

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 2 (1936)

**Artikel:** Allgemeine Plastizitätstheorie, Gleitlinienfelder

**Autor:** Freudenthal, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2671>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# I 1

## Allgemeine Plastizitätstheorie, Gleitlinienfelder.

Théorie générale de la plasticité. Champs des lignes de cession.

General Theory of Plasticity, Fields of Equal Yield Lines.

Dr. Ing. A. Freudenthal,  
Warschau.

### *Einleitung.*

Trotzdem die Entwicklung der Plastizitätstheorie in den letzten Jahren derartige Fortschritte aufweist, daß ihren Ergebnissen und Auswirkungen bei diesem Kongresse eine besondere Arbeitssitzung eingeräumt wird, stecken in ihren Grundlagen noch wesentliche Unklarheiten. Wenn auch durch die veränderten Anschauungen der modernen Physik viele unserer üblichen Begriffe der Festigkeitslehre zum Teile revidiert werden mußten (vor allem hinsichtlich struktureller Gesichtspunkte), so reichen die Unklarheiten in den Grundbegriffen der Plastizitätstheorie weit über diese Veränderungen und sind vornehmlich bedingt durch unklare Beurteilungen phänomenologischer Tatsachen.

Die Mechanik der festen Körper wird zum größten Teile vom *Hooke'schen* Gesetz beherrscht. Da dieses Gesetz, welches es ermöglichte, eine ziemlich erschöpfende Theorie des elastischen Kontinuums aufzubauen, nur bis zu einer gewissen Grenze gilt, war es seit langem das Bestreben, auch für die Mechanik jener Zustände, welche jenseits dieser Grenze liegen, ähnliche, allgemein gültige Gesetze aufzufinden. Leider traf man hierbei auf wesentliche Schwierigkeiten, da zwar das elastische Verhalten zumindestens vom phänomenologischen Standpunkte, für verschiedene Stoffe mehr oder weniger gleich ist, das Verhalten nach Überschreiten der Elastizitätsgrenze jedoch vom Aufbau der Materie grundlegend beeinflußt wird.

Die mathematischen Untersuchungen der Plastizitätstheorie begannen eigentlich damit, daß man auf Grund der Ähnlichkeit der *Mohr'schen* Grenzkurven des kohäsionslosen Erdkörpers mit denen verschiedener fester Körper, Methoden, welche in der Theorie der Grenzgleichgewichtszustände kohäsionsloser Massen sich als brauchbar erwiesen, zur Berechnung plastischer Zustände feste Körper verwendete. Wegen des grundverschiedenen Aufbaues dieser Körper mußte jedoch die Methode versagen, bzw. zu Resultaten führen, welche von der Wirklichkeit wesentlich abweichen. Es darf nämlich nie vergessen werden, daß der kristallin aufgebaute Körper zuerst mehr oder weniger elastische Formänderungen erleiden muß, ehe er den plastischen Zustand erreicht, in welchem praktisch immer elastische und plastische Gebiete nebeneinander bestehen und längs gewisser Flächen ineinander übergehen, während die kohäsionslose Masse

infolge Erreichen des „plastischen Zustandes“ gewöhnlich Gleichgewichtsstörungen unterliegt. — Für die Behandlung plastizitätstheoretischer Probleme ist deshalb die von *Hencky*<sup>1</sup> eingeführte Unterscheidung in „statisch bestimmte“ und „statisch unbestimmte“ Gleichgewichtsfälle wesentlich. Unter einem statisch bestimmten Fall versteht nämlich *Hencky* jenen, bei dem Gleichgewichtsbedingungen und Plastizitätsbedingung zusammen hinreichen, um die Spannungen in jedem Punkte festzulegen, während die Lösung eines „statisch unbestimmten“ Falles ein Eingehen auf die Deformationen notwendig macht. Bei der Untersuchung bildsamer Zustände der Baustoffe wird man es fast ausschließlich mit „statisch unbestimmten“ Fällen zu tun haben, da gewöhnlich in den betrachteten Grenzzuständen kleine plastische Gebiete neben großen elastischen bestehen, so daß beide Zustände miteinander in den Übergangsgebieten verträglich sein müssen und nur in Abhängigkeit voneinander betrachtet werden können. Eine mathematische Behandlung solcher Zustände wird durch diesen Zusammenhang außerordentlich erschwert. Jedoch dürfen trotzdem der Vereinfachung der Rechnung zuliebe keine Annahmen getroffen werden, welche mit dem tatsächlichen Verhalten der Stoffe in Widerspruch stehen, nur um zu einer mathematischen Lösung zu gelangen.

