{l_1 \beta_1} = \frac{dl_2}{l_2 \beta_2} = \dots = d\alpha \quad (4)$$

α étant un paramètre variable et les β des constantes.

La construction géométrique de la fig. 7 montre comment les taux de travail des différentes pièces se déduisent les uns des autres.

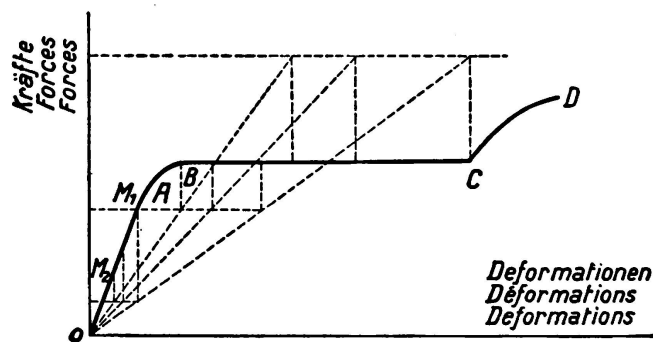


Fig. 7.

Le quantum d'effort supplémentaire pris par la barre B, est:

$$\frac{df_1}{dF} = \frac{s_1 \frac{\beta_1 H'_1}{l_1}}{\sum s \frac{\beta H'}{l}} \quad (5)$$

La barre la moins déformée atteint la limite d'élasticité avant qu'elle ne soit dépassée par la barre la plus déformée si le rapport de leurs allongements est inférieur à $(n + 1)$.

Le fait que le nombre de ductilité est très grand a donc encore pour conséquence que l'égalisation des tensions se produit d'une manière très générale sur le palier de la limite d'élasticité.

La fig. 8 montre alors la manière dont varie la moyenne pondérée des déformations en fonction de la moyenne pondérée des taux de travail. La courbe ainsi obtenue possède des angles plus adoucis que la courbe actuelle de déformation.

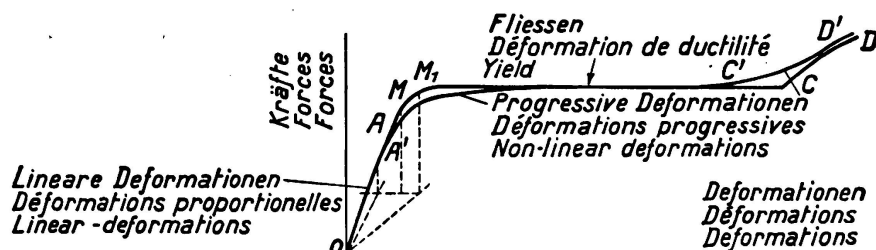


Fig. 8.

Désignons par k le rapport de l'allongement moyen à l'allongement de la barre la plus chargée. La condition pour que les taux de travail s'égalisent à la limite d'élasticité s'exprime aussi par la relation approchée suivante

$$\frac{1}{2k-1} < n+1. \quad (6)$$

IV — Il résulte de cet examen qu'en attribuant le même taux de travail à chaque pièce, on commet une approximation qui n'est pas légitime, en général, mais le devient à la limite d'élasticité. Ce calcul revenant à supposer à chaque pièce un effort limite bien déterminé, on justifie ainsi une manière de voir, souvent considérée comme trop simpliste, d'après laquelle chaque pièce ou organe possède sa capacité de résistance, la capacité de l'ensemble étant la somme des capacités individuelles.

Cette méthode, appliquée notamment dans les calculs d'assemblage, se justifie donc dans une certaine mesure, lorsque les divers éléments travaillent dans des conditions pas trop dissemblables.

V — Il est bon de vérifier, dès à présent, si la prise en considération de la plasticité dans les calculs n'amoindrit pas la sécurité.

Par sécurité, on entend, soit la garantie contre le risque de ruine de la construction, soit la garantie contre le risque de grandes déformations rendant l'ouvrage impropre à son usage. Le flambement entre dans l'une ou l'autre de ces considérations.

Dans tous les cas, on caractérise la sécurité par un coefficient, et on ne peut mieux faire, pour définir ce coefficient que de le prendre égal au facteur par lequel il faut multiplier les charges pour atteindre une situation dangereuse.

De ce qui précède, il résulte que si Π est le maximum que l'on s'est fixé pour le taux de travail moyen, le coefficient de sécurité vis-à-vis du dépassement de la limite d'élasticité N , est N/Π .

VI — En écartant le cas où le flambement se produit au-dessous de la limite d'élasticité, il y a lieu de considérer deux cas :

a) limite de flambement Φ , peu supérieure à la limite d'élasticité N .

Dans ce cas, il y a lieu de remarquer qu'aussitôt que les charges ont dépassé les taux qui correspondent au niveau de la limite élastique, les excédents de charge se reportent exclusivement sur 1, puis 2, etc . . . barres.

L'augmentation qu'il faut apporter aux charges appliquées pour que la barre la plus chargée atteigne la limite du flambement Φ peut ainsi être extrêmement faible, comme le montre la construction (fig. 9) du taux de travail moyen qui correspond à cette éventualité. Il semble donc qu'il y ait lieu de se montrer particulièrement prudent, et d'admettre pour le taux de travail moyen une limite calculée comme si la limite de flambement était égale à la limite d'élasticité.

b) Cas où les barres sont toutes tendues ou dont la limite de flambement est voisine de la limite de rupture.

Il peut alors se produire que, lorsque le point figuratif M_1 de la barre la plus chargée atteint sa limite dangereuse Φ_1 , les autres points figuratifs sont tous sur la courbe $C\Phi_1$. Ceci se produit en général quand le rapport de l'allongement maximum de ductilité à l'allongement dangereux est inférieur à $2k-1$.

Alors le centre de gravité M des points figuratifs est très voisin de la courbe $C\Phi_1$ elle-même (fig. 10). On peut donc définir approximativement la valeur dangereuse du taux de travail moyen comme étant celle qui correspond sur la courbe de déformation, au produit par k de l'allongement dangereux.

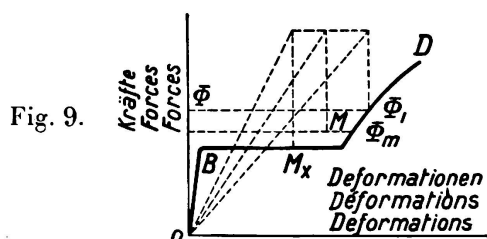


Fig. 9.

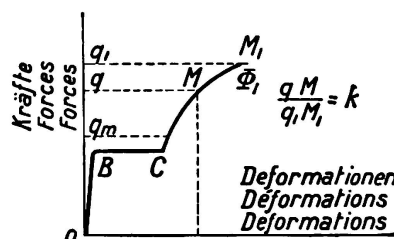


Fig. 10.

Ceci étant, les coefficients de sécurité d'une association de barres travaillant concurremment peuvent être définis comme suit: «Les conditions de résistance de la barre la plus chargée sont sensiblement les mêmes que celles d'une barre fictive chargée au taux moyen, mais dont la limite de flambement ou de rupture serait amoindrie.

Si la limite de flambement réelle n'est pas très supérieure à la limite d'élasticité, la limite de résistance de la barre fictive doit être prise encore plus proche de celle-ci.

Si la limite de flambement est élevée, ou si les barres sont toutes tendues, il faut multiplier l'allongement dangereux par k pour trouver, sur la courbe de déformation, le taux de travail dangereux.

Dans tous les cas, le coefficient de sécurité, vis-à-vis du flambement ou de la rupture, doit être pris égal au rapport de la limite ainsi déterminée au taux de travail moyen.»

De ceci, on peut déduire que si un système hyperstatique est semblable à ceux que nous venons d'examiner et si de grandes déformations ont commencé à se produire, la marge de sécurité qui subsiste alors est inférieure à celle que présenterait, s'il en était de même, une construction isostatique.

VII — On peut appliquer ces principes au cas d'une tôle percée de trous de rivets en l'assimilant à un faisceau de fibres associées.

On peut considérer comme démontré le fait que, dans le voisinage des trous de rivets, les déformations sont localement augmentées dans le rapport de 1 à 3. Le rapport k est donc égal à $1/3$.

Par conséquent, la limite de rupture est atteinte aux abords des trous, c'est-à-dire qu'il s'y manifeste des fissurations pour une valeur critique du taux de travail moyen, qui s'obtient en multipliant par $k = 1/3$ l'allongement correspondant à la limite de rupture. Avec les aciers de construction courante, on trouve ainsi un taux de travail égal sensiblement aux $4/5$ de la limite de rupture.

VIII — Nous examinerons maintenant, par quelques exemples, le cas des poutres droites, réticulées et hyperstatiques:

a) Poutre à membrures constantes, à treillis à 45° , à deux appuis, encastrée sur l'un d'eux (fig. 11).

Lorsque les charges croissent, c'est normalement la barre A'C qui atteint la première la limite élastique. Le reste de la charpente se comporte alors comme

une poutre isostatique A C D B soumise à une force sN dirigée suivant C A'. Le moment sur appui est

$$M_0 = sN h \quad (7)$$

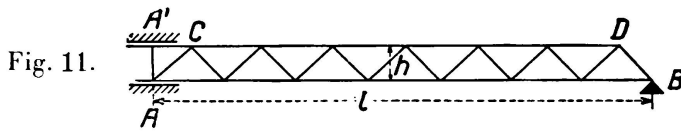
Dans la poutre, le moment M est égal à

$$M = \mu - sN h \frac{l - x}{l} \quad (8)$$

μ étant le moment de la poutre à deux appuis simples.

Les charges continuant à croître, les déformations se poursuivent pour atteindre, d'une part, dans la travée, la limite d'élasticité, d'autre part, dans la barre A' C, la limite supérieure de ductilité. En général, celle-ci est atteinte en dernier lieu, et dans ce cas, la limite d'élasticité est atteinte en travée si le maximum de (8) est égal et de signe contraire au moment sur appui (7).

Si la poutre est uniformément chargée ou chargée par un poids P variable, on trouve que le moment maximum auquel a à résister la section la plus chargée de la poutre est la fraction $\frac{4}{5,83}$, soit environ $\frac{2}{3}$ du moment maximum de la même poutre, supposée à deux appuis simples (fig. 12).



Mais il faut vérifier que la déformation de la barre A' C dans ces conditions n'excède pas la déformation maximum de ductilité. Elle s'obtient en calculant la rotation ω'_0 de la fibre neutre de la poutre au voisinage de A

$$\omega'_0 = \omega_0 - \int \frac{sN h}{E J} \frac{(l - x)^2}{l^2} dx = \omega_0 - \frac{sN h l}{3 E J} = \omega_0 - \frac{21 N}{3 E h} \quad (9)$$

ω_0 étant la rotation de la poutre posée sur appuis simples.

Le treillis étant supposé à 45° , ω'_0 représente aussi l'allongement relatif de A' C = h. On doit donc avoir

$$\omega_0 - \frac{21 N}{3 h E} < (n + 1) \frac{N}{E} \quad (10)$$

En prenant pour ω_0 la valeur correspondant à la charge uniformément répartie maximum, ceci s'écrit

$$\frac{1 N}{3 h E} - \frac{21 N}{3 h E} < (n + 1) \frac{N}{E}$$

ou

$$\frac{l}{h} < 3(n + 1) \quad (11)$$

Cette inégalité, effectivement, est satisfaite avec les poutres de dimension courante et les aciers habituels.

b) Poutre à deux travées solidaires, constituée comme ci-dessus.

Le cas est le même, la section sur appui médian jouant le rôle de section d'encastrement.

D'autre part, si les appuis sont dénivelés, il s'ajoute à ω'_0 un terme correctif qui peut augmenter la valeur du premier terme de (11), mais est généralement trop faible pour renverser l'inégalité.

c) Poutre encastrée à ses deux appuis ou travée solidaire de deux autres travées; même constitution que ci-dessus.

Dans ces deux cas, l'égalité des moments sur appuis et en travée se fait avec réduction de moitié sur la valeur du moment maximum dans la travée à appuis simples. La condition (11) est remplacée par la suivante, qui est satisfaite encore plus facilement:

$$\frac{l}{h} < 6(n+1) \quad (12)$$

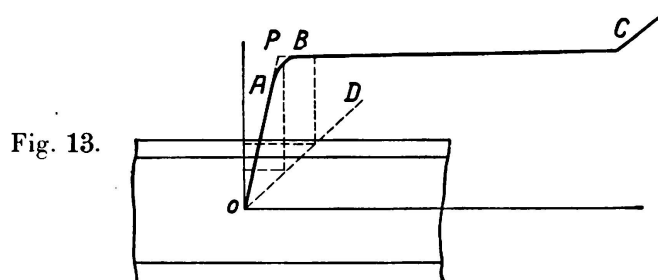
En définitive, sauf cas anormal, si l'on calcule la poutre en supposant l'égalité des moments maxima en travée et sur appuis doubles et en admettant Π comme taux de travail maximum, le coefficient de sécurité par rapport au dépassement de la limite d'élasticité N est égal à N/Π .

IX — Examinons maintenant le cas d'une poutre à âme pleine à section constante et continue ou encastrée sur un au moins de ses appuis.

La croissance des charges porte le taux de travail à la limite d'élasticité au voisinage des appuis doubles, puis le volume ainsi rendu plastique s'accroît. Une déformation plastique se produit ensuite dans une région centrale de la travée. Mais il n'est pas évident que cette apparition précède le cas de charge où la première zone plastique dépasse la limite d'élasticité. Pour le déterminer, il importe de rechercher l'étendue de cette zone.

Il y a lieu de penser que dans une section droite même atteinte partiellement par la plasticité, la loi des déformations relatives des fibres longitudinales reste linéaire par rapport à la distance à la fibre neutre.

Soit O un point de la fibre neutre. Superposons à la coupe de la poutre le diagramme déformations / forces, porté à une échelle quelconque. Si l'on projette dans le sens des x un point de la section transversale sur une droite OD déterminée, puis dans le sens des y sur le diagramme, on obtient la valeur du taux de travail correspondant (fig. 13).



Quand le moment fléchissant s'accroît, la droite tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Il varie d'une quantité M_0 à une quantité M_1 dans la

zone plastique, tandis que le point figuratif se déplace de B (qu'on peut assimiler au point P) à C. On a sensiblement

$$M_0 = \int 2 \frac{N v^2}{h} d\sigma = N \int \frac{2 v^2}{h} d\sigma \quad (13)$$

et

$$M_1 = \int N v d\sigma = N \int v d\sigma \quad (14)$$

v étant la distance à la fibre neutre et $d\sigma$ l'élément de surface de la section.

La différence est égale à

$$M_1 - M_0 = N \int 2 \frac{v}{h} \left(\frac{h}{2} - v \right) d\sigma \quad (15)$$

qui peut être réduite à la valeur de l'intégrale pour l'âme seule. Soit b son épaisseur

$$M_1 - M_0 = N \frac{b h^2}{12} \quad (16)$$

Entre les deux valeurs M_0 et M_1 du moment, celui-ci varie suivant une loi parabolique en fonction de la hauteur Z de la partie non plastique.

$$M = M_0 + \frac{N b}{12} (h^2 - Z^2) \quad (17)$$

La variation du moment fléchissant fournit donc la forme de la frontière qui limite la zone plastique. Elle est parabolique si l'effort tranchant est constant, et droite, si l'effort tranchant varie linéairement.

Le volume plastique est le plus grand quand il est limité, comme l'indique la figure 14.

On a

$$d = \frac{b h^2 N}{12 T} \quad (18)$$

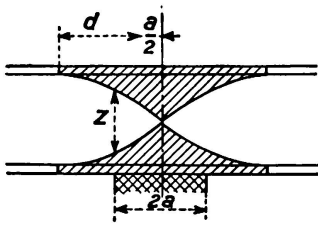


Fig. 14.

Supposons que l'épaisseur de l'âme soit calculée exactement pour travailler à la limite d'élasticité pour un effort tranchant égal à T , c'est-à-dire que l'on ait précisément $b h N = T$.

Il résulte de (18) que la demi-longueur de la zone plastique atteint la valeur

$$d + \frac{a}{2} = \frac{h}{12} + \frac{a}{2} \quad (19)$$

Nous constatons donc que la longueur de poutre fléchie plastiquement n'est qu'une faible fraction de la hauteur. La condition (11) doit être remplacée par une condition plus dure à remplir:

$$\frac{b h^2 N}{12 T} + \frac{a}{2} > \frac{l}{3(n+1)} \quad (20)$$

Cette condition, lorsque l'âme est calculée au plus juste, conduirait à ne pas descendre, pour la hauteur de la poutre, au-dessous du $1/6^{\text{ème}}$ de la portée si l'on voulait que la limite d'élasticité ne soit pas dépassée sur appui avant d'être atteinte en travée.

La conclusion, si paradoxale qu'elle puisse paraître, est que pour bénéficier pleinement de la plasticité des poutres continues au-dessus des appuis, il faut en renforcer l'âme, et cela d'autant plus que la poutre est plus mince. Ce renforcement doit régner jusqu'au $1/60^{\text{ème}}$ de la portée, environ.

Dans le cas contraire, la poutre s'articule, pour ainsi dire, au droit de l'appui seulement; en poussant à l'extrême, c'est une brisure qui tend à se produire dans la forme de la poutre si l'âme est trop faible.

Au point de vue de la ductilité, les renforts d'âmes et les montants raidisseurs au voisinage des appuis se trouvent donc présenter un intérêt particulier et méritent d'être traités largement au voisinage des encastrement et des appuis doubles.

X — Il paraît bon de ne pas se préoccuper seulement du risque des grandes déformations des poutres qui se produiraient si la limite d'élasticité était dépassée en plusieurs régions, mais aussi du risque de rupture, quitte à n'y attacher que l'importance justifiée par la situation particulière de la construction.

Pour cela, étudions, pour une petite augmentation des charges, la variation correspondante δM du moment fléchissant. La variation de courbure s'écrit

$$\delta \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \frac{\delta M}{H' I} \quad (21)$$

Le coefficient H' n'est pas autre chose que le coefficient d'élasticité instantané des membrures, s'il s'agit d'une poutre sans âme. Dans le cas où l'âme intervient dans la flexion, $H' I$ est défini comme la somme des moments des éléments d'aire de la section, multipliés par les H' correspondants.

Prenons le cas, par exemple, d'une poutre encastree à ses deux extrémités. La déviation de chaque extrémité étant nulle, on a

$$0 = \int \delta \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx = \int \frac{\delta M}{H' I} dx \quad (22)$$

Or, M est la somme du moment ($-M_0$) sur appui et du moment μ qui existerait si la poutre était posée sur appuis simples. On a donc

$$\delta M_0 \int \frac{dx}{H' I} = \int \frac{\delta \mu}{H' I} dx$$

ou

$$\delta M_0 = \frac{\int \frac{\delta \mu}{H' I} dx}{\int \frac{1}{H' I} dx} \quad (23)$$

Cette expression est à rapprocher de la formule (3) relative aux barres associées en parallèle. Ici, les sections qui fléchissent sont associées en série, et ceci explique que les coefficients H' passent des numérateurs aux dénominateurs.

La formule (23) générale nous permet de reprendre la discussion:

Phase de l'élasticité: H' est partout égal à E . On a simplement

$$\delta M_0 = \int \frac{\delta \mu}{I} dx \quad (24)$$

Phase de la plasticité sur appuis: H' s'annulant sur appuis, les régions voisines fournissent dans les intégrales des termes prépondérants qui, au numérateur, sont multipliés par des quantités $\delta \mu$ très faibles. Le quotient s'annule sensiblement

$$\delta M_0 \sim 0 \quad (25)$$

Phase de la plasticité en travée: H' s'annulant dans une région C où la variation $\delta \mu_c$ n'est pas nulle, le quotient des termes prépondérants des deux intégrales de (23) devient alors

$$\delta M_0 = \delta \mu_c \quad (26)$$

On a donc $\delta M_0 = -\delta M_0 + \delta \mu_c = 0$.

Phase des grandes déformations: Les zones plastiques s'éloignent des parties qui ont dépassé la limite d'élasticité. On peut constater que $\frac{\delta M_0}{\delta \mu_c}$ diminue sans descendre à la valeur $1/2$ correspondant au cas de la poutre isostatique.

La figure 15 résume la variation des taux de travail en fonction des charges.

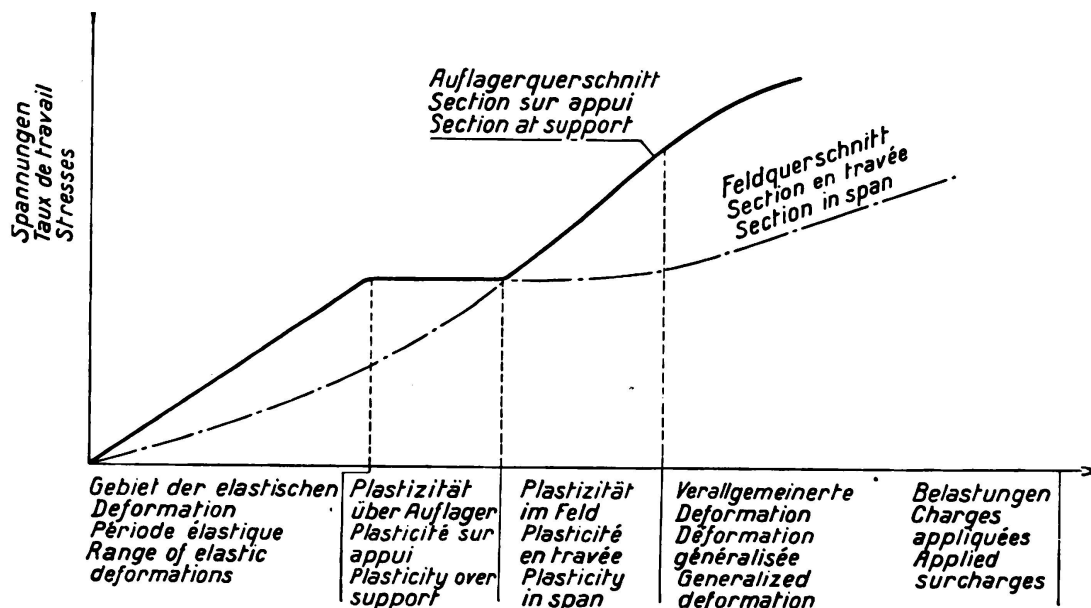


Fig. 15.

De même, dans le cas de poutre à un appui double, le taux de variation est environ 1,5 fois après l'égalisation ce qu'il a été en moyenne auparavant. C'est l'inverse du rapport qui relie le moment fléchissant, qui se produit lors de l'égalisation des moments, au moment fléchissant qui existerait alors sans la continuité.

Autrement dit, si la plasticité atténue tout d'abord le taux de travail dans les sections sur appuis, c'est en sens inverse qu'elle agit ensuite.

En définitive, on voit que le taux de travail sur appui atteint la limite de flambement Φ de la membrure comprimée pour une majoration des charges dans le rapport $\frac{N + \Phi}{2 \Pi}$ dans le cas de deux appuis doubles et aussi $\frac{N + 2 \Phi}{3 \Pi}$ dans le cas d'un seul appui double.

Par conséquent, si on détermine la valeur maximum Π des taux de travail dans une poutre comportant un ou plusieurs appuis doubles, en admettant qu'ils s'égalisent dans le plus grand nombre possible de sections, le coefficient de sécurité vis-à-vis du dépassement de la limite d'élasticité N est effectivement N/Π .

Mais en ce qui concerne le coefficient de sécurité vis-à-vis du flambement de la membrure comprimée, il est intermédiaire entre le précédent et le rapport Φ/Π . L'intervalle entre ces deux coefficients de sécurité doit être réduit dans les mêmes proportions que l'est le moment maximum en travée par rapport au moment de la même travée posée sur appuis simples.

XI — Le cas des arcs hyperstatiques présente des analogies avec celui des poutres continues ou encastrées.

Cependant, examinons ce qui se passe dans la section où le taux de travail est maximum si la courbe des pressions passe par son centre de gravité. Lorsque les charges s'accroissent, l'effort normal dépasse la limite d'élasticité aussitôt après l'avoir atteinte. L'arc ne retire alors aucun bénéfice de la ductilité si ses sections de moindre résistance ne travaillent pas à la flexion. Cela peut d'ailleurs se produire pour certains cas de charges, dans les arcs paraboliques, dans les arcs encastrés amincis aux reins et dans les arcs à deux articulations amincis à la clé.

En dehors de ce cas, la limite d'élasticité n'est pas atteinte simultanément en tous points de la section la plus chargée. Assimilons l'arc à deux membrures. Lorsque la section d'une membrure est plastique, l'accroissement des charges ne produit d'effort supplémentaire que dans l'autre membrure, c'est-à-dire que la courbe des pressions correspondant aux charges supplémentaires passe par celle-ci (fig. 16).

D'une manière générale, la ductilité a ainsi pour effet de rapprocher la courbe des pressions globales du centre de gravité des sections plastiques (fig. 17).

Fig. 16.

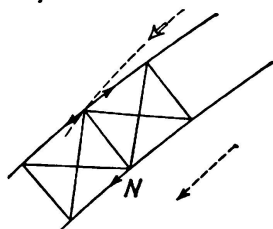
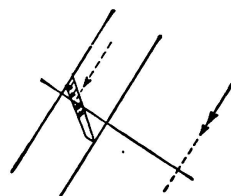


Fig. 17.



Ici l'intervalle entre le moment où une première zone plastique apparaît et celui où la section entière atteint la limite d'élasticité correspond à un accroissement de charges qui peut être important; dans le même intervalle, la plasticité s'étend le long de l'arc.

Un arc est donc susceptible de se déformer largement, de part et d'autre de ses sections de moindre résistance, sans dépassement de la limite d'élasticité, à

moins que la courbe des pressions ne le traverse au centre de ces sections. Pendant cette déformation, l'arc se comporte comme s'il y était articulé.

Sauf cas anormal, la limite d'élasticité est successivement atteinte sans être dépassée en n points, si n est le degré d'indétermination statique pour une certaine valeur des charges.

Pour trouver ces n sections, en même temps que pour faire correspondre à un cas de charge le taux de travail de sécurité Π que l'on s'est fixé, il faut opérer par hypothèses successives :

1° — Rechercher d'abord, en admettant des déformations élastiques, les sections les plus exposées pour la répartition des charges envisagées (charge uniformément répartie, charge concentrée, etc. . .).

