

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 2 (1936)

**Artikel:** Zulässige Betondruckspannungen in rechteckigen  
Eisenbetonquerschnitten bei aussermittigem Druck

**Autor:** Brandtzaeg, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2775>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## IIa 1

# Zulässige Betondruckspannungen in rechteckigen Eisenbetonquerschnitten bei außermittigem Druck.

Contraintes de compression admissibles dans les sections de béton armé rectangulaires sollicitées excentriquement.

Permissible Concrete Stresses in Rectangular Reinforced Concrete Sections under Eccentric Loading.

Dr. techn. A. Brandtzaeg,

Professor an der Technischen Hochschule Trondheim.

Trotz erheblichen Einwänden mehrerer Fachleute wird die bisher übliche Rechnungsweise zur Bemessung von Eisenbetonquerschnitten unter Biegung oder außermittigem Druck (die Rechnung nach „Zustand II“) immer noch allgemein verwendet, und liegt den Eisenbetonbestimmungen fast aller Länder zugrunde.

Verfasser hat in früheren Veröffentlichungen<sup>1 2</sup> eine Rechnungsweise angegeben, nach der die *Bruchmomente* oder *Bruchlasten* von rechteckigen Eisenbetonquerschnitten in guter Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen errechnet werden können. Auf Grund der so ermittelten *Tragfähigkeit* eines jeden Rechteckquerschnittes läßt sich beurteilen, in wie weit die übliche Rechnung nach „Zustand II“ der Hauptforderung entspricht, daß dieselben erwünschten *Sicherheitsgrade* bei verschiedenen Betongütern, verschiedenen Bewehrungsverhältnissen und verschiedenen Außermittigkeiten der Last gewährleistet werden können, und welche zulässigen Spannungen dafür zu wählen sind. Früher ist die Untersuchung besonders für den Fall reiner Biegung durchgeführt worden,<sup>3</sup> hier wird auf den Fall des außermittigen Druckes näher eingegangen. Der Einfluß des Knickens wird nicht berücksichtigt.

### 1. Rechnerische Ermittlung der Bruchlasten.

Es ist bekanntlich zwischen *überbewehrten* und *normalbewehrten* Querschnitten zu unterscheiden. Bei den ersteren wird der Bruch in der Druckzone eingeleitet; Fließen der Zugbewehrung tritt nicht ein. Bei normalbewehrten Querschnitten

<sup>1</sup> A. Brandtzaeg: „Der Bruchspannungszustand und der Sicherheitsgrad von rechteckigen Eisenbetonquerschnitten unter Biegung oder außermittigem Druck.“ Norges Tekniske Høiskole, Avhandlingar til 25-års jubileet 1935, F. Bruns Bokhandel, Trondheim, S. 677 bis 764.

<sup>2</sup> Wie <sup>1</sup>, Det kgl. norske Videnskabers Selskabs Skrifter 1935, Nr. 31, F. Bruns Bokhandel, Trondheim.

<sup>3</sup> A. Brandtzaeg: „Die Bruchspannungen und die zulässigen Randspannungen in rechteckigen Eisenbetonbalken.“ Beton und Eisen, 35. Jahrg., Heft 13, 5. Juli 1936, S. 219 bis 222.

beginnt der Bruch mit Fließen der Zugeisen, nachträglich zerbricht die wegen Klaffen des Bruchrisses verminderte Druckzone. In Übergangsfällen übergreifen sich die beiden Brucharten. Während bei reiner Biegung die Bruchart ausschließlich durch die Baustoffeigenschaften und das Bewehrungsverhältnis bestimmt ist, hängt sie bei Biegung mit Längskraft auch von der Außermittigkeit der Last ab.

a) *Überbewehrte Querschnitte.*

Bei Biegung und außermittigem Druck ergibt sich am Druckrand eine Bruchstauchung, die diejenige eines Prismas unter mittigem Druck,  $\varepsilon_o$ , erheblich überschreitet. Diese *Bruchrandstauchung*,  $\varepsilon_{rB}$ , beeinflusst die Tragfähigkeit des Querschnittes. Sie läßt sich durch den *Bruchstauchungsgrad*,  $\eta = \frac{\varepsilon_{rB}}{\varepsilon_o}$ , angeben.

Für den gebogenen oder außermittig gedrückten Querschnitt im Bruchzustande wird die folgende Spannungsverteilung angenommen (Fig. 1): Bei

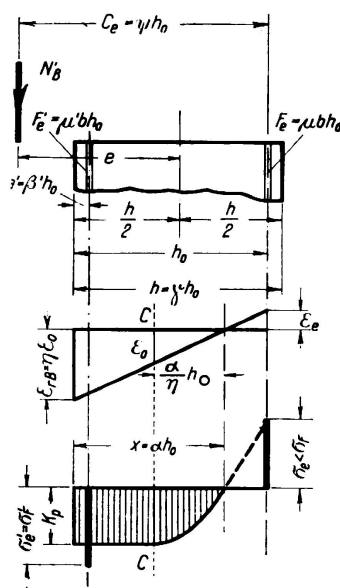
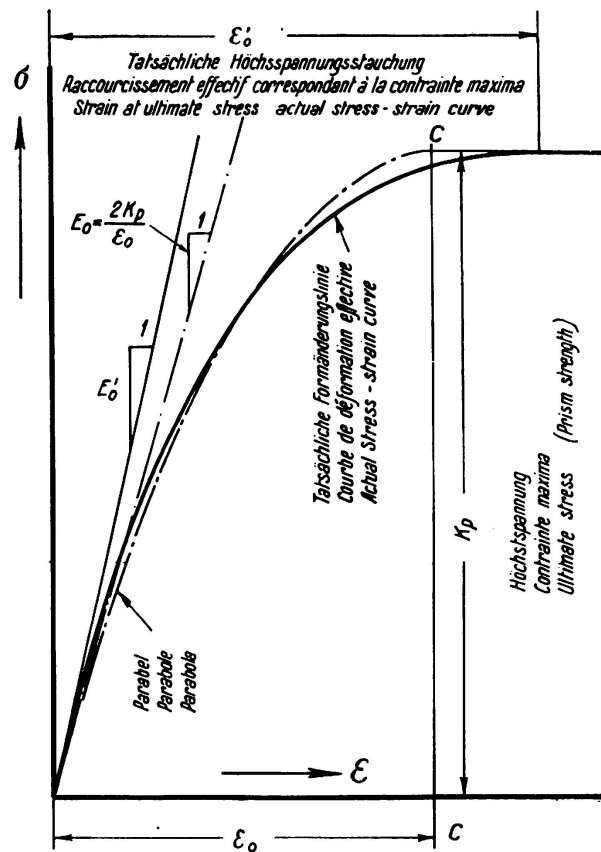


Fig. 1.



Der Parabel entsprechende Höchstspannungsstauchung  
Raccourcissement correspondant à la contrainte max. pour la parabole  
Strain at ultimate stress, parabolic stress-strain curve

Fig. 2.

Stauchungen geringer als  $\varepsilon_o$ , die Stauchung bei der ein Prisma desselben Betons unter mittigem Druck seine Bruchspannung,  $K_P$ , erreicht (Fig. 2), ergeben sich die Druckspannungen im Beton aus der Formänderungslinie des Prismas (rechts von der Linie C—C, Fig. 1 und 3). Bei größeren Stauchungen

ist die Spannung gleich der Prismenfestigkeit  $K_p$ . Die Eisenspannungen ergeben sich aus den Formänderungen; Druckeisen aus gewöhnlichem Stahl werden vor dem Bruch die Fließgrenze überschritten haben. Zugspannungen im Beton werden nicht berücksichtigt.