Die wichtigste derartige Vereinfachung, welche fast die gesamte mathematische Plastizitätstheorie beherrscht, ist die Annahme, daß die elastischen Formänderungen wegen ihrer verhältnismäßigen Kleinheit gegenüber den plastischen vernachlässigt werden können. Diese Annahme, die nichts anderes ist, als ein Analogieschluß, der vom Verhalten des Erdkörpers auf das der kristallinen Stoffe schließt, ist für Gleichgewichtszustände, bei denen elastische und plastische Gebiete nebeneinander bestehen, unzulässig. Schon in der bekannten Arbeit von *Haar* und *Kármán*<sup>2</sup> findet sich der Beweis, daß im halbplastischen Gebiet, d. h. im Gebiet, in welchem  $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 4 k^2$  ( $2 k$  = Fließgrenze), während  $(\sigma_2 - \sigma_3)^2 < 4 k^2$ ,  $(\sigma_3 - \sigma_1)^2 < 4 k^2$ , die plastischen Formänderungen von der Größenordnung der elastischen sind und es deshalb nicht angängig ist, dort, wo beide Arten der Verformung auftreten, die letzteren gegenüber den ersten zu vernachlässigen.

Alle bisherigen Versuche, plastische Gleichgewichtsprobleme kristalliner Körper mathematisch zu lösen, sind jedoch mehr oder weniger von dieser Annahme ausgegangen. Die Ausnahmen sind sehr wenig zahlreich, die prinzipiell wichtigste Arbeit, welche diese Voraussetzung aufgibt, ist eine Arbeit von *Hencky*,<sup>3</sup> welche jedoch bereits für den einfachsten Fall zu derartig schwierigen mathematischen Untersuchungen führt, daß die Behandlung weniger einfacher Fälle mit den heutigen mathematischen Hilfsmitteln unmöglich wird.

Mit Rücksicht auf die in den Grundbegriffen der Plastizitätstheorie herrschenden Unklarheiten soll im folgenden unternommen werden, die grundlegenden Begriffe kurz zu analysieren, sowie die Bedeutung der Erscheinungen der plastischen Verformung kristalliner Körper gegeneinander abzuwägen, wobei vor allem jene Erscheinungen zu behandeln sind, welche die Literatur als „Fließfiguren“ bezeichnet. — Betrachtet werden, wie in der Plastizitätstheorie allgemein üblich, so langsame Vorgänge, daß sie als eine Folge von Gleichgewichtszuständen betrachtet werden können, so daß sich ein Eingehen auf die Deformationsgeschwindigkeiten im allgemeinen erübrigt.

### 1. *Plastizitätsbedingung.*

Die erste Frage der Plastizitätstheorie ist die Frage, unter welchen Bedingungen die Fließgrenze eines Materials überschritten wird. Bevor eine kurze Übersicht über die bestehenden Fließhypothesen gegeben wird, sei ein Satz von *Roš* zitiert, der sowohl für die Beurteilung der Bruch- als der Fließhypothesen sehr wichtig ist: „Eine allgemeine Theorie der Bruchgefahr, welche keine Rücksicht auf den Gefügeaufbau eines Stoffes nimmt, ist wegen des oft grundsätzlich verschiedenen Verhaltens der ganz verschiedenen aufgebauten Stoffe nicht möglich. Jeder Stoff hat seine eigene Theorie der Bruchgefahr, welche eine Folge seines inneren Aufbaues und seines Formänderungsmechanismus ist.“ Der Umstand, daß dieser Satz so präzis vorher nie ausgesprochen wurde und man daher geneigt war, die Versuchsergebnisse, die bei der Prüfung eines bestimmten Stoffes erhalten worden waren, zu verallgemeinern, macht das Bestehen so vieler Hypothesen verständlich.

Bei den Werk- und Baustoffen der Technik handelt es sich im allgemeinen um kristalline Stoffe, welche zwar aus Einzelkristallen zusammengesetzt sind, sich jedoch infolge der regellosen Orientierung dieser quasiisotrop verhalten. — Hinsichtlich des Aufbaues der Einzelkristalle hat man es bei den technischen Metallen fast ausschließlich mit dem kubischen Gitter zu tun, von welchem es drei Arten gibt:

1. das einfache, welches durch Angabe des Abstandes der Massenpunkte (Identitätsabstand) eindeutig bestimmt ist,
2. das flächenzentrierte, mit zusätzlichen Massenpunkten in den Würffel-flächen, und
3. das raumzentrierte Gitter, mit einem Massenpunkt in Raummitte.

$\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\delta$ -Eisen kristallisieren im raumzentrierten,  $\gamma$ -Eisen, Nickel- und Mangan-stahl, sowie Kupfer, Aluminium usw. im flächenzentrierten Gitter.

Die Art des Gitters ist auch vom technischen Standpunkte sehr wichtig, da die Art des Überganges in den plastischen Zustand und die charakteristischen Phänomene dieses Zustandes vom Kristallgitter entscheidend beeinflußt werden (vgl. Seite 7).

Von den bestehenden Fließhypothesen seien hier als die wesentlichsten die folgenden genannt:

1. Die Schubspannungshypothese von *Guest-Mohr*,<sup>4</sup> in der Form

$$\tau_{\max} = f(\sigma_x + \sigma_y)$$

entwickelt aus der alten *Coulomb'schen* Theorie der inneren Reibung.<sup>5</sup>

Die Funktion  $f(\sigma_x + \sigma_y)$  kann den Versuchsergebnissen angepaßt werden.