2° — Déterminer pour quelle intensité des charges la limite de sécurité Π est atteinte dans ces sections.

3° — Evaluer l'effet, sur les autres sections, de charges supplémentaires considérées seules, en admettant que leur courbe des pressions passe dans la moitié des sections trouvées précédemment, qui est opposée aux points les plus chargés.

4° — Déterminer pour quelle intensité des charges le total des taux de travail définis par le 1° et le 3° atteint comme maximum la valeur Π .

Les sections où se produisent ce maximum et les sections antérieurement trouvées sont celles qui sont censées travailler à la limite de sécurité Π sous les charges envisagées.

Le coefficient de sécurité vis-à-vis du dépassement de la limite d'élasticité N est véritablement égal alors à N/Π puisqu'une majoration des charges dans ce rapport a pour effet d'amener successivement à la limite d'élasticité les sections définies en premier lieu, puis les autres.

Pour un nouvel accroissement des charges, les taux de travail s'élèvent dans l'ensemble de l'arc, sauf dans les zones atteintes, en premier lieu, par la plasticité.

Par conséquent, la limite de rupture sera atteinte pour une nouvelle majoration des charges inférieure à $\frac{R}{N}$, c'est-à-dire que le coefficient de sécurité vis-à-vis de la rupture est intermédiaire entre le rapport $\frac{N}{\Pi}$ et le rapport $\frac{R}{\Pi}$.

XII — La généralisation des résultats ci-dessus demande une grande prudence.

Il ne faut pas prendre le nombre de barres pouvant être supprimées comme étant le degré d'indétermination statique de l'ensemble de la construction. C'est ce dernier nombre seul qui doit être pris en compte dans les applications de la théorie de la ductilité.

Par exemple, dans le système cantilever de la figure 18, il ne serait pas admissible de supposer l'égalisation des moments sur l'appui double B et dans

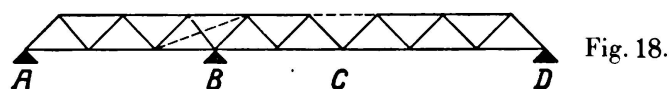


Fig. 18.

la travée A B, même si une diagonale surajoutée rendait la poutre A B C hyperstatique. L'ensemble ne devient hyperstatique et la théorie de la ductilité ne s'applique que si l'on ajoute une barre au-dessus du noeud C.

D'autre part, pour des systèmes complexes, il importe absolument de procéder

de proche en proche pour définir les sections atteintes successivement par la plasticité.

Il faut enfin avoir soin de vérifier que les zones troublées par la plasticité ne sont pas susceptibles d'accuser une cassure de la fibre neutre avant que la limite d'élasticité soit atteinte dans les autres sections considérées. Il faut, en outre, se rappeler que les taux de travail admis dans les calculs tenant compte de la plasticité, ne peuvent servir de base de comparaison que pour la détermination des coefficients de sécurité, vis-à-vis du dépassement de la limite d'élasticité. Vis-à-vis de la rupture, les coefficients de sécurité peuvent être à peine supérieurs aux précédents.

Charges variables

I — Si certains états de charge se renouvellent, et si la limite d'élasticité n'est dépassée en aucun point, nous avons tout lieu de penser que les déformations et les tensions se reproduisent d'une façon cyclique. Aucune expérience n'infirme cette manière de voir.

Nous avons tenté de vérifier qu'il en est bien ainsi lorsqu'une pièce subit des alternances entre deux limites caractérisées par des lois extrinsèques bien déterminées, dont la limite supérieure est suffisante pour rendre la pièce plastique.

Pour cela, nous avons emprisonné une éprouvette de traction entre deux mâchoires, dont l'une était fixée à un vérin à vis, et l'autre à un excentrique.

L'excentrique étant tout d'abord placé dans la position qui correspond à l'allongement maximum de l'éprouvette, nous avons exercé un effort de traction à l'autre bout, au moyen du vérin à vis, jusqu'à entrer franchement dans la période de ductilité de l'acier. Puis, nous avons fait tourner plusieurs fois l'excentrique, de manière à faire varier la longueur de l'éprouvette entre deux limites bien définies, ce qui occasionnait le déchargement, puis le rechargement de l'éprouvette.

Dans cette expérience, la loi extrinsèque qui correspond à l'effort maximum dans l'éprouvette se traduit par une droite verticale sur le graphique déformations / forces et non une droite horizontale comme dans les essais classiques de traction.

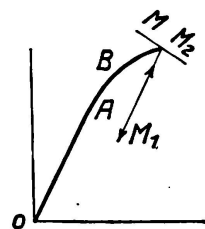


Fig. 19.

L'effort dans l'éprouvette était déterminé par la fréquence des vibrations qu'on produisait par un choc transversal.

Le résultat de ces essais a été négatif. Il semblerait donc que, lorsque le métal est entré dans la phase de la ductilité, l'effort interne soit une fonction univoque de la déformation linéaire, tant que celle-ci ne dépasse pas le maximum précédemment atteint (fig. 19).

Il semble donc que si des charges déterminées amènent une zone à la limite d'élasticité, la répétition de ces charges ne modifie pas la valeur des tensions atteintes et que, par conséquent, le risque de dépassement de la limite d'élasticité ne soit pas plus grand avec des charges renouvelées qu'avec une charge constante. Les conclusions du chapitre précédent demeurent donc.

II — La question est infiniment plus délicate si on veut évaluer le risque de rupture. Il faut alors prendre garde à ce que l'expérience nous a appris récemment concernant les ruptures par répétition des efforts.

Sans doute, les métaux utilisés dans la construction métallique sont-ils beaucoup plus doux que ceux dont les essais d'endurance ont montré qu'ils étaient beaucoup plus sensibles aux efforts répétés qu'à un effort une fois donné.

Il n'en résulte par moins que pour tout métal, quel qu'il soit, la rupture est possible lorsque les efforts répétés atteignent une valeur inférieure à celle qui amène la rupture dans un essai de traction ordinaire.

Par raison de prudence, le principe que nous proposons de suivre consiste, de même que plus haut, à trouver des règles telles qu'elles coïncident, pour les ouvrages isostatiques, avec les règles ordinaires de sécurité et qu'elles fournissent pour des ouvrages hyperstatiques, les mêmes coefficients comme rapport entre les charges admises et les charges dangereuses.

Si l'on adopte ce point de vue, on est amené à considérer qu'une construction isostatique est satisfaisante sous le rapport de la stabilité, lorsque tout en fournissant un certain coefficient de sécurité vis-à-vis du dépassement de la limite d'élasticité, d'une part, de la rupture à la première mise en charge, de l'autre, elle est suffisamment loin du cas-limite où la rupture se produirait sous l'effet de la répétition indéfinie des surcharges.

Ce que nous savons des ruptures par efforts répétés nous amène à penser que la charge permanente joue un rôle bien moindre que les surcharges. Il semble donc utile de considérer, non plus le taux de travail maximum, mais la somme de deux termes :

1° — la demi-amplitude de variation du taux de travail σ_2 et σ_1 ,

2° — la produit de la valeur moyenne $\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}$ des taux travail extrêmes par un coefficient α , qui serait faible.

Si l'on se réfère aux expériences poursuivies sous la haute direction de *M. Caquot* au laboratoire aéro-technique, le coefficient α serait de l'ordre de $\frac{1}{5}$ ^{ème}.

Des règles de sécurité, applicables aux constructions isostatiques, qui tiendraient compte des risques de rupture par efforts répétés, conduiraient donc à comparer le binôme défini plus haut à une limite Π_f obtenue en divisant la limite d'endurance par un coefficient de sécurité.

A moins de renchérir sur les règles imposées actuellement, on serait alors amené à ne pas prendre moins, pour la limite admissible Π_f , que la limite Π_0 antérieurement admise pour le taux de travail total d'une pièce supportant des efforts alternés.

On aurait donc à vérifier l'inégalité suivante :

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + \alpha \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} \leq \Pi_f (\geq \Pi_0) \quad (27)$$

Si maintenant nous considérons une construction hyperstatique, nous devons imposer une condition analogue. Mais jusqu'à preuve du contraire, on peut considérer que le fait que la sollicitation répétée σ_2 est égale à N n'influe pas plus sur le risque de rupture que sur la relation entre la déformation et les forces.

L'expérience, dans ce domaine, serait fort utile.

Nous admettons donc, à défaut de précisions plus grandes, que, dans une construction hyperstatique, on doit vérifier la condition (27), dans laquelle σ_2 coïncide avec le taux de travail produit par la première mise en charge.

Plus exactement, nous comparerons à la limite d'endurance elle-même, $K\Pi_f$, l'expression (27) correspondant à des charges K fois plus élevées que les charges considérées. Si nous divisons maintenant par K les deux membres, il vient

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} + \alpha \left(\frac{\sigma_d}{K} - \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \right) \leq \Pi_f \quad (28)$$

où σ_d désigne le taux de travail correspondant, dans la théorie de la ductilité, à la charge considérée,

$\sigma_{\max}$ et $\sigma_{\min}$ désignent les taux de travail extrêmes d'après la loi de Hooke.

Le premier terme doit être tiré exclusivement de la considération de l'élasticité. Le second s'obtient par différence entre les résultats fournis par la théorie de l'élasticité et celle de la ductilité.

Le bénéfice procuré par la ductilité consiste en ce que ce dernier terme est inférieur à sa valeur déduite de la loi de Hooke, en remplaçant σ_d par $\sigma_{\max}$. Mais, comme le coefficient α est faible, ce bénéfice est assez restreint, surtout si l'amplitude de variation du taux de travail est prépondérante, c'est-à-dire si les surcharges sont importantes par rapport à la charge propre.

Remarquons que la condition (28) peut être remplacée par une condition plus dure où σ_d est remplacé par sa limite Π_0 :

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \leq \frac{\Pi_f - \alpha \Pi_0}{1 - \alpha} \quad (29)$$

En définitive, il nous semble que si l'on veut bénéficier, dans la conception des ouvrages, des latitudes que permet la ductilité, il faudra, en principe, s'astreindre à une double vérification.

1° — Il est indispensable de vérifier qu'il existe un coefficient de sécurité convenable, vis-à-vis du dépassement de la limite d'élasticité et vis-à-vis de la rupture ou du flambement, pour la première mise en charge.

Cette première vérification s'effectue suivant des règles déduites de la connaissance de la ductilité, en ayant égard aux observations que nous avons formulées plus haut.

2° — On devra vérifier qu'il existe un coefficient de sécurité convenable vis-à-vis de la fatigue des pièces et, pour cela, on déduira les variations des taux de travail de la connaissance des lois de l'élasticité. On les comparera à une limite d'endurance déterminée.

Des deux inégalités à vérifier, la plus sévère sera évidemment la première si la charge permanente est prédominante et l'on pourra alors se dispenser de la seconde.

Celle-ci jouera, par contre, s'il s'agit d'une construction légère par rapport aux surcharges, comme un longeron ou une pièce de pont.

En résumé, la ductilité a pour effet de rendre le coefficient de sécurité des constructions insensible aux erreurs de montage, aux anomalies de la répartition

des efforts dus aux charges propres; elle rend correcte l'hypothèse de l'égalisation des taux de travail maxima quand il s'agit de charges permanentes et quand la construction est bien construite.

Par contre, la ductilité n'ajoute aucun élément de sécurité vis-à-vis des surcharges répétées, lorsque la part de celles-ci dans les taux de travail est prépondérante.

Résumé

Dans tout élément de construction auquel les efforts appliqués ne sont pas seulement fonctions des charges s'exerçant sur l'ensemble de la construction, mais dépendent, en outre, des déformations, la limite d'élasticité n'est pas dépassée immédiatement après qu'elle a été atteinte.

Il en résulte qu'il existe une marge de variation des charges s'exerçant sur un ensemble hyperstatique, telle que les efforts demeurent au taux de la limite d'élasticité, tandis qu'ils croissent dans d'autres parties de la construction. Cette conclusion s'applique également au cas des assemblages de pièces travaillant concurremment, et même à celui des éléments de constructions isostatiques, pour ce qui concerne la répartition des efforts à leur intérieur.

Ainsi se justifie, dans une certaine mesure, la méthode de calcul basée sur l'égalité des taux de travail dans les zones les plus chargées des constructions, mais cette méthode n'est valable que si, effectivement, la zone où la limite d'élasticité est vraiment atteinte en premier lieu ne subit pas un nouvel accroissement des taux de travail avant que l'égalisation supposée ne se produise.

Cette restriction est importante dans le cas des poutres ayant des appuis doubles, lorsque leurs âmes sont insuffisamment raidies au voisinage de ces appuis et, d'une manière générale, dans les pièces mal construites. De même, l'application des principes de la ductilité aux arcs et systèmes complexes, ne peut être admise qu'avec la plus grande prudence.

Sous ces réserves, on peut dire que l'hypothèse de l'égalisation des taux de travail dans les $(n + 1)$ sections les plus chargées, si n est le degré d'indétermination, conduit à une juste appréciation du coefficient de sécurité par rapport au dépassement de la limite d'élasticité.

Par contre, le coefficient de sécurité vis-à-vis de la rupture ou du flambement peut n'être que très peu supérieur au précédent coefficient de sécurité, et enfin la ductilité n'ajoute aucun élément de sécurité vis-à-vis des surcharges répétées, lorsque la part de celles-ci dans les taux de travail est prépondérante.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Essais; signification et application des résultats.

Versuche, Ausdeutung und Anwendung der Ergebnisse.

Test Results, their Interpretation and Application.

Dr. Ing. H. Maier-Leibnitz,

Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart.

A. La poutre simple à âme pleine.

Afin de rendre plus significatifs les essais effectués sur des poutres continues nous montrerons d'abord comment se comporte une poutre simple de portée l (fig. 1) chargée en son milieu [1]. Il s'agit d'une poutre I 14 · 14 qui possède, sur la base des dimensions réelles de la poutre, les caractéristiques suivantes: $F = 43,2 \text{ cm}^2$, $J = 1525 \text{ cm}^4$, $W = 214 \text{ cm}^3$. Quatre éprouvettes prélevées dans

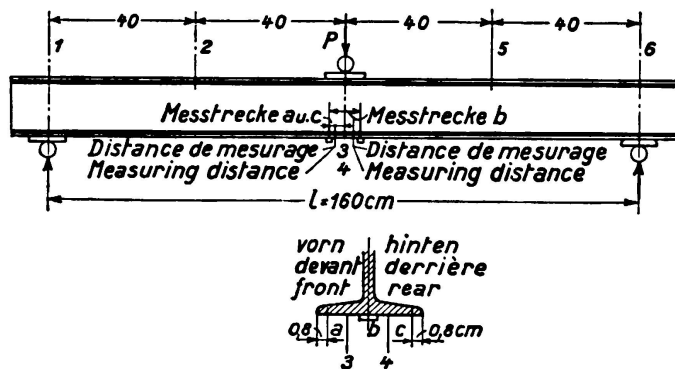


Fig. 1.

les ailes ont donné une contrainte d'écoulement moyenne $\sigma_s = 2,437 \text{ t/cm}^2$. La fig. 2 montre les flèches totales et permanentes au milieu de la poutre, la fig. 3 les allongements totaux et permanents (moyens) des distances entre repères a et c, situées au milieu de la poutre sur l'aile inférieure. On a observé que des écailles se détachaient au-dessous de l'aile comprimée lorsque $P = 12,8 \text{ t}$ et pour une charge $P_v = 17,15 \text{ t}$ la poutre a fléchi transversalement, ce qui l'a rendue définitivement inutilisable.

Par *résistance* d'une telle poutre, on peut entendre bien des choses. En partant du point de vue qu'une poutre devient inutilisable dès l'apparition de déformations permanentes, on pourrait entendre par résistance $[P_T]$, la valeur de P , pour laquelle la limite d'écoulement est atteinte dans la fibre extrême de la section du moment maximum, et à partir de laquelle, pour un P croissant, on obtient des allongements et des flèches permanents. Le moment

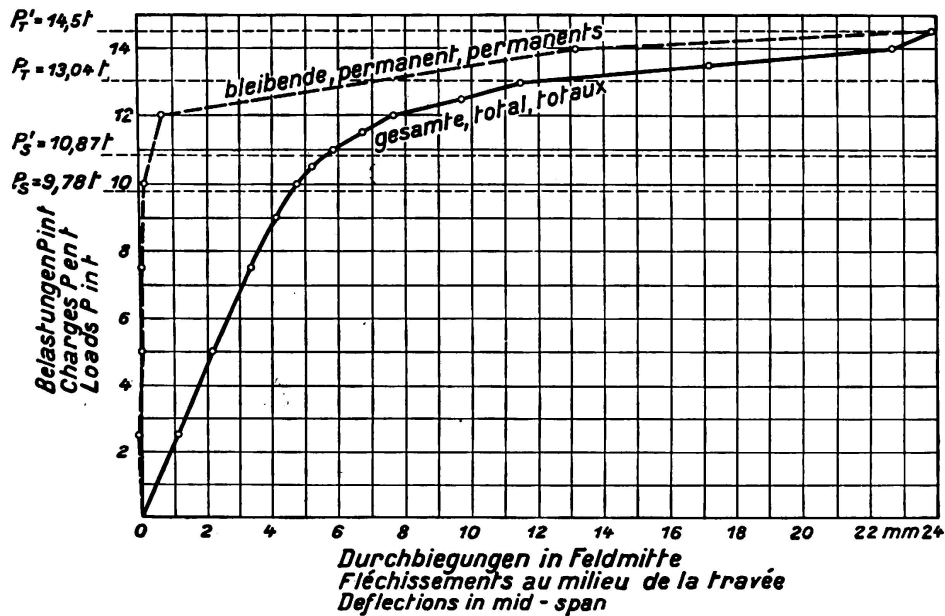


Fig. 2.
Poutre 11a.
Moyenne
des fléchis-
sements du
point
milieu de la
poutre 3, 4.

qui agit dans notre cas est à cet instant: $M_s = W \cdot \sigma_s = 214 \cdot 2,437 \text{ tcm}$ et la résistance $[P_T] = \frac{4 W \cdot \sigma_s}{l} = 13,04 \text{ t}$. La fig. 3 montre qu'effectivement des déformations permanentes commencent à se produire pour cette charge.

On a souvent essayé de déterminer par calcul le «moment supportable» M' , qui ne peut être dépassé et qui correspond au moment intérieur des tensions lorsque toute la section est plastifiée (par ex. *Grüning* dans [2]; *Fritsche* [3]; *Hartmann* [4]; *Fritsche* [5] ainsi que dans les autres articles et les méthodes de calcul de *Prager* et *Kuntze* indiqués dans [5]). Ainsi que *Fritsche* le démontre

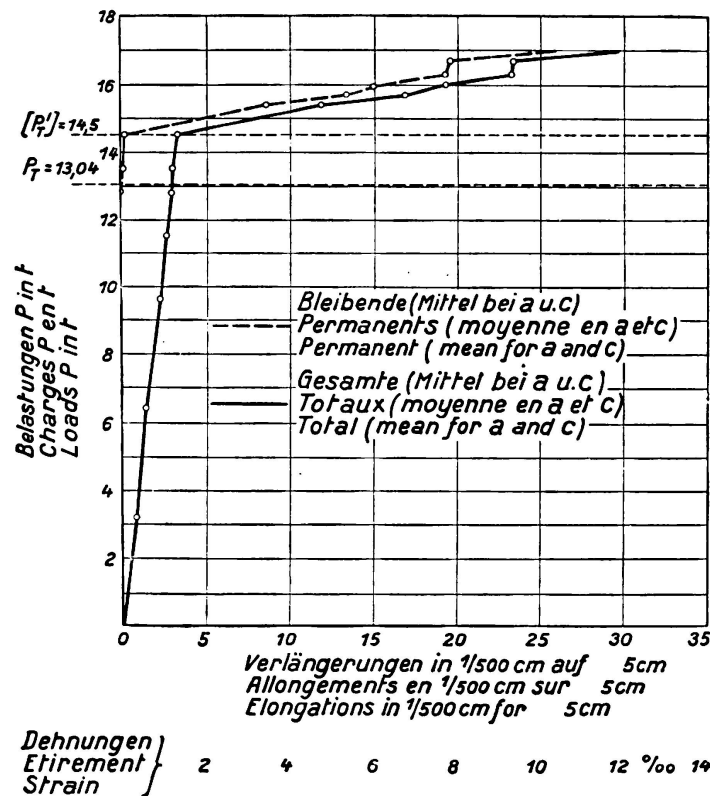


Fig. 3.
Poutre 11 a.

dans [5], on ne peut s'attendre que dans une marge très large à une concordance mathématique entre les essais et les calculs (les sections ne restent pas planes avec l'accroissement de la plasticité; oscillations dans la hauteur de la limite d'écoulement; solidifications locales).

Dans l'essai que nous considérons, on peut très bien lire sur la fig. 3 et même sur la fig. 2 un $[P'_T] = 14,5 \text{ t}$ à partir duquel les allongements permanents à l'aile inférieure au-dessous du point d'application de la force ainsi que les flèches, croissent à peu près sans entrave. Le moment que peut supporter notre poutre, M'_s est $\frac{[P'_T] \cdot l}{4} = 580 \text{ tcm}$ (cf. aussi chapitre Da).¹ Nous avons dans ce cas

$$\frac{[P'_T]}{[P_T]} = \frac{14,50}{13,04} = 1,10.$$

Les essais publiés dans [1] ont donné pour une disposition de la charge suivant la fig. 1, le rapport $\frac{14,70}{12,66} = 1,16$ pour un profilé I *Burbach* $\frac{152}{127}$ et $\frac{8,30}{7,61} = 1,09$ pour une poutrelle I 16.

De toute façon il n'est pas exact, ainsi que l'a déjà fait remarquer *M. Grüning* dans [2], de donner au P_v indiqué ci-dessus ou au P_w du travail de *Stüssi-Kollbrunner* [6] une signification déterminante pour la résistance ou de désigner la résistance par ces valeurs.

Pour l'interprétation qualitative des essais, décrits dans les chapitres B à E, effectués sur des poutres continues ou encastrees, ainsi que pour le projet de procédé simple de dimensionnement de ces poutres, il est important d'indiquer que d'une manière analogue à la fig. 4a, la courbe OCDE de la fig. 4b (identique à la fig. 5 de [1]) représente la flèche permanente f d'une poutre AB (ou de même la déformation φ) en fonction de la charge P (ou du moment en travée $\frac{Pl}{4}$). Afin de simplifier cette interprétation, on peut remplacer la ligne brisée CDE par l'horizontale FG et la courbure de la poutre de la fig. 4a après la décharge par un angle au point milieu, c'est-à-dire introduire les valeurs

$$\varphi = \frac{2f}{\frac{l}{2}} \text{ et } f = \frac{\varphi l}{4}$$

Cette *hypothèse simplifiée d'interprétation* provient de ce que l'on admet qu'en principe la poutre ne peut pas supporter un moment plus grand que $M'_s = \frac{[P'_T]l}{4}$,

dans le cas que [nous avons considéré un moment plus grand que $M'_s = 580 \text{ tcm}$ et que] sous l'effet de ce moment la poutre prend la forme d'une ligne brisée. C'est comme si l'on admettait au point d'application de la force et sous l'effet de $[P'_T]$ la formation d'une articulation dans laquelle un moment intérieur M'_s maintenant l'équilibre, s'opposait au moment en travée.

¹ Si l'on se représente les points de mesurage des fig. 2 et 3 reliés par des courbes, on pourrait aussi lire $[P'_T] = 15 \text{ t}$; on aurait alors $M'_s = 600 \text{ tcm}$.

D'autres essais sur la poutre simple sont décrits dans [7], [8], [9], [10] et [11].

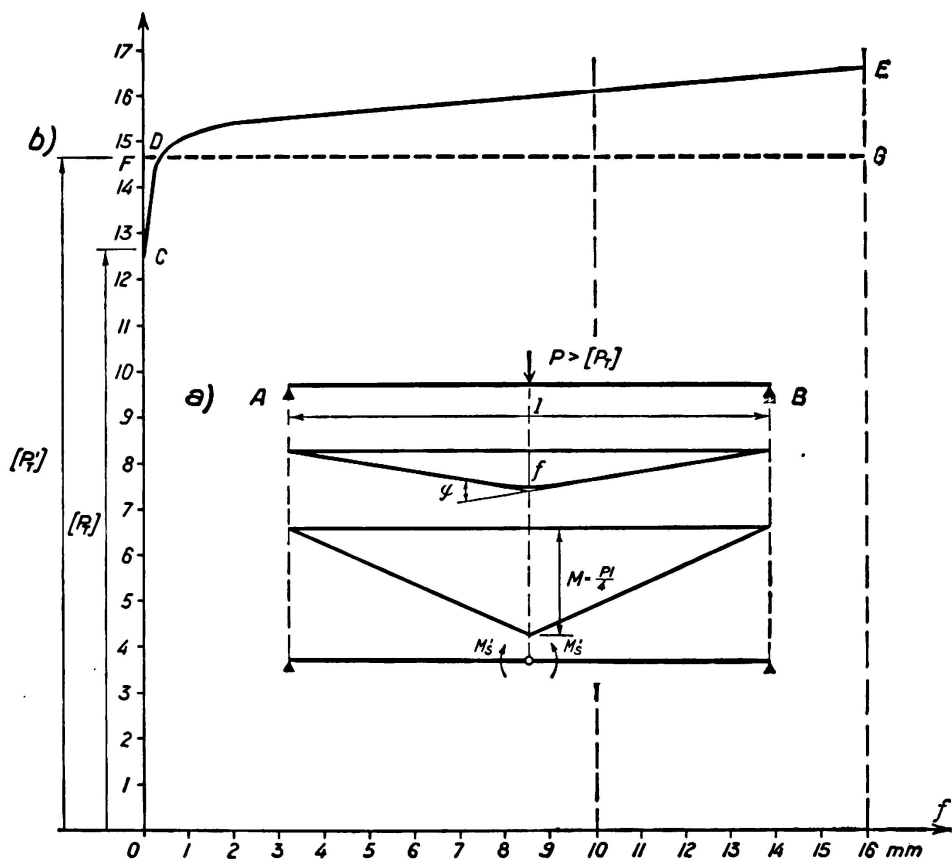


Fig. 4.

