

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Berechnung von Balken auf elastischer Bettung

Autor: Hetényi, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-2883>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

VIII 4

Berechnung von Balken auf elastischer Bettung.¹

Etude analytique des poutres sur sol élastique.¹

Analysis of Bars on Elastic Foundation.¹

H. Hetényi,

Ann Arbor, Michigan, U.S.A.

Ausgehend von der Annahme Winklers, daß die verteilten Auflagerkräfte in jedem Punkte der Durchbiegung des Balkens in diesem Punkte proportional sind ($p = Cy$), wollen wir zwei Methoden angeben, um diese Frage zu prüfen. Die erste gründet sich auf der Differentialgleichung der elastischen Linie und ist die genaue, während bei der zweiten die elastische Linie durch trigonometrische Reihen dargestellt wird, weshalb sie die angenäherte Methode ist.

I. Die genaue Methode.

Wie bekannt, ist die Lösung der Differentialgleichung der elastischen Linie $\frac{d^4y}{dx^4} + Ky = 0$ verhältnismäßig einfach, wenn der Stab als unendlich lang betrachtet wird. Komplikationen treten auf, wenn man eine Lösung für Stäbe endlicher Länge sucht. Die rein mathematische Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Auflagerbedingungen, d. h. den Verhältnissen an den Stabenden, führt, wie auch andere Werke zeigen, zu komplizierten Formeln. Wir wollen hier zeigen, daß eine Lösung für einen Stab endlicher Länge durch einfache Anwendung des Prinzips der Überlagerung aus den Formeln für den Fall des unendlich langen Stabes abgeleitet werden kann.

Das Verfahren wird darin bestehen, einen unendlich langen Stab mit der gegebenen Last zu belasten und dann an den Punkten, wo Enden verlangt werden, bestimmte, konzentrierte Kräfte und Momente zu denken, die in diesen Punkten die End-Verhältnisse schaffen. Statt also die Integrationskonstanten aus den Verhältnissen an den Stabenden abzuleiten, *schaffen* wir auf diese Weise die verlangten End-Verhältnisse in den verlangten Punkten des unendlich langen Stabes. Infolgedessen werden die zu diesem Zweck angelegten Kräfte und Momente Randbedingungs-Kräfte genannt.

Wenn eine einfache konzentrierte Kraft P in Punkt 0 des unendlich langen

¹ Dies ist ein Auszug der unter Leitung Prof. *Timoshenkos* an der Universität Michigan durchgeführten Arbeiten; der Verfasser wurde dorthin von der Jeremiah Smith Fellowship aus Budapest berufen.

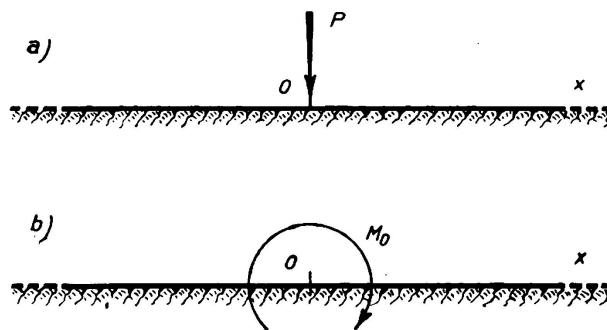
Stabes (Fig. 1a) einwirkt, erhalten wir folgende Ausdrücke für die Seite rechts des Punktes 0:

$$y = \frac{Ps}{2bk} A_{sx}; \quad y' = -\frac{Ps^2}{bk} B_{sx}; \quad (a)$$

$$M = \frac{P}{4s} C_{sx}; \quad Q = -\frac{P}{2} D_{sx}. \quad (b)$$

Hierin ist b die Breite des Stabes

k Stützenkonstante in kg/cm^3



$$s = \sqrt{\frac{bk}{4E}}$$

Fig. 1.

außerdem ist $A_{sx} = e^{-sx} (\cos sx + \sin sx)$,
 $B_{sx} = e^{-sx} (\sin sx)$
 $C_{sx} = e^{-sx} (\cos sx - \sin sx)$ und
 $D_{sx} = e^{-sx} (\cos sx)$;

es sind dies die sogenannten Zimmermann'schen Funktionen. Links vom Punkt 0 ist y' und Q mit umgekehrten Vorzeichen zu wählen. Für ein einziges konzentriertes Moment M_o , das in 0 (Fig. 1b) angreift, erhalten wir folgende Ausdrücke für die rechte Seite des Stabes:

$$y = \frac{M_o s^2}{bk} B_{sx}; \quad y' = \frac{M_o s^3}{bk} C_{sx}; \quad M = \frac{M_o}{2} D_{sx}; \quad Q = -\frac{Ms}{2} A_{sx}.$$

Die Formeln für auf dem unendlichen langen Stab verteilte Belastungen können aus den obigen Formeln durch einfache Integration abgeleitet werden.