Die Richtigkeit der angenommenen Spannungsverteilung wird durch Versuche des Verfassers bestätigt (<sup>1</sup>, Seite 728 bis 735 und <sup>2</sup>, Seite 54 bis 61). *Saliger* hat auf Grund seiner Versuche ähnliche Annahmen gemacht.<sup>4</sup>

Für die Rechnung wird die tatsächliche Formänderungslinie des Prismas durch die *Talbot'sche Parabellinie* ersetzt:

$$\sigma = E_o \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \right) \quad (1)$$

Hier ist  $\sigma$  die Normalspannung und  $\varepsilon$  die entsprechende Stauchung;  $\varepsilon_o$  ist die Abszisse des Parabelscheitelpunktes (Fig. 2) und  $E_o$  gibt die Neigung der Parabeltangente im Nullpunkt an. Die Parabellinie ist durch zweckmäßige Wahl von  $\varepsilon_o$  oder  $E_o$  dem ganzen Verlauf der tatsächlichen Formänderungslinie möglichst gut anzupassen (Fig. 2). Im Allgemeinen ist  $E_o$  etwas geringer als der tatsächliche Elastizitätsmodul  $E'_o$  des Betons, und  $\varepsilon_o$  etwas geringer als die tatsächliche Höchstspannungsstauchung  $\varepsilon'_o$  des Prismenbetons zu wählen (<sup>1</sup>, Seite 138 bis 139 und <sup>2</sup>, Seite 64 bis 65).

Andere Linien, wie die von *v. Emperger* angegebene,<sup>5</sup> stimmen mit der tatsächlichen Formänderungslinie etwas besser überein, sind aber für die Rechnung weniger einfach. Für den vorliegenden Zweck scheint die *Talbot'sche* Linie ausreichend genau. Der bei der Verwendung dieser Linie statt der tatsächlichen entstehende Fehler ergab sich in neun Versuchen des Verfassers bei Ermittlung der Bruchlast zu  $-4,6\%$  bis  $+1,0\%$ , im Mittel  $-0,48\%$ , und bei Ermittlung des Bruchmomentes zu  $-0,7\%$  bis  $+0,7\%$ , im Mittel  $+0,13\%$  (<sup>1</sup>, Seite 732 und <sup>2</sup>, Seite 58, Zusammenstellung 8, Spalte 13 und 14).

Der Rechnungsgang wird verschieden, je nachdem die Nulllinie im Bruchzustande innerhalb oder außerhalb des Querschnittes fällt.

Im ersteren Falle ergibt sich der Nulllinienbeiwert,  $\alpha = \frac{x}{h_o}$ , aus der folgenden Gleichung:

$$\left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3\eta} + \frac{1}{12\eta^2} \right] \alpha^3 - (1 - \psi) \frac{3\eta - 1}{3\eta} \alpha^2 + [2n\eta\psi\mu - (1 - \psi - \beta') m' \mu'] \alpha - 2n\eta\psi\mu = 0 \quad (2)$$

Hier ist  $n = \frac{E_o}{E_e}$  ( $E_e$  = Elastizitätsmodul der Zugbewehrung) und  $m' = \frac{\sigma'_F}{K_p}$  [ $\sigma'_F$  = Fließgrenze der Druckbewehrung]. Die übrigen Bezeichnungen sind in Fig. 1 und 3 angegeben.

<sup>4</sup> *R. Saliger*: „Versuche über zielsichere Betonbildung und an druckbewehrten Balken.“ Beton und Eisen, 34. Jahrg. 1935, Heft 1 und 2, 5. und 20. Januar, S. 12 bis 18 und 26 bis 29.

<sup>5</sup> *F. v. Emperger*: „Die Formänderung des Betons unter Druck.“ Internationaler Verband für Materialprüfung, Kongreß in Zürich 1931, S. 1149 bis 1159. — Siehe auch Beton und Eisen, 35. Jahrg. 1936, Heft 10, 20. Mai, S. 179.



Die Bruchlast beträgt:

$$N'_B = \frac{1}{\psi} \left[ \alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{\alpha}{3\eta} \left( 1 - \alpha + \frac{\alpha}{4\eta} \right) + m'\mu'(1 - \beta') \right] bh_o K_P \quad (3)$$

Die Spannung in der Zugbewehrung ergibt sich zu

$$\sigma_e = 2n\eta \frac{1 - \alpha}{\alpha} K_P \quad (4)$$

Für den zweiten Fall,  $\alpha > 1$ , Fig. 3, ergeben sich zwei Gleichungen für die Bruchlast, nämlich wegen des Gleichgewichtes der Längskräfte:

$$N'_B = \left[ \frac{3\eta - 1}{3\eta} \alpha - \frac{\eta}{\alpha} (\alpha - \gamma)^2 \left( 1 - \frac{\eta}{3\alpha} (\alpha - \gamma) \right) + m'\mu' + 2n\eta\mu \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right] bh_o K_P \quad (5a)$$

und wegen des Gleichgewichtes der Momente um den Mittelpunkt der Zugbewehrung:

$$N'_B = \frac{1}{\psi} \left\{ \alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{\alpha}{3\eta} \left( 1 - \alpha + \frac{\alpha}{4\eta} \right) + m'\mu'(1 - \beta') + \frac{\eta}{\alpha} (\alpha - \gamma)^2 \left[ \frac{\alpha + 2\gamma}{3} - 1 + \frac{\eta}{3} \left( 1 - \frac{\alpha + 2\gamma}{4} \right) - \gamma \frac{\eta}{\alpha} \left( \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{4} \right) \right] \right\} bh_o K_P \quad (5b)$$

Aus den Gleichungen sind  $N'_B$  und  $\alpha$  am einfachsten graphisch zu ermitteln.

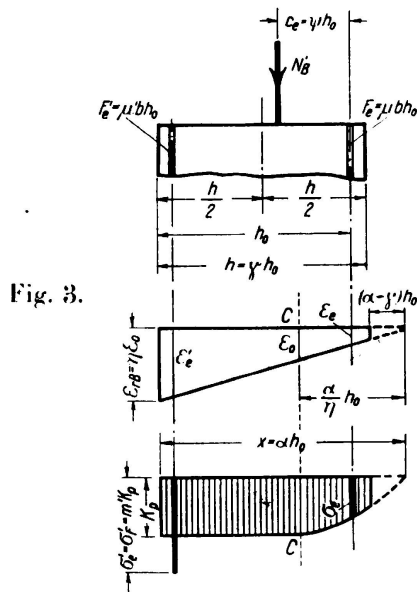


Fig. 3.

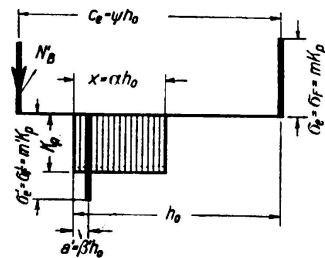


Fig. 4.