B. Poutres continues sur deux ouvertures et identiquement chargées dans les deux travées.

La fig. 5 donne un aperçu des essais effectués par l'auteur avec deux I 16 accouplés, essais décrits dans [11]. Quatre cas y sont comparés entre eux et l'on a reporté les valeurs P_{adm} qui, d'après la théorie ordinaire engendrent la tension $\sigma_{adm} = 1,2 \text{ t/cm}^2$: cas I, poutre simple; cas II, poutre continue posée

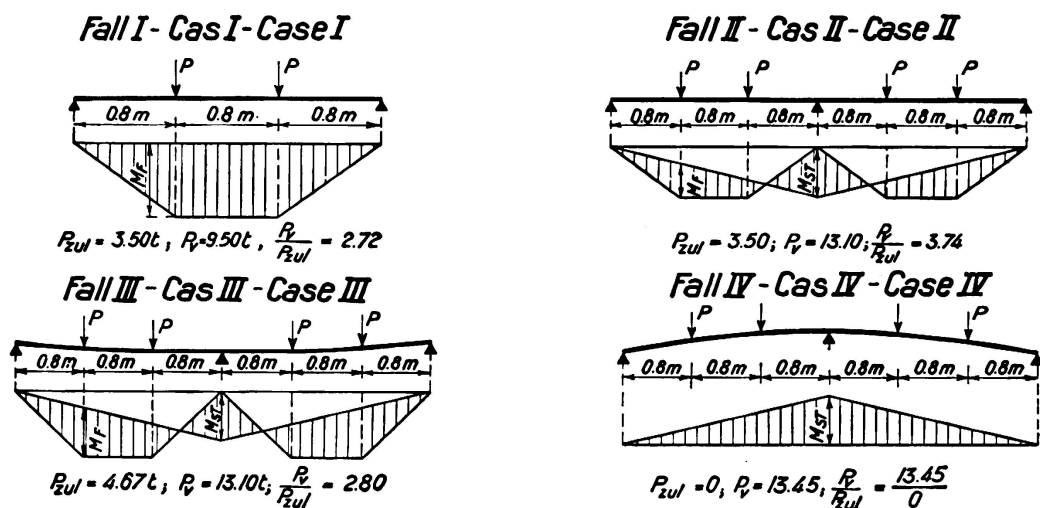


Fig. 5.

sur des appuis de même hauteur; cas III, poutre continue dont l'appui central a été abaissé de telle sorte que le moment en travée $x =$ le moment sur l'appui $=$ le moment admissible: $W \cdot \sigma_{adm}$; cas IV, poutre continue dont les appuis extrêmes ont été abaissés de telle sorte que le moment admissible: $W \cdot \sigma_{adm}$ apparaisse au droit de l'appui central. Le refus de toutes les poutres s'est produit pour des charges P_v par amollissement aux environs des points d'application des forces extérieures après l'apparition de déformations permanentes inadmissiblement élevées. Les flèches mesurées au milieu des travées sont reportées pour les quatre cas dans la fig. 6.

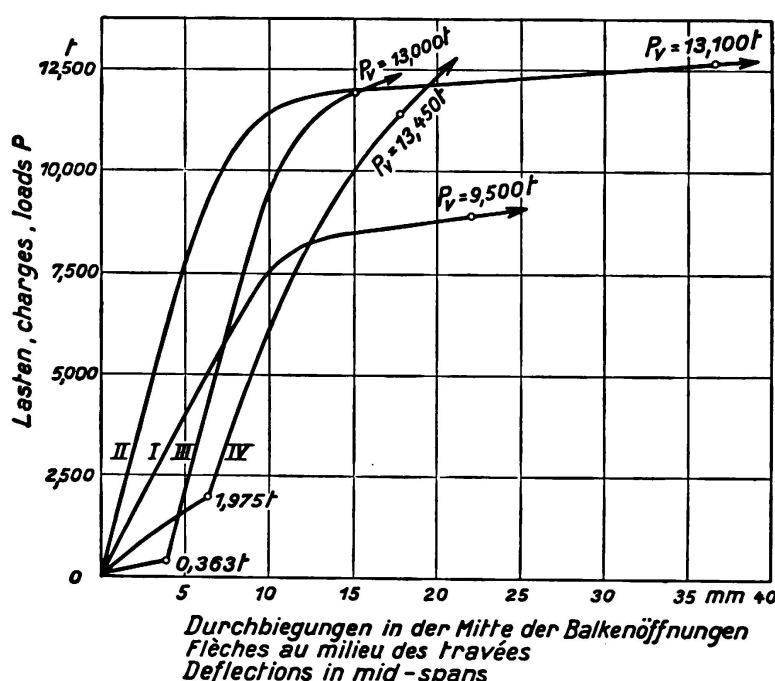


Fig. 6.

Dans l'essai de la poutre du cas I on observa les premières lignes d'écoulement dans la semelle tendue au-dessous des points d'application des forces pour un $[P_T] = 7,5$ t, c'est-à-dire pour une tension calculée de $2,70$ t/cm² (plus petite que l'effort moyen d'écoulement de $2,94$ t/cm² obtenu dans les essais de traction). Les essais ont montré que l'on pouvait admettre $[P'_T] = 8,5$ t². Le moment qui peut être supporté est donc de $M'_s = 8,5 \cdot 80 = 680$ tcm. Le moment résistant effectif est pour les deux profilés de 222 cm³ $M_s = W \cdot \sigma_s$ est pour un $\sigma_s = 2,70$ t/cm² de $222 \cdot 2,7 = 600$ tcm et pour un $\sigma_s = 2,94$ t/cm² de 665 tcm. $\frac{[P'_T]}{[P_T]} = 1,14$; $\frac{M'_s}{M_s} = \frac{680}{600} = 1,14$ ou $\frac{680}{665} = 1,02$. On voit ainsi que l'on ne peut déterminer M'_s en partant de la limite d'écoulement obtenue dans les essais de traction.

Essais cas II.

Les observations les plus importantes faites au cours de l'essai sont contenues dans la fig. 7, les fléchissements moyens sont donnés dans la fig. 8 et les allon-

² Les valeurs de la résistance des poutres simples sont placées entre crochets $[]$. Donc $[P_T]$ et $[P'_T]$ se rapportent toujours ici et dans la suite aux poutres simples de comparaison.

gements mesurés à l'aile supérieure sur une distance de 100 mm au droit de l'appui central sont représentés par la fig. 9. Les caractéristiques de la section calculées d'après les dimensions effectives des poutres ont été additionnées et sont: $F = 43 \text{ cm}^2$, $J = 1727 \text{ cm}^4$, $W = 211 \text{ cm}^3$; la tension moyenne d'écoulement, déterminée par essais de traction, est de $2,51 \text{ t/cm}^2$. Si de là, on voulait calculer M'_s , on obtiendrait suivant la désignation du chapitre A, $M_s = 211 \cdot 2,51 = \sim 530 \text{ tcm}$. Dans ce cas on obtiendrait pour M'_s , d'après M. Grüning [2]:

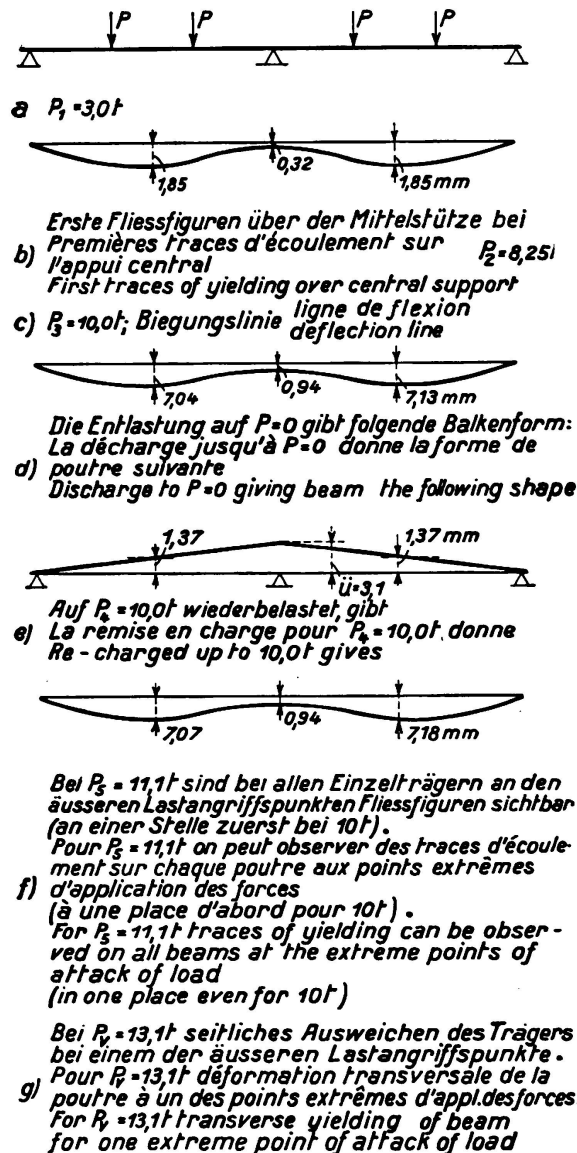


Fig. 7.

Représentation
de l'essai principal II.

$232 \cdot 2,51 = 585 \text{ tcm}$, d'après Fritsche [3] (p. 854): $1,16 \cdot 530 = 620 \text{ tcm}$. Les observations au cours de l'essai ont montré que, au-dessus de l'appui central, les premières lignes d'écoulement sont apparues entre l'âme et l'aile supérieure lorsque $P = 8,25 \text{ t}$ pour un des profilés (et lorsque $P = 8,50 \text{ t}$ pour l'autre), c'est-à-dire pour un moment $M'_s = \frac{Pl}{3} = 8,25 \cdot 80 = 660 \text{ tcm}$ (et $8,50 \cdot 80 = 680 \text{ tcm}$). On peut très bien voir d'après la fig. 8 qu'à partir d'une charge $P'_s = \sim 8,25 \text{ t}$, les fléchissements commencent à croître plus fortement.

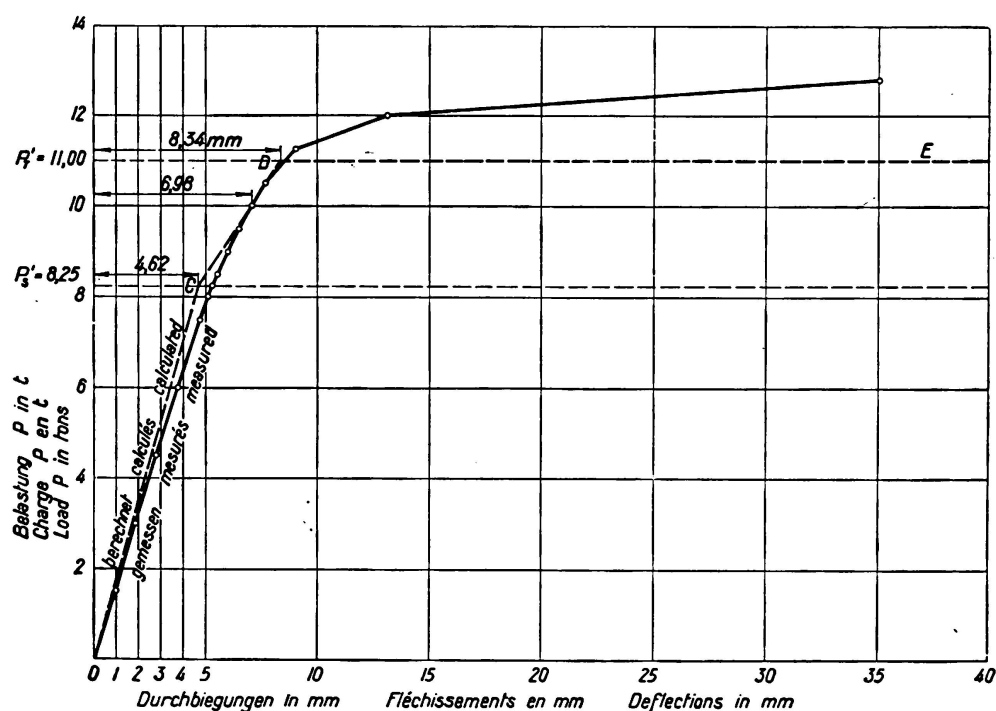


Fig. 8.

Pour l'interprétation de l'essai à l'aide de l'hypothèse simplifiée expliquée à la fin du chapitre A) on utilisa la valeur $M'_s = 660 \text{ tcm}$. On obtient ainsi les relations de la fig. 10.

P'_s est la valeur de la charge P pour laquelle, en admettant des relations purement élastiques, le moment sur appui $M_{st} = M'_s$ (fig. 10a); $P'_s = \frac{M_s \cdot 3}{l} = \frac{660 \cdot 3}{240} = 8,25 \text{ t}$. Si la charge dépasse P'_s , les moments sur, les appuis ne

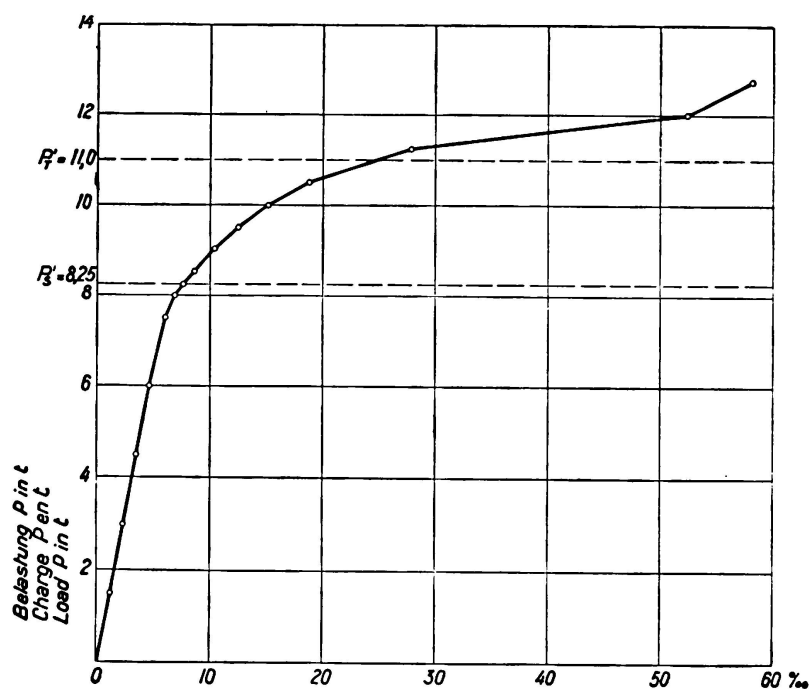


Fig. 9.

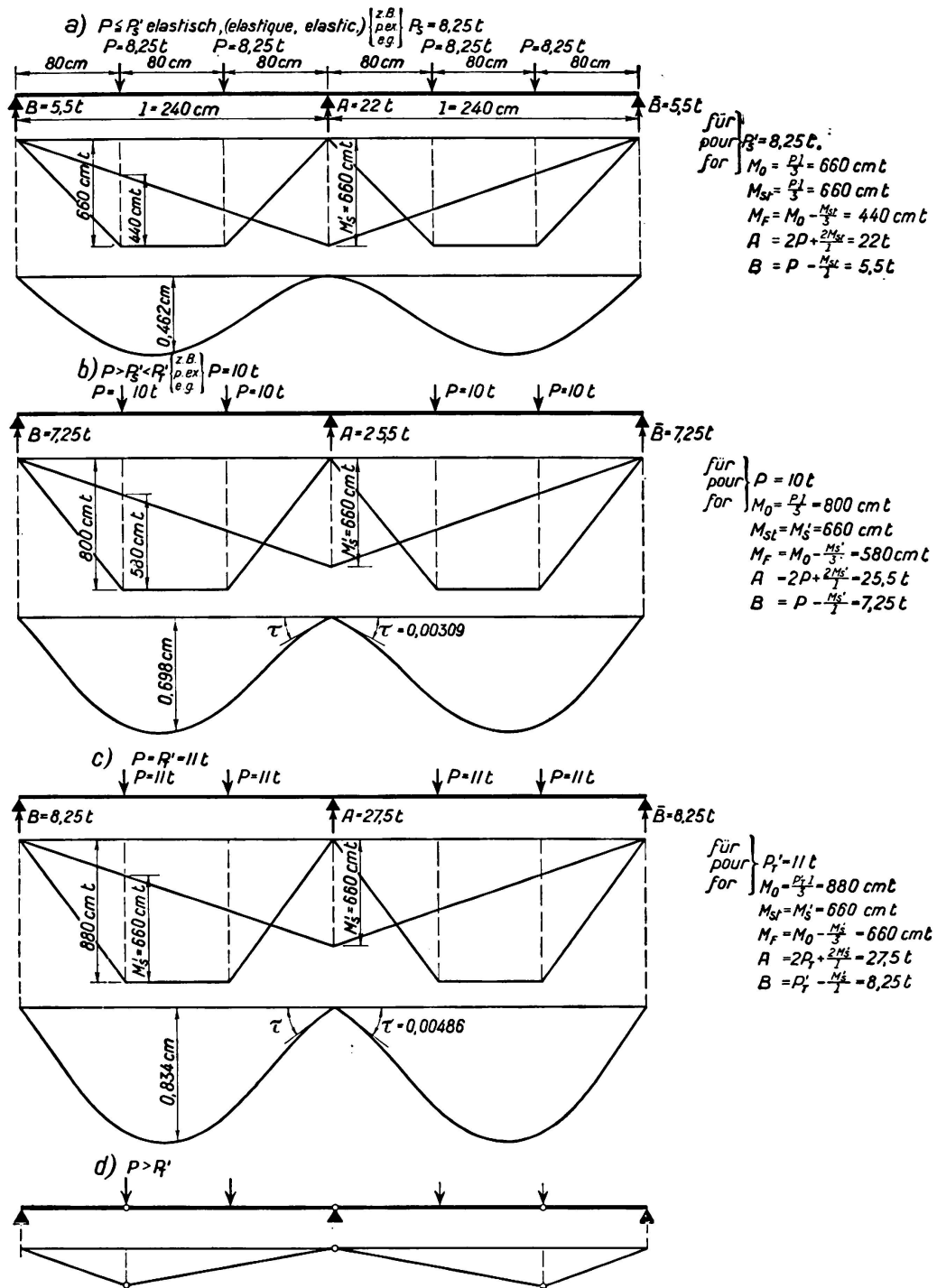


Fig.10.

peuvent plus augmenter M'_s (fig. 10b). La résistance est atteinte pour P'_T , une charge pour laquelle le moment en travée $M_F = \frac{P'_T \cdot l}{3} - \frac{M'_s}{3}$ a précisément la valeur M'_s (fig. 10c). On a donc $P'_T = \frac{4 M'_s \cdot 3}{3 \cdot l} = \frac{4 \cdot 660}{240} = 11 \text{ t}$. La fig. 8 montre qu'effectivement à partir de $P = 11,25 \text{ t}$, les flèches croissent beaucoup plus fortement avec des charges croissantes, de telle sorte que la poutre devient

pratiquement inutilisable pour des charges plus élevées. (Si l'on avait basé le calcul sur un $M'_s = 680 \text{ tcm}$, ainsi que cela a été mentionné ci-dessus on aurait obtenu $P'_s = 8,5 \text{ t}$ et $P'_T = 11,66 \text{ t}$ ce qui représente mieux encore les relations effectives).

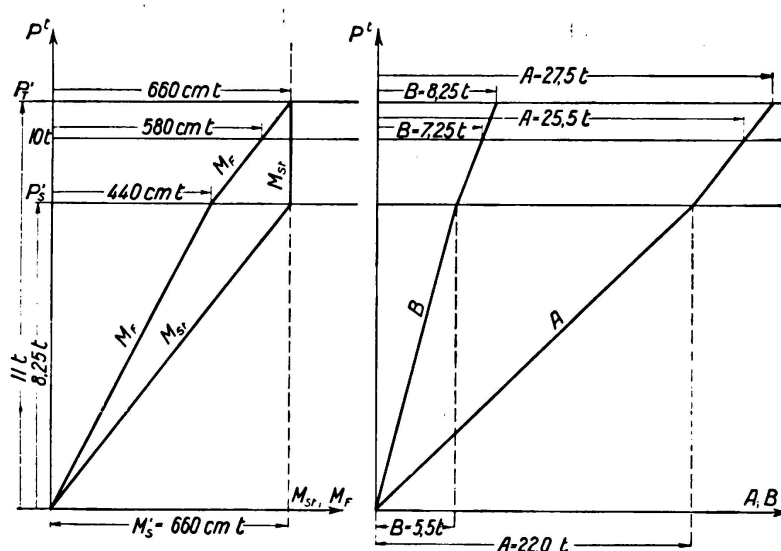


Fig. 11.

La fig. 11 contient les valeurs ajoutées à la fig. 10.

En ce qui concerne les déformations, on a les rapports donnés par les fig. 10 et 12 si l'on se base sur l'hypothèse simplifiée d'interprétation avec $J = 1727 \text{ cm}^4$, $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ et sans tenir compte des déformations engendrées par les efforts tranchants. Les flèches de 4,62 mm, 6,98 mm et 8,34 mm calculées pour $P = 8,25 \text{ t}$, $P = 10,0 \text{ t}$ et $P = 11 \text{ t}$ sont reportées dans la fig. 8. On voit qu'une ligne brisée OCDE correspond pour les fléchissements aux hypothèses de calcul et que ces fléchissements croissent sans limite lorsque P'_T est atteint.

Au moyen de l'hypothèse simplifiée d'interprétation on peut finalement représenter d'une façon expressive comment dans le domaine $P > P'_s < P'_T$ l'égalisation se fait entre le moment sur l'appui, M_{st} , et le moment en travée M_F . La ligne de flexion de la fig. 10b montre que la poutre $BA\bar{B}$ a acquis une déformation permanente formant un angle $\varphi = 2 \cdot 0,00309$ au point A qui peut être considéré comme une articulation. Si l'on décharge la poutre $BA\bar{B}$, elle doit prendre la forme dessinée à la fig. 12c avec un appui relevé de $\bar{u} = 0,00309 \cdot 240 = 0,741 \text{ cm}$.

Si on la recharge, la surélévation $\bar{u}$ doit d'abord être annulée par une charge $X = \frac{48 \cdot E \cdot J \cdot \bar{u}}{l^3} = 1,167 \text{ t}$ (fig. 12e). A cette charge correspond sur l'appui de la poutre $BA\bar{B}$ un moment positif $M_x = \frac{1,167 \cdot 480}{4} = 140 \text{ tcm}$. Si l'on applique de nouveau les charges de 10 t, il se produit un moment total sur appui de $M_{st} \cdot el - M_x = \frac{10 \cdot 240}{3} - 140 = 660 \text{ tcm}$ (fig. 12b). Comme ce moment, d'après nos hypothèses, n'engendrent que des déformations purement élastiques lors d'une nouvelle surcharge avec des forces de 10 t tout se passe dans le domaine purement élastique. Pour terminer, la surface hachurée des moments de la fig. 12b est de nouveau valable. On peut exprimer ceci comme

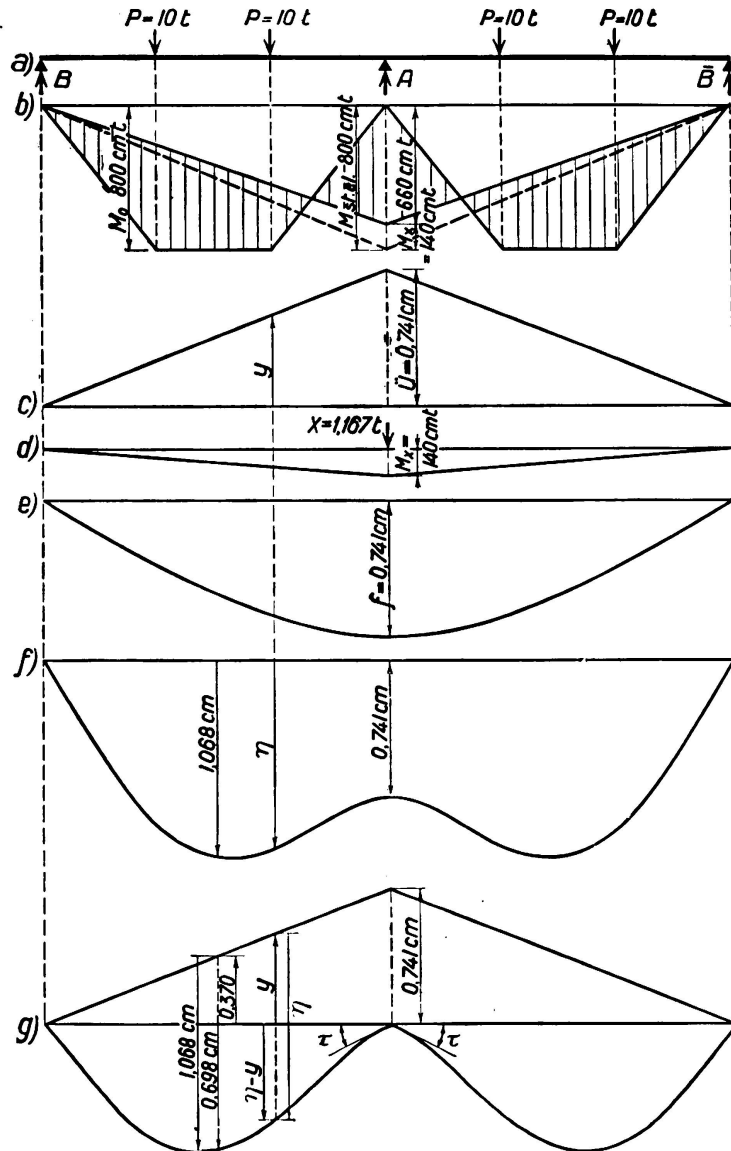


Fig. 12.

suit: d'abord agit la force X qui engendre un moment sur appui $M_x = 140$ tcm; ensuite, par des charges de 10 t le moment sur appui augmente d'une façon purement élastique jusqu'à $M_{st \cdot el} - M_x = \frac{Pl}{3} - 140 = 10 \cdot 80 - 140 = 660$ tcm.

On obtient les flèches η de la poutre BAB primitivement surélevée au début de la remise en charge en tant qu'ordonnées de la courbe des moments d'une poutre $B\bar{B}$, chargée par la surface hachurée des moments de la fig. 12b multipliée par $\frac{1}{EJ}$. La fig. 12f représente la ligne de flexion calculée de la sorte.