2. Die *Beltrami'sche* Hypothese der konstanten Formänderungsarbeit, welche als Kriterium des Erreichens der Fließgrenze eine bestimmte Größe der aufgespeicherten Formänderungsarbeit ansieht, jedoch mit den Versuchen nicht übereinstimmte und von *Huber*,<sup>6</sup> sowie unabhängig davon von *Mises* und *Hencky*<sup>7</sup> in einer verbesserten Form als
3. Hypothese der konstanten Gestaltänderungsarbeit

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 8 k^2$$

aufgestellt wurde.

4. Die *Schleicher'sche* Verbesserung dieser Hypothese,<sup>8</sup> welche wohl die allgemeinste Form darstellt, lautet

$$\cdot \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \sigma_c(p) \text{ wobei } p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Die vielen Versuche, welche zur Überprüfung der Richtigkeit aller dieser Hypothesen, sowie verschiedener anderer, welche heute gänzlich verlassen wurden, durchgeführt worden sind,<sup>9</sup> zeigten, daß für bildsam verformbare Metalle mit oder ohne ausgeprägter Fließgrenze die *Huber-Hencky-Mises'sche* Hypothese den Übergang ins Fließgebiet und das Verhalten darin charakterisiert, während für spröde Stoffe und Spannungszustände an der Fließgrenze die *Mohr'sche* Hypothese die besten Mittelwerte liefert.

Man muß sich bei der Beurteilung dieser Feststellungen immer daran erinnern, daß es sich um vorläufige Ergebnisse handelt, welche von der weiteren Forschung noch verändert werden können.

2. *Fließgrenze*.

Die Fließhypothese ist die Bedingung, welche die Hauptspannungen erfüllen müssen, damit der Fließzustand in einem Punkte erreicht wird. Diese Bedingung gilt, und das ist wesentlich, für den Zustand unmittelbar nach dem Überschreiten der Fließgrenze, sagt jedoch nichts aus über die Art, wie dieser Übergang erfolgt. Es bestehen Unterschiede im Verformungsvorgang nicht nur bei verschiedenen Metallen (Stahl und Kupfer), sondern auch bei verschiedenen Arten eines Metalles, ja sogar bei vollkommen gleichen Arten mit verschiedener Vorgeschichte.

Der wesentlichste Unterschied besteht zwischen Metallen mit und ohne ausgeprägter Fließgrenze. Bei den letzteren erfolgt der Übergang aus dem elastischen in den plastischen Zustand ziemlich stetig, da schon geringe Belastungen zu plastischen Verformungen führen. Dagegen sind bei den erstenen die Formänderungen bis zu einer gewissen Grenze vollständig reversibel; plötzlich jedoch bricht der bisher so widerstandsfähige Stoff zusammen, die plastischen Formänderungen setzen unvermittelt, sprunghaft, ein, wobei die Last sehr häufig nicht konstant bleibt, sondern beträchtlich abfällt, so daß es scheinbar eine „obere“ und eine „untere“ Fließgrenze gibt.

Bereits *Bach*<sup>10</sup> fand eine starke Abhängigkeit dieser oberen Fließgrenze von der Form des Probestabes und erkannte das Wesen dieser Grenze als das einer typischen Labilitätserscheinung (Umkippen der Belastung). Die moderne Forschung geht noch um einen Schritt weiter und erklärt auch die „untere“ Fließgrenze als eine Erscheinung, die den von anderen Zweigen der Physik bekannten Verzugerscheinungen (Siedeverzug, Unterkühlung) gleichwertig ist, welche dadurch gekennzeichnet sind, daß eine gesetzmäßig zu erwartende Zustandsänderung sich ziemlich stark verzögert, um dann plötzlich, sprunghaft, einzusetzen. Das geradlinige Ansteigen der Spannungs-Verformungslinie wird nun z. B. von *Moser*<sup>11</sup> als eine derartige Verzugerscheinung aufgefaßt, nämlich als der Ausdruck eines durch innere Gleitwiderstände bewirkten Verzuges der bleibenden Formänderungen. Das stoßweise Einsetzen der plastischen Formänderung an der Fließgrenze ist dann als Auslösung des Verzuges anzusehen. Diese Auffassung wird auch durch die Erfahrungstatsache unterstützt, daß für Stahl mit gleicher

Körnung und gleicher Vorbehandlung die Proportionalitätsgrenze umso näher der Fließgrenze liegt, je homogener das Material ist, und je störungsfreier der Spannungszustand in ihm erzeugt werden kann.

Die richtige Auffassung vom Wesen der Fließgrenze ist für die Plastizitätstheorie insofern sehr wesentlich, als es nur auf Grund dieser Auffassung möglich ist, die prinzipielle Bedeutung der einzelnen plastischen Phänomene im Übergangszustand richtig zu beurteilen.