#### b) Normalbewehrte Querschnitte.

Für den eigentlichen Bruchbereich, in unmittelbarer Nähe des klaffenden Bruchrisses, wird eine rechteckige Druckspannungsfläche im Beton angenommen (Fig. 4). Der dadurch entstehende Fehler ist sehr gering (1, Seite 698 und 2, Seite 24). Die Spannung in der Zugbewehrung wird gleichgesetzt der Fließgrenze  $\sigma_F$  (siehe 3, Abschnitte 4 und 6). Nach Beginn des Fließens kann sich

im Bruchriß kein Einfluß des Schwindens oder der Betonzugspannungen bemerkbar machen. Der Nulllinienbeiwert und die Bruchlast ergeben sich zu:

$$\alpha = -(\psi - 1) + \sqrt{(\psi - 1)^2 + 2 m \mu \psi - 2 m' \mu' (\psi - 1 + \beta')} \quad (6)$$

$$N'_B = \frac{1}{\psi} \left[ \alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) + m' \mu' (1 - \beta') \right] b h_0 K_P \quad (7)$$

$$\left( m = \frac{\sigma_F}{K_P} \right).$$

Bei Lastangriff innerhalb des Querschnittes gibt Gleichung (7) ziemlich hohe Werte von  $N'_B$ , die mit abnehmender Außermittigkeit und zunehmendem Bewehrungsverhältnis sehr rasch anwachsen. Für  $\psi < 1$  sind somit in der Tat fast alle praktisch verwendbaren Querschnitte als *vollbewehrt* anzusehen, siehe unten, Abschnitt 5 und Fig. 6.

## 2. Die Festwerte $K_P$ , $n$ und $\eta$ .

Die oben angegebenen Gleichungen ermöglichen die Ermittlung der Tragfähigkeit eines jeden außermittig gedrückten Rechteckquerschnittes, für welches die Materialfestwerte  $K_P$ ,  $n$  ( $E_0$ ) und  $\eta$  bekannt sind. Allgemein verwendbar sind die Gleichungen erst, wenn die Festwerte in eindeutiger Beziehung zu einer für jeden Beton bekannten Kennzahl der Betongüte, wie die Würfel Festigkeit  $K_W$ , angegeben werden können. Eine solche allgemein gültige Beziehung läßt sich aber für keinen der Festwerte angeben. Das Verhältnis von Prismenfestigkeit, Elastizitätsmodul und Bruchstauchungsgrad zu der Würfel Festigkeit ist abhängig von vielen Faktoren, wie dem Feuchtigkeitszustand und der Porosität des Betons, der Art des Zementes und der Zuschläge, usw. Es lassen sich aber Beziehungen angeben, die in gewöhnlichen Fällen für die allgemeine Beurteilung der gesetzmäßigen Änderung der Tragfähigkeit eines Querschnittes mit der Betongüte, dem Bewehrungsverhältnis und der Außermittigkeit der Last ausreichend genau sind. Um bessere Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen in Einzelfällen zu erreichen, empfiehlt es sich, wenigstens  $K_P$  und  $E_0$  durch Versuche festzulegen. Hier werden auf Grund eigener und anderer Versuche die folgenden Beziehungen benutzt, für Beton mit  $K_W = 100 \text{ kg/cm}^2$  bis  $300 \text{ kg/cm}^2$ :

$$K_P = 0,77 K_W \quad (8)$$

$$E_0 = 95\,500 + 390 K_W \quad (9)$$

$$\eta = 1,25 + \frac{400}{K_W} - \frac{K_W}{400} \quad (10)$$

Die Gleichung (10) gibt die *Mindestwerte des Bruchstauchungsgrades* an, die aus den eigenen und den Saliger'schen<sup>4</sup> Versuchen ermittelt wurden. Die weitere Gültigkeit dieser Beziehung kann natürlich erst an Hand von vielen Versuchen beurteilt werden. Grundsätzlich wichtig ist es zu erkennen, daß der Bruchstauchungsgrad mit zunehmender Betonfestigkeit abnimmt (<sup>3</sup>, Seite 221). Es ist vielleicht naheliegend anzunehmen, daß  $\eta$  mit der Außermittigkeit der

Last abnehmen werde. Die Versuche haben aber keine gesetzmäßige Änderung von  $\eta$  mit der Außermittigkeit gezeigt (1, Seite 739 und 2, Seite 65, Zusammenstellung 9, Spalte 9).

### 3. Vergleich der errechneten mit den tatsächlichen Bruchlasten.

Die in Abhandlungen 1 und 2 beschriebenen Versuche umfaßten neun überbewehrte und vier normalbewehrte Versuchskörper unter außermittigem Druck, einseitig bewehrt, mit  $\mu = 0,70\%$  bis  $4,64\%$  und  $\psi = 0,661$  bis  $1,855$ . Der Beton dieser Versuche zeigte ziemlich ungewöhnliche Werte von  $K_P/K_W$ . Wenn mit den durch Versuch ermittelten Prismenfestigkeiten, und auch mit den tatsächlichen Werten von  $E_0$  und  $\eta$  [die jedoch mit den Gleichungen (9) und (10) nahe übereinstimmen] gerechnet wird, stimmen die errechneten mit den tatsächlichen Bruchlasten für zwei der drei Gruppen von überbewehrten Versuchskörpern gut überein. Die größte Abweichung ist  $12\%$ , die mittlere Abweichung für die betreffenden sechs Versuchskörper beträgt  $5\%$  (1, Seite 744 und 2, Seite 70, Zusammenstellung 10). Wegen Ungleichheiten der Verdichtung des Betons verschiedener Versuchskörper läßt sich mit den Versuchswerten der dritten Gruppe überbewehrter Körper ein solcher Vergleich nicht durchführen. Auch für diese Gruppe scheint jedoch der Einfluß von Änderungen in der Außermittigkeit der Last und dem Bewehrungsverhältnis auf die Bruchlasten durch die Gleichungen in Abschnitt 1 richtig zum Ausdruck zu kommen.

Für die vier normalbewehrten Versuchskörper ist die tatsächliche Bruchlast im Mittel um  $8,8\%$  größer als die errechnete, wenn mit dem tatsächlichen Wert vom  $K_P$  gerechnet wird. Wenn statt der Prismenfestigkeit die Würfel-festigkeit in den Gleichungen (6) und (7) eingeführt wird, so ist die tatsächliche Bruchlast im Mittel  $1,7\%$  kleiner als die errechnete. Es scheint wahrscheinlich, daß die Betonspannung in dem örtlich sehr begrenzten Bruchgebiet eines normalbewehrten Körpers die Würfel-festigkeit erreichen kann, sicherheitshalber wird aber mit der Prismenfestigkeit gerechnet.