Comme contrôle on doit obtenir au point A une flèche $\bar{u}$. Si l'on reporte à partir de l'axe (ordonnées y) les flèches η de la poutre surélevée de $\bar{u} = 0,741$ cm avant la remise en charge (fig. 12g), les ordonnées $\eta - y$ représentent la forme de l'axe de la poutre rechargée, qui correspond exactement avec la forme de l'axe lors de la première mise en charge avec 10 t (fig. 10b).

Si l'on compare l'interprétation précédente des stades de la mise en charge, de la décharge et de la remise en charge avec 10 t, avec les résultats des essais (fig. 7) on a en principe concordance pour autant qu'il se produise un relè-

vement de la poutre sur l'appui intermédiaire après l'application et l'enlèvement de la charge de 10 t et que la remise en charge se fasse tout-à-fait élastiquement. Il ne faut évidemment pas s'attendre à une concordance numérique car à part les simplifications de l'hypothèse d'interprétation il faudrait considérer les variations dans les caractéristiques de la section ainsi que le comportement de la poutre par rapport aux relations de déformation (influence des efforts tranchants, E , σ_s) et parce que d'autre part il était impossible lors des essais de maintenir les trois appuis exactement à la même hauteur pour toutes les variations de la charge. De toute façon, l'essai a clairement montré que si pour une charge plus grande que P' , le moment sur appui ne croît pas au-dessus de M' , lorsque le moment en travée augmente c'est parce que la poutre se déforme automatiquement de telle façon que la poutre primitivement droite subit un relèvement $\ddot{u}$. Le relèvement pourrait très bien se faire par pliage à froid au moyen d'une machine et aurait le même effet, par rapport à la réduction du moment sur appui, qu'un abaissement artificiel de même grandeur de cet appui. Les calculs donnent pour $P = 10$ t et 11 t des valeurs de $\ddot{u}$ de 7,41 mm et 11,65 mm pour une longueur totale de la poutre de 480 cm; l'essai a donné des valeurs plus faibles.

En résumé on peut dire ce qui suit:

1° Dans le cas considéré, l'interprétation et les hypothèses simplifiantes sur lesquelles on s'est basé forment pour les applications pratiques des bases suffisamment exactes pour la détermination de la résistance de la poutre continue considérée. Dans tous les cas on est sûr lorsqu'on introduit pour la poutre simple le «moment supportable» $M_s = W \cdot \sigma_s$ et de calculer pour la poutre ci-dessus, P_s et P_T avec ce M_s d'après la fig. 11.

2° Les définitions suivantes servent de base à l'hypothèse simplifiée d'interprétation:

- a) P' est la charge limite pour laquelle la mise en charge, la décharge et la remise en charge se font tout-à-fait élastiquement.
- b) Pour $P > P'$, < qu'une charge limite supérieure P'_T il est essentiel que d'abord aux environs de la section où, d'après la théorie de l'élasticité, existe le plus grand moment de flexion, il se produise des déformations limitées pratiquement sans danger qui correspondent à un pliage à froid de la barre. La décharge et la remise en charge se font d'une façon purement élastique.
- c) P'_T est la charge limite dont le dépassement entraîne l'équilibre instable de la poutre (cf. par ex. fig. 10d).

3° La poutre se comporte comme suit:

- a) Pour P_s apparition des premières petites déformations permanentes,
- b) à partir P'_s ces déformations croissent de façon sensible sans influencer cependant l'applicabilité de la poutre,
- c) pour $P > P'_s$, < P'_T la décharge et la remise en charge se font tout-à-fait élastiquement,
- d) pour $P > P'_T$ les déformations permanentes croissent dans de telles proportions que la poutre devient pratiquement inutilisable,
- e) pour P_v la poutre ne supporte plus du tout.

et élastique en travée et sur appui) nous montre que les déformations permanentes commençaient déjà pour $P = 2$ t. Ceci provient de ce que, ainsi qu'il est dit dans [12] p. 14, en cours de l'essai «il s'est produit un relèvement relatif de l'appui central et par conséquent un accroissement des tensions en ce point». Il en résulte que $M_{st} = M'_s$ a été déjà atteint pour $P < P'_s$. La valeur P'_T est atteinte parce que dans la section 2 : $M_F = M_o - \frac{2}{5}M_{st} = M'_s$, ce qui signifie que $240 P'_T - \frac{2}{5}M'_s = M'_s$; d'où $P'_T = 3,585$ t. La poutre n'a plus rien supporté pour $P_v = \frac{19}{4} = 4,75$ t.

Tandis que dans ce que nous venons de dire ainsi que dans ce qui suivra on a considéré des charges croissant de 0 à P'_T (à P_v), les essais de *O. Graf*, décrits dans [14], concernent la détermination de la résistance à la fatigue de poutres en acier St. 37 simples et continues sur deux travées.

C. Poutres à âme pleine, continues à deux travées et chargées sur une seule.

Lorsque sur la poutre continue à travées égales AB et BC (fig. 14) on applique qu'une seule charge, par ex. la charge P à la distance a de l'appui de gauche, la poutre se comporte élastiquement jusqu'à la charge P'_s (fig. 14b) on

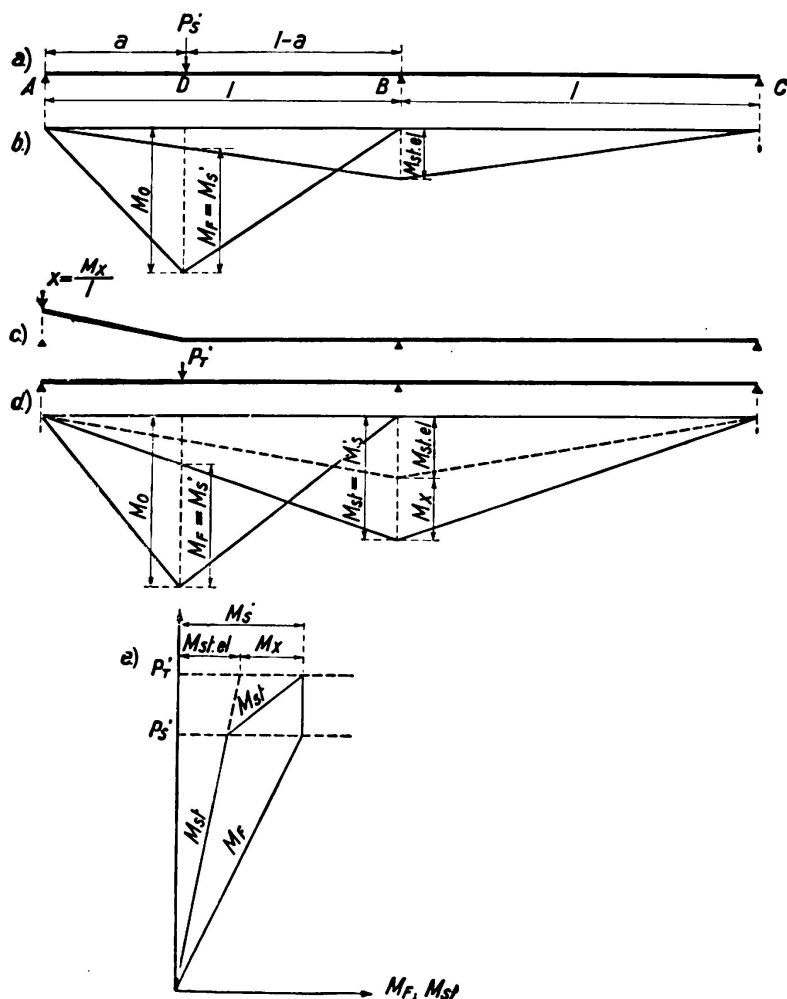


Fig. 14.

c'est-à-dire aussi longtemps que le moment en travée M_F est plus petit que M'_s . Le moment sur appui, délimité par la ligne de fermeture, est ici $M_{st\ el}$. Pour une charge $P P'_s$ on obtient la répartition des moments à partir de la surface des M_o et d'une ligne de fermeture telle que le moment en travée M_F ne peut croître au-dessus de M'_s . La charge limite P'_T est atteinte lorsqu'aussi le moment sur appui $M_{st} = M'_s$ (fig. 14d). La condition s'exprime ainsi

$$\frac{l-a}{l} \cdot a \cdot P'_T - \frac{a}{l} \cdot M'_s = M'_s$$

et de là

$$P'_T = M'_s \left(1 + \frac{a}{l} \right) \frac{l}{a(l-a)}$$

Les fonctions $M_F(P)$ et $M_{st}(P)$ sont représentées à la fig. 14e.

Pour $P > P'_s < P'_T$ et pour le cas limite $P = P'_T$ (fig. 14d) on peut s'imaginer d'après ce que nous avons vu sous B) le moment sur appui M_{st} décomposé en deux: $M_{st\ el}$ et $M_x = M_{st} - M_{st\ el}$. La partie M_x correspond après la décharge à une pliure visible de la poutre (pliure a froid) au-dessous

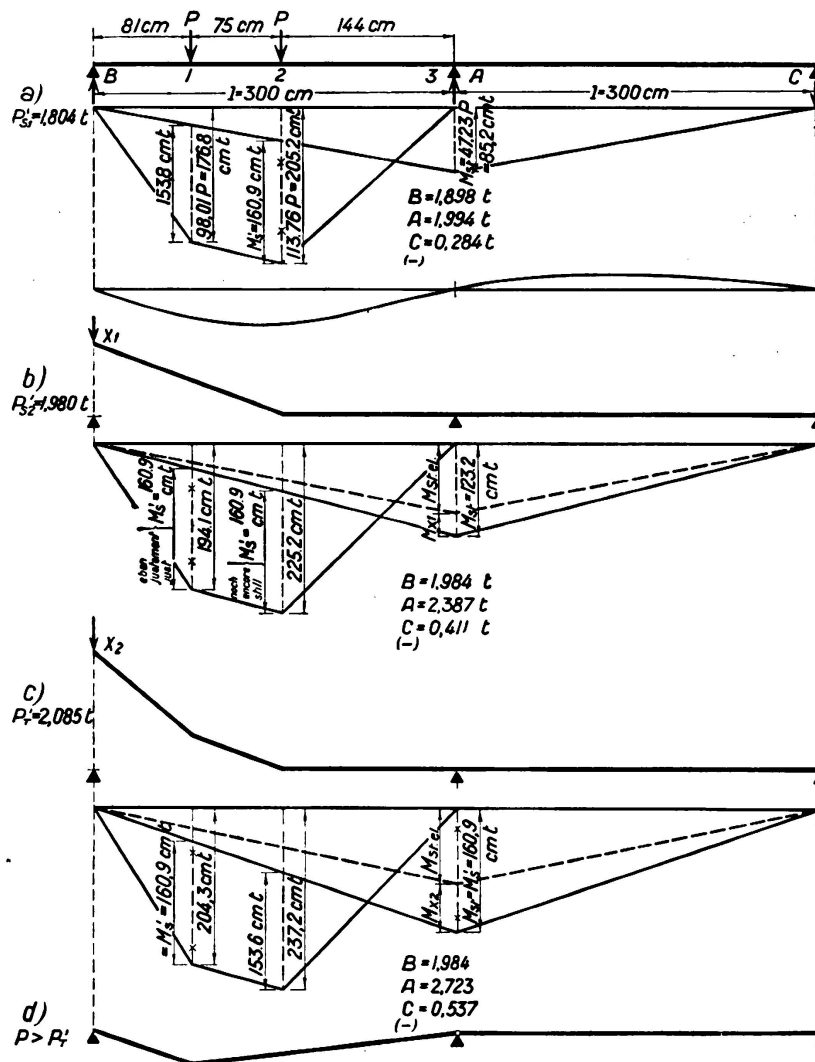


Fig. 15.

du point d'application de la force (fig. 14c) telle que lors de la remise en charge une force $X = \frac{M_x}{l}$ amène d'abord l'extrémité relevée de la poutre sur l'appui. Tout se passe ensuite élastiquement lorsque l'on applique de nouveau une charge croissant de 0 à P. Au moment M_x engendré par la force X s'ajoute la partie purement élastique $M_{st\,el}$ correspondant à la valeur de P. On pourrait facilement déterminer la forme de la poutre en partant de la ligne élastique de la travée AB comme on l'a déjà montré sous B).

Dans les essais de *Hartmann*, décrits dans [4], deux charges agissent dans la travée de gauche de la poutre. Il s'agit de $I_{12} : J = 328 \text{ cm}^4$, $W = 54,7 \text{ cm}^3$, $\sigma_s = 2,51 \text{ t/cm}^2$ et $M_s = 54,7 \cdot 2,51 = 137,5 \text{ tcm}$. Si l'on choisit d'après les données de [4], p. 79, $M'_s = 160,9 \text{ tcm}$ ($= 1,16 M_s$) on obtient en se basant

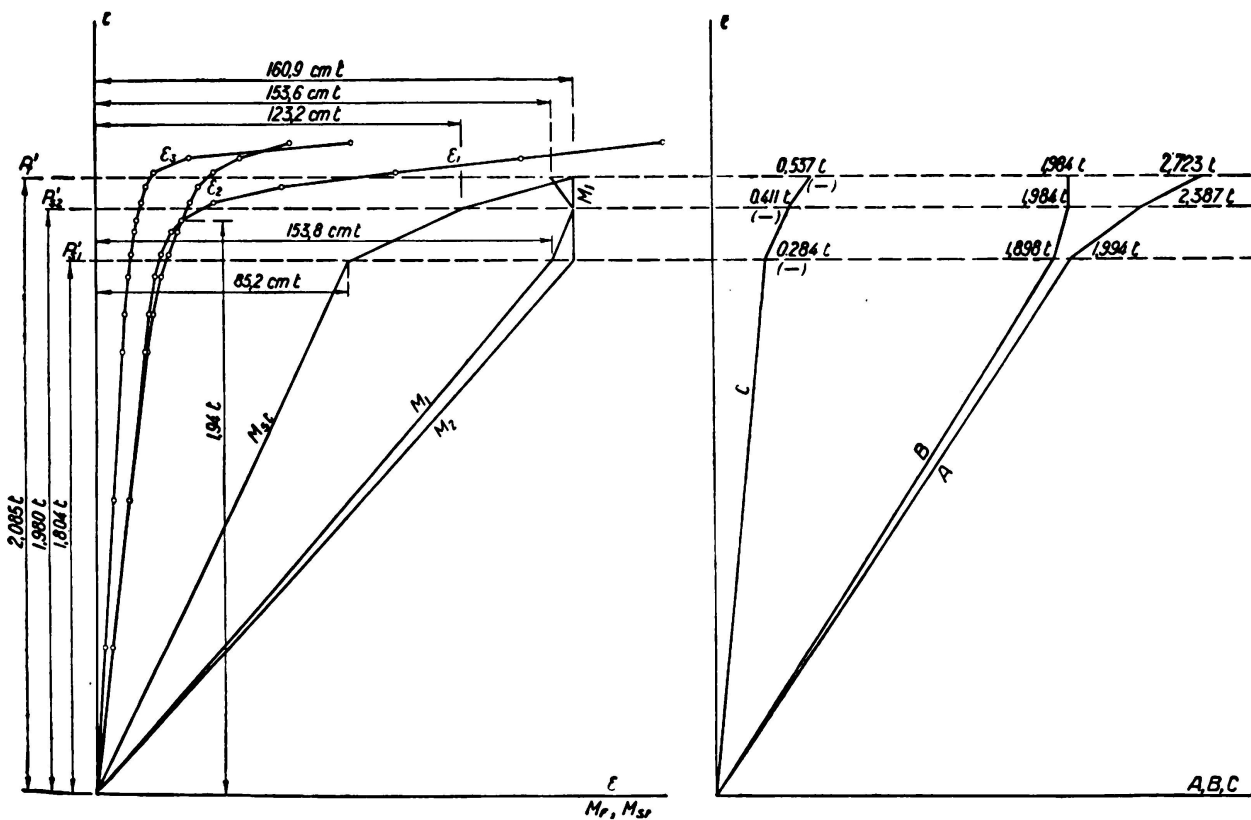


Fig. 16.

sur l'hypothèse simplifiée d'interprétation, les relations représentées aux fig. 15 et 16. Jusqu'à P'_{s1} , les déformations sont purement élastiques. La répartition des moments s'obtient en partant de la surface des M_0 et de la ligne de fermeture conditionnée par $M_{st\,el}$. Pour $P'_{s1} = 1,804 \text{ t}$ (fig. 15a) le moment en travée à la section 2 atteint la valeur M'_s . Lorsque $P > P'_{s1}$, et que l'on décharge, la poutre présente une pliure au-dessous du point d'application de la force 2; pour $P = P'_{s2} = 1,980 \text{ t}$ (fig. 15b) les deux moments en travée, aux points 1 et 2, deviennent égaux à M'_s . Lorsque $P > P'_{s2}$ les moments en travée au point 2 deviennent plus petits que M'_s . Si l'on décharge alors, une nouvelle pliure de la poutre apparaît au point 1. Pour la valeur limite $P'_T = 2,085 \text{ t}$ (fig. 15c) le moment en 1 et le moment sur appui sont tous deux $= M'_s$. On peut ima-

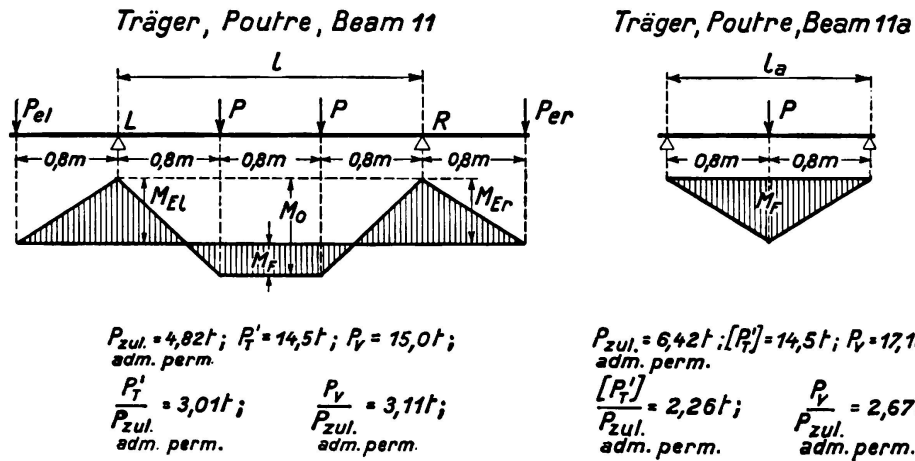


Fig. 17.

giner le moment sur appui par exemple de la fig. 15c décomposé en deux M_{x_2} et $M_{st\,el}$. La partie M_{x_2} correspond à une force x_2 qui lors de la remise en charge de la poutre amène la partie relevée sur l'appui et permet que tout se passe élastiquement sous l'effet de la nouvelle surcharge. Les fonctions $M_1(P)$, $M_2(P)$ et $M_{st}(P)$ sont reportées dans la fig. 16. On a encore reporté, de [4] (fig. 13), les allongements ε_1 , ε_2 et ε_3 correspondant à différentes surcharges et déterminés par un essai. On voit qu'aussi longtemps que le moment en travée en 1 n'a pas atteint la valeur M'_s , les allongements ε_2 sont plus grands que les allongements ε_1 . Pour $P = 1,94\,t$, c'est-à-dire aux environs de $P'_{s_2} = 1,98\,t$, les deux lignes se coupent, les allongements ε_1 deviennent plus grands que les allongements ε_2 . On a interrompu l'essai pour $P = 2,2\,t$.

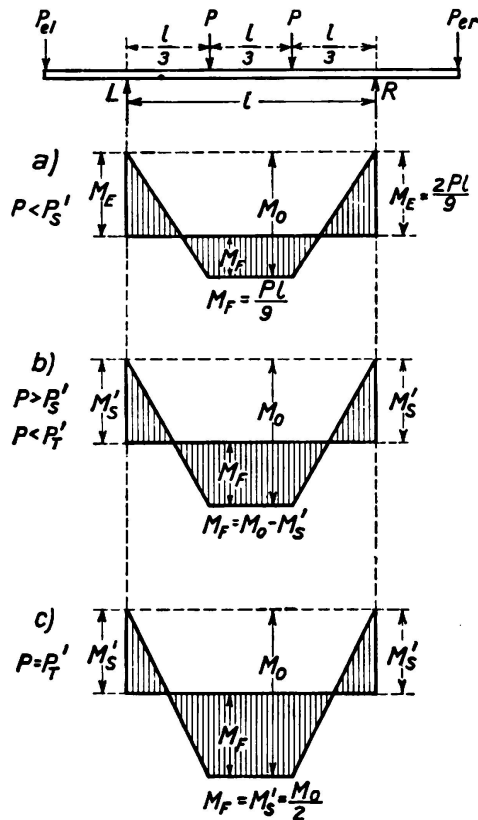


Fig. 18.

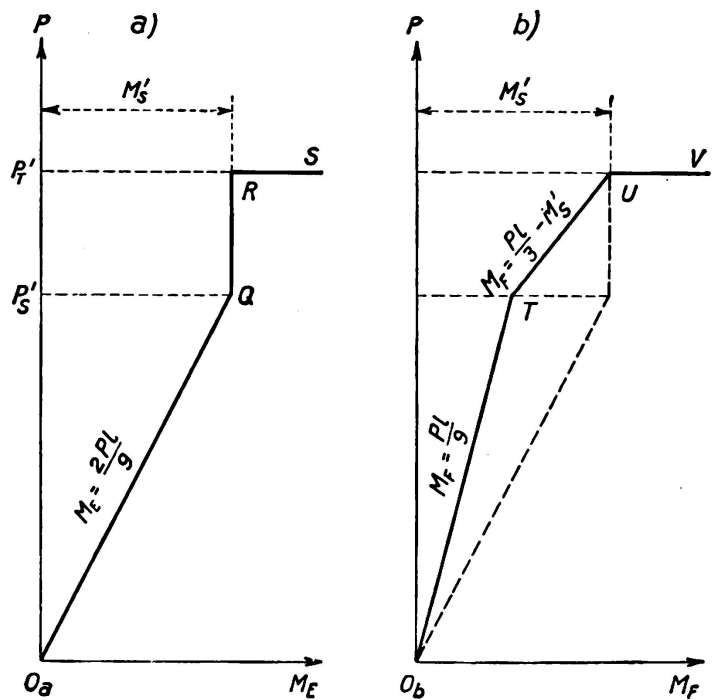


Fig. 19.

D. La poutre encastrée.

a) Essais tels que lors de la mise en charge on fit en sorte que les sections sur les deux appuis restent exactement verticales.

Nous parlerons dans ce qui suit de la poutre 11 des essais publiés par l'auteur dans [1]. Dans la fig. 17 ainsi que dans la fig. 5 sous B) on a comparé P_{adm} , P'_T et P_v pour la poutre encastrée (poutre 11) et pour une poutre simple de comparaison (poutre 11a) dont le comportement aux essais fut traité sous A). Les deux poutres furent prélevées sur le même profilé I 14 · 14. Les forces P_e portées dans la fig. 17 furent mesurées au cours de l'essai et appliquées de telle sorte que pour chaque degré de charge les sections L et R restent exactement verticales afin de s'approcher autant que possible des hypothèses de calcul de la poutre totalement encastrée.

En tenant compte de ce que nous avons dit sous B) et C) ainsi que de l'hypothèse simplifiée d'interprétation, il faut distinguer dans la charge d'une poutre encastrée les différents stades représentés à la fig. 18:

a) Jusqu'à une charge P'_s tout se passe élastiquement (fig. 18a). On a:

$$M_o = \frac{Pl}{3}; M_E = \frac{2Pl}{9}; M_F = M_o - M_E = \frac{Pl}{9}.$$

b) Pour une charge $P'_s = \frac{9 \cdot M'_s}{2l}$ le moment sur appui atteint la valeur du «moment supportable» M'_s . Lorsque $P > P'_s$ les moments M_E ne peuvent plus croître d'une façon appréciable au-dessus de M'_s (fig. 18b). On a:

$$M_E = M'_s; M_F = M_o - M'_s.$$

Dans ce stade il se produit une modification de l'angle formé par la tangente à la ligne de flexion (horizontale dans le domaine élastique) et l'axe primitivement droit de la barre. L'enlèvement des charges montre une déformation (pliure à froid) de la poutre telle que les encorbellements sont pliés vers le bas à partir des points L et R. Afin de satisfaire aux hypothèses de calcul il faut, lors d'une remise en charge, appliquer des forces P_{el} et P_{er} (chacune = X), agissant de bas en haut qui amèneront en position exactement verticale, les sections au droit des appuis. Il en résulte des moments M_x qui, de même que sous B) et C), sont égaux à $M_{E\ el} - M'_s$.

c) Sous la charge P'_T on a aussi le moment en travée

$$M_F = \frac{P'_T \cdot l}{3} - M'_s = M'_s$$

C'est le cas pour $P'_T = \frac{6 M'_s}{l}$

Lorsque les charges croissent encore la poutre se trouve en équilibre instable.

Les fonctions $M_E(P)$, $M_F(P)$ sont représentées à la fig. 19 sur laquelle on peut encore directement lire les valeurs P'_s et P'_T pour un M'_s donné.