### 3. Fließfiguren.

Auf blank polierten Versuchskörpern aus weichem Eisen zeigen sich bei Beginn der bleibenden Formänderungen einige mehr oder weniger feine Reliefzeichnungen, die sich mit steigender Belastung verdichten. Diese matten Linien, welche Schnitte stärker verformter Schichten mit der blanken Oberfläche darstellen, haben entweder dachförmiges (Druckversuch) oder grabenförmiges (Zugversuch) Profil, oder bilden auch einseitige Böschungsflächen. Diese Linien, nach ihren ersten Beobachtern *Lüders*'sche oder *Hartmann*'sche Linien genannt, heute in der Plastizitätstheorie allgemein als Gleitlinien bezeichnet sind die am stärksten ins Auge springenden Fließfiguren. Ihre wichtigste Eigenschaft ist ihr Zusammentreffen mit den Schubspannungstrajektorien. Auf Grund dieser Eigenschaft werden diese Linien als äußerst wertvolles Hilfsmittel zur Erforschung der Spannungszustände fester Körper im plastischen Gebiete angesehen.

Die Gleitlinienfelder sind tatsächlich mathematisch durch eine Anzahl wichtiger Eigenschaften ausgezeichnet, welche es ermöglichen, aus der Kenntnis der Gleitlinien Spannungszustände im plastischen Bereich vollkommen zu lösen.<sup>12</sup> Die wichtigste dieser Eigenschaften ist die Identität der Gleitlinien mit den Charakteristiken der Plastizitätsbedingung. Der Nachweis dieser Identität ist erstmalig von *Massau*, in seiner allgemeinen Form jedoch von *Reißner*<sup>13</sup> gegeben worden. Auf Grund dieser Eigenschaft ist es möglich, verschiedene Integrale längs Gleitlinien unanalytisch zusammenzusetzen, was die Anpassungen der Lösungen an die tatsächlichen Verhältnisse sehr erleichtert. Die wenigen bestehenden Lösungen der mathematischen Plastizitätstheorie sind fast durchwegs auf dieser Gleitlinieneigenschaft aufgebaut.

Bei der Beurteilung der Verwendbarkeit der obigen Methode zur tatsächlichen Lösung von Aufgaben der technischen Plastizitätstheorie muß jedoch berücksichtigt werden, daß mathematisch einwandfreie Grenzübergänge über ihre physikalische Zulässigkeit a priori kein Urteil erlauben. Wenn wir nämlich von einer mathematisch gefaßten physikalischen Bedingung ausgehen und bestimmten Größen darin bestimmte Grenzwerte zuweisen, so ist dieses Vorgehen mathematisch zweifellos zulässig. Physikalisch ist es jedoch möglich, daß durch diese Grenzwerte das physikalische Verhalten wesentlich geändert wird, und die Gesichtspunkte, die zur Aufstellung der Bedingung führten, ihre Gültigkeit verlieren oder stark einbüßen. Dies ist für die Plastizitätsbedingung der Fall.

Die Plastizitätsbedingung des allgemein plastischen Körpers im ebenen Spannungszustand lautet:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} + \sin \rho \cdot \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = C,$$

wobei  $\rho$  der Reibungswinkel,  $C$  ein von der Kohäsion abhängiger Wert ist. Für die kohäsionslose Masse, von der die Gleitlinienuntersuchungen ihren Ausgang nahmen, ist  $C = 0$ . Das Auftreten einer Gleitlinie hat primär Gleichgewichtsstörungen zur Folge; die der Erreichung der Störung vorangehenden reversiblen Formänderungen sind im Vergleich zu den „plastischen“ verschwindend klein. — Bei Metallen dagegen ist  $C = \text{konst.}$  und  $\rho = 0$ . Infolge der großen Kohäsion bedeutet das Auftreten von Gleitlinien nur eine lokale und vorübergehende Gleichgewichtsstörung, der dem Beginn der Fließerscheinungen vorangehende elastische Spannungs- und Verformungszustand ist für die Art des Fließens von wesentlicher Bedeutung, und die Größenordnung der plastischen Verformungen ist von jener der elastischen.

Aus dem obigen wird deutlich, daß den Ergebnissen der sogenannten mathematischen Plastizitätstheorie in der technischen Plastizitätstheorie der kristallinen Stoffe, vor allem der Metalle, keine Bedeutung zukommen kann. Deren Voraussetzungen sind nämlich nicht erfüllt. Damit sinkt auch die Bedeutung der Gleitlinien für die Untersuchung plastischer Zustände der Metalle, welche technisch von Belang sind. Sie sind erst dann von einiger Wichtigkeit, wenn die Verformung soweit vorgeschritten ist, daß im ganzen Feld keine elastischen Gebiete mehr vorhanden sind. Diese Fälle treten nicht häufig auf und sind vor allem auf Probleme der Bearbeitungstechnik beschränkt.