Die vollständigsten dem Verfasser bekannten Versuche mit Eisenbetonkörpern unter außermittigem Druck sind diejenigen von *Bach* und *Graf*.<sup>6</sup> In Zusammenstellung 1, Spalte 14, sind die mittleren Bruchlasten der 15 Gruppen von Versuchskörpern angegeben. In den Spalten 2 bis 12 sind die mittleren Abmessungen, Bewehrungsverhältnisse und Außermittigkeiten der Last verzeichnet. Die Zahlen sind dem Versuchsbericht<sup>6</sup> entnommen. Die mittlere Würfel-festigkeit des Betons war  $K_W = 225 \text{ kg/cm}^2$ . Daraus ergibt sich  $K_P = 0,77 K_W = 173 \text{ kg/cm}^2$ , was mit dem Versuchswert für unbewehrte mittig gedrückte Körper übereinstimmt (<sup>6</sup>, Zusammenstellung 24). Nach den Gleichungen (9) und (10) sind dann  $n = \text{rund } 11,5$  und  $\eta = \text{rund } 2,5$ . In <sup>6</sup>, Zusammenstellung 3, sind die Fließgrenzen der Zug- und Druckbewehrung angegeben, daraus wurden  $m$  und  $m'$  bestimmt. Mit den so ermittelten Festwerten wurden die Bruchlasten der 15 Gruppen von Versuchskörpern errechnet, und in Zusammenstellung 1, Spalte 13, angegeben. Wie aus Spalte 15 zu ersehen ist, stimmen die errechneten

<sup>6</sup> C. Bach und O. Graf: „Versuche mit bewehrten und unbewehrten Betonkörpern, die durch zentrischen und exzentrischen Druck belastet wurden.“ Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 166 bis 169, 1914.

Zusammenstellung I.  
Errechnete und tatsächliche Bruchlasten bei außermittigem Druck nach Versuchen von Bach und Graf 1914.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Versuchs- körper Nr.	Bewehrung	Außer- mittigkeit der Last von Körperachse gemessen	Mittlere Abmessungen					Mittlere Bewehrungs- verhältnisse		Lage der Last (Fig. 1, 3, 4)		Bruchlasten			Anmerkungen
			b	h	a	h <sub>0</sub>	a'	μ	μ'	c <sub>e</sub>	ψ = c <sub>e</sub> h <sub>0</sub>	Er- rech- net N' <sub>B</sub>	Mittlere Versuchs- werte N <sub>B</sub>	N' <sub>B</sub> – N <sub>B</sub> N <sub>B</sub>	
cm	cm	cm	cm	cm	cm	°/o	°/o	cm		tons	tons	°/o			
75, 88, 142	0	10	40,1	40,2	0	40,2	0	0	0	30,1	0,749	138,0	136,0	+ 1,47	Unbewehrt
76, 89, 143	0	15	40,1	40,1	0	40,1	0	0	0	35,05	0,874	69,3	81,8	— 15,30	„
82, 90, 97	4 ∅ 16	0	40,1	40,1	3,4	36,7	0	0,559	0	16,65	0,454	277,0	280,3	— 1,18	Überbewehrt
85, 91, 94	„	20	39,9	40,1	3,6	36,5	0	0,564	0	36,45	0,999	93,6	93,0	+ 0,65	Normalbewehrt
86, 92, 95	„	30	40,0	40,1	3,6	36,5	0	0,567	0	46,45	1,272	57,9	60,3	— 3,98	„
87, 93, 96	„	50	40,0	40,1	3,9	36,2	0	0,570	0	66,15	1,830	28,9	30,0	— 3,67	„
107, 108	8 ∅ 16	10	40,0	40,1	3,7	36,4	3,1	0,558	0,560	26,35	0,724	198,3	202,5	— 2,07	Überbewehrt
99, 102, 118	„	20	40,1	40,1	3,6	36,5	3,3	0,558	0,556	36,45	0,999	119,3	124,0	— 3,79	Normalbewehrt
119, 120, 121	„	20	40,1	40,2	3,6	36,6	3,3	0,558	0,555	36,50	0,998	119,0	123,3	— 3,49	„
100, 103	„	30	40,1	40,3	3,5	36,8	3,3	0,554	0,552	46,65	1,269	69,3	69,6	— 0,43	„
101, 104	„	50	40,2	40,2	3,6	36,6	3,3	0,558	0,552	66,50	1,818	33,3	32,4	+ 2,78	„
140, 141	8 ∅ 22	10	40,0	40,3	3,7	36,6	3,8	1,045	1,043	26,45	0,723	236,6	225,0	+ 5,15	Überbewehrt
63, 122, 137	„	20	40,1	40,1	3,8	36,3	3,7	1,047	1,050	36,25	0,999	164,8	157,5	+ 4,63	„
123, 138	„	30	40,1	40,1	3,7	36,4	3,8	1,044	1,045	46,35	1,272	105,5	105,0	+ 0,48	Normalbewehrt
65, 124, 139	„	50	40,1	40,1	3,8	36,3	3,7	1,050	1,048	66,25	1,825	55,1	53,5	+ 3,00	„

Materialfestwerte:  $\eta = 2,5$ ;  $n = 11,5$ . Für 16 mm Rundeisen:  $\sigma_F = 3773 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma'_F = 3680 \text{ kg/cm}^2$ ,  $K_F = 173 \text{ kg/cm}^2$ .

Für 22 mm Rundeisen:  $\sigma_F = 3672 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma'_F = 3754 \text{ kg/cm}^2$ .

Lasten sehr gut mit den tatsächlichen überein. Für die eine Gruppe von unbewehrten Körpern war die errechnete Last um 15,3 % kleiner als die tatsächliche, sonst schwanken die Abweichungen zwischen  $-3,98\%$  und  $+5,15\%$ . Im Mittel sind für sämtliche 15 Gruppen die errechneten Bruchlasten um 1,13 % kleiner als die tatsächlichen.

Slater und Lyse haben zwei unbewehrte Prismen unter außermittigem Druck geprüft.<sup>7</sup> Die Abmessungen der Prismen waren  $20,3 \times 20,3 \times 30,5$  cm, die Prismenfestigkeit des Betons war  $K_P = 285 \text{ kg/cm}^2$  und die wahrscheinliche Würfelfestigkeit somit  $K_W = \text{rund } 370 \text{ kg/cm}^2$ . Wenn  $\eta$  aus Gleichung (10),  $\alpha$  aus Gleichung (2) mit  $\mu = \mu' = 0$  und  $N_B'$  aus Gleichung (3) mit  $\mu = 0$  ermittelt werden, ergibt sich  $N_B' = 74,4 \text{ t}$ ; die tatsächliche mittlere Bruchlast war  $N_B = 70,5 \text{ t}$ , also 5,3 % kleiner als die errechnete.

In den hier untersuchten Fällen stimmen also die nach den angegebenen Gleichungen ermittelten Bruchlasten mit den Versuchswerten ziemlich genau überein. Die Gleichungen können auf jeden Fall als Grundlage einer allgemeinen Untersuchung der Veränderlichkeit der Bruchlast von außermittig gedrückten Körpern mit dem Bewehrungsverhältnis und der Außermittigkeit der Last dienen.

#### 4. Der Sicherheitsgrad.

Aus den Bruchlasten lassen sich die *zulässigen Lasten* durch Division mit dem *Sicherheitsgrad* ermitteln. Die zweckmäßige Bemessung des Sicherheitsgrades ist in früheren Veröffentlichungen ausführlich besprochen (1, Seite 688 bis 693; 2, Seite 14 bis 19 und 3, Seite 221 bis 222). Wird eine tatsächliche Gebrauchssicherheit von 2 erwünscht, so ist der nominelle Sicherheitsgrad für Beton wegen des Einflusses dauernder oder wiederholter Belastung und wegen des Unterschiedes zwischen den Festigkeiten in kleineren Probestücken und in größeren Konstruktionsteilen auf 3,3 bis 3,4 zu erhöhen. Für mittigen Druck berücksichtigt der *Entwurf der neuen norwegischen Bestimmungen für Eisenbeton*, NS 427, wovon der erste Teil im Herbst 1935 zur Diskussion veröffentlicht wurde,<sup>8</sup> Sicherheitsgrade von 4,13, 3,85, 3,65 bzw. 3,60 für die vier Betonklassen A bis D mit Würfelfestigkeiten von  $290 \text{ kg/cm}^2$ ,  $230 \text{ kg/cm}^2$ ,  $180 \text{ kg/cm}^2$  bzw.  $140 \text{ kg/cm}^2$ .