De la poutre de comparaison 11a dont il a été parlé sous A), on peut tirer

$$M'_s = \frac{[P'_T] \cdot la}{4} = \frac{14,5 \cdot 160}{4} = 580 \text{ tcm.}$$

De la relation donnée sous b) on peut tirer maintenant:

$$P'_s = \frac{9 \cdot 580}{2 \cdot 240} = 10,87 \text{ t}$$

et de la relation donnée sous c)

$$P'_T = \frac{6 \cdot 580}{240} = 14,50 \text{ t.}$$

D'après les hypothèses de calcul de l'interprétation simplifiée, pour $J = 1525 \text{ cm}^4$, $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ (voir sous A) on a reporté dans la fig. 20 les déformations

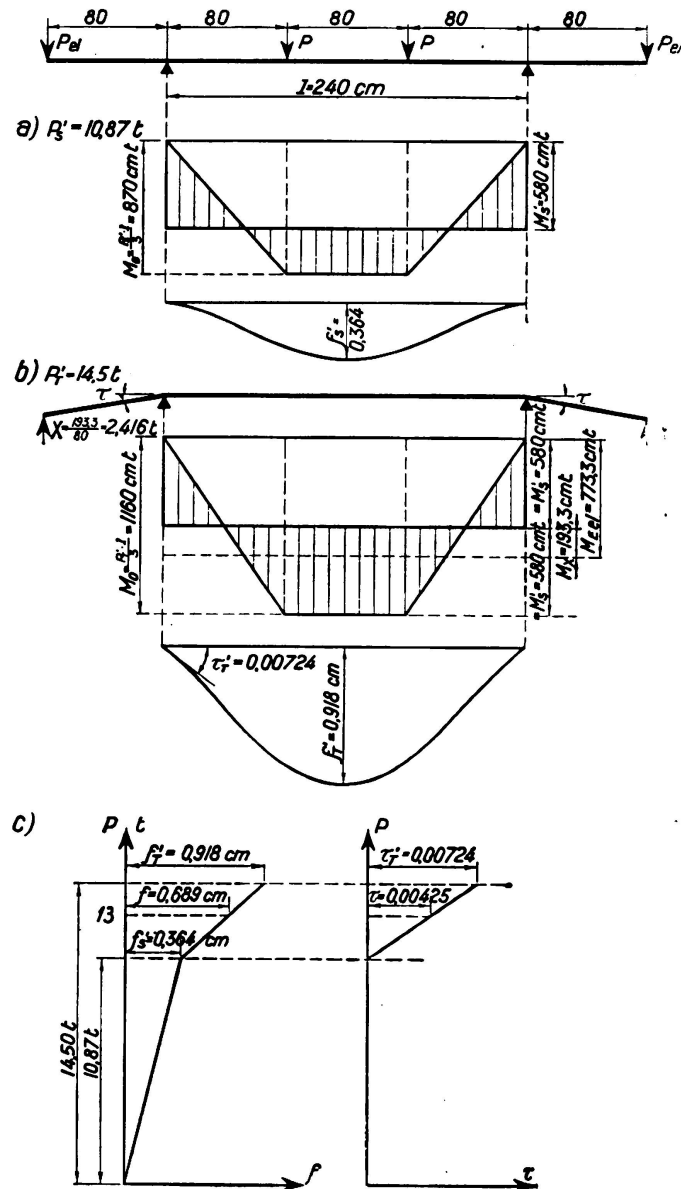
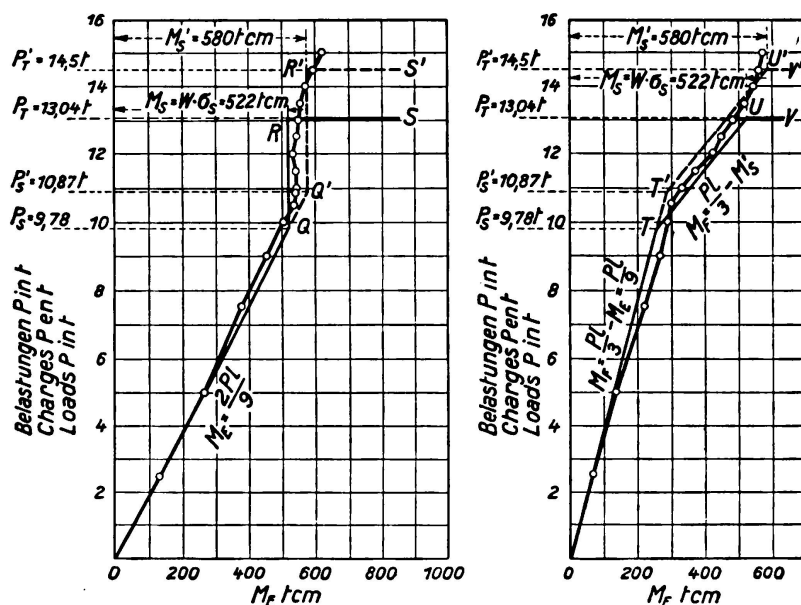


Fig. 20.

engendrées par les charges limites $P'_s = 10,87 \text{ t}$ et $P'_T = 14,5 \text{ t}$ en même temps que les fonctions $f(P)$ et $\tau(P)$.

Ainsi que nous l'avons dit, on a mesuré au cours de l'essai les forces supplémentaires P_{el} et P_{er} et par le fait même les moments d'encastrement $M_E = 80 \cdot P_e$,

Fig. 21.
Poutre 11.

ainsi que les moments en travée $M_F = M_o - M_E$. Ces valeurs sont portées d'une manière analogue à la fig. 19 dans la fig. 21 où l'on a aussi indiqué les lignes pour M_E et M_F que l'on obtient en calculant P_s et P_T à l'aide de $M_s = W \cdot \sigma_s$. Ceci peut être recommandable lorsque l'on veut être du côté sûr dans la détermination préliminaire de la résistance effective. Pour permettre de comparer les flèches calculées de la fig. 20, on a reporté dans la fig. 22 les flèches mesurées au milieu de la travée. Elles sont déjà plus grandes que les flèches calculées pour $P < P_s$. Il semble que la cause en est, ainsi qu'on peut le voir de la fig. 21, dans le fait que les moments en travée sont plus grands dans les essais que dans les calculs.

Dans la fig. 23 où sont reportées les flèches aux extrémités de la poutre, l'intérêt se porte sur les déformations permanentes qui, en tenant compte des

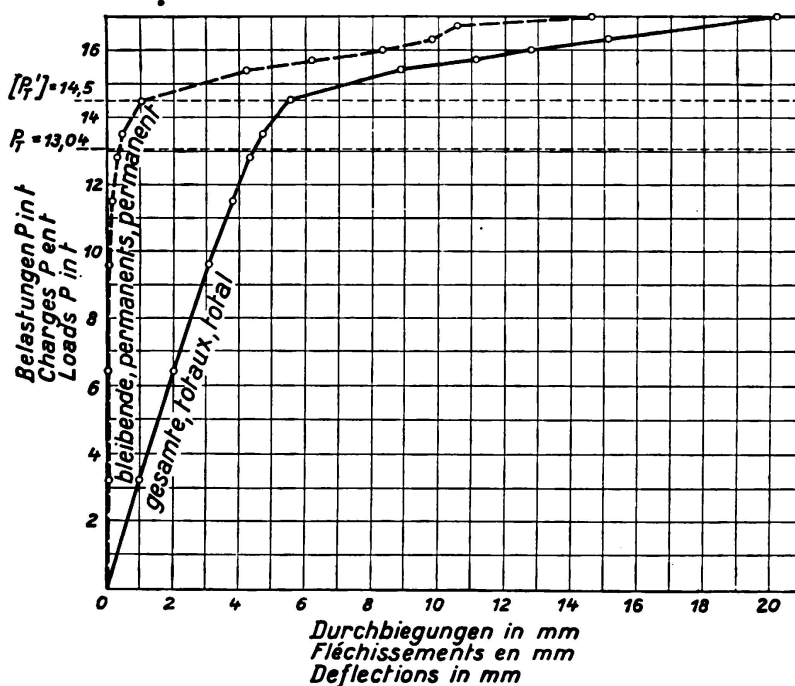


Fig. 22.

hypothèses de calcul sont proportionnelles aux angles τ (fig. 20). La fig. 24 représente les allongements mesurés sur les appuis et en travée.

b) Essais effectués sur des poutres dont les extrémités sont encastrées dans un mur.

G. v. Kazinczy a décrit dans [15] des essais effectués sur un profilé I 16 d'une portée de 5,60 et 6,0 m.³ Les poutres étaient dimensionnées avec $M = \frac{pl^2}{24}$. Aux encastremets la résistance manquante fut supportée par une dalle de béton

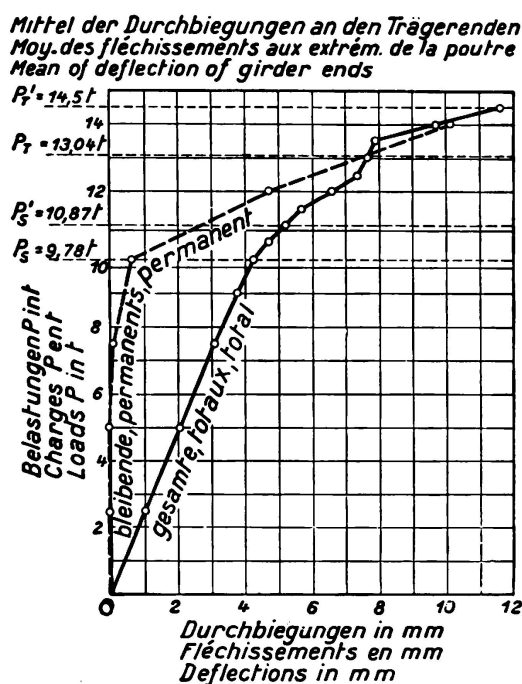


Fig. 23.

avec armature posée en haut, servant de membrure comprimée. En se basant sur les essais, G. v. Kazinczy dit qu'une poutre en I encastrée, non enrobée dans du béton doit être dimensionnée pour un moment $M = \frac{pl^2}{16}$, que la poutre soit partiellement ou totalement encastrée. Il démontre encore qu'une section dans laquelle la limite d'écoulement est atteinte, doit être envisagée comme une articulation avec moment de flexion constant pour une surcharge croissante.

Dans [16], F. v. Emperger rapporte sur des essais semblables effectués sur une poutre simple et sur 6 poutres encastrées de manières différentes dans un mur (I 15 portée 4,0 m)⁴ F. v. Emperger dit qu'en maintenant certaines hypothèses sur l'encastrement dans le mur «l'action de la poutre métallique est telle qu'elle peut résister jusqu'au moment maximum de $\frac{Pl}{16}$ ».

³ Les premiers essais cités ne furent connus de l'auteur qu'à la fin 1928, et les seconds en 1930 seulement.

⁴ Les premiers essais cités ne furent connus de l'auteur qu'à la fin 1928 et les seconds en 1930 seulement.

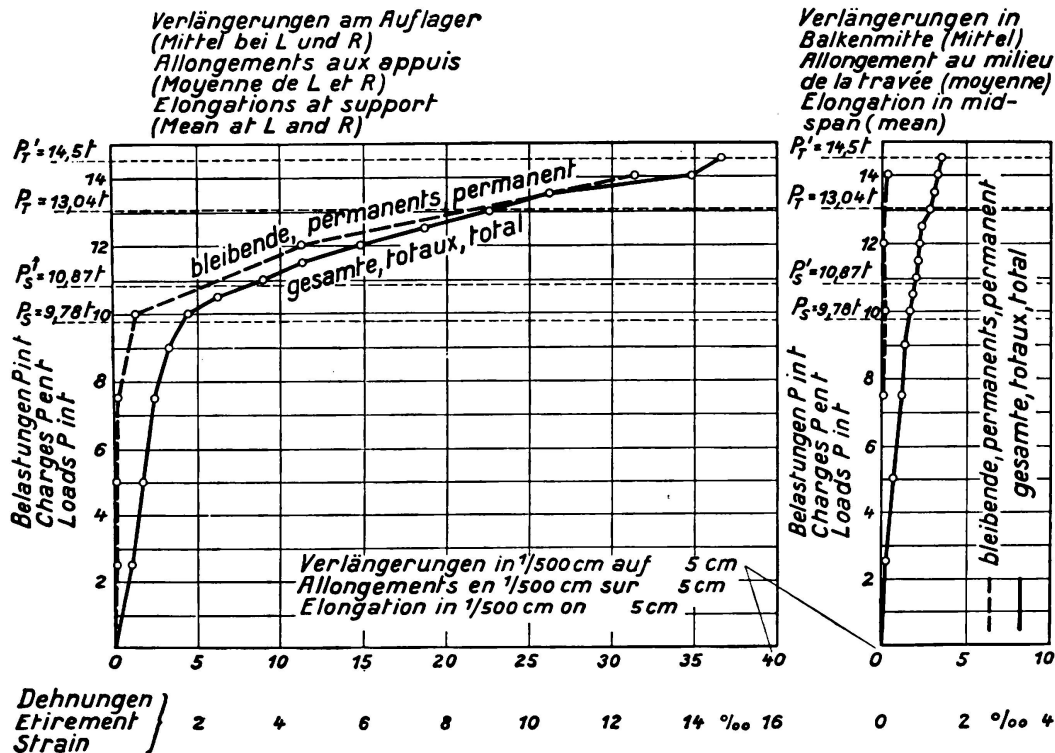


Fig. 24. Poutre 11.

E. Poutre à âme pleine continue sur trois travées chargée uniquement dans la travée médiane.

Les valeurs publiées dans [6] par F. Stüssi et C. F. Kollbrunner (barre 532/6 et 534/8) nous permettent de déterminer d'après l'hypothèse simplifiée d'interprétation le comportement représenté aux fig. 25 et 26 d'une barre chargée de 0 à P'_T . Il s'agit d'une profilé I $\frac{46}{35}$ dont $J = 16,73 \text{ cm}^4$ et $W = 7,28 \text{ cm}^3$.

Pour des éprouvettes prélevées sur les ailes on a obtenu, avec un écart de $\pm 10 \%$, une limite moyenne d'écoulement $\sigma_s = 3,36 \text{ t/cm}^2$. D'après les valeurs de l'essai exécuté sur des poutres continues (barres 532/6 et 534/8 dans [6] et les fig. 14 et 16 de ce rapport, identique à la fig. 27 de notre travail) on peut conclure que (par hasard) $M'_s = 7,28 \cdot 3,36 = 24,46 \text{ tcm}^5$. Comme dans le domaine élastique, en ne tenant compte que des déformations engendrées par les moments de flexion $M_{st} = 3,214 P$ et $M_F = (15 - 3,214) P = 11,78 P$, on obtient $P'_s = \frac{24,46}{11,786} = 2,075 \text{ t}$. Puisque pour $P > P'_s$ le moment sur appui suivant la fig. 26a = $M_o - M_F = 15 P - M'_s$, il résulte de $15 \cdot P'_T - M'_s = M'_s$, que $P'_T = \frac{2 \cdot 24,46}{15} = 3,26 \text{ t}$. D'après le procédé employé sous A), B) et C) on a dessiné sur la fig. 25b avec $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ la ligne de flexion pour

⁵ D'après une communication écrite de F. Stüssi, on obtient de la ligne de flexion pour une poutre de comparaison de $l = 60 \text{ cm}$ chargée en son milieu $[P'_T] = 1,71 \text{ t}$, ce qui correspond à un $P_T = 1,63 \text{ t}$. Par conséquent il faudrait introduire pour l'interprétation de l'essai $M'_s = 1,71 \cdot 15 = 25,65 \text{ tcm}$ au lieu de $M'_s = 24,46 \text{ tcm}$. En admettant $M'_s = 24,46 \text{ tcm}$, on se trouve du côté sûr en ce qui concerne la détermination de P'_T .

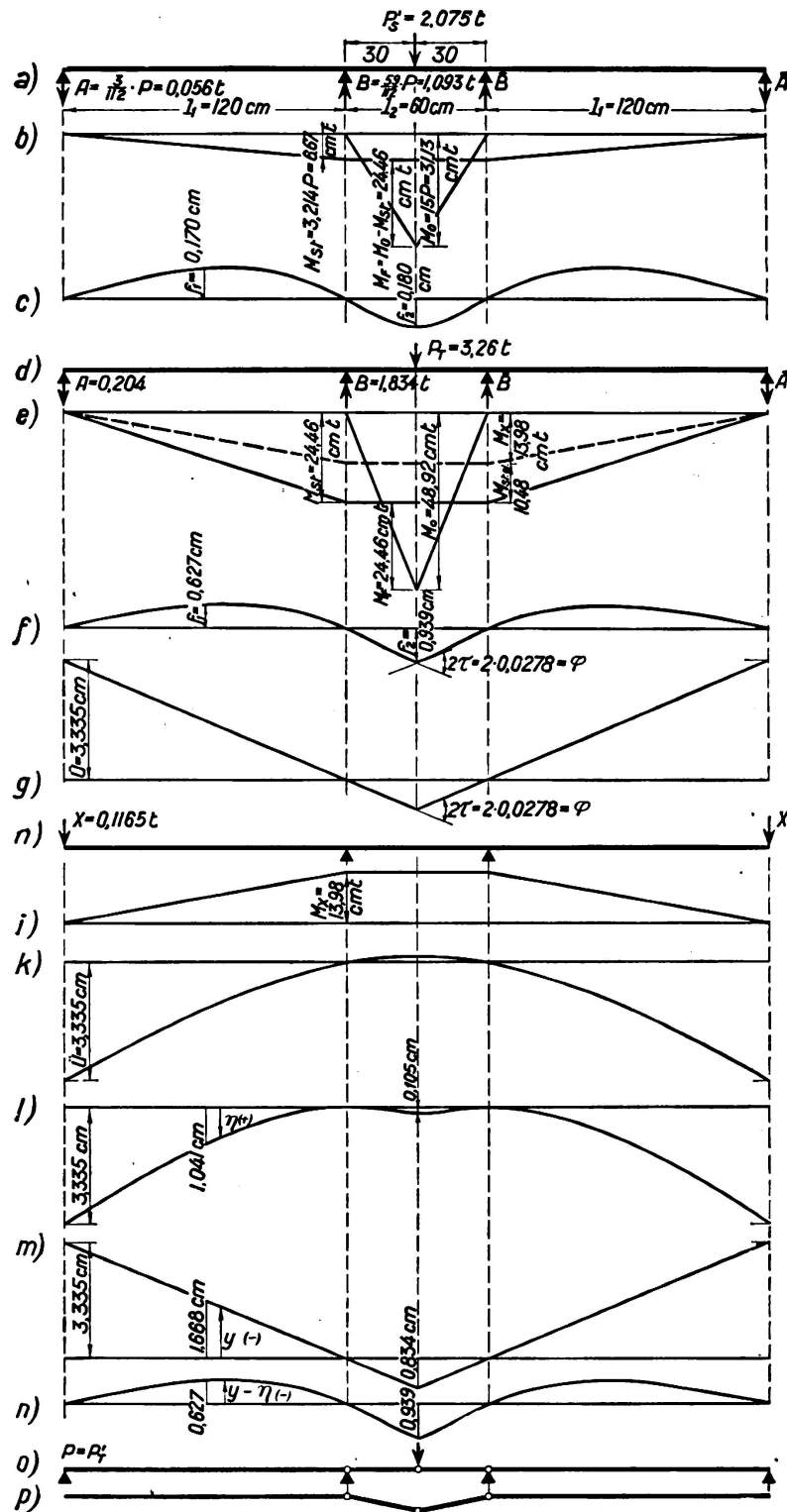


Fig. 25.

le cas limite $P'_s = 2,075 t$ en ne tenant compte que des déformations engendrées par les moments de flexion. Dans le cas limite, $P'_T = 3,26 t$, la ligne des moments de la fig. 25e donne, pour $M_0 = 15 \cdot P = 48,92$ tcm, un moment sur appui $M_{st} = 48,92 - 24,46 = 24,46$ tcm. Pour ce cas, la courbe de fléchissement (et en même temps la forme de l'axe de la poutre) est reportée dans la fig. 25e de A en B et de $\bar{A}$ en $\bar{B}$. Au milieu de la travée l_2 apparaît un angle

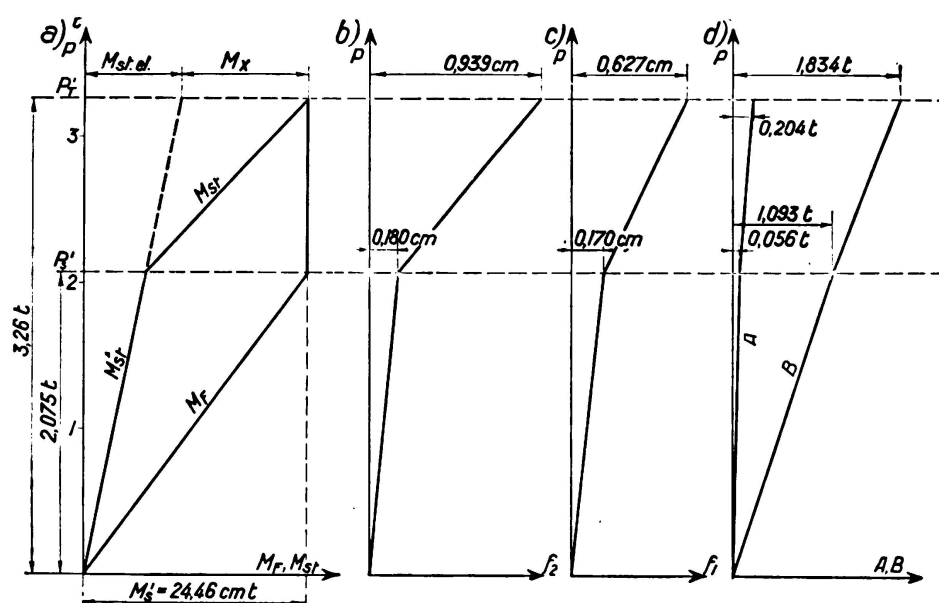


Fig. 26.

$\varphi = 2 \tau = 2 \cdot 0,0278$. Après la décharge, l'axe a l'aspect représenté à la fig. 25g avec en A et $\bar{A}$ un relèvement $\bar{u} = 0,0278 \cdot 120 = 3,335$ cm. Lors de la remise en charge il faut d'abord supprimer ce relèvement par deux forces X de 0,1165 t chacune, dont la surface des moments est représentée à la fig. 25i et la ligne de fléchissement à la fig. 25k qui correspond à des flèches de 3,335 cm ($= \bar{u}$) sous A et $\bar{A}$. La remise en charge avec $P'_T = 3,26$ t se fait tout-à-fait élastiquement. Le diagramme des moments de la fig. 25e est de nouveau valable en ce sens qu'en plus du moment $M_x = 0,1165 \cdot 120 = 13,98$ tcm intervient encore le moment sur appui $M_{st\,el} = 3,214 \cdot 3,26 = 10,48$ tcm. La réaction en A se compose de deux parties: d'abord X, puis la fraction élastique $\frac{3}{112} \cdot 3,26 = 0,0873$ t, en tout $= 0,204$ t. La courbe des fléchissements de la poutre déformée de la fig. 25g est calculée à partir des appuis $B\bar{B}$ d'après la ligne des moments de la fig. 25e; elle est représentée à la fig. 25l (ordonnées η). On obtient la forme de l'axe après la nouvelle application de $P'_T = 3,26$ t (fig. 25n), en faisant la somme ($\eta + y$) sans négliger le signe. Par exemple au

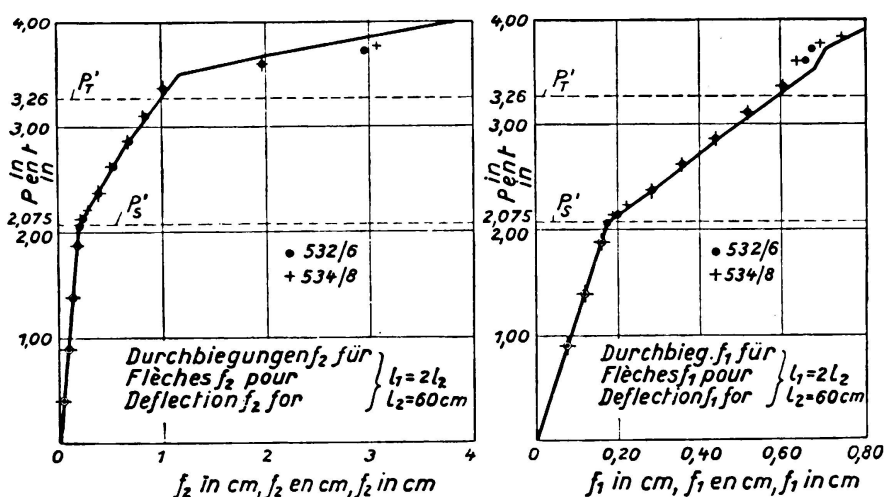


Fig. 27a, b.

milieu de la travée médiane $f_2 = 0,105 + 0,834 = 0,939$ cm, au milieu de la travée latérale $f_1 = +1,041 - 1,668 = -0,627$.

En partant des fig. 25c et f on a reporté dans les fig. 26b, c et d, de la même manière que dans B et C les relations: f_2 (P) fléchissement dans la travée centrale, f_1 (P) fléchissement dans la travée latérale ainsi que A (P) et B (P).

A titre de comparaison on a reporté dans les fig. 27a et b les fléchissements mesurés dans les travées centrale et latérale. On y a aussi reporté les valeurs P'_s et P'_T . On peut voir clairement que P'_T caractérise la véritable résistance. Les

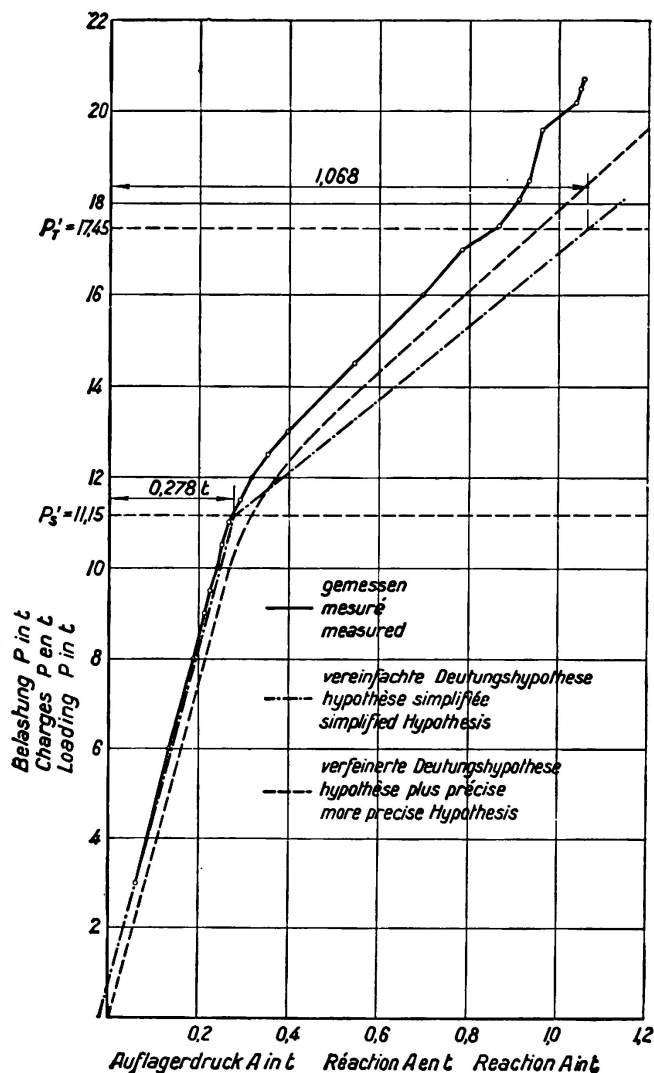


Fig. 28a.

valeurs d'essai $P_w = 3,902$ t pour lesquelles la poutre «s'en va» (résistance = épuisée, déformations $\rightarrow \infty$) ne doivent pas être prises pour caractériser la résistance [voir sous A) et B)]. Lorsque $P > P'_T$ les fléchissements par exemple croissent beaucoup plus rapidement que lorsque $P < P'_T$. Les valeurs mesurées coïncident en fait dans ce cas avec les valeurs calculées d'après l'hypothèse d'interprétation.