Löst man sich von der allgemein üblichen Ansicht von der großen Bedeutung der Gleitlinien in der Plastizitätstheorie, und wertet man die zahlreichen Ergebnisse der vorhandenen Versuche vorurteilslos aus, so findet man, daß das Phänomen der Gleitlinien nicht mit der plastischen Verformung an sich, sondern nur mit der Art des Überganges vom elastischen in den plastischen Zustand zusammenhängt. Sie sind, ebenso wie die ausgeprägte Fließgrenze, typische Labilitäts- (Unstetigkeits-) Erscheinungen. Den Beweis dafür liefert eine Reihe von Beobachtungen, wie jene von *Ludwik*<sup>14</sup>, daß die Fließlinien besonders dann auftreten, wenn die Körper unter abfallender Last zu fließen beginnen, d. h. wenn die Gleitlinienbildung auf den abfallenden Teil der Spitzen im Spannungs-Verformungsdiagramm beschränkt ist, eine Beobachtung, die auch *Nadai* bestätigt<sup>15</sup> und auf welche von *Kármán* vielfach hinwies. Hierher gehört auch die Beobachtung *Nadais*, daß das Gleitliniennetz bei sehr rasch durchgeführten Druckversuchen viel dichter war, als bei langsamem Versuchen, was ein weiterer Beweis dafür ist, daß Unstetigkeiten im allgemeinen, sei es solche der Belastung, sei es solche des Aufbaues, die Gleitlinienbildung begünstigen. Es liegt daher auf der Hand, daß die Gleitlinienbildung auch durch Bohrungen und Kerben begünstigt werden muß.

In diesem Zusammenhange sei auf die außerordentlich interessanten Härtemessungen auf Fließfiguren von *Moser*<sup>16</sup> hingewiesen, welche auf Grund der Beobachtungen, daß Metalle im geflossenen Gebiet eine Härtezunahme zeigen, gute Einblicke in das Wesen und den Ablauf der plastischen Verformungen gewähren. Es wurde von *Moser* beobachtet, daß die bleibende Verformung anfänglich nur zonenweise erfolgt (Gleitlinien), wobei in jeder Zone nur ein bestimmter Härtegrad erreicht wird. Eine weitere allgemeine Härtesteigerung setzt erst dann ein, wenn sich der ganze Stab (Zugversuch) mit einem Netz von Gleitlinien überzogen hat. Der Grund für diese Erscheinung liegt in einer Art

„Blockierung“ der Gleitflächen, bei deren Erreichen in einer Zone sich die weitere Erhöhung der Belastung durch das „Abgleiten“ in einer anderen, bisher nicht deformierten Zone auswirkt. Hierbei steigt jedesmal, ehe der Gleitwiderstand dieser nächsten Zone überwunden wird, die Belastung etwas an, um beim Ausbilden der Gleitlinien wieder abzufallen; jeder Zacke des  $\sigma-\epsilon$  Diagrammes entspricht daher eine lokale obere Streckgrenze, bei deren Erreichen sich eine Gleitlinie unter Lastabfall ausbildet. Im Gegensatz zu den Erscheinungen bei Stahl zeigte ein Kupferstab eine gleichmäßige Zunahme der Härte von Anfang der Belastung an, wobei abgegrenzte Fließlinien nicht auftraten, nur ein allgemeines Mattwerden beobachtet werden konnte.

Die obigen Versuche sind eine anschauliche Bekräftigung der Auffassung der Streckgrenze des Stahles als „Verzug“ des Fließvorganges und der Erklärung der Gleitlinien als einer damit zusammenhängenden nur für Stähle mit unstetiger Fließgrenze charakteristischen Erscheinung.

Diese Auffassung wird auch noch direkt bestätigt durch die Ergebnisse der Versuche von *Ititaro Takaba* und *Katumi Okuda*<sup>17</sup>, welche zeigen, daß

1. das Auftreten der Gleitlinien und der plötzliche Knick in der Spannungsdehnungslinie Ergebnisse ein und desselben Vorganges sind, nämlich der gruppenweisen Verschiebung großer Mengen von Kristallkörnern,
2. alle Metalle, bei denen Gleitlinien auftreten können, der Kristallstruktur des raumzentrierten Würfelgitters angehören. Es wird gezeigt, daß auf Stählen mit Austenitgefüge, welche der Struktur des flächenzentrierten Würfelgitters angehören, keine Gleitlinienbildung zu beobachten war.

Es läßt sich daher behaupten, daß für die Untersuchung elastisch-plastischer Zustände kristalliner Stoffe, vor allem Metalle, die Beobachtung der Gleitlinienfelder keine geeignete Methode ist, sondern daß im Gegenteil durch die Gleitlinien die grundsätzlichen Vorgänge, auf die es im wesentlichen ankommt, oft verschleiert werden. Dies gilt in erster Linie von der Ausbildung der wahren Grenze zwischen elastischem und plastischem Bereich.

#### 4. Grenzlinien des plastischen Bereiches.

Benutzt man eine der bekannten Methoden zur Sichtbarmachung des plastisch verformten Gebietes in Metallen, am besten die der Rekristallisation,<sup>18</sup> so lassen sich die Grenzen zwischen elastischem und plastischem Gebiet deutlich feststellen (Fig. 1). Die Form dieser Grenzlinien hat, wie sämtliche Beobachtungen einwandfrei erweisen,<sup>19</sup> nichts mit den Gleitlinien zu tun, sondern wird von jenen Linien gebildet, welche sowohl dem plastischen, als auch dem elastischen Spannungszustand entsprechen. Die einzige Linienschar, die dieser Anforderung genügt, sind die Linien  $\tau_{\max} = \text{const.}$  des elastischen Zustandes. Diese Art der Grenzlinien, welche unabhängig sind von der Art des Überganges aus dem elastischen in den plastischen Bereich, sind in allen elastisch plastischen Zuständen zu beobachten und bilden deren wesentlichste Erscheinung. Nur solche Lösungen des plastischen Spannungsfeldes werden der Wirklichkeit entsprechen, welche sich längs jeder Linie  $\tau_{\max} = \text{const.}$  an das entsprechende elastische Spannungsfeld stetig anschließen lassen. Jeder Lösung der plastischen Aufgabe muß daher die der elastischen vorangehen, wobei zu beachten ist, daß die