Beobachtungen des verschiedenen Bruchvorganges in Körpern unter mittigem und außermittigem Druck lassen es wünschenswert erscheinen, bei Biegung und außermittigem Druck mit 10 % höheren Sicherheitsgraden zu rechnen, als bei mittigem Druck (1, Seite 751 bis 754, 2, Seite 77 bis 80 und 3, Seite 222). Die entsprechenden Sicherheitsgrade für Biegung und außermittigen Druck ergeben sich dann zu 4,54, 4,24, 4,02 bzw. 3,96 für Betonklassen A bis D. Mit diesen Werten wird unten gerechnet.

Für die Bewehrung besteht nicht derselbe Unterschied zwischen tatsächlicher Gebrauchssicherheit und nominellem Sicherheitsgrad, weil die unter Lastwiederholungen dauernd vorhandene Zugfestigkeit der Bewehrung für Stahl St. 37

<sup>7</sup> W. A. Slater und Inge Lyse: „Compressive Strength of Concrete in Flexure as Determined from Tests of Reinforced Beams.“ Proceedings of the American Concrete Institute, Bd. 26, 1930, besonders die Seiten 852 bis 859.

<sup>8</sup> „Forslag til Norsk Standard. Regler for utførelse av arbeider i armert betong, NS 427, utarbeidet av Den norske Ingeniørforening.“ Beilage zu Teknisk Ukeblad, Nr. 38, 1935.

praktisch der Fließgrenze gleich gesetzt werden kann, die eben der Berechnung der Bruchlast von normalbewehrten Körpern nach Gleichung (6) und (7) zugrunde liegt. Der nominelle Sicherheitsgrad darf deshalb der erwünschten tatsächlichen Gebrauchssicherheit gleich gesetzt werden. Unten wird mit einem Sicherheitsgrad von 1,8 für normalbewehrte Querschnitte gerechnet: dies sollte als tatsächliche Gebrauchssicherheit für einen gleichmäßigen Baustoff wie Stahl genügen.

### 5. Zulässige Lasten und Grenzpunkte.

In Fig. 5 sind zwei Beispiele der nach den obigen Ausführungen ermittelten zulässigen Lasten dargestellt, links für einseitige, rechts für symmetrische Bewehrung. Die Voraussetzungen sind: Lastangriff  $1,5 h_0$ , von der Zugbewehrung (Hebelarmverhältnis,  $\psi = 1,5$ ),  $\gamma = 1,08$  und  $\beta' = 0,08$  (Fig. 1 und 3). Beton mit  $K_W = 180 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\eta = 3,03$  und  $n = 12,7$  (Beton C nach NS 427) und Fließgrenze der Bewehrung  $\sigma_F = \sigma_F' = 2000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $m = m' = 14,4$  (Handelseisen). Die auf  $b h_0$  bezogene zulässige Last  $\frac{N_{zul}}{b h_0}$ , ist gegen das Bewehrungsverhältnis als Abszisse sowohl für überbewehrte Querschnitte [Gleichungen (2) bis (5)] als auch für normalbewehrte Querschnitte [Gleichungen (6) und (7)] aufgezeichnet. Maßgebend ist natürlich bei jedem Wert von  $\mu$  der geringere der beiden entsprechenden Werte von  $N_{zul}$  (die dick gezogenen Linien).

Der Schnittpunkt G der beiden Linien ist der *Grenzpunkt* zwischen Querschnitten, für welche die Bewehrungsstärke die zulässige Last bestimmen, *teildbewehrten* Querschnitten, und *vollbewehrten* Querschnitten, für welche die zulässige Last hauptsächlich von der Betonfestigkeit abhängt.

Linien, wie die in Fig. 5 gezogenen, wären eigentlich ein recht geeignetes Hilfsmittel für die Bemessung von Eisenbetonquerschnitten unter außermittigem Druck. Die Bemessung kann aber auch mittels Rechnung nach „Zustand II“ geschehen, wenn nur die zulässigen Spannungen so gewählt werden, daß die Rechnung die richtigen zulässigen Lasten ergibt. Dies läßt sich für den Bereich der Teilbewehrung mit einem einzigen Wert der zulässigen Eisenspannung ziemlich genau erreichen. Für vollbewehrte Querschnitte, dagegen, ergibt die Rechnung nach „Zustand II“ mit einem festen Wert  $\sigma_{b,zul}$  zulässige Lasten, die

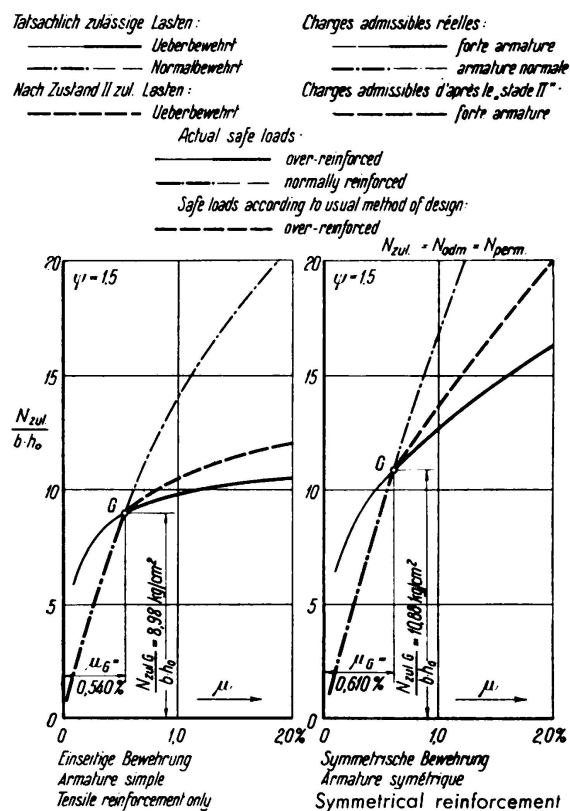


Fig. 5.

Tatsächliche und nach „Zustand II“ zulässige Lasten für Beton C mit  $\psi = 1.5$ .

erheblich rascher mit dem Bewehrungsverhältnis wachsen, als die tatsächlichen. Dies ist aus der Fig. 5 zu sehen, und auch aus der Fig. 6, wo die tatsächlichen und die nach „Zustand II“ errechneten zulässigen Lasten für verschiedene Werte von  $\psi$  angegeben sind, unter Voraussetzungen wie für Fig. 5, links. Es ergibt sich also, daß ein gegebener Sicherheitsgrad sich bei vollbewehrten Querschnitten nur dann streng aufrechterhalten läßt, wenn für jedes Bewehrungsverhältnis eine eigene zulässige Betondruckspannung eingeführt wird.