Wir nehmen nun an, daß an einem unendlich langen Stab einige gegebene Kräfte (P und Q) (Fig. 2a) angreifen. Wir wollen aus diesem Fall die Lösung für einen endlich langen Stab, der freie Enden in A und B hat, ableiten.

Auf Grund des oben Gesagten werden wir in A und B solche Randbedingungs-Kräfte M_{OA} , P_{OA} , M_{OB} , P_{OB} anlegen, daß sie die Kräftefunktionen M_A , Q_A , M_B , Q_B aufheben, welche in diesen Punkten des unendlich langen Stabes als Folge der gegebenen Belastung auftreten, so daß man in A und B die Verhältnisse des endlichen Stabes ($M = 0$; $Q = 0$) schafft.

Die vier unbekannten Randbedingungs-Kräfte können aus den vier Randbedingungen bestimmt werden. Es ist aber einfacher, die ursprüngliche Belastung (Fig. 2a) in symmetrische (Fig. 2b) und antisymmetrische (Fig. 2c) Komponenten der Belastung zu zerlegen, dann die Randbedingungskräfte in jedem Falle einzeln

zu bestimmen und sie zu addieren. Auf diese Weise werden wir für den symmetrischen Fall (Fig. 2b) im Falle freier Enden folgende Ausdrücke bekommen:

$$P'_0 = 4 F'_I \{ Q'_A (1 + D_{sl}) + s M'_A (1 - A_{sl}) \}$$

$$M'_0 = -\frac{2}{s} F'_I \{ Q'_A (1 + C_{sl}) + 2 s M'_A (1 - D_{sl}) \}$$

und für den unsymmetrischen Fall (Fig. 2c):

$$P''_0 = 4 F''_I \{ Q''_A (1 - D_{sl}) + s M''_A (1 + A_{sl}) \}$$

$$M''_0 = -\frac{2}{s} F''_I \{ Q''_A (1 - C_{sl}) + 2 s M''_A (1 + D_{sl}) \}$$

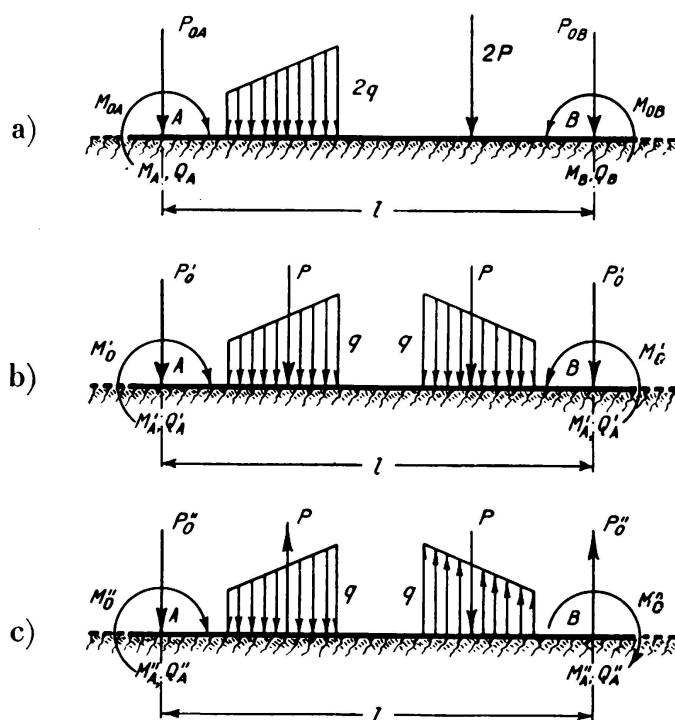


Fig. 2.