Grenze zwischen elastischem und plastischem Bereich keine feste, sondern eine mit wechselnder Belastung wechselnde ist, welche jedoch immer den Linien  $\tau_{\max} = \text{const.}$  des elastischen Feldes entsprechen muß.

Die mathematische Behandlung elastisch-plastischer Probleme unter den obigen Voraussetzungen ist nicht leicht und ist bisher nur in ganz wenigen einfachen Fällen gelungen. Eine gewisse Erleichterung könnte jedoch darin liegen, daß durch die sogenannte optische Spannungsuntersuchung an Modellen dadurch, daß hierbei die Linien konstanter Hauptspannungsdifferenz als Isochromen primär erscheinen, es ermöglicht wird, die Grenze des plastischen Bereiches dem Modellversuch a priori zu entnehmen.

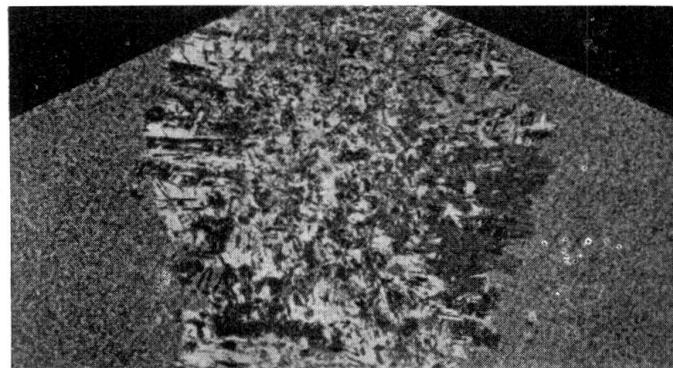


Fig. 1.

### 5. Die Eindringungsfestigkeit.

Als Beispiel der Lösung eines technischen Problems auf die oben angegebene Art sei das Problem der Eindringungsfestigkeit als ebenes Problem behandelt. Der Fall ist deshalb von besonderem Interesse, weil er das bekannteste Beispiel einer plastischen Lösung mit Hilfe des Gleitlinienfeldes darstellt und weil seine Veröffentlichung seinerzeit den eigentlichen Anstoß zur Entwicklung der modernen mathematischen Plastizitätstheorie gab.<sup>20</sup>

Es geht darum, jene gleichförmig verteilte Last  $p$  zu finden, welche (Fig. 2) längs  $AB$  wirkend, innerhalb des betrachteten Gebietes Fließen hervorruft.

Fig. 2.

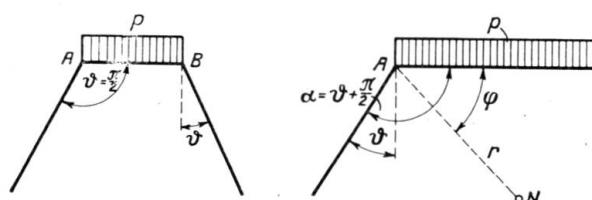
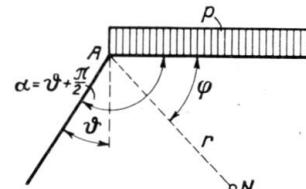


Fig. 3.



Diese Last, welche als Eindringungsfestigkeit bezeichnet wird, sei als Funktion der Fließgrenze und des Neigungswinkels der seitlichen Begrenzung darzustellen. Da der ebene Verzerrungszustand ( $\epsilon_z = 0$ ) betrachtet wird, lautet die Huber-Hencky-Mises'sche Fließbedingung

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2 = \frac{16}{3} k^2$$

wobei die Fließgrenze  $\sigma_F = 2 k$ .

Da die Lösung der stumpfen Schneide (stumpfer Keil) weder als elastisches noch als plastisches Problem in geschlossener Form möglich ist, kann man sich

dadurch helfen, daß man nur die Ecke A betrachtet und die Tatsache berücksichtigt, daß in dieser Ecke die Linien  $\tau_{\max} = \text{const.}$  des in Fig. 3 dargestellten Problems Tangenten an die Linien  $\tau_{\max} = \text{const.}$  des stumpfen Keiles sind. Zwecks Bestimmung der kritischen Belastung ist es unwesentlich, ob wir die Linien  $\tau_{\max} = \text{const.}$  selbst oder deren Tangenten ermitteln.