Für reine Biegung läßt sich feststellen, daß die richtige zulässige Betondruckspannung mit Bezug auf den Grenzpunkt zu ermitteln ist (<sup>1</sup>, Seite 688,

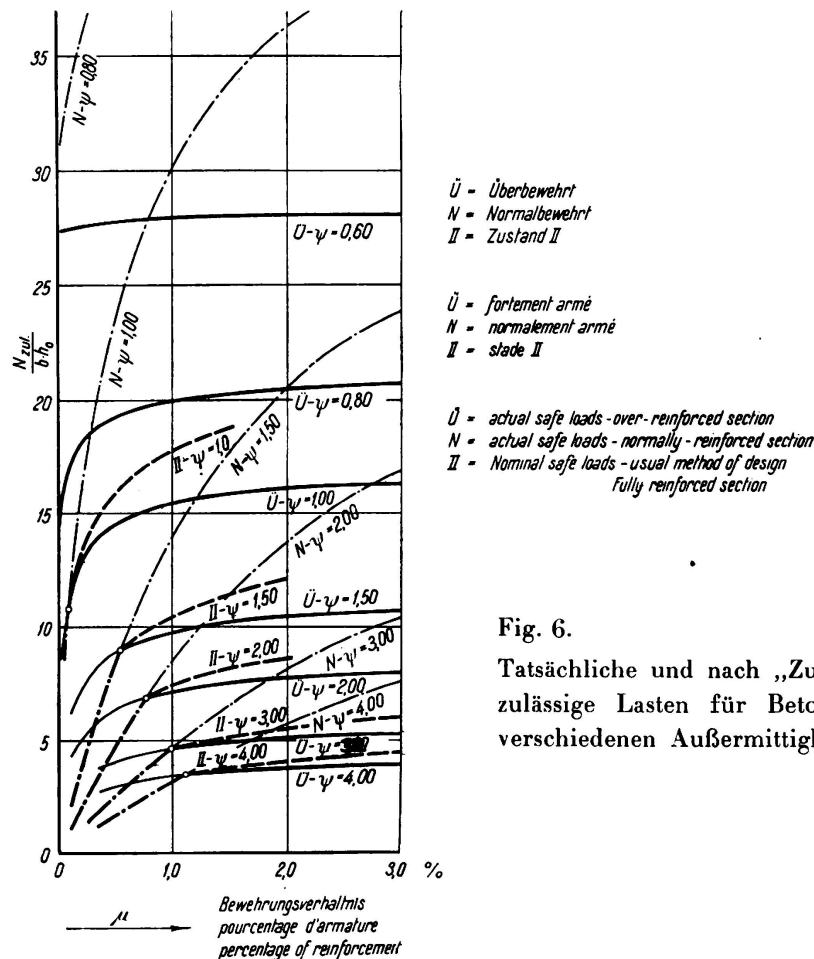


Fig. 6.

Tatsächliche und nach „Zustand II“ zulässige Lasten für Beton C bei verschiedenen Außermittigkeiten.

<sup>2</sup>, Seite 14 und <sup>3</sup>, Seite 222). Dasselbe ist auch bei außermittigem Druck der Fall, wenn die Außermittigkeit der Last groß ist. Bei geringeren Außermittigkeiten aber stellt sich die Sache anders, einerseits weil sich bei Lastangriff innerhalb des Querschnittes meist kein Grenzpunkt finden läßt, fast alle Querschnitte sind vollbewehrt (siehe oben, Abschnitt 1, b und Fig. 6), und andererseits, weil auch bei Lastangriff erheblich außerhalb des Querschnittes dem Grenzpunkt so geringe Bewehrungsverhältnisse entsprechen, daß in der Praxis sehr oft größere Bewehrung verwendet werden muß (Fig. 6).

## 6. Zulässige Betondruckspannungen.

Auf Grund der nach den obigen Ausführungen ermittelten zulässigen Lasten läßt sich für jedes Bewehrungsverhältnis und jede Außermittigkeit der Last die

entsprechende für die Rechnung nach „Zustand II“ richtige zulässige Betondruckspannung bestimmen. In Fig. 7 und 8 sind Linien der unter den oben genannten Voraussetzungen für den Beton C ermittelten zulässigen Spannungen gegen das Hebelarmverhältnis  $\psi = \frac{C_e}{h_0}$  als Abszisse aufgezeichnet. Die Voraussetzungen sind wie in Abschnitt 5 angegeben. Außerdem ist eine Linie der nach dem vorigen Abschnitt ermittelten Grenzpunktspannungen eingezeichnet. Die über diese Linie gehenden zulässigen Betondruckspannungen sind ohne Bedeutung, denn sie gehören dem Bereich der Teilbewehrung, wo die Betonspannungen nicht ausgenutzt werden können.

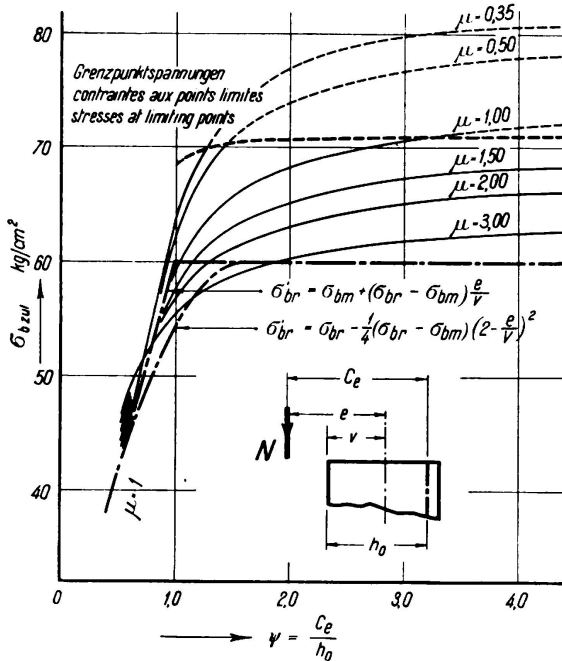


Fig. 7.

Richtige zulässige Spannungen für Beton C bei verschiedenen Außermittigkeiten und einseitiger Bewehrung.

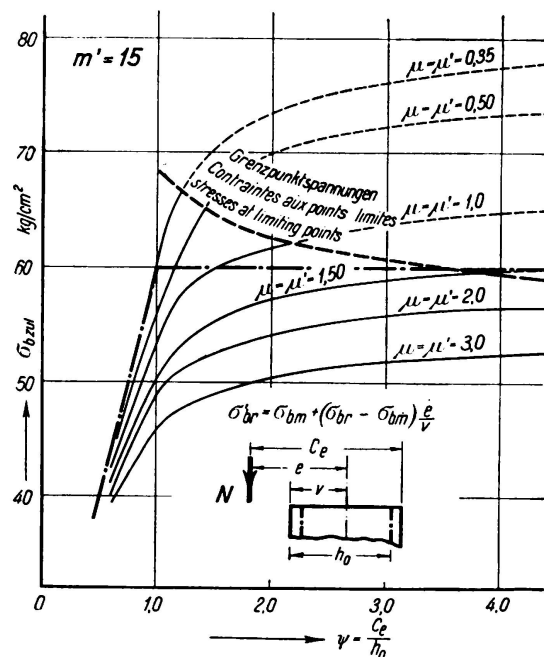


Fig. 8.

Richtige zulässige Spannungen für Beton C bei verschiedenen Außermittigkeiten und symmetrischer Bewehrung (Errechnet mit  $m' = 15$ ).