In diesen Formeln sind M'_A , Q'_A und M''_A und Q''_A Momente und Schubkräfte, die in A aus den symmetrischen bzw. unsymmetrischen Lastkomponenten entstehen und die F-Symbole geben die in Fig. 3 dargestellten Funktionen an:

$$F'_I = \frac{1}{1 - e^{-2sl} + 2e^{sl} \sin sl}$$

$$F''_I = \frac{1}{1 - e^{-2sl} - 2e^{-sl} \sin sl}$$

$$F'_{II} = \frac{1}{1 + e^{-2sl} + 2e^{-sl} \cos sl}$$

$$F''_{II} = \frac{1}{1 + e^{-2sl} - 2e^{-sl} \cos sl}$$

Mit Hilfe dieser F-Funktionen können Ausdrücke für die Randbedingungskräfte auch für andere Fälle als die oben gezeigten mit freien Enden abgeleitet werden.

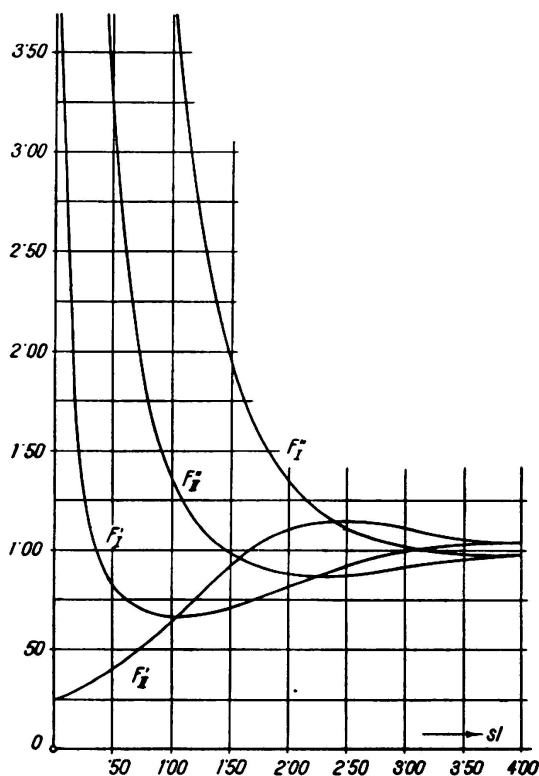


Fig. 3.

Diese F-Funktionen haben indessen noch andere Anwendungen als die Bestimmung der endbedingenden Kräfte. Wenn, z. B. ein Stab von der Länge l durch eine am Ende A konzentrierte Kraft P (Fig. 4a) belastet wird, so können die Senkungen und die Drehungen an den Enden wie folgt ausgedrückt werden:

$$y_{A,B} = \frac{Ps}{bk} \left\{ \frac{F'_I}{F'_{II}} \pm \frac{F''_I}{F''_{II}} \right\}$$

$$\theta_{A,B} = - \frac{Ps^2}{bk} \left\{ \frac{F'_I}{F'_{II}} \pm \frac{F''_I}{F''_{II}} \right\}$$

Unter dem Einfluß eines Momentes M in A (Fig. 4b) sind die Senkungen und Drehungen an den Enden:

$$y_{A,B} = - \frac{Ms^2}{bk} \left\{ \frac{F'_I}{F'_{II}} \pm \frac{F''_I}{F''_{II}} \right\}$$

$$\theta_{A,B} = \frac{2Ms^3}{bk} \left\{ \frac{F'_I}{F'_{II}} \pm \frac{F''_I}{F''_{II}} \right\}$$

Im Falle einfach gestützter Enden (Fig. 4c) sind die Drehungen der Enden infolge des Momentes M :

$$\theta_{A,B} = \pm \frac{Ms^3}{bk} \left[\frac{F'_{II}}{F'_I} \pm \frac{F''_{II}}{F''_I} \right].$$

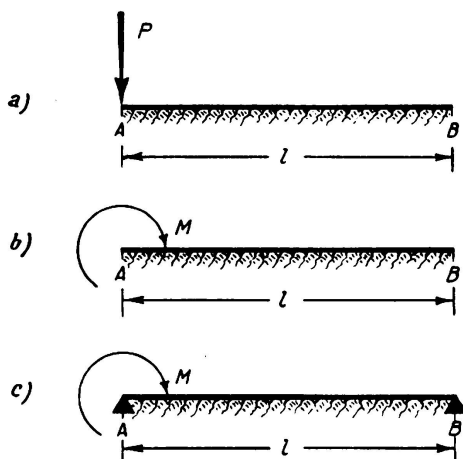


Fig. 4.