Aus der elastischen Lösung der Ecke mittels der Airy'schen Spannungsfunktion

$$F = ar^2 + br^2\varphi + cr^2 \sin 2\varphi + dr^2 \cos 2\varphi \quad (1)$$

wobei die 4 Konstanten a, b, c, d aus den vier Randbedingungen

$$\begin{aligned} \text{für } \varphi = 0 : \sigma_t &= -p, \tau = 0 \text{ (ohne Reibung)} \\ \text{„, } \varphi = \alpha : \sigma_t &= 0; \tau = 0 \end{aligned}$$

bestimmt werden können, ergeben sich die Spannungen

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p^{(Q-1)} - 2P \cdot p \cdot \varphi - p \cdot P \cdot \sin 2\varphi + p \cdot Q \cos 2\varphi \\ \sigma_t &= p^{(Q-1)} - 2P \cdot p \cdot \varphi + p \cdot P \cdot \sin 2\varphi - p \cdot Q \cos 2\varphi \\ \tau &= p \cdot P - p \cdot P \cos 2\varphi - p \cdot Q \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

wobei

$$P = -\frac{1}{2(\alpha - \tan \alpha)}, \quad Q = -\frac{1}{2(\alpha \cot \alpha - 1)}.$$

Mit der Abkürzung

$$x = \frac{\tau_{\max}^2 - p^2 \cdot Q^2}{4p^2 \cdot P^2}$$

ergibt sich die Gleichung der Linien  $\tau_{\max} = \text{const.}$  nach kurzer Zwischenrechnung in der Form

$$y = -\frac{x}{2(x-1)} \left[ \tan \alpha \pm \sqrt{\tan^2 \alpha - 4x^2} \right]. \quad (3)$$

Dies ist die Gleichung eines Geradenpaars durch A, welches solange reell ist, als  $\tan^2 \alpha \geq 4x^2$ .

Die **Hauptschubspannung** wird auf jenen Linien ein **Maximum**, für welche

$$\frac{\delta \tau_{\max}}{\delta \varphi} = 0.$$

Dies ist erfüllt für  $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ . Die Bildung der zweiten Ableitung ergibt weiter,

daß nur für  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  längs des Strahles  $\varphi = \frac{\alpha}{2}$  ein Maximalwert entsteht,

während für  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  dort ein Minimum erscheint. Die letzteren Werte

von  $\alpha$  sind jedoch technisch ohne Interesse. Für  $\varphi = \frac{\alpha}{2}$  erhält man die Größe der **Hauptschubspannung**

$$\tau_{\max}^2 = p^2 [Q^2 - 2P \cdot Q \cdot \sin \alpha + 2P^2 (1 - \cos \alpha)]. \quad (4)$$

Durch Einführung der Fließbedingung erhalten wir für die kritische Last

$$p = \sigma_F \cdot \frac{\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) \sin \vartheta + \cos \vartheta}{1 + \sin \vartheta}. \quad (5)$$

Dies ist der Zusammenhang zwischen Eindringungsfestigkeit, Keilwinkel und Fließgrenze.<sup>21</sup>

*Sachs*<sup>22</sup> hat das Problem der Eindringungsfestigkeit bei Metallen sehr eingehend studiert, wobei er ebenfalls durch Rekristallisation die plastisch verformten Bereiche als durch Linien  $\tau_{\max} = \text{const.}$  des elastischen Spannungsfeldes begrenzt feststellte. In Fig. 4 sind die von *Sachs* ermittelten Eindringungsfestigkeiten bei Stahl für verschiedene Keilwinkel mit den aus Gleichung 5 errechneten Werten verglichen. Die Übereinstimmung ist zufriedenstellend.

Die Lösung desselben Problems mittels Gleitlinienfeldern durch *Prandtl* führte zur Gleichung

$$p = \sigma_F \cdot (1 + \vartheta) \quad (6)$$

als Abhängigkeit der Eindringungsfestigkeit vom Schneidenwinkel und der Fließgrenze. Diese Gleichung wurde vergleichsweise ebenfalls in Fig. 4 eingetragen und es zeigt sich, daß eine Übereinstimmung höchstens für ganz kleine Keilwinkel besteht, der prinzipielle Verlauf jedoch ein ganz anderer ist.

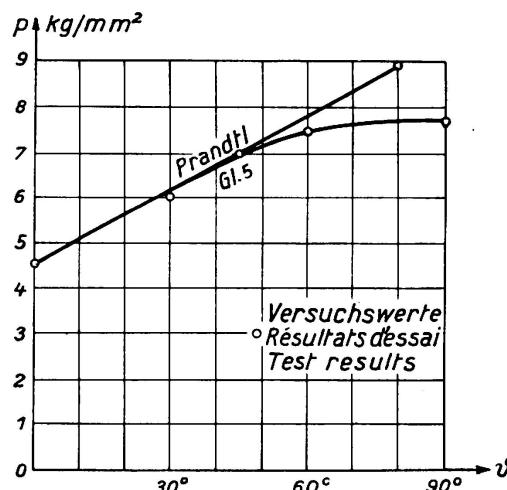


Fig. 4.

Das angeführte Beispiel zeigt, daß die Behandlung plastischer Probleme kristalliner Stoffe immer von den Begrenzungskurven des plastischen Bereiches ausgehen muß. Die Annahme von Gleitlinien als eine solche Begrenzung und die Aufstellung von Lösungen aus den Eigenschaften der Gleitlinien wird immer zu Resultaten führen, welche der Wirklichkeit nicht entsprechen.