Aus den Figuren ersieht man, wie ohnehin zu erwarten ist, daß die richtigen zulässigen Betondruckspannungen mit der Außermittigkeit der Last sehr rasch abnehmen, und bei Lastangriff nahe der Querschnittsmitte sich den für mittigen Druck gültigen Werten nähern.

So ergeben sich zum Beispiel unter den genannten Voraussetzungen für Beton C die folgenden richtigen zulässigen Spannungen für einseitig bewehrte Querschnitte:

Bei reiner Biegung, Grenzpunktspannung:  $\sigma_{b\text{zul } 1} = 71 \text{ kg/cm}^2$ .

Bei außermittigem Druck, mit 1,0 % Bewehrung:

Mit Lastangriff am Querschnittsrand

$$\sigma_{b\text{zul}} = 59,6 \text{ kg/cm}^2 = 0,84 \sigma_{b\text{zul } 1} \quad (\psi = 1,0)$$

Mit Lastangriff im Kernpunkt

$$\sigma_{b\text{zul}} = 49,0 \text{ kg/cm}^2 = 0,69 \sigma_{b\text{zul } 1} \quad (\psi = 0,63)$$



Mit Lastangriff 0,135  $h_0$  vom Schwerpunkt des Querschnittes

$$\sigma_{b \text{ zul}} = 44,8 \text{ kg/cm}^2 = 0,63 \sigma_{b \text{ zul I}} \quad (\psi = 0,54)$$

Wird in allen diesen Fällen mit *derselben* zulässigen Spannung gerechnet, so ergeben sich bei kleinen Außermittigkeiten viel geringere Sicherheitsgrade als bei reiner Biegung.

### 7. Berücksichtigung der Druckbewehrung.

Aus den Fig. 7 und 8 ist zu ersehen, daß bei symmetrisch bewehrten Querschnitten die richtigen zulässigen Spannungen kleiner ausfallen, als bei einseitiger Bewehrung. Dasselbe ist auch bei reiner Biegung der Fall, was aus der gestrichelten Linie der Fig. 9 ersichtlich ist; die richtige zulässige Spannung

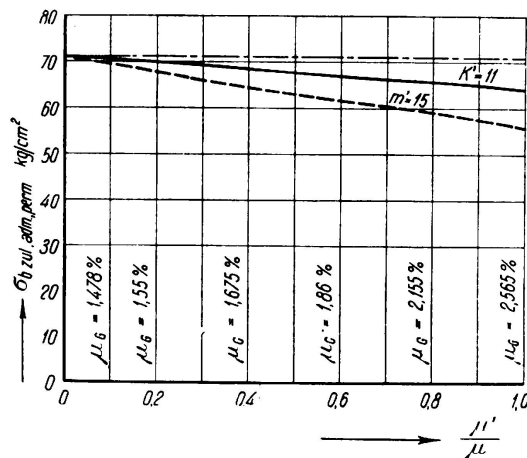


Fig. 9.

Richtige zulässige Spannungen für Beton C bei reiner Biegung, mit verschiedener Stärke der Druckbewehrung.

(Errechnet teils mit  $m' = 15$  und teils mit  $k' = 11$ ).

(Grenzpunktspannung) ist für Beton C bei symmetrischer Bewehrung etwa 21 % geringer als bei einseitiger Bewehrung.

Bei der Ermittlung der richtigen zulässigen Spannungen wurde dabei die gewöhnliche Rechnung nach „Zustand II“ zugrunde gelegt, wonach die Spannung in der Druckbewehrung durch Gleichung (11) bestimmt ist (Fig. 10):

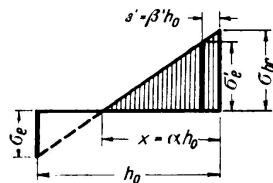


Fig. 10.

$$\sigma'_e = m' \sigma_{br} \frac{\alpha - \beta'}{\alpha} \quad (11)$$

wo  $\sigma_{br}$  die zulässige *Biegedruckspannung* im Beton bedeutet. In Gleichung (11) ist dann mit  $m' = n = 15$  gerechnet worden, was mit den Bestimmungen der meisten Länder übereinstimmt, wenigstens für die hier vorausgesetzte Betongüte ( $K_w = 180 \text{ kg/cm}^2$  oder  $K_p \cong 140 \text{ kg/cm}^2$ , Zylinderfestigkeit,  $f_c' \cong 2000 \text{ lb pro Quadratzoll}$  in englischem Maß).

Nun ist aber beim Bruch des Balkens die tatsächliche Spannung in der Druckbewehrung der Quetschgrenze, gleich  $\sigma'_F$ , die hier mit dem bei Handels-eisen noch vorkommenden Mindestwert von  $2000 \text{ kg/cm}^2$  angenommen ist.  $\sigma'_F = 2000 \text{ kg/cm}^2$  entspricht ungefähr dem  $m'$ -fachen (15-fachen) der *Prismenfestigkeit*  $K_p$ . Soll nun in den beiden Materialien der Druckzone derselbe

Sicherheitsgrad bestehen, dann ist die Spannung der Druckbewehrung unter der Gebrauchslast nicht wie in Gleichung (11) mit beinahe dem  $m'$ -fachen der zulässigen *Biegedruckspannung* einzuführen, sondern mit dem  $m'$ -fachen der zulässigen Druckspannung für *mittigen Druck*. Anstatt  $m'$  ist deshalb ein geringerer Beiwert

$$k' = m' \frac{\sigma_{bm}}{\sigma_{br}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha - \beta'} \quad (12)$$

in Gleichung (11) einzuführen, wo  $\sigma_{bm}$  die für mittigen Druck zulässige Betonspannung bedeutet.

In dem (noch nicht veröffentlichten) letzten Teil des Entwurfs der neuen norwegischen Bestimmungen ist eine entsprechende Vorschrift enthalten. Bei mittigem Druck ist die Spannung der Druckbewehrung mit dem  $m'$ -fachen, bei Biegung und außermittigem dagegen mit dem  $0,75 m'$ -fachen der Betonspannung in die Rechnung einzuführen.

In Fig. 9 sind die mit  $k' = 11$  ermittelten richtigen zulässigen Betonrandspannungen bei reiner Biegung mit der voll ausgezogenen Linie angegeben, und in Fig. 11 die zulässigen Betonspannungen bei außermittigem Druck und

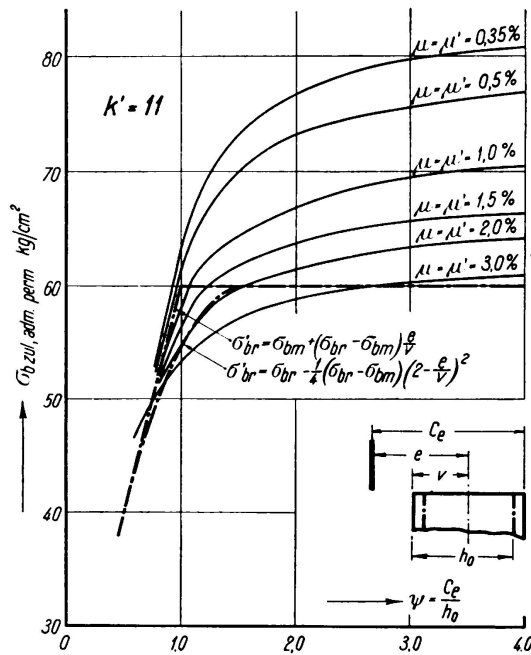


Fig. 11.