Afin de mettre au clair la question de l'allure des moments entre P'_s et P'_T , l'auteur a entrepris en mai 1936, des essais correspondant aux relations de la fig. 25 [17]. Il utilisa un profilé I 10 · 10 et des portées $l_1 = 2,40$ m et $l_2 = 1,20$ m.

Par un essai comparatif sur une poutre simple, chargée en son milieu, on a déterminé un M'_s de 262 cmt. En négligeant l'influence de la charge permanente et l'influence de la déformation engendrée par les forces de cisaillement, on obtient

$$P'_s = 11,12 \text{ t} \quad \text{et} \quad P'_T = 17,47 \text{ t}.$$

Dans la fig. 28 nous avons reporté les valeurs moyennes, déterminées par essai, des réactions d'appui en A et $\bar{A}$ et dans la fig. 28b nous avons tracé les moments en travée et les moments sur appuis déterminés en tenant compte du

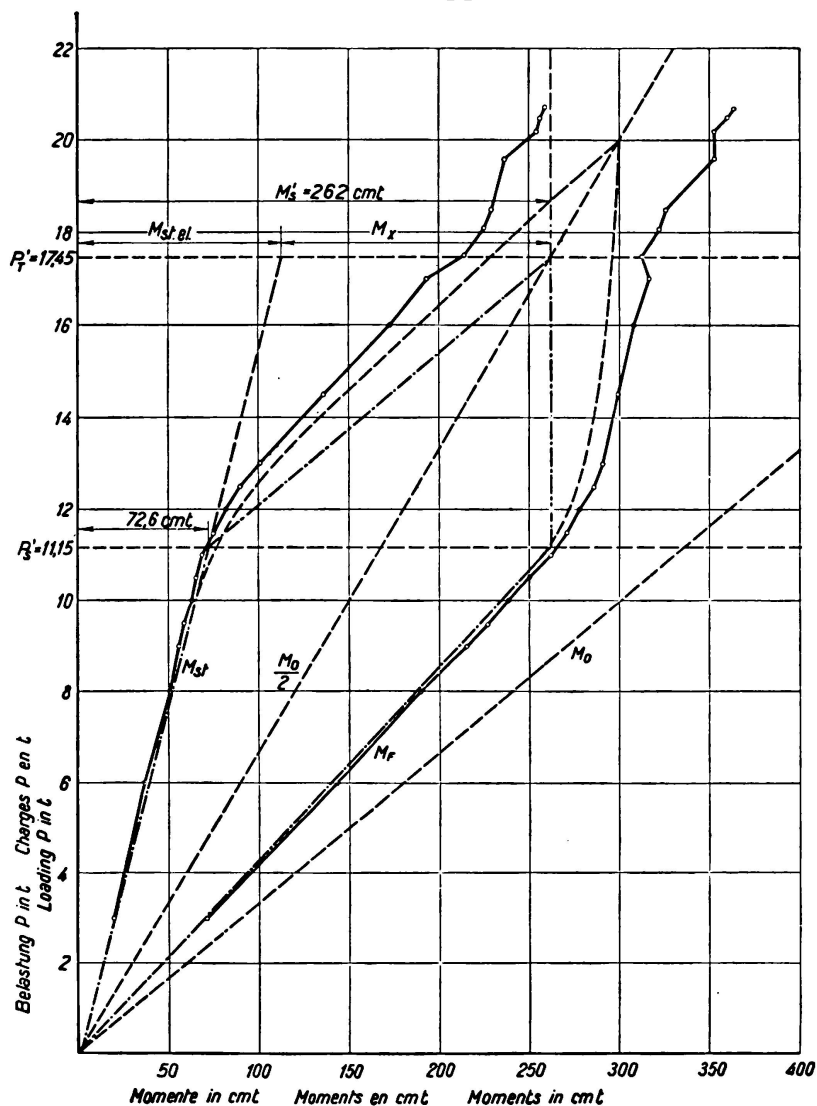


Fig. 28 b.

poids propre, pour les différentes variations de charge. Dans $P'_s = 11,15 \text{ t}$ et dans $P'_T = 17,45 \text{ t}$ nous avons aussi pris en considération l'influence du poids propre. La fig. 28c représente les fléchissements mesurés au milieu de la travée médiane.

Ainsi que le montre la fig. 28b les moments effectifs en travée et sur appuis s'écartent sensiblement des valeurs (en traits-points) déterminées d'après l'hypothèse simplifiée d'interprétation. On voit cependant très clairement que les valeurs P'_s et P'_T sont caractéristiques pour le comportement réel de la poutre. (Voir aussi à ce sujet la fig. 28c où l'on voit très bien que les fléchissements

ne commencent à croître fortement qu'à partir de P'_T .) Pour $P > P'_s$ les moments en travée croissent au-dessus de M'_s . La résistance pratiquement utilisable de la poutre est seulement atteinte aussitôt qu'au droit des appuis commencent aussi à apparaître des déformations permanentes, c'est-à-dire aussitôt que M_{st} arrive aux environs de la valeur M'_s .

Du fait que les deux moments ne sont pas égaux sous la charge P'_T , il ne faut toutefois pas en conclure que la résistance pratiquement utilisable de la poutre continue est réduite par rapport à P'_T . D'ailleurs il faut expliquer les

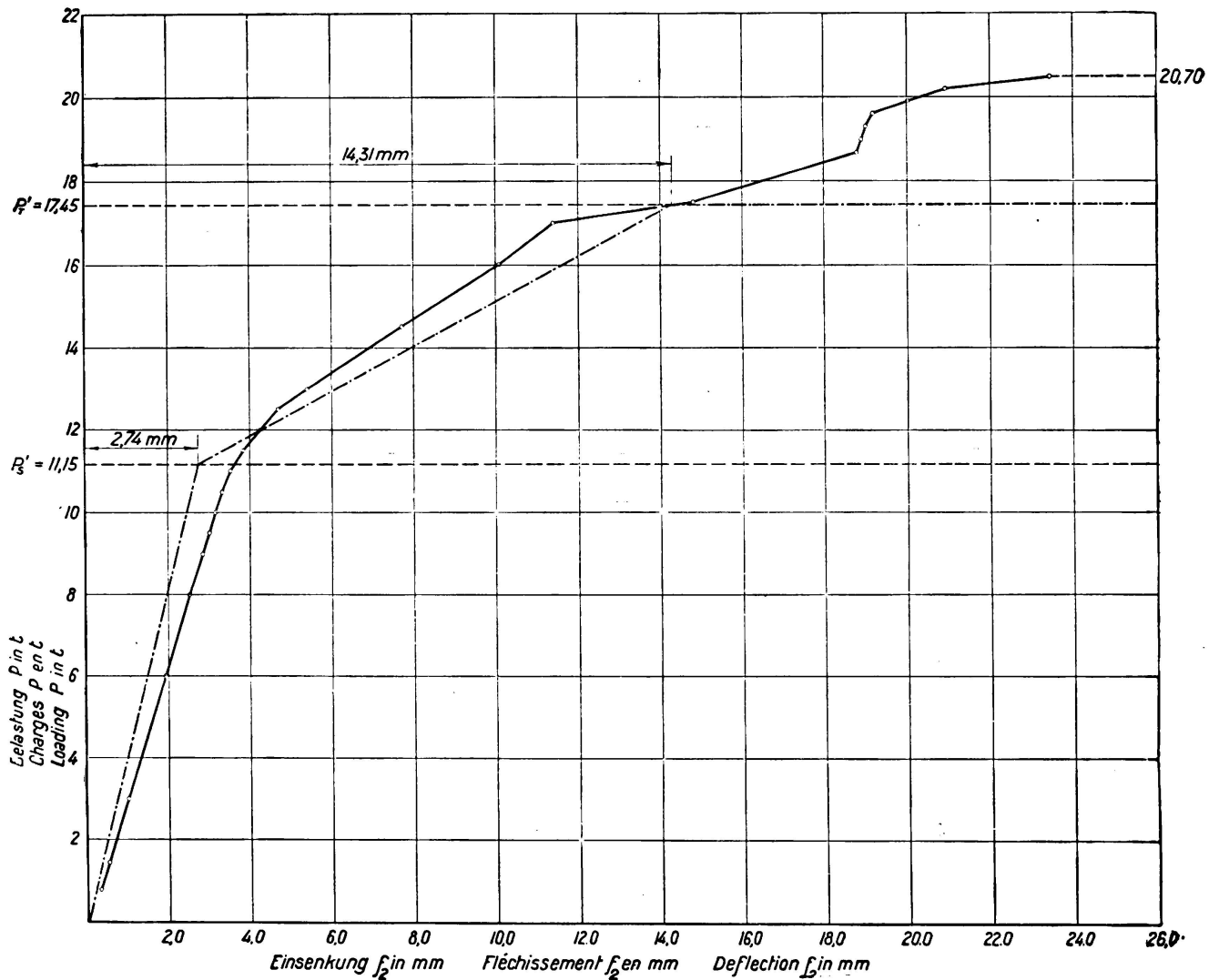


Fig. 28 c.

écarts dans M_{st} et M_F par le fait que suivant l'hypothèse simplifiée d'interprétation, on a choisi dans la fig. 4 une droite horizontale FG en remplacement de la courbe CDE. Si l'on emploie la ligne polygonale CDE, déterminée par les essais, on obtient, en ne tenant pas compte de l'influence du poids propre et des déformations engendrées par les forces de cisaillement et ainsi qu'il est démontré dans [17], l'allure des moments en travée et sur appuis également reportée (en petits traits) dans la fig. 28b.

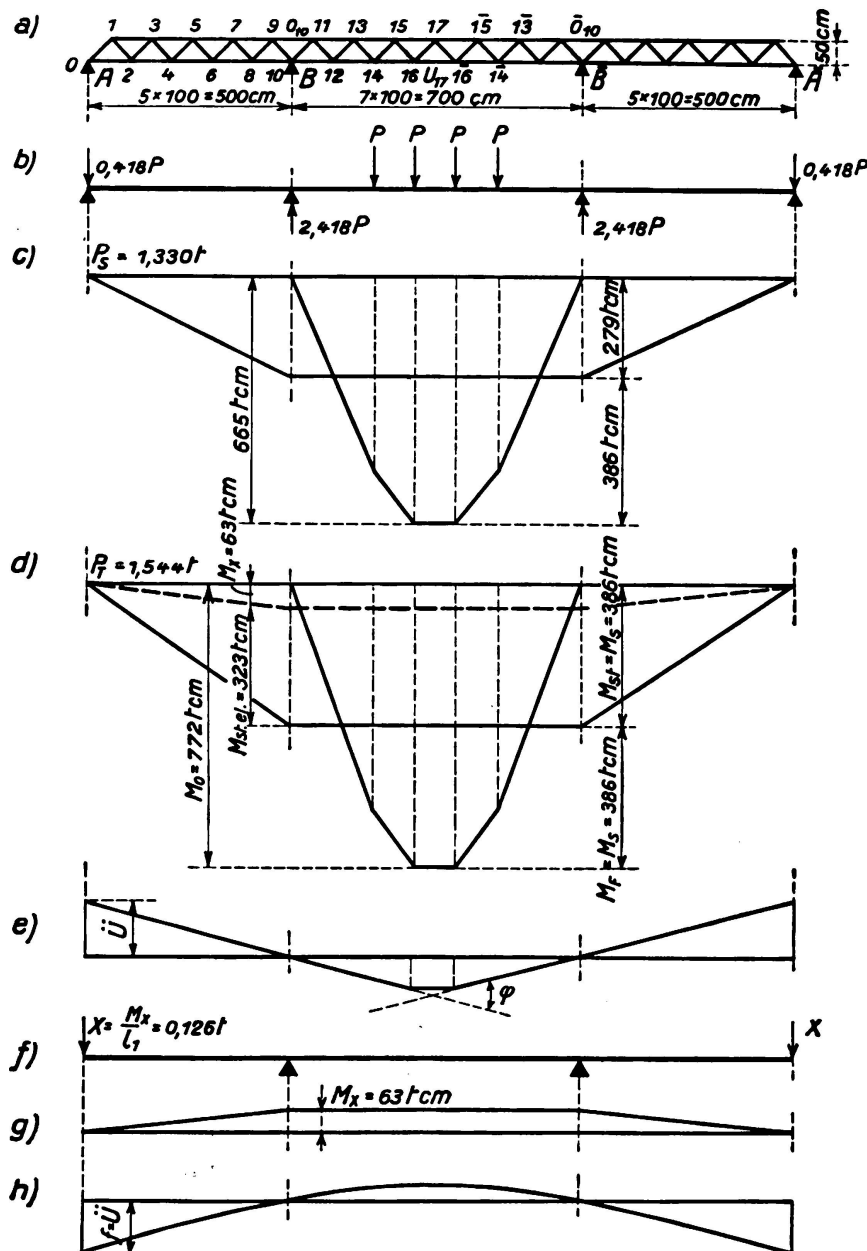


Fig. 29.

Les lignes pointillées pour M_F et M_{st} ne sont évidemment valables que pour autant que $M_{st} < M_s$. Sous l'effet de la charge P^* , correspondant à ce cas limite, la forme de la barre présente, après la décharge, une pliure non seulement au milieu de la poutre, mais aussi au droit des appuis.

F. Poutre réticulée à membrures parallèles continue sur trois travées.

Les essais commencés par M. Grüning et exécutés par G. Grüning et E. Kohl [18] furent effectués sur la poutre de la fig. 29a. Les barres de la membrure supérieure au droit des appuis intermédiaires ainsi que les trois barres du milieu de la membrure inférieure furent construites de telle sorte que l'on pouvait les changer. Après coup on construisit une articulation à vis au noeud 17. On détermina par mesurage les réactions aux appuis A et $\bar{A}$ au cours des différents stades de mise en charge.

Au cours d'un des premiers essais, les sections de barres O_{10} , U_{17} et $\bar{O}_{10}$ étaient de $2,88 \text{ cm}^2$ chacune, leur limite d'écoulement $\sigma_s = 2,68 \text{ t/cm}^2$. Le moment supportable $M_s = 2,88 \cdot 50 \cdot 2,68 = 386 \text{ tcm}$. Si l'on néglige l'influence de la charge permanente on a obtenu, pour quatre charges identiques appliquées aux points 14, 16, $\bar{16}$ et $\bar{14}$, des réactions de $0,418 P$ purement élastiques aux appuis extérieurs et par conséquent des réactions de $2,418 P$ aux appuis intermédiaires, un moment sur appui de $0,418 \cdot 500 P = 209 P$ et un moment maximum en travée de $(500 - 209) P = 291 P$. Les charges P_s pour lesquelles la barre U_{17} atteint la limite d'écoulement, sont d'après la fig. 29c: $291 P_s = M_s = 386 \text{ tcm}$, d'où $P_s = 1,33 \text{ t}$. C'est d'après la fig. 29d que l'on peut calculer les charges P_T qui engendrent des tensions d'écoulements dans les barres O_{10} et $\bar{O}_{10}$: $M_{st} = M_o - M_s = M_s$, c'est-à-dire $500 P_T = 2 \cdot 386 \text{ tcm}$ d'où $P_T = 1,544 \text{ t}$. Les relations entre M_{st} , M_F , P_s et P_T sont à tirer de la fig. 30a. Si l'on décharge la poutre chargée jusqu'à P_T , on constate dans la

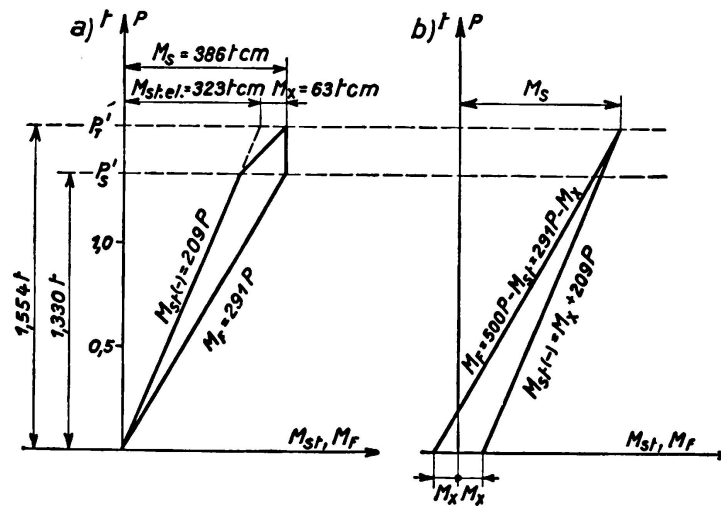


Fig. 30.

membrure inférieure des déformations permanentes suivant la fig. 29e. La ligne de flexion présente sous le point 17 un angle φ qui permet de calculer le relèvement $\ddot{u}$. Lorsque l'on recharge la poutre, des forces X (fig. 29f) doivent d'abord amener les appuis extérieurs dans leur position primitive. Il en résulte un moment sur appui $M_x = X \cdot l_1$ auquel s'ajoute pour une charge allant jusqu'à P_T : $M_{st el} = 209 \cdot P_T = 323 \text{ tcm}$. De $M_x + M_{st el} = M_s$ on peut tirer (fig. 29d) $M_x = 63 \text{ tcm}$ et $X = 0,126 \text{ t}$. Le fléchissement f , qui correspond à X , de l'extrémité de la barre doit être égal à $\ddot{u}$. On peut tirer de là φ et l'allongement permanent Δs de la barre U_{17} (on aurait aussi pu calculer Δs à partir de la déformation de la poutre A, B, 16, 17, $\bar{16}$, $\bar{B}$, $\bar{A}$). Les relations qui existent lors d'une remise en charge sont représentées à la fig. 30b. La fig. 31 donne les valeurs d'essai tirées de la fig. 7 de [18]. En fait elles concordent avec les valeurs de l'interprétation de l'essai (fig. 29 et 30) lorsque l'on néglige le poids propre et lorsque l'on admet une articulation sans frottement au point 17.

Dans les essais donnés sous [18] on prit des barres qui sur une partie de leur longueur possédaient des sections réduites. Les charges dépassèrent P_T . On rechercha aussi l'influence sur la résistance de l'abaissement des appuis. Un relèvement unique des appuis extérieurs n'a pas diminué la résistance. Des

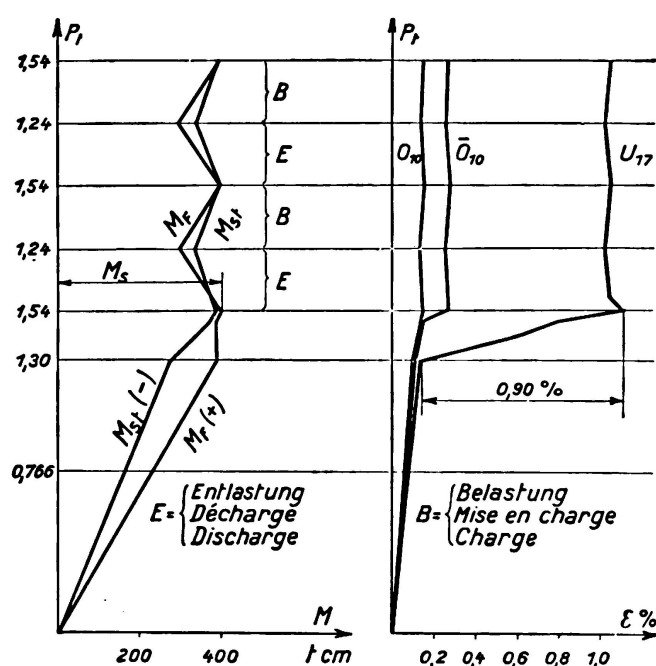


Fig. 31.

relèvements et abaissements consécutifs pour une surcharge P_T mettent en danger l'existence de la poutre.

Au sujet des conclusions à tirer des essais, qui demandent encore à être poursuivis, nous renvoyons le lecteur à [18] p. 72.

Il serait très important de connaître la résistance effective de poutres réticulées continues dont les barres critiques possèdent des affaiblissements produits par exemple par les trous de rivets.

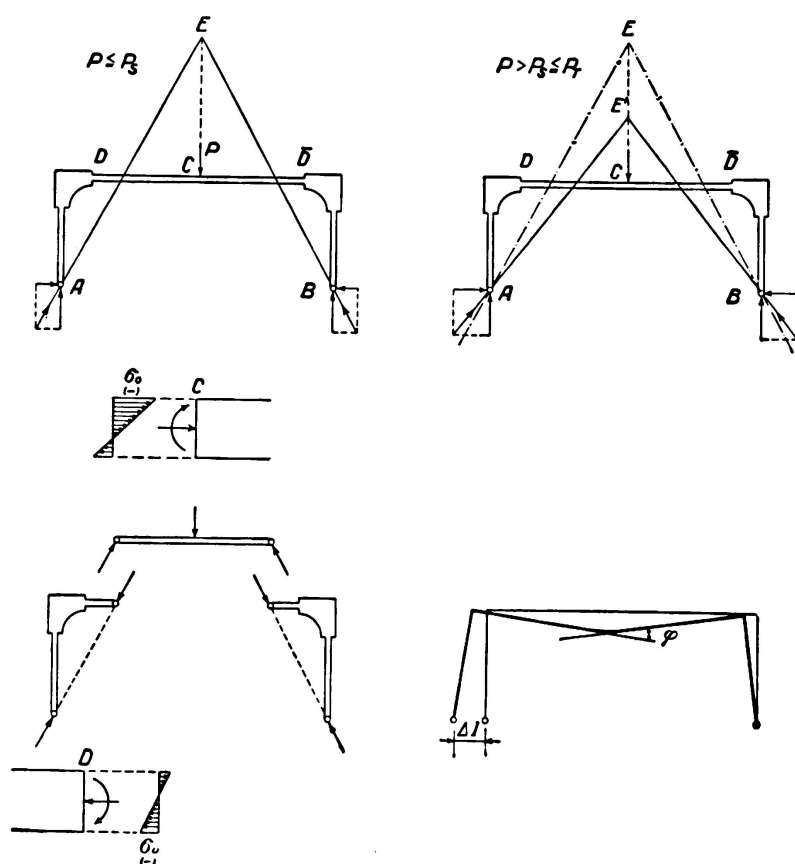


Fig. 32.

G. Poutres en cadre dont la traverse est horizontale.

Dans [19], K. Girkmann décrit un essai qu'il a effectué et pour lequel la fig. 32 est valable.

La poutre en cadre AB, avec angles à première vue surdimensionnés, fut chargée au milieu de la traverse par une force croissante P. Il existe d'abord la ligne de pression AEB qui correspond, dans les sections C et D aux sollicitations dessinées. La plus forte sollicitation se trouve à la fibre supérieure de la section C (compression).

Sous l'effet d'une charge P_s , cette tension atteint la limite d'écoulement. Lorsque la charge croît encore, $P > P_s$, les parties de la traverse, situées aux environs de C se déformeront plastiquement de telle sorte que si l'on substitue

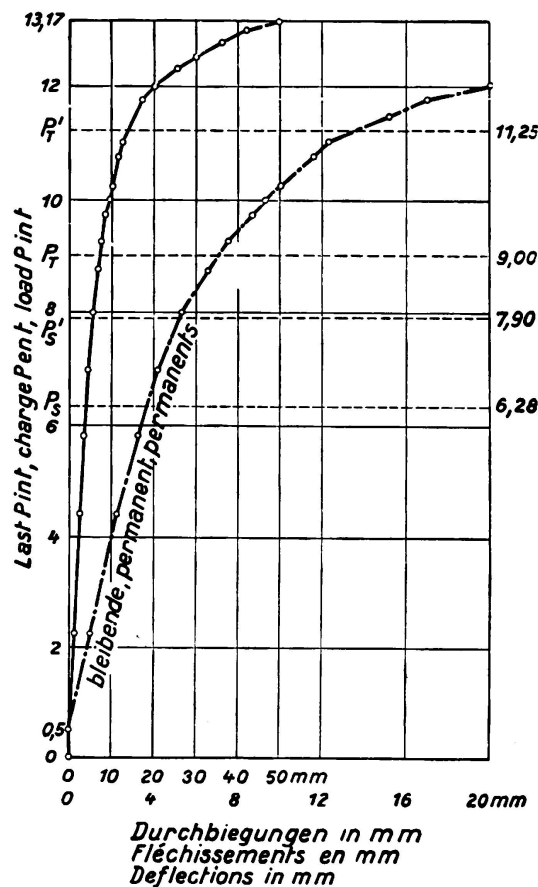


Fig. 33.

à l'appui fixe un mobile, cet appui se déplace de Δl vers l'extérieur. Ceci signifie que pour des valeurs $P > P_s$ la poussée horizontale est plus grande que d'après la théorie ordinaire. La ligne des pressions devient plus plate. Le cadre commence à faillir définitivement, même si la limite d'écoulement est atteinte dans la section D (en bas). Dans les applications pratiques on peut calculer avec une approximation suffisante la charge supportable en considérant le cas où la ligne des pressions passe au milieu entre D et C, plus exactement entre les points du noyau déterminants pour σ_o en C et pour σ_u en D. Si l'on prend dans les calculs les sections sans réduction pour les rivets, on a:

$$P_{adm} = 2,88 \text{ t} \quad \text{pour } \sigma_{adm} = 1,2 \text{ t/cm}^2; P_s = 6,28 \text{ t}$$

lorsque à un seul endroit (en haut en C) $\sigma_s = 2,62 \text{ t/cm}^2$ est atteint; $P_T = 9,0 \text{ t}$

comme charge qui peut pratiquement être supportée. On y a supposé que la section C agit comme un articulation dès que la limite d'écoulement est atteinte dans sa fibre supérieure.