### Zusammenfassung.

Die Grundlagen der allgemeinen Plastizitätstheorie enthalten noch wesentliche Unklarheiten, welche darauf zurückzuführen sind, daß die Beurteilung und Wertung der Phänomene des Fließens kristalliner Körper nicht einheitlich und klar ist.

Die wesentlichsten Begriffe der Plastizitätstheorie: Fließbedingung, Fließgrenze und Gleitlinien werden daher einer kurzen Analyse unterworfen, deren wichtigstes Ergebnis darin besteht, daß sowohl die Fließgrenze als die Gleitlinien als vom inneren Aufbau des Stoffes wesentlich abhängige Unstetigkeiterscheinungen erkannt werden, welche zwar die Art des Überganges aus dem elastischen ins plastische Bereich spezifisch beeinflussen, jedoch für die allgemeine plastische Verformung von geringerer Bedeutung sind als allgemein angenommen wird. Und dies umso mehr, als beide Erscheinungen nur bei einer ganz bestimmten Kristallstruktur, und zwar bei der des raumzentrierten kubischen Gitters zu beobachten sind, während sich bei anders aufgebauten Stoffen der Übergang aus dem elastischen ins plastische Bereich stetig vollzieht.

Unabhängig von der Art dieses Überganges wird die Grenze des plastischen Bereiches durch Linien  $\tau_{\max} = \text{const.}$  des elastischen Spannungsfeldes gebildet.

Das Beispiel der Eindringungsfestigkeit zeigt die Unterschiede in der Behandlung eines plastischen Problems einerseits vom oben präzisierten Standpunkte, andererseits vom Standpunkte der mathematischen Plastizitätstheorie, welche im Grunde genommen eine Theorie der Gleitlinienfelder ist, und beweist, daß bei Metallen die Ergebnisse der mathematischen Plastizitätstheorie mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmen.

### Literaturverzeichnis.

- <sup>1</sup> *Hencky*: Zeitschrift f. ang. Mathem. u. Mech. 1923, S. 241.
- <sup>2</sup> *Haar* und *Kármán*: Göttinger Nachrichten, math. nat. Klasse, 1909, S. 204.
- <sup>3</sup> *Hencky*: Zeitschrift f. ang. Mathem. u. Mech. 1924, S. 323.
- <sup>4</sup> *Guest*: Philosophical Mag. 1900, vol. 5, p. 69. *Mohr*: Zeitschrift VDI. 1900, Bd. 44, S. 1524.
- <sup>5</sup> *Voigt*: Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbebl. 1907, S. 4.
- <sup>6</sup> *Huber*: Czasipismo Techniczny 1904, Lemberg.
- <sup>7</sup> *Mises*: Zeitschrift f. angew. Mathem. u. Mech. 1925, S. 147.
- <sup>8</sup> *Schleicher*: Zeitschrift f. ang. Mathem. u. Mech. 1926, Heft 3.
- <sup>9</sup> *Kármán*: Verh. 2. Int. Kongr. f. techn. Mech., Zürich 1936. *Böker*: Forschungsheft VDI. 175/176. *Roš* und *Eichinger*: Diskussionsberichte der E.T.H. Zürich, 1926—1929.
- <sup>10</sup> *Bach*: Forschungsarbeiten d. VDI., Nr. 29.
- <sup>11</sup> *Moser*: Forschungsheft d. VDI., Nr. 295.
- <sup>12</sup> *Cartheodory* und *Schmidt*: Zeitschrift f. ang. Mathem. u. Mech. 1923, S. 468.
- <sup>13</sup> *Reißner*: Proceedings I. Int. Congr. Mechanics, Delft. 1924.
- <sup>14</sup> *Ludwik*: Technologische Mechanik, Berlin 1909.
- <sup>15</sup> *Nadai*: Schweizer Bauzeitung 1924, S. 157.
- <sup>16</sup> *Moser*: Stahl und Eisen 1928, S. 1601.
- <sup>17</sup> *Okuda* und *Takaba*: Werkstoffaussch. d. Ver. D. Eisenhüttenleute, Bericht 119.
- <sup>18</sup> *Oberhoffer*: Das technische Eisen, Berlin 1925.
- <sup>19</sup> *Nadai*: Zeitschrift f. ang. Mathem. u. Mech. 1921, S. 20. *Sachs*: Naturwissenschaften 1926, S. 1219. *Sachs*: Zeitschrift f. Techn. Physik, 1927, S. 132. *Körber* und *Siebel*: Mitt. d. Inst. f. Eisenforschung in Düsseldorf 1928. *Siebel*: Ber. d. Werkstoffaussch. deutscher Eisenhüttenleute, Nr. 122.
- <sup>20</sup> *Prandtl*: Göttinger Nachrichten, 1920, S. 74.
- <sup>21</sup> *Freudenthal*: Dissertation, Prag 1930.
- <sup>22</sup> *Sachs*: Zeitschrift f. Techn. Physik 1927, S. 132.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide