

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 2 (1936)

**Artikel:** Biegung mit Querkraft, ausserhalb des Gebietes der rein elastischen Formänderung

**Autor:** Eichinger, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2763>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## I 2

### Biegung mit Querkraft, außerhalb des Gebietes der rein elastischen Formänderung.

Flexion et effort tranchant en dehors de la zone  
de déformation purement élastique.

Combined Bending and Shear Beyond the Range of Purely  
Elastic Deformation.

A. Eichinger,

Dipl.-Ingenieur, Wissenschaftlicher Mitarbeiter der E.M.P.A. Zürich.

Ist das Spannungs-Längenänderungs-Diagramm für einfachen Zug oder Druck bekannt, so kann unter der Annahme des linearen Dehnungsverlaufs die Spannungsverteilung über den Querschnitt eines auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Balkens ermittelt werden, was an einem Beispiel gezeigt wird.

#### Einleitung.

Die gesamte Formänderung besteht bekannterweise aus zwei Teilen<sup>1</sup>:

a) Der elastischen Formänderung, deren Komponenten den Elastizitäts-gleichungen genügen

$$e_1 = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_1 - \frac{1}{m} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \quad e_2 = \text{u.s.w.} \quad \text{und}$$

b) der plastischen Formänderung, deren Komponenten die Plastizitäts-gleichungen erfüllen

$$\delta_1 = \frac{1}{D} \cdot \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \quad \delta_2 = \text{usw.}$$

E ist der Elastizitäts-, D der Plastizitätsmodul. Die Querdehnungszahl m wird für plastische Formänderung gleich 2.

Bisher wurden die statischen Berechnungen in der Regel unter der Annahme ausgeführt, daß sich die Tragwerke rein elastisch verhalten. In der letzten Zeit ist man jedoch bestrebt, die durch die plastische Formänderung bedingte Beeinflussung:

<sup>1</sup> M. Roš und A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Diskussionsberichte der Eidg. Materialprüfungsanstalt Zürich. Nr. 14 vom Sept. 1926; Nr. 34 vom Februar 1929; Nr. 87 vom April 1934.

1. der Spannungsverteilung im Balken — bzw. Stabquerschnitt und
2. des Kräfteverlaufs im Tragwerk (statisch unbestimmte Größen  $M$ ,  $Q$  und  $N$ ) mitzuberücksichtigen.

### Grundlagen der Plastizitätstheorie.

Zu dem erwähnten Zweck sei daran erinnert,<sup>2</sup> daß im Falle des gleichzeitigen Wirkens einer Normal- und einer Schubspannung gilt (Fig. 1):

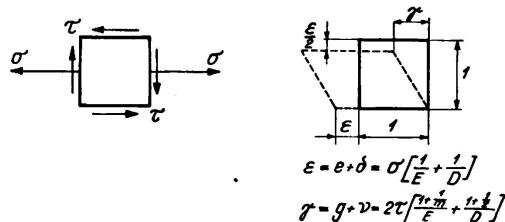


Fig. 1.  
Spannungs- und Formänderungszustand eines Körperelements

#### Elastische Gestaltänderung

$$eg = \sqrt{e^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot g^2} = \frac{\sigma_g}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right);$$

hingegen:

#### die plastische Gestaltänderung

$$\delta_g = \sqrt{\delta^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \nu^2} = \frac{\sigma_g}{D} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

worin  $\sigma_g = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$  = Vergleichsspannung.

Die Dehnung selber beträgt:

$$\text{elastisch } e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{hingegen plastisch } \delta = \frac{\sigma}{D}$$

und die spezifische Schiebung

$$\text{elastisch } g = \frac{\tau}{E} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$\text{hingegen plastisch } \nu = \frac{\tau}{D} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

Die gesamte Formänderung ist dann gleich der Summe der jeweiligen elastischen und plastischen Formänderung, nämlich:

$$\text{Gestaltänderung } \dots eg = eg + \delta_g$$

$$\text{Dehnung } \dots \dots \epsilon = e + \delta \text{ und}$$

$$\text{Schiebung } \dots \dots \gamma = g + \nu$$

<sup>2</sup> Diskussionsbeitrag von M. Roš und A. Eichinger: Knicken von in beiden Achsen zentrisch gedrückten, rechteckigen Platten im Gebiet oberhalb der E-Grenze. Erster Kongreß der Internat. Vereinigung für Brücken- und Hochbau, Schlußbericht.

Ist nun das Spannungs-Längenänderungs-Diagramm eines Materials für gewöhnlichen Zug oder Druck bekannt, so kann die grundlegende Beziehung zwischen der Vergleichsspannung und der von dieser allein abhängigen Gestaltänderung (Volumenänderung ist stets elastisch) mit Hilfe der vorigen Formeln gewonnen werden (Fig. 2).