La théorie ordinaire admet dans le cas du cadre soumis aux essais une résistance de 6,28 t. L'essai a montré que pour $P = 11,25$ t seulement (fig. 33) les fléchissements croissent rapidement au milieu de la traverse. P_T est alors $= 11,25$ t et $P_s = \sim P_T \cdot \frac{P_s}{P_T} = \sim 11,25 \cdot \frac{6,28}{9,00} \sim 7,9$ t. Pour $P_v = 13,17$ t une fissure se forme dans la paroi d'un trou de rivet au milieu de la traverse. Les autres observations faites au cours de cet essai sont contenues dans [19].

Résumé.

Sur la base de nombreuses figures, l'auteur expose les résultats des essais effectués pour la mise au net de différentes questions concernant la théorie de la plasticité. Dans chaque cas on peut démontrer que la résistance effective n'est pas déterminée par la charge P_s pour laquelle, lors de l'application de la théorie de l'élasticité, la limite d'écoulement est atteinte dans un membre quelconque de la poutre, mais une charge plus grande P_T . Pour la détermination de cette charge effective, nous avons employé un procédé (hypothèse simplifiée d'interprétation), employé aussi pour l'interprétation des essais, qui fournit des valeurs suffisamment exactes pour les applications pratiques. Il n'y a aucune raison de préciser plus encore l'interprétation des essais et la méthode de détermination de P_T .

Nomenclature

des mémoires les plus importants sur la question de l'influence de la plasticité de l'acier sur le dimensionnement des ouvrages métalliques, principalement en tout et qui concerne des essais.

- F. Bleich:* La Ductilité de l'Acier. Son application au dimensionnement des systèmes hyperstatiques.
L'Ossature Métallique 3 (1934), p. 93.
- F. Bleich:* La théorie et la recherche expérimentale en construction métallique.
L'Ossature Métallique 3 (1934), p. 627.
- H. Bleich:* Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes.
Bauingenieur 13 (1932), p. 261.
- [8] *F. Bohny:* Über die Verwendung von Nickelstahl im Brückenbau (p. 90 Versuch mit I 30).
Der Eisenbau 2 (1911), p. 79.
- [9] *J. E. Brik:* Über den Knickwiderstand der Druckgurte vollwandiger Balkenträger (contient des indications concernant des recherches sur pontres simples).
Der Eisenbau 3 (1912), p. 51 und 4 (1913), p. 189, 192, 353.

- Eisenmann:* Theorie und Statik plastischer Träger des Stahlbaues.
Stahlbau 6 (1933), p. 25. Erwiderung 6 (1933), p. 54.
- [16] *F. v. Emperger:* Versuche mit eingespannten Balken in Heft 5 der Mitteilungen über Versuche ausgeführt vom Eisenbetonausschuß des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins.
F. Deuticke, Leipzig und Wien 1917.
- [3] *J. Fritsche:* Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens.
Bauingenieur 11 (1930), p. 851, 873, 888.
- J. Fritsche:* Die Tragfähigkeit von Balken aus Baustahl bei beliebig oft wiederholter Belastung.
Bauingenieur 12 (1931), p. 827.
- [5] *J. Fritsche:* Grundsätzliches zur Plastizitätstheorie.
Stahlbau 9 (1936), p. 65.
- [19] *K. Girkmann:* Über die Auswirkung der „Selbsthilfe“ des Baustahls in rahmenartigen Stabwerken.
Stahlbau 5 (1932), p. 121.
- [14] *O. Graf:* Über Dauerversuche mit I-Trägern aus St. 37.
Stahlbau 7 (1934), p. 169.
- [18] *G. Grüning & E. Kohl:* Tragfähigkeitsversuche an einem durchlaufenden Fachwerkbalken aus Stahl.
Bauingenieur 14 (1933), p. 67.
- Martin Grüning:* Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung.
Broschüre Berlin 1926.
- [2] *M. Grüning-Kulka:* Bautechnik 6 (1928), p. 274.
- [4] *F. Hartmann:* Die Formänderungen einfacher und durchlaufender Stahlträger. Mit einem Versuch.
Schweiz. Bauzeitung 101 (1933), p. 75.
- F. Hartmann:* Über die Erhöhung der zulässigen Inanspruchnahme von stählernen Brücken.
Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins 1935, Heft 21/22 und 23/24.
- A. S. Joukoff:* Principes d'application de la plasticité au calcul des constructions métalliques hyperstatiques.
L'Ossature Métallique 3 (1934), p. 379.
- F. Kann:* Der Momentenausgleich durchlaufender Traggebilde im Stahlbau.
Broschüre, Verlag de Gruyter & Co. 1932.
- F. Kann:* Rechnerische Untersuchungen über die Größe des Fließbereiches in stählernen Durchlaufbalken unter Berücksichtigung des Momentenausgleichs.
Stahlbau 5 (1932), p. 105. Berichtigung (1932), p. 160.
- [15] *G. v. Kazinczy:* Kisértetek befalozott tartókkal. (Recherches sur pontres encastrées).
Betonszemle 2 (1914), Nr. 5, 6, 7.
- G. v. Kazinczy:* Bemessung von statisch unbestimmten Konstruktionen unter Berücksichtigung der bleibenden Formänderungen.
Internationaler Kongreß für Eisenbau, Liège Septembre 1930.
- [13] *G. v. Kazinczy:* Statisch unbestimmte Tragwerke unter Berücksichtigung der Plastizität.
Stahlbau 4 (1931), p. 58.
- G. v. Kazinczy:* Die Weiterentwicklung der Plastizitätslehre.
Sonderdruck aus dem 12. Jahrgang der „Technica“, Budapest 1931.
- G. v. Kazinczy:* Die Bemessung unvollkommen eingespannter Stahl I-Deckenträger unter Berücksichtigung der plastischen Formänderungen.
2^e vol. des Mémoires de L'A.I.P.C., Zurich 1934.

- N. C. Kist:* Die Zähigkeit des Materials als Grundlage für die Berechnung von Brücken, Hochbauten und ähnlichen Konstruktionen aus Flußeisen.
Der Eisenbau 11 (1920), p. 425.
- N. C. Kist:* Ductility as a base for design-computation of steel bridges and structures instead of proportionality of stress and strain.
La Technique des Travaux, Liège September 1930.
- N. C. Kist:* La Déformation en palier de l'acier substituée à la loi de Hooke comme base de calcul de la résistance des ponts et charpentes métalliques.
Science et Industrie. Edition: Construction et Travaux Publics. Mars 1933.
- O. Knackstedt:* Beitrag zur Ermittlung der wirklichen Tragfähigkeit statisch unbestimmter Vollwandträger aus Stahl unter Berücksichtigung der plastischen Verformung.
Dissertation, Braunschweig 1932.
- O. Lienau:* Der Einfluß der Streckung auf die Tragfähigkeit durchlaufender Eisen-träger.
Zeitschrift Der Schiffbau 29 (1928), p. 532.
- [11] *Maier-Leibnitz:* Beitrag zur Frage der tatsächlichen Tragfähigkeit einfacher und durchlaufender Balkenträger aus Baustahl St. 37 und aus Holz.
Bautechnik 6 (1928), p. 11, 27.
- Maier-Leibnitz:* Diskussionsbeitrag im Bericht über die 2. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau.
Wien 1928, p. 257.
- [1] *Maier-Leibnitz:* Versuche mit eingespannten und einfachen Balken von I-Form aus St. 37.
Bautechnik 7 (1929), p. 313. Berichtigung (1929), p. 366.
- Maier-Leibnitz:* Artikel: „Zulässige Beanspruchung“ in Luegers Lexikon der Gesamten Technik und ihrer Hilfswissenschaften.
Luegers Lexikon der gesamten Technik ca. 1930.
- [17] *Maier-Leibnitz:* Frage der tatsächlichen Tragfähigkeit durchlaufender vollwandiger Balken aus Baustahl mit drei Feldern.
Stahlbau 9 (1936).
- [7] *H. F. Moore:* The strength of I-beams in flexure (également des indication en ce qui concerne la littérature pour recherches sur poutres simples.
Bulletin Nr. 68 der University of Illinois, Engineering Experiment Station vom 1. September 1913.
- [10] *K.A. Müllenhoff:* Versuche an schmiedeeisernen Blechträgern (enthält Versuche von F. Mc. Kibben der Lehigh Universität an einfachen Balken).
Der Eisenbau 4 (1913), p. 157.
- [12] *J. H. Schaim:* Der durchlaufende Träger unter Berücksichtigung der Plastizität.
Stahlbau 3 (1930), p. 13.
- E. Siebel und H. F. Vieregge:* Über die Abhängigkeit des Fließbeginns von Spannungsverteilung und Werkstoff.
Mitteilungen aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung 1934, Band XVI, Lieferung 21.
- [6] *F. Stüssi und C. F. Kollbrunner:* Beitrag zum Traglastverfahren.
Bautechnik 13 (1935), p. 264.
- F. Stüssi:* Sicherheit statisch unbestimmter Fachwerke bei Veränderung einzelner Stabquerschnitte. Beitrag zur wirtschaftlichen Verstärkung statisch unbestimmter Fachwerkträger mit geringsten Eingriffen.
Bautechnik 9 (1931), p. 603.
- F. Stüssi:* Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis.
Schweiz. Bauzeitung 1935, tirage à part.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Dimensionnement des systèmes hyperstatiques d'après la théorie de la plasticité.

Bemessung statistisch unbestimmter Systeme nach der Plastizitätstheorie (Traglastverfahren).

Calculation of Statically Indeterminate Systems based on the Theory of Plasticity.

Baurat Dr. Ing. F. Bleich,
Zivilingenieur, Wien.

1^o — Introduction.

Dans ce travail nous voulons discuter de l'application pratique du procédé de l'équilibre plastique au dimensionnement des systèmes hyperstatiques composés de barres rigides. Nous voulons aussi déterminer les limites du domaine d'application et montrer par quelques exemples l'emploi de ce procédé.

La méthode ordinaire de dimensionnement des constructions métalliques est basée sur l'hypothèse que le poids propre et les surcharges engendrent des contraintes qui se conforment à la loi de Hooke et que ces contraintes ne dépassent en aucun point une fraction déterminée de la résistance du matériau, fraction appelée contrainte admissible. La connaissance du fait que, dans les systèmes hyperstatiques, on peut avoir des dépassements locaux de la limite d'élasticité, sans qu'il en résulte en général une diminution de la résistance ou de la sécurité de l'ouvrage, car les endroits trop sollicités sont déchargés aux dépens de ceux qui le sont moins, cette connaissance nous a conduit à l'introduction d'une nouvelle conception de la sécurité pour le dimensionnement des systèmes hyperstatiques. Cette nouvelle définition du coefficient de sécurité nous a permis d'utiliser les propriétés plastiques de l'acier pour un dimensionnement économique des systèmes hyperstatiques.

Nous poserons la définition suivante:

Le coefficient de sécurité γ est le rapport de la charge qui peut être portée, à la charge utile. Par charge utile qui peut être portée on entend la valeur maxima de la charge que l'ouvrage peut porter sans s'écrouler, pour une série de mises en charges et de déchargements successifs répétés un nombre de fois quelconque. Lorsqu'il y a différents cas de sollicitation possibles, il y a également lieu de définir le coefficient de sécurité si les différents cas de sollicitation se succèdent dans un ordre quelconque un nombre de fois quelconque.

Le poids propre du système portant est compris dans la charge utile.

Dans les méthodes habituelles de dimensionnement des ouvrages métalliques, le coefficient de sécurité est exprimé en fonction du taux de travail admissible. On considère comme coefficient de sécurité le rapport:

$$\nu = \frac{\sigma_A}{\sigma_s} \quad (1)$$

où σ_A est la résistance du matériau. La limite supérieure de σ_A est la limite d'écoulement, ceci afin d'exclure avec sûreté de trop grandes déformations permanentes.

Nous choisirons la même valeur de ν , donnée par l'égalité (1), comme coefficient de sécurité pour le dimensionnement des systèmes hyperstatiques d'après la nouvelle méthode. Il en résulte que les systèmes isostatiques et hyperstatiques sont calculés avec le même coefficient de sécurité. En effet, pour les systèmes isostatiques, le dimensionnement en partant du taux de travail admissible conduira, à cause de la proportionnalité entre la charge et la contrainte, aux mêmes sections de l'ouvrage que le dimensionnement par la nouvelle méthode.

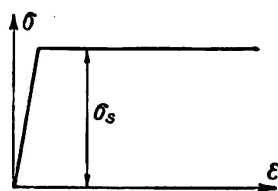


Fig. 1.

La détermination des dimensions des ouvrages hyperstatiques d'après le nouveau principe de sécurité est appelé *dimensionnement d'après le procédé de l'équilibre plastique*.

Ce procédé repose sur les deux hypothèses suivantes:

1° Le matériau se comporte suivant le diagramme force/déformation représenté par la figure 1. Il se comporte tout à fait élastiquement jusqu'à la limite d'écoulement σ_s . Après avoir atteint cette limite le matériau est considéré comme complètement plastique. Le procédé de l'équilibre plastique admet donc un acier ayant une zone de déformation plastique infiniment grande.¹

2° Le matériau ne peut pas être amené à la rupture dans tous les cas où les déformations sont limitées, c'est-à-dire lorsque ces déformations ne peuvent pas dépasser une certaine limite même pour des charges alternées répétées un nombre de fois quelconque (quelle que soit la différence entre les limites inférieures et supérieures des tensions). Le procédé de l'équilibre plastique ne tient par conséquent pas compte des possibilités de rupture à la fatigue, qui peut se produire même pour des déformations insignifiantes au point de rupture. *L'application de ce procédé de dimensionnement ne peut se faire que lorsqu'aucune résistance à la fatigue n'entre en ligne de compte, c'est-à-dire lorsque le nombre des variations de charge est limité au cours de l'existence de l'ouvrage, ce qui est le cas pour les toits et les dalles des charpentes.*

Faisons encore les remarques suivantes: Depuis plusieurs dizaines d'années, un nombre incalculable de ponts métalliques sont soumis, sous forme de tensions secondaires dans les assemblages rivés et dans les noeuds rigides, à des sollicitations locales qui dans bien des cas atteignent certainement la limite d'écoulement. Ces tensions secondaires, ainsi qu'on le sait déjà, sont engendrées dans la plupart des cas par des surcharges répétées ne produisant que des déformations limitées. Malgré le grand nombre d'alternances des charges,

¹ Pour les aciers doux la déformation permanente peut atteindre 10 à 20 % de la longueur entre repères.

atteignant plusieurs millions dans certains cas, on n'a presque jamais observé de rupture à la fatigue. Ces faits sont en opposition avec les expériences faites en laboratoire sur des barreaux perforés et qui, contrairement à l'expérience acquise dans la construction des ponts ont clairement démontré que la résistance à la fatigue dépend assez fortement de la grandeur de la différence des tensions. Ces essais ont aussi prouvé que la résistance à la fatigue est plus petite que la limite d'écoulement même si l'on considère comme tensions secondaires les pointes de tensions qui dépassent, dans la section droite du trou, la contrainte moyenne. Tant que ces relations n'ont pas été mises au clair, la prudence est de rigueur. C'est pour cette raison que nous sommes d'avis de limiter le dimensionnement d'après le procédé de l'équilibre plastique aux seuls cas où la résistance à la fatigue n'intervient pas.

Le dimensionnement d'après le procédé de l'équilibre plastique qui permet d'utiliser les propriétés de ductilité de l'acier est spécialement indiqué au point de vue économique pour les systèmes portants composés de barres rigides et qui présentent une section constante sur une ou plusieurs travées. Lorsqu'une partie de la construction, dans laquelle la tension maxima est atteinte, faiblit par l'apparition de déformations permanentes, une autre partie de la construction qui jusque là n'était pas complètement utilisée, sera plus fortement sollicitée lors de la nouvelle répartition des tensions provoquée par ces déformations. Il est aussi très indiqué de prévoir des renforcements locaux de la poutre lorsque l'on applique ce nouveau procédé de dimensionnement.

Le procédé de l'équilibre plastique ne présente par contre aucun avantage économique dans tous les cas où les sections des barres sont exactement adaptées à la grandeur des forces intérieures, comme par exemple dans les poutres rivées ou soudées dont la hauteur de construction ou l'épaisseur des membrures sont exécutées suivant l'allure des moments. Il ne faut de même pas attendre de gros avantages de l'application de ce procédé de l'équilibre plastique au dimensionnement des *poutres en treillis hyperstatiques* dont les barres ont des sections en général bien adaptées aux efforts calculés. Une autre raison encore nous pousse à déconseiller l'emploi de cette nouvelle méthode au dimensionnement des poutres en treillis hyperstatiques. Les barres comprimées de ces systèmes par suite du danger de flambage ne se comportent pas du tout plastiquement, elles cèdent subitement comme les barres tendues constituées par un matériau cassant.² En ce sens, une poutre en treillis n'est pas constituée dans toutes ses parties par le même matériau élastico-plastique car même les barres prises individuellement modifient leurs propriétés élastiques déterminantes pour le dimensionnement d'après le procédé de l'équilibre plastique lors de l'alternance de traction et de compression. Les barres se comportent sous l'effet de la traction comme élastico-plastiques mais lorsque ces mêmes barres sont soumises à la compression, elles travaillent comme des barres cassantes.

2° — *Lois fondamentales pour le calcul d'après le procédé de l'équilibre plastique.*

Si à chaque section d'une poutre plane, composée de barres rigides, on reporte les tensions normales de l'une des fibres extrêmes, la courbe com-

² Ceci est spécialement valable lorsque la barre flambe dans le domaine élastique.

plètement ou partiellement continue que l'on obtient s'appelle: *diagramme des tensions*. Les ordonnées de cette courbe peuvent appartenir en général à différentes sollicitations de la poutre. Choisissons maintenant pour chaque section le groupe de charges qui produit dans la fibre extrême de la section le plus grand effort de traction, respectivement de compression, on obtient ainsi deux courbes de tension que l'on désigne par: diagrammes des $\sigma_{\max}$, respectivement $\sigma_{\min}$. Dans des sections non symétriques, ainsi que dans les cas où, à côté des moments de flexion, on a encore des forces normales, les tensions ne sont en général pas les mêmes aux deux extrémités de la section. Dans ces cas il faut porter de chaque côté un diagramme des $\sigma_{\max}$ et un des $\sigma_{\min}$.

A l'encontre de ce que l'on a dans les systèmes isostatiques, des tensions et des réactions d'appuis peuvent exister dans les systèmes hyperstatiques, même lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur le système. Nous avons désigné un tel état: *état de tensions résiduelles*. Nous appellerons les tensions existant dans cet état $\bar{\sigma}$, *tensions résiduelles* et leur diagramme, *diagramme des tensions résiduelles*. Ce diagramme est formé de segments de droites pour les poutres composées de barres rigides rectilignes.

Nous pouvons énoncer la loi générale suivante³:

Dans le sens du procédé de l'équilibre plastique, un système hyperstatique est résistant si par un choix approprié des grandeurs hyperstatiques on provoque un état de tensions résiduelles tel que la somme algébrique des tensions résiduelles σ d'une part et de la tensions limite $\sigma_{\max}$, resp. $\sigma_{\min}$, calculée d'après la théorie ordinaire des systèmes hyperstatiques d'autre part, ne dépasse en aucun point le limite d'écoulement σ_s . Nous pouvons donc écrire les équations générales suivantes:

$$|\sigma_{\max} + \bar{\sigma}| \leq \sigma_s \quad \text{et} \quad |\sigma_{\min} + \bar{\sigma}| \leq \sigma_s \quad (2)$$

La démonstration de cette loi se trouve dans un rapport de E. Melan. Cette proposition peut très bien être représentée au moyen des diagrammes de tension. La fig. 2 représente les courbes des $\sigma_{\max}$ et $\sigma_{\min}$ pour une poutre reposant sur trois appuis et dont les travées sont toutes deux égales à l. La poutre n'est sollicitée que par une charge mobile concentrée P. Il est possible de déterminer un diagramme de tensions résiduelles qui, partant des courbes de $\sigma_{\max}$ et $\sigma_{\min}$, ne dépende en aucun point de la valeur de σ_s . Notre poutre est donc apte à supporter la charge mobile P, qui peut être appliquée un nombre de fois indéfini sans provoquer dans la poutre des déformations permanentes dépassant une certaine limite. Si nous admettons comme charge utile une fraction v de la charge P (nous avons posé pour simplifier le poids propre égal à zéro) notre poutre a le coefficient de sécurité v .

Dans les limites indiquées par la proposition générale et en tenant compte des conditions du système, le choix du diagramme des tensions résiduelles est

³ H. Bleich: „Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes.“ Der Bauingenieur 1932, p. 261.

Ce fut G. v. Kazinczy qui à ma connaissance fut le premier à attirer l'attention au moyen d'un exemple (poutre sur trois appuis) sur le fait que les règles de dimensionnement n'étaient pas les mêmes pour les surcharges variables quelconques que pour les surcharges variant entre deux limites déterminées de même signe. „Die Weiterentwicklung der Plastizitätslehre“, Technika, 1931, Budapest.

arbitraire. Pour choisir entre les différentes solutions possibles, on devra se laisser guider par des considérations économiques et techniques.

On peut provoquer artificiellement dans le système non chargé, par une mise sous tension préalable, les tensions résiduelles déterminées par le diagramme.⁴ Le dimensionnement d'après le procédé de l'équilibre plastique signifie que l'on superpose aux tensions élastiques engendrées par la surcharge dans un système hyperstatique, un système de *tensions préliminaires artificielles* qui ont pour but de diminuer la valeur maxima des contraintes à l'endroit considéré de la poutre. Un tel état de tension préliminaire se présenterait aussi si l'on appliquait à la poutre la surcharge complète pour l'enlever ensuite.

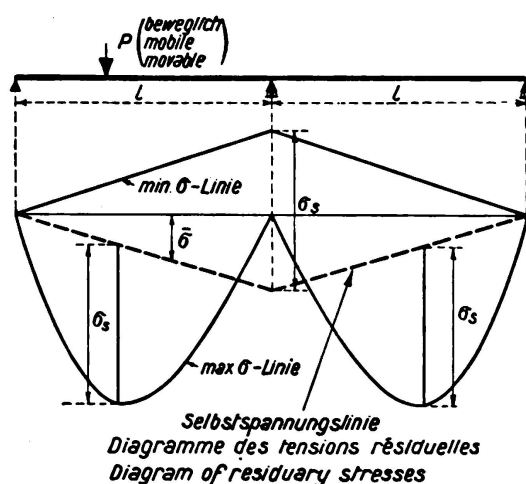


Fig. 2.

Dans les applications pratiques du procédé de l'équilibre plastique, il n'est évidemment pas nécessaire de faire usage d'une part des charges limites et des tensions correspondantes $\sigma_{\max}$ et $\sigma_{\min}$, et d'autre part de la limite d'écoulement. Il est plus avantageux de tracer les diagrammes de tensions $\sigma_{\max}$ et $\sigma_{\min}$ correspondant aux charges réelles et de dessiner les courbes de tensions résiduelles de telle façon qu'en aucune section l'écart entre ces courbes et le diagramme des tensions extrêmes ne dépasse la valeur du taux de travail admissible σ_{adm} . Le coefficient de sécurité possède alors la valeur:

$$\nu = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\text{adm}}}$$

Si les tensions ne sont pas les mêmes dans les fibres extrêmes supérieures et inférieures d'une section, un diagramme spécial des tensions est valable pour chaque fibre extrême (fig. 2). Cependant les courbes de tensions résiduelles ne sont plus indépendantes l'une de l'autre dans les deux diagrammes de tension car elles appartiennent à un seul et même état de tension.

L'application des diagrammes de tension n'est évidemment possible que si les sections des barres et par suite les tensions dans les fibres extrêmes sont connues. Il y a lieu de procéder autrement lorsqu'il faut commencer par la détermination des sections. Dans ce cas on part des diagrammes des $M_{\max}$

⁴ Dans notre exemple ces tensions préliminaires peuvent être provoquées par un exhaussement déterminé de l'appui central.

et $M_{\min}$ qui ne sont pas autre chose que le produit des moments résistants W par les courbes de tension. Le travail consiste en une interpolation convenable du diagramme des *moments dus aux tensions résiduelles* $\bar{M}$, interpolation telle que les conditions

$$|M_{\max} + \bar{M}| \leq W \cdot \sigma_{\text{adm}} \quad \text{et} \quad |M_{\min} + \bar{M}| \leq W \cdot \sigma_{\text{adm}}$$

soient satisfaites pour chaque point de la poutre. Nous appellerons $W \cdot \sigma_{\text{adm}}$: *moment admissible*.⁵ Pour les poutres droites la courbe des moments des tensions résiduelles est toujours composée de segments de droites. Les moments M et $\bar{M}$ sont les moments au noyau lorsque pour le dimensionnement on a affaire à des forces normales en plus des moments. On peut aussi procéder de la façon suivante: lors du dimensionnement préliminaire on tiendra compte de la force normale N en déduisant de σ_{adm} la valeur admise $\sigma = \frac{N}{F}$ (F est la section de la poutre) et en posant le moment admissible égal à $W \cdot \left(\sigma_{\text{adm}} - \frac{N}{F} \right)$.

Il importe encore de faire remarquer que des *surcharges accidentelles*, telles que de légers *affaissements des appuis*, n'ont aucune influence sur la sécurité, car elles produisent dans le cas le plus défavorable des déformations permanentes limitées. Par contre il y a lieu de tenir compte lors du dimensionnement, des *effets des variations de la température*, car ils peuvent se répéter un nombre indéfini de fois. Il faudra donc, dans le tracé des diagrammes des tensions extrêmes $\sigma_{\max}$ et $\sigma_{\min}$, introduire également les tensions dues aux variations de température.

S'il n'y a qu'une seule possibilité de sollicitation oscillant entre une limite supérieure et une limite inférieure, (en excluant tout changement de sens des surcharges), les diagrammes des $M_{\max}$ et $M_{\min}$ coïncident avec les courbes des moments produits par la surcharge donnée. Dans ce cas, et seulement dans ce cas, on peut négliger le calcul comme système hyperstatique. On choisit arbitrairement les grandeurs hyperstatiques mais cependant de telle sorte qu'en aucun point le moment admissible $W \cdot \sigma_{\text{adm}}$ ne soit dépassé.