Richtige zulässige Spannungen für Beton C bei verschiedenen Außermittigkeiten und symmetrischer Bewehrung, (Errechnet mit  $k' = 11$  anstatt  $m' = 15$ ). (Vergleiche Fig. 8).

symmetrischer Bewehrung. Man sieht, daß ein großer Teil des Unterschiedes zwischen Querschnitten mit und ohne Druckbewehrung durch die Einführung des Beiwertes  $k' = 11$  anstatt  $m' = 15$  ausgeglichen worden ist, der Beitrag der Druckbewehrung zur Tragfähigkeit des Querschnittes wird also mit dem Beiwert  $k'$  richtiger berücksichtigt. Daß ein Einfluß der Stärke der Druckbewehrung auf die Höhe der richtigen zulässigen Spannungen noch zu sehen ist, beruht hauptsächlich darauf, daß in Gleichung (12) mit dem nach NS 427 gültigen Wert von  $\sigma_{br} = 60 \text{ kg/cm}^2$  gerechnet worden ist, während der nach unseren Ausführungen richtige Wert  $\sigma_{br} = 71 \text{ kg/cm}^2$  wäre.

## 8. Die in Eisenbetonbestimmungen angegebenen zulässigen Betondruckspannungen.

Die aus den Fig. 7, 8 und 11 ersichtliche große Abhängigkeit der „richtigen“ zulässigen Betondruckspannungen bei außermittigem Druck von der Größe der Außermittigkeit der Last, wird in den Eisenbetonbestimmungen der meisten Länder nur wenig berücksichtigt. So enthalten viele Bestimmungen lediglich die Vorschrift, daß bei außermittigem Druck die für mittigen Druck zulässige Spannung nicht überschritten werden darf, wenn die Last als mittig wirkend gerechnet wird. Sonst darf mit der vollen zulässigen Biegedruckspannung gerechnet werden. Ist zum Beispiel die zulässige Betondruckspannung bei Biegung  $\sigma_{br} = 60 \text{ kg/cm}^2$  und bei mittigem Druck  $\sigma_{bm} = 38 \text{ kg/cm}^2$ , wie im Entwurf der norwegischen Bestimmungen für Beton C vorgeschrieben ist, dann ist nach der obigen Vorschrift für einen einseitig mit 1,0 % bewehrten Querschnitt schon bei Lastangriff  $0,104 h_0$  vom Schwerpunkt ( $\psi = 0,508$ ) mit der vollen zulässigen Biegedruckspannung zu rechnen. Unter den in Abschnitt 5 und 6 gemachten Voraussetzungen ist bei dieser Außermittigkeit die richtige zulässige Spannung nur rund  $43,5 \text{ kg/cm}^2$ , bei reiner Biegung dagegen rund  $71 \text{ kg/cm}^2$ . Die Vorschrift ergibt somit für außermittigen Druck bis zu rund 39 % geringere Sicherheitsgrade als bei reiner Biegung tatsächlich vorhanden ist.

Nach den letzten amerikanischen Bestimmungen<sup>9</sup> darf bei außermittigem Druck die für mittigen Druck zulässige Spannung mit einem Faktor erhöht werden, der zum Beispiel für  $\psi = 1,0$  mit 1,0 % Zugbewehrung und 1,0 % Druckbewehrung rund 1,163 beträgt. Wird keine Umschnürung verwendet, ist dann die zulässige Spannung  $= 0,154 f_c' \times 1,163 \cong 0,18 f_c'$ . [ $f_c'$  ist die vorgeschriebene Zylinderdruckfestigkeit des Betons nach 28 Tagen.] Dabei ist die zulässige Biegedruckspannung des Betons mit  $0,40 f_c'$  angegeben. Aus Fig. 8 ergibt sich mit  $\psi = 1,0$  und  $\mu = \mu' = 1,0 \%$  die richtige zulässige Betondruckspannung zu  $53,2 \text{ kg/cm}^2$ , oder etwa 75 % der mit demselben Sicherheitsgrade ermittelten bei einseitiger Bewehrung zulässigen Biegedruckspannung ( $71,0 \text{ kg/cm}^2$ ). Der Sicherheitsgrad wäre also derselbe wie bei reiner Biegung, wenn im betreffenden Fall eine Betondruckspannung von rund  $0,30 f_c'$  zulässig wäre. Tatsächlich wird nur  $0,18 f_c'$  zugelassen; der Sicherheitsgrad nach den American Concrete Institute-Bestimmungen ist also im betreffenden Fall rund 67 % höher als bei reiner Biegung.

Es ergibt sich also, daß die Vorschriften verschiedener Länder in dieser Beziehung sehr verschiedenartig sind. Nach einigen Bestimmungen ist der Sicherheitsgrad bei außermittigem Druck viel geringer als bei reiner Biegung, nach anderen Bestimmungen dagegen höher.

Im Entwurf zu den neuen norwegischen Bestimmungen NS 427<sup>8</sup> ist versucht worden, die bei außermittigem Druck zulässigen Spannungen den richtigen Werten etwas besser anzupassen. Die zulässige Randspannung im Beton bei außermittigem Druck ist:

<sup>9</sup> *Building Regulations for Reinforced Concrete* (A.C.I. 501 — 36 T), vorläufig angenommen am 25. Februar 1936, Journal, American Concrete Institute, März und April 1936, Bd. 7, S. 407—444.

a) bei Lastangriff innerhalb des Querschnittes ( $\psi < 1$ ):

$$\sigma'_{br} = \sigma_{bm} + (\sigma_{br} - \sigma_{bm}) \frac{e}{v}; \quad \frac{e}{v} < 1 \quad (13)$$

wo  $\sigma_{br}$  = die zulässige Randspannung bei reiner Biegung,

$\sigma_{bm}$  = die zulässige Spannung bei mittigem Druck,

$e$  = Außermittigkeit der Last, vom Schwerpunkt des ideellen Querschnittes aus gerechnet, und

$v$  = Entfernung des Schwerpunktes vom Druckrand.

b) Bei Lastangriff außerhalb des Querschnittes:

$$\sigma'_{br} = \sigma_{br}; \quad \frac{e}{v} > 1 \quad (14)$$

In Fig. 7 und 11 sind zum Vergleich mit den richtigen zulässigen Spannungen die Linien nach Gleichungen (13) und (14) angegeben. Wenn auch durch die hier vorgeschriebenen zulässigen Spannungen noch kein unveränderlicher Sicherheitsgrad gewährleistet wird, so ergibt sich doch eine ziemlich gute Anpassung an die richtigen zulässigen Spannungen.

Noch besser wäre es, wenn erst bei  $\frac{e}{v} = 2$  ( $\psi =$  rund 1,6) die volle zulässige Biegungsspannung verwendet werden dürfte, und bei geringeren Außermittigkeiten ein parabolischer statt ein geradliniger Verlauf der zulässigen Spannungen vorgeschrieben wäre, wie nach Gleichung (15).

$$\sigma'_{br} = \sigma_{br} - \frac{1}{4} (\sigma_{br} - \sigma_{bm}) \left(2 - \frac{e}{v}\right)^2; \quad \frac{e}{v} < 2 \quad (15)$$

Die entsprechenden Linien sind in Fig. 7 und 11 eingezeichnet, sie stimmen ganz gut mit den Mindestwerten der nach den obigen Ausführungen richtigen zulässigen Spannungen überein.