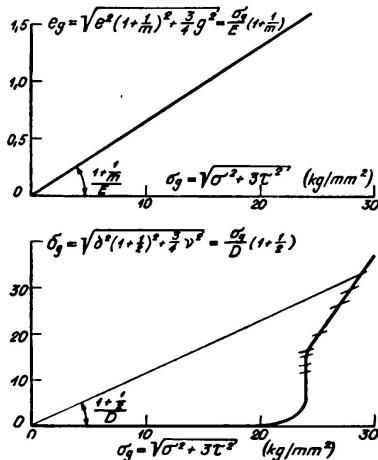


Fig. 2.

• Elastische und plastische Gestaltänderung in Abhängigkeit von der Vergleichsspannung.

### Spannungsverteilung im Balkenquerschnitt.

Bevor man die Beeinflussung des Kräfteverlaufs im Tragwerk (statisch unbestimmte Größen  $M$ ,  $Q$  und  $N$ ) in Aufforderung nimmt, muß der Einfluß der plastischen Formänderung auf die Spannungsverteilung im Querschnitt untersucht werden.

Unter der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte bzw. genauer: des linearen Dehnungsverlaufs, ergibt sich die Faserdehnung im Abstand  $y$  von der neutralen Achse zu

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \frac{y}{h/2}$$

worin  $\epsilon_r$  die gewünschte Randfaserdehnung bedeutet (Fig. 3). Weil am Rand

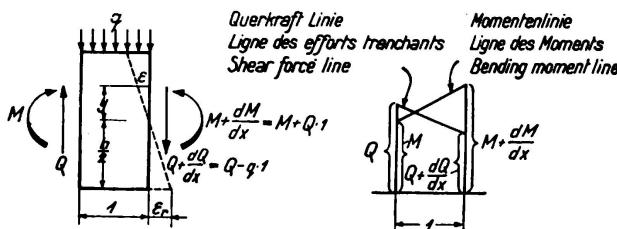


Fig. 3.

Balkenstück von der Länge 1 unter der Einwirkung von  $M$ ,  $Q$  und  $q$ .

die Schubspannung und damit auch die Schiebung gleich Null sein muß, kann aus Fig. 2 die Randspannung  $\sigma_r$  ermittelt werden.

Nun wird in der Regel die Verteilung der Normalspannung über den Querschnitt ähnlich dem Zweig des  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagrammes von  $\sigma = 0$  bis  $\sigma = \sigma_r$  angenommen, was nur im Fall, daß überall  $\tau = 0$  richtig ist. Ist dagegen  $\tau$  von Null verschieden, so kann die Verteilung der Normalspannung im Querschnitt von dieser Annahme stark abweichen, weil die gesamte Dehnung  $\epsilon$  durch eine

umso niedrigere Normalspannung  $\sigma$  bewirkt wird, je größer die am gleichen Körperelement wirkende Schubspannung  $\tau$  ist.

Statt für ein gegebenes Moment und Querkraft die  $\sigma$ - und  $\tau$ -Verteilung zu finden, begnügen wir uns vorläufig mit der Annahme einer  $\sigma$ -Verteilung. Fig. 4.

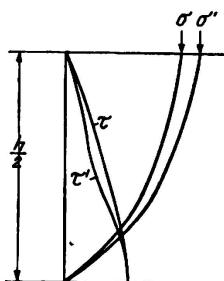


Fig. 4.

Spannungsverteilung über die obere Querschnittshälfte.

Damit ist aber auch  $\tau$  an jeder Stelle im Querschnitt festgelegt. Weil nämlich:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \frac{y}{h/2} = \sigma \cdot \left[ \frac{1}{E} + \frac{1}{D} \right]$$

so folgt:

$$\frac{1}{D} = \frac{\varepsilon}{\sigma} - \frac{1}{E},$$

womit der Plastizitätsmodul  $D$  für jedes  $y$  bestimmt ist. Zieht man den Strahl vom Koordinaten-Nullpunkt unter dem Winkel  $\frac{1 + 1/2}{D}$  bis zur  $\sigma_g - \delta g$ -Kurve der Fig. 2, so wird auch die Vergleichsspannung  $\sigma_g$  gewonnen, woraus sich die gesuchte Schubspannung ergibt gemäß:

$$\tau = \sqrt{\frac{\sigma_g^2 - \sigma^2}{3}}.$$

Da aber in den Querschnittsteilen mit konstanter Breite

$$\frac{\delta \tau}{\delta y} = \frac{\delta \sigma}{\delta x}$$

ist, wäre damit auch der Spannungsverlauf im benachbarten Querschnitt festgelegt, nämlich  $\sigma'$  und  $\tau'$  (Fig. 4). Daraus geht hervor, daß die Verteilung der Normalspannung  $\sigma$  in einem Querschnitt nicht allein von dem Moment  $M$  in diesem Schnitt abhängt, wie es im elastischen Bereich der Fall ist, sondern auch durch die Querkraft  $Q$  sowie die verteilte Last  $q = \frac{dQ}{dx}$  beeinflußt wird.

Die Ausführungen gelten jedoch streng genommen nur im Falle einer einmaligen Beanspruchung über die Grenze des rein elastischen Verhaltens. Sie sind somit für die Praxis nur von beschränktem Wert.