Le calcul d'après le procédé de l'équilibre plastique peut se résumer comme suit:

a) — *Dimensionnement.*

1° Calcul des courbes de $M_{\max}$ et $M_{\min}$ ainsi que des forces normales N d'après la théorie ordinaire des systèmes hyperstatiques. Nous désignerons cet état de tension per *Etat I*.

2° Détermination de l'état de tensions résiduelles par le choix des diagrammes de moments des tensions résiduelles $\bar{M}$ de telle sorte qu'en aucun point le moment soit plus grand que $W \cdot \sigma_{\text{adm}}$. Calcul des grandeurs hyperstatiques X_1 ,

⁵ L'introduction de $W \cdot \sigma_{\text{adm}}$ comme moment admissible signifie que même pour des poutres courbes, la relation entre la tension et la flèche peut être simplifiée ainsi que l'indique la fig. 1. Le moment admissible réel d'une poutrelle en I par exemple, est, ainsi qu'on le sait déjà, 16 à 18% plus grand que $W \cdot \sigma_{\text{adm}}$. Il ne paraît pas opportun de prendre aussi en considération cette dernière réserve lors du dimensionnement des systèmes hyperstatiques.

$X_2, \dots$ qui appartiennent à l'état de tensions résiduelles choisi et que nous appellerons *Etat II*.

b) — *Contrôle des tensions.*

1° Calcul des tensions pour l'état I.

2° Calcul des tensions pour l'état II. Ces tensions doivent être inférieures à σ_{adm} .

3° Contrôle de la somme des tensions de 1° et 2°. Cette somme ne doit pas dépasser σ_{adm} .

Cette dernière tension doit être considérée comme tension idéale car elle ne représente qu'une échelle pour la détermination de la sécurité. La tension réelle est dans le cas particulier celle que l'on obtient sous 1° car en général les tensions produites par la charge (poids propre + charge utile) ne dépassent pas la limite d'écoulement même lors du dimensionnement d'après le procédé de l'équilibre plastique. Pour cette raison, même dans le cas où il faut contrôler les flèches provoquées par les surcharges, ces flèches sont à calculer sans tenir compte de l'influence de l'état de tensions résiduelles sur les tensions. *Les flèches sont donc à calculer suivant la méthode ordinaire.*

Il faut apporter un soin tout particulier au calcul des semelles comprimées afin d'avoir une sécurité suffisante au flambage.

3° — *Application du procédé de l'équilibre plastique au calcul des poutres-continues.*

1^{er} Exemple.

Considérons d'abord le cas le plus simple où une même surcharge varie toujours entre une limite supérieure et une limite inférieure, de telle sorte que l'on peut appliquer la simplification dont nous avons parlé ci-dessus à la page 7. Comme exemple nous avons choisi le sommier représenté par la fig. 3a et constitué d'une poutre continue de $8 + 12 + 8$ m de portée. Cette poutre est chargée par des fermes distantes entre elles de 4 m. La charge permanente est de 180 kg/m^2 , la surcharge (neige et vent) de 100 kg/m^2 . La surcharge du sommier s'étend sur une largeur de 12 m. Les charges concentrées sont donc les suivantes:

provenant de la charge permanente:

$$P_g = 12 \cdot 4 \cdot 0,18 = 8,64 \text{ t}$$

provenant de la neige et du vent:

$$P_p = 12 \cdot 4 \cdot 0,10 = 4,80 \text{ t.}$$

Comme toutes les surcharges ne se présentent qu'uniformément réparties, nous n'avons affaire qu'à un seul cas de surcharge pour lequel les charges concentrées varient entre $P_g = 8,64 \text{ t}$ et $P_g + P_p = 13,44 \text{ t}$. La fig. 3 donne les valeurs maxima des moments pour le système fondamental isostatique composé de trois poutres simples. La poutre est sollicitée par les charges concentrées $P_g + P_p$. Nous choisissons les grandeurs hyperstatiques, c'est-à-dire les moments M_B et $M_{B'}$, au droit des appuis de telle sorte que ces moments soient égaux aux moments maximum en travée. Ce choix fixe la ligne pointillée de la fig. 3.

Nous avons donc :

$$M_B = M_2 = \frac{53,76}{2} = 26,88 \text{ tm}, \quad M_1 = 13,44 \text{ tm}.$$

Avec un $\sigma_{adm} = 1600 \text{ kg/cm}^2$, nous obtenons pour les travées extérieures un profilé I 34 et pour la travée centrale un profilé I 42,5. Le joint de ces profilés se trouve dans les travées extérieures, au point a de la fig. 3. Il faut déterminer la position de a de telle façon que $W_n \cdot \sigma_{adm} \geq M_a$; W_n est le moment résistant du profilé I 34 en tenant compte de la réduction due aux trous dans le joint.

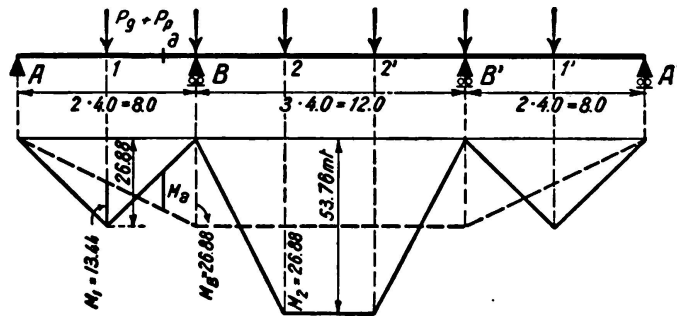


Fig. 3.

2^{ème} Exemple.

Considérons maintenant le cas d'un sommier de 4 travées (fig. 4) chargé au tiers de chaque travée par des charges concentrées $P_g = 4 \text{ t}$ (poids propre) et $P_p = 8 \text{ t}$ (surcharge). $\sigma_{adm} = 1400 \text{ kg/cm}^2$. Les valeurs maxima et minima des moments, calculées d'après la théorie ordinaire de la poutre continue, sont portées dans la fig. 4a. Dans le calcul des moments limites nous admettons que la surcharge des différentes travées est complète ou nulle.

Dimensionnement.

1^{ère} solution, fig. 4b. Nous dessinons la courbe des moments dus aux tensions résiduelles $\bar{M}$ de telle sorte que :

$$M_1 = -M_B = 20,15 \text{ tm} \quad \text{et} \quad M_2 = -M_C = 15,74 \text{ tm}.$$

Nous en tirons le dimensionnement suivant : pour les travées extrêmes des profilés I 40 et pour les deux travées centrales des profilés I 38. Pour un moment de 17,70 tm qu'un profilé I 38 peut encore juste supporter lorsque $\sigma_{adm} = 1400 \text{ kg/cm}^2$, la position théorique du joint soudé se trouve à côté de l'appui B.

Pour l'état de tensions résiduelles nous obtenons les valeurs suivantes des grandeurs hyperstatiques :

$$\bar{M}_B = \bar{M}_{B'} = +2,14 \text{ tm} \quad \bar{M}_C = +2,55 \text{ tm}.$$

2^{ème} solution, fig. 4c. La courbe des moments sera choisie pour que :

$$-M_B = M_2 = -M_C = 16,47 \text{ tm}.$$

Il en résulte que le moment maximum de la dernière travée croît et devient $M_1 = 21,34 \text{ tm}$. On obtient pour les portées extrêmes des I 42,5 et pour les

portées centrales des I 38. Cependant on peut exécuter le joint soudé directement au droit de l'appui B.

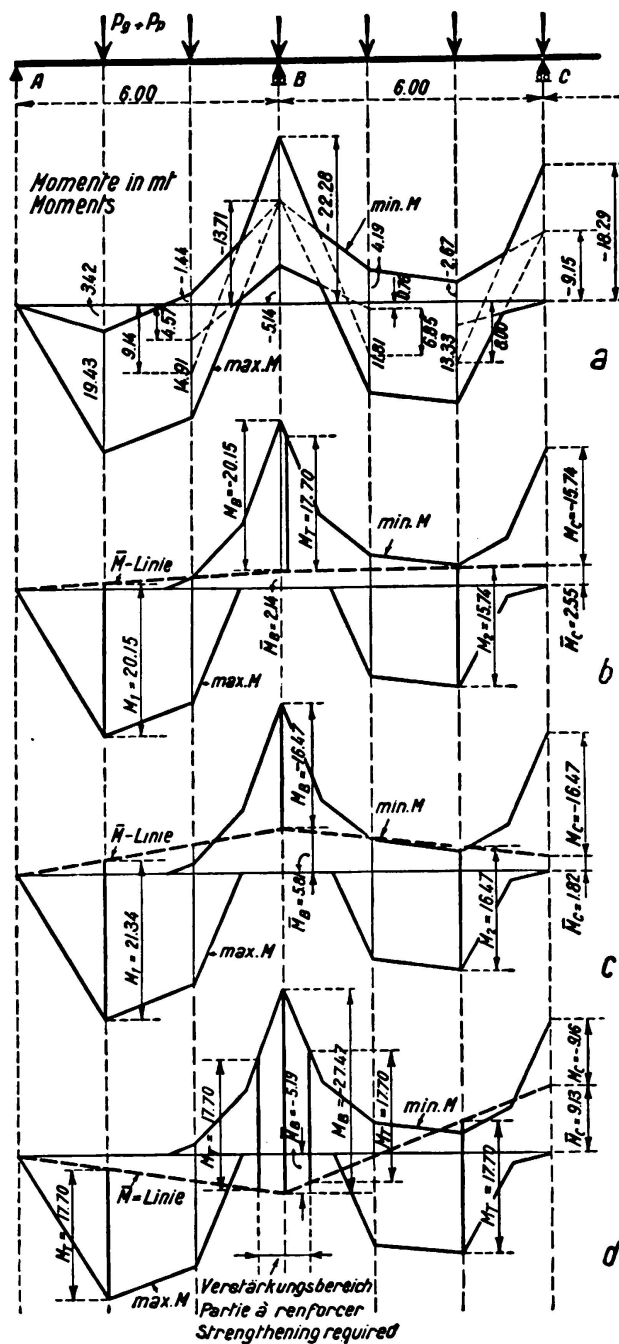


Fig. 4.

L'état de tensions résiduelles donne les valeurs suivantes des grandeurs hyperstatiques:

$$\overline{M} = \overline{M}_{B'} = + 5,81 \text{ tm} \quad \text{et} \quad \overline{M}_C = + 1,82 \text{ tm.}$$

3^{ème} solution, fig. 4d. On porte dans les premières et deuxièmes travées à l'endroit des moments positifs maximum les plus grands moments que peuvent supporter les profilés I 38 pour un $\sigma_{adm} = 1400 \text{ kg/cm}^2$, c'est-à-dire 17,70 tm.

Ces deux points déterminent une courbe des moments dus à la tension résiduelle qui produit au droit de l'appui B un moment de 27,47 tm. Ce moment peut être supporté par des renforcements du profilé I 38 continu, au moyen de semelles soudées de 160×12 mm dans la région de l'appui.

Les valeurs suivantes des grandeurs hyperstatiques correspondent à cet état de tensions résiduelles:

$$\bar{M}_B = \bar{M}_{B'} = -5,19 \text{ tm} \quad \text{et} \quad \bar{M}_C = +9,13 \text{ tm}.$$

3^{ème} Exemple.

La poutre continue sollicitée par une surcharge uniformément répartie, joue un rôle des plus importants dans la construction des charpentes métalliques. Nous allons établir dans ce qui suit quelques règles de dimensionnement très simples pour de telles poutres composées d'un nombre quelconque de travées égales. Considérons à cet effet comme exemple la poutre à trois travées sollicitée par une surcharge permanente uniforme g et par une charge utile répartie p , placée à l'endroit le plus défavorable. On a tracé dans la fig. 5, en plus du diagramme de M_g , ceux des $M_{\max} = M_g + M_{p \max}$ et des $M_{\min} = M_g + M_{p \min}$.

Nous allons considérer deux solutions de ce problème. Le diagramme des moments dus aux tensions résiduelles I, a été tracé en faisant $M_1 = M_B$. Les sections dans les travées extrêmes seront déterminées à l'aide du moment M_1 et celle dans la travée médiane à l'aide du moment M_2 . Il y a lieu de remarquer que la section plus forte des travées extrêmes doit se prolonger d'une longueur d'environ $1/10$ dans les travées médianes car M_B est plus grand que M_2 . Le joint de la poutre se trouverait alors à droite de l'appui B.

Si l'on désirait situer le joint de la poutre au droit même de l'appui B, il faudrait tracer un diagramme des moments dus aux tensions résiduelles tel que le diagramme II de la fig. 5. Dans ce cas $M_B = M_2$; M_1 est plus grand que M_2 mais on peut cependant situer au droit de l'appui B le joint entre la poutre de la travée extrême et la poutre plus faible de la travée médiane. Les diagrammes

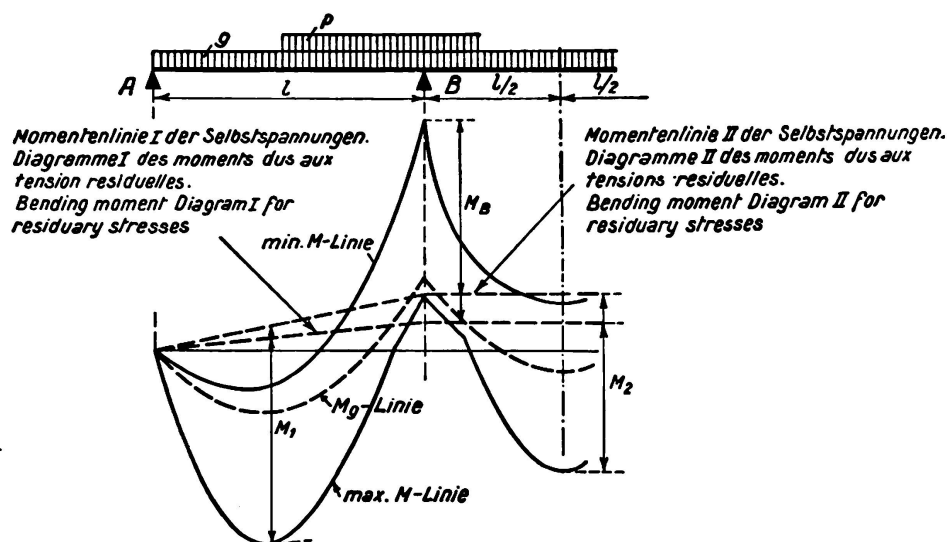


Fig. 5.

des moments qui ont été tracés à la fig. 5 ont été calculés en supposant une section uniforme de la poutre dans toutes les travées. Si l'on voulait effectuer une détermination très précise, on devrait recommencer les calculs en tenant compte de la variation des sections. Cependant la pratique montre que l'influence de la variation de la section de la poutre sur le résultat final du calcul d'après le procédé de l'équilibre plastique est très faible de telle sorte que l'on peut presque toujours se contenter d'un seul calcul (en admettant partout la même section). Pour se rendre compte de l'exactitude de cette proposition, il suffit de se souvenir de l'exemple 1 qui contient une solution exacte de ce problème. La solution y est tout-à-fait indépendante de la grandeur des moments d'inertie des sections des différentes travées.

En étudiant la fig. 5 on peut déduire ce qui suit: si l'on considère d'une part les moments M_g seuls et d'autre part les moments M_p seuls, les valeurs maxima des moments, conditionnées par le diagramme des moments dus aux tensions résiduelles, se présentent soit à peu près, soit tout-à-fait aux mêmes endroits, de telle sorte que l'on peut déterminer chacune d'elles isolément et additionner leurs valeurs maxima. Les moments peuvent alors s'écrire sous la forme suivante:

pour les travées extrêmes: $M_{\max} = c_1 gl^2 + d_1 pl^2$

pour les travées médianes: $M_{\max} = c_m gl^2 + d_m pl^2$.

Les coefficients c et d dépendent du nombre de travées et peuvent pour des longueurs de travées égales, être déterminés une fois pour toutes. Nous avons rassemblé dans le tableau I ces coefficients pour les deux solutions différentes correspondant aux diagrammes de tensions résiduelles I et II. Comme dans les travées médianes les moments maximum ne sont que peu différents les uns des autres, nous avons indiqué dans chaque cas la valeur maxima de c et de d qui est valable pour toutes les travées médianes.

Tableau I. Moments de dimensionnement pour une poutre continue à travées égales.

Travées d'extrémité: $M_{\max} = c_1 gl^2 + d_1 pl^2$					Travées médianes: $M_{\max} = c_m gl^2 + d_m pl^2$				
a) la poutre plus forte de la travée extrême se prolonge d'environ 1/10 dans la deuxième travée					b) la poutre plus forte de la travée extrême est arrêtée au deuxième appui				
nombre de travées	travées d'extrémité		travées médianes		nombre de travées	travées d'extrémité		travées médianes	
	c_1	d_1	c_m	d_m		c_1	d_1	c_m	d_m
2	0,0858	0,1048	—	—	2	0,0858	0,1048	—	—
3	0,0858	0,1061	0,0392	0,0858	3	0,0957	0,1109	0,0625	0,0957
4	0,0858	0,1061	0,0511	0,0942	4	0,0957	0,1104	0,0625	0,0971
> 4	0,0858	0,1061	0,0625	0,0950	> 4	0,0957	0,1098	0,0625	0,0972

4° — Application du procédé de l'équilibre plastique au calcul d'une ferme en cadre.

4^{ème} Exemple.

Considérons une ferme en cadre, encastrée à ses deux appuis, de 16 m de portée et 10 m de hauteur de poteaux. Il faut dimensionner ce cadre 3 fois statiquement indéterminé, de telle sorte que le même profilé sans renforcements locaux soit suffisant et pour les poteaux et pour la traverse. La fig. 6a représente le système du cadre. Nous considérons les surcharges suivantes:

charge permanente:	$p = 0,72 \text{ t/m}$
charge de neige:	$s = 0,45 \text{ t/m}$
action du vent sur les poteaux:	$w = 0,60 \text{ t/m}$

L'allure des moments pour ces trois cas de charge, calculée d'après la méthode connue est représentée par les fig. 6b, 6c et 6d. L'action du vent peut être appliquée à droite ou à gauche, il en résulte que les diagrammes des $M_{\max}$ et

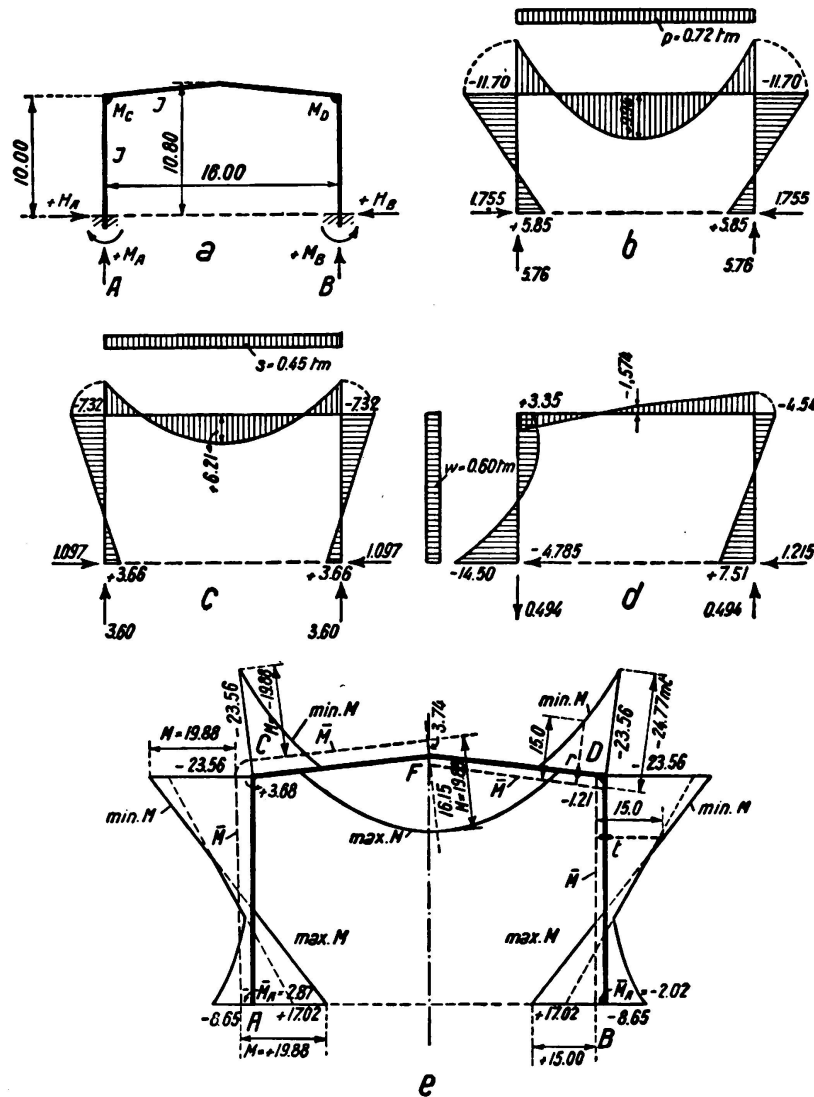


Fig. 6.

des $M_{\min}$ sont symétriques par rapport à l'axe vertical du cadre. Ces diagrammes sont représentés à la fig. 6e.

Nous chercherons un état de tensions résiduelles, donné par les grandeurs $\bar{M}_A$, $\bar{M}_B$ et $\bar{H}$, qui remplisse les conditions suivantes: Nous devons avoir $\bar{M}_A = \bar{M}_B$ et le moment d'encastrement en A, le moment à l'angle C ainsi que le moment en travée F (milieu de la traverse) doivent être égaux en valeur absolue. Soit M cette valeur. En considérant les valeurs des moments limites portés dans la fig. 6e, nous pouvons poser les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \text{au point A} \quad & 17,02 + \bar{M}_A = M \\ \text{au point C} \quad & -23,56 + \bar{M}_A - 10 \bar{H} = -M \\ \text{au point F} \quad & 16,15 + \bar{M}_A - 10,80 \bar{H} = M \end{aligned}$$

De ces trois équations nous pouvons tirer la valeur des trois inconnues $\bar{M}_A$, $\bar{H}$ et M . On obtient:

$$\bar{H} = -0,081 \text{ t} \quad \bar{M}_A = \bar{M}_B = +2,87 \text{ tm} \quad M = 19,88 \text{ tm}$$

Les diagrammes des moments $\bar{M}$ dus aux tensions résiduelles sont portés dans la fig. 6e (côté gauche). Le moment maximum qui sert de base au dimensionnement est donc $M = 19,88 \text{ tm}$. Pour un $\sigma_{adm} = 1600 \text{ kg/cm}^2$ nous utiliserons un profilé I 40.⁶ Nous avons supposé dans ce qui précède que l'on a prévu des dispositifs assurant la sécurité des semelles comprimées.

Si l'on admet la possibilité de renforcements locaux, on procédera de la manière suivante: On choisit comme profilé fondamental un I 36 dont le moment admissible $M_T = 1400 \cdot 1089 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 15,00 \text{ tm}$ pour un $\sigma_{adm} = 1600 \text{ kg/cm}^2$ et en admettant une réserve de 200 kg/cm^2 pour les sollicitations à la force normale.⁷ L'état de tensions résiduelles doit être choisi de telle sorte que le moment maximum à l'encastrement A ainsi qu'au milieu de la traverse, c'est-à-dire en F ne dépasse pas la valeur de $15,00 \text{ tm}$. Nous avons donc les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \text{au point A} \quad & 17,02 + \bar{M}_A = 15,00 \\ \text{au point F} \quad & 16,15 + \bar{M}_A - 10,80 \bar{H} = 15,00 \end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne:

$$\bar{H} = -0,081 \text{ t} \quad \text{et} \quad \bar{M}_A = -2,02 \text{ tm}$$

Aux points C et D nous avons un moment maximum:

$$M_C = M_D = -23,56 - 2,02 + 0,81 = -24,77 \text{ tm}.$$

Le diagramme des moments de la tension résiduelle est dessiné dans la partie de droite de la fig. 6e. Le moment admissible $M_T = 15,00 \text{ tm}$ nous donne les points r et t (fig. 6) qui déterminent la région qui doit être renforcée par le soudage de semelles afin de pouvoir supporter un moment maximum de $24,77 \text{ tm}$.

Dans ce second cas nous avons basé nos calculs sur les mêmes diagrammes de $M_{\max}$ et $M_{\min}$ que dans le premier cas quoique ces diagrammes devraient

⁶ Les forces normales dans les poteaux et la traverse sont aussi prises en considération.

⁷ La force normale maxima atteint dans un poteau par ex. 10 t .

être un peu modifiés par suite des renforcements locaux. L'erreur qui en résulte n'est pas très grande car nous pouvons de nouveau démontrer le peu d'influence qu'ont les conditions de rigidité sur les moments servant au dimensionnement. Un système hyperstatique calculé d'après le procédé de l'équilibre plastique se comporte à peu de chose près comme un système isostatique, si l'on tient compte de l'influence de la rigidité des différentes parties sur les grandeurs déterminantes du dimensionnement. Il suffit presque toujours pour le dimensionnement préliminaire de choisir un système avec une répartition à peu près exacte des moments d'inertie. Il est à recommander d'effectuer le contrôle des tensions pour les diagrammes exacts des $M_{\max}$ et $M_{\min}$ afin de tenir compte des conditions exactes du système.

Résumé.

Ce rapport montre l'application pratique du procédé de l'équilibre plastique au dimensionnement des systèmes hyperstatiques composés de barres rigides. L'auteur donne d'abord une définition du coefficient de sécurité dans le sens du nouveau procédé de dimensionnement et en liaison avec ceci il parle des hypothèses concernant l'application du procédé de l'équilibre plastique en tenant compte des propriétés du matériau. En partant de ces considérations on peut conclure que ce nouveau procédé ne doit être appliqué ni aux systèmes dans lesquels il faut tenir compte de la résistance à la fatigue du matériau, ni aux poutres réticulées. Suit une discussion de la loi de *H. Bleich* qui est à la base de cette théorie ainsi que quelques explications sur la méthode de calcul. L'application pratique du procédé de l'équilibre plastique est démontrée par plusieurs exemples, à savoir : trois types différents de poutre continue et un cadre.