Die zusätzliche Verwendung der F-Funktionen vereinfacht sehr die Berechnung durchgehender Träger oder solcher Träger, bei denen der Querschnitt oder Stützenkonstante sich stufenweise ändern.

Dasselbe Prinzip kann verwendet werden, wenn an dem Stab außer der Querkraft Normalkräfte und Verdrehungsmomente angreifen. Die Durchbiegung und deren höhere Differentialquotienten werden stets proportional der Querkraft sein und so ist die Überlagerung der Randbedingungskräfte anwendbar. Dies wird in einer späteren Arbeit in allen Einzelheiten dargestellt werden.²

² Nach Ausarbeitung dieser Methode wurde der Verfasser auf eine russische Schrift von H. V. Klischewitch aufmerksam und stellte fest, daß dieser dieselben Grundsätze anwendet, mit der Ausnahme, daß er die Zerlegung in symmetrische und antisymmetrische Komponenten nicht vornimmt und daß seine Formeln daher komplizierter und seine Forschungen auf den Fall beschränkt waren, daß der Stab nur der Querkraft unterliegt.

II. Angenäherte Methode.

Bei einem Stabe endlicher Länge, an dem eine Einzellast $2P$ (Fig. 5a) angreift, kann die Durchbiegung aus dreierlei bestehend gedacht werden, nämlich einer konstanten senkrechten Senkung y_0 , einer Winkeldrehung α und den Ordinaten der elastischen Linie $A'B'$, wobei letztere in Form einer Sinusreihe ausgedrückt werden kann. Daher kann die Gesamtdurchbiegung in einem beliebigen Punkt in der Entfernung x vom linken Ende in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$y = y_0 + \alpha \left[\frac{l}{2} - x \right] + \sum_{n=1,2,3\dots} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Wenn die ursprüngliche Last (Fig. 5a) in einem symmetrischen (Fig. 5b) und einem antisymmetrischen (Fig. 5c) Teil zerlegt wird, so wird natürlich im ersten keine Drehung ($\alpha = 0$) und im zweiten keine konstante, senkrechte Verlagerung

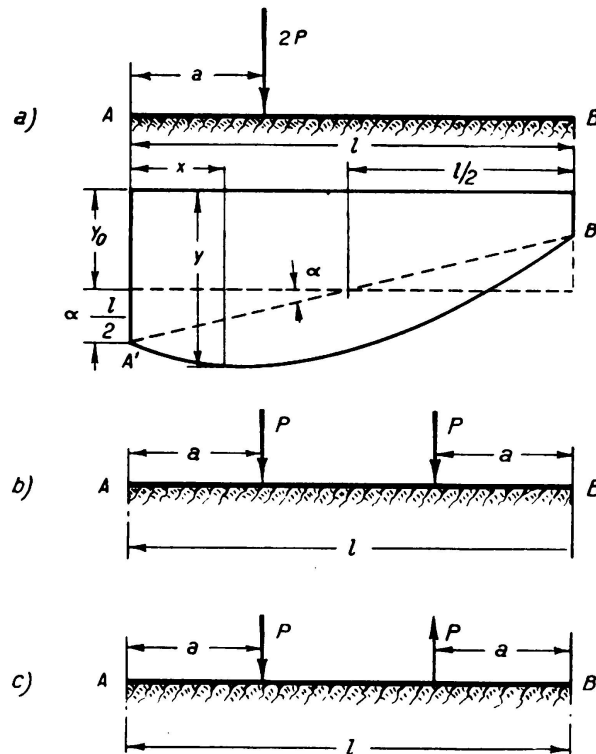


Fig. 5.