Während nämlich die erstmalige Überschreitung der Fließgrenze von großer plastischer Formänderung begleitet ist, bricht dasselbe Material nach wiederholtem Lastwechsel im Betrieb — und zwar infolge der Ermüdung — oft ohne jede wahrnehmbare bleibende Formänderung.

Man beachte auch, daß trotz veränderter oberer Lastgrenze bzw. Spannungsgrenze der stärkst beanspruchten Konstruktionsteile (infolge plastischer Formänderung) die Amplitude des Lastwechsels: (B—A), worin B=obere-, A=untere Lastgrenze, selbst an diesen Stellen unverändert bleibt. Da aber die Ermüdungsfestigkeit hauptsächlich von der Spannungswechselamplitude, hingegen von der Grundspannung  $\frac{A+B}{2}$  bei den meisten Bauarten nur wenig abhängt, so ist der Gewinn ohnehin viel geringer, als etwa die Herabsetzung der oberen Spannungsgrenze vortäuscht (Fig. 5).

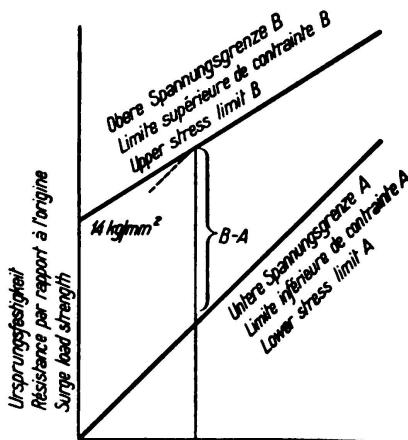


Fig. 5.  
Zug-Ermüdungsversuche  
mit Stumpfschweißungen  
(EMPA Zürich).

Aus diesen Gründen sollte vorläufig die plastische Formänderung überall dort wo Ermüdung in Frage kommt (eine Ausnahme bildet das Knicken) einzig als Reserve für den Fall einer einmaligen unvorhergesehenen Überlastung (Havarie) betrachtet werden. Dagegen hätte die Berechnung des Sicherheitsgrades gegen Ermüdung auf der Grundlage des Elastizitätsgesetzes — wie bisher — zu erfolgen. Ausnahmen sollten nur dann gemacht werden, wenn Dauer- bzw. Ermüdungsversuche (nicht Kurzversuche) es rechtfertigen.

| y<br>h/2 | $\sigma$<br>kg/mm <sup>2</sup> | $\varepsilon$<br>% | $\frac{\varepsilon}{\sigma}$<br>$\cdot 10^3$ | $\frac{1}{D} \cdot 10^3$<br>mm <sup>2</sup> /kg | $\sigma_g$<br>kg/mm <sup>2</sup> | $\tau$<br>kg/mm <sup>2</sup> | $\frac{\delta \tau}{\delta y}$<br>kg/mm <sup>3</sup> | $\sigma'$<br>kg/mm <sup>2</sup> | $\varepsilon'$<br>% | $\frac{\varepsilon'}{\sigma'}$<br>$\cdot 10^3$ | $\frac{1}{D} \cdot 10^3$<br>mm <sup>2</sup> /kg | $\sigma'_g$<br>kg/mm <sup>2</sup> | $\tau'$<br>kg/mm <sup>2</sup> |
|----------|--------------------------------|--------------------|--|---|----------------------------------|------------------------------|--|---------------------------------|---------------------|--|---|-----------------------------------|-------------------------------|
|          |                                |                    |  |   |                                  |                              |  |                                 |                     |  |   |                                   |                               |
| 1,0      | 25,0                           | 14,58              | 0,584  | 0,534   | 25,0                             | 0                            | 0,40   | 29,0                            | 23,5                | 0,810  | 0,760   | 29,0                              | 0                             |
| 0,8      | 23,2                           | 11,66              | 0,503  | 0,453   | 24,2                             | 4,0                          | 0,35   | 26,7                            | 18,8                | 0,705  | 0,655   | 27,1                              | 2,7                           |
| 0,6      | 20,8                           | 8,75               | 0,421  | 0,371   | 24,0                             | 6,9                          | 0,29   | 23,7                            | 14,1                | 0,595  | 0,545   | 25,1                              | 4,8                           |
| 0,4      | 17,0                           | 5,84               | 0,343  | 0,293   | 24,0                             | 9,8                          | 0,28   | 19,8                            | 9,4                 | 0,475  | 0,425   | 24,1                              | 7,9                           |
| 0,2      | 10,5                           | 2,92               | 0,278  | 0,228   | 24,0                             | 12,5                         | 0,20   | 12,5                            | 4,7                 | 0,376  | 0,326   | 24,0                              | 11,8                          |
| 0        | 0                              | 0                  | —  | —   | 13,8                             | 0                            | 0  | 0                               | —                   | —  | —   | —                                 | 13,8                          |

Bemerkung:  $\sigma'$ -  $\varepsilon'$ -Querschnitt um  $\frac{h}{10}$  vom  $\sigma$ -  $\varepsilon$ -Querschnitt entfernt. Siehe Fig. 4.