($y_0 = 0$) vorhanden sein. Betrachten wir die Gleichgewichtsbedingungen und setzen wir die Arbeit der inneren Kräfte im Stabe gleich mit dem Zuwachs an potentieller Energie am Auflager, so erhalten wir für den symmetrischen Fall (Fig. 5b) folgenden Ausdruck für die elastische Linie:

$$y = \frac{2P}{bkl} - \sum_{n=1,3,5\dots} a_n \left[\frac{2}{n\pi} - \sin \frac{n\pi x}{l} \right]$$

in der jedes a_n -Glied aus der Gleichung

$$2P \left\{ \sin \frac{n\pi a}{l} - \frac{2}{n\pi} \right\} = a_n \left\{ n^4 \frac{\pi^4 EJ}{2l^3} + \frac{bkl}{2} \right\} - \frac{4bkl}{\pi^4} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1,3,5\dots} \frac{1}{i} a_i$$

bestimmt werden kann.

Für den antimetrischen Fall nimmt die Gleichung der elastischen Linie folgende Gestalt an:

$$y = \frac{12 P (1 - 2 a)}{b k l^3} \left(\frac{l}{2} - x \right) - \left[\frac{12}{l \pi} \left(\frac{l}{2} - x \right) - 1 \right] \sum_{n=2,4,6\dots} a_n \sin \frac{n \pi x}{l}$$

in der die a_n -Glieder aus der Gleichung

$$2 P \left\{ \sin \frac{n \pi a}{l} - \frac{6}{n \pi l} (1 - 2 a) \right\} = a_n \left(\frac{n^4 \pi^4 E J}{2 l^3} - \frac{l b k}{2} \right) - \frac{12 k l}{n \pi^2} \sum_{i=2,4,6\dots} \frac{1}{i} a_i$$

bestimmt werden können.

Wenn auch diese Methode als angenähert bezeichnet wird, so läßt sich doch jeder Genauigkeitsgrad erreichen, je nach der Anzahl der a -Glieder, die man in Betracht zieht.

Diese Methode hat aber einen besonderen Vorzug gegenüber der genauen Methode. Bei letzterer erscheinen die Abmessungen des Stabes und der Stützenkonstanten als Exponenten und trigonometrische Funktionen, so daß es praktisch unmöglich ist, für diese unbekannte Größen Ausdrücke zu finden. Bei einer angenäherten Methode dagegen erscheinen die Größen E , I , l und b , k einzeln und lassen sich leicht bestimmen. Dies ist besonders dann der Fall, wenn nur ein Glied der Reihe Verwendung findet, in welchem Falle die obigen Formeln vorteilhaft beim Entwurf verwendet werden können.

Wenn es sich um einen Stab mit frei aufliegenden Enden handelt, so kann man die elastische Linie als eine einfache Sinusreihe von der Form

$$y = \sum_{n=1,2,3\dots} a_n \sin \frac{n \pi x}{l}$$

darstellen. Im Falle von Stäben mit eingespannten Enden kann die Durchbiegung in der angenäherten Form:

$$y = \sum_{n=1,2,3\dots} \frac{1}{2} a_n \left(1 - \cos \frac{2 n \pi x}{l} \right)$$

geschrieben werden. In beiden Fällen können die a -Glieder aus der Bedingung bestimmt werden, daß die Arbeit der inneren Kräfte im ganzen System ein Minimum sein muß.

Diese angenäherte Methode kann ebenso gut Anwendung finden, wenn Normalkräfte außer der Querkraft auf den Stab einwirken. Die Formeln sind günstig anwendbar, wenn der Stab verhältnismäßig steif ist, $sl \leq \pi$. In solchen Fällen geben der erste oder die beiden ersten Ausdrücke eine gute Annäherung für die elastische Linie. Wenn dieses erreicht ist, können die Q und M -Kurven durch Integration ermittelt werden, was die Übereinstimmung der Ergebnisse noch erhöhen wird.

Wenn die Last aus mehreren Teilen besteht, oder wenn der Stab biegsamer ist, sollte man die genaue Methode bevorzugen. Indessen, wenn $sl > 4$, kann der Einfluß der Randbedingungskräfte aufeinander bei Wahrung der Sicherheit vernachlässigt werden, ($A_{sl} = B_{sl} = C_{sl} = D_{sl} = 0$) und wenn der Stab so lang ist, daß die Entfernung a , zwischen der letzten Teillast und dem benachbarten Ende des Stabes, einen Wert $sa > 4$ ergibt, können die einfachen Werte für den unendlich langen Stab Verwendung finden.