Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Rubrik: I. Die Bedeutung der Zähigkeit des Stahles für die Berechnung und Bemessung von Stahlbauwerken, insbesondere von statisch unbestimmten Konstruktionen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

I

Die Bedeutung der Zähigkeit des Stahles für die Berechnung und Bemessung von Stahlbauwerken, insbesondere von statisch unbestimmten Konstruktionen.

La ductilité de l'acier. Sa définition. Manière d'en tenir compte dans la conception et le calcul des ouvrages, notamment des ouvrages hyperstatiques.

Importance of the toughness of steel for calculating and dimensioning steel structural work, especially when statically indeterminate.

Leere Seite
Blank page
Page vide

I

Generalreferat.

Rapport Général.

General Report.

Dr. Ing. L. Karner †,
Generalsekretär der I.V.B.H., Prof. an der Eidg. Techn. Hochschule, Zürich.

Wirtschaftliches Bauen im Stahlbau erfordert die Ausnutzung der Sicherheit. Wenn früher bei der Berechnung der Bauwerke unter Annahme von zulässigen Spannungen der Sicherheitsfaktor auf die Bruchfestigkeit bezogen wurde, so ergab sich ein vollständig falsches Bild. Im letzten Jahrzehnt gewann die Fließgrenze des Spannungsdehnungsdiagrammes aus dem Zugversuch als Materialkonstante immer mehr Einfluß auf die Bewertung des Baustoffes und damit auf die Bestimmung der Sicherheit.

Die Erfahrungen an ausgeführten Stahlbauwerken haben jedoch gezeigt, daß in einzelnen Bauteilen unter Umständen ganz bedeutende Überschreitungen der zulässigen Beanspruchungen, oft über die Fließgrenze, eintreten, ohne daß dadurch das Bauwerk in seinem Bestande gefährdet würde. Ich erinnere an Nebenspannungen in Fachwerken, an Beanspruchungen in Nietverbindungen, an den Einfluß von Stützensenkungen bei Durchlaufträgern usw.

Wir wissen heute, daß bei statisch unbestimmten Systemen Überschreitungen der Fließgrenze unter gewissen Bedingungen auftreten dürfen, ohne daß die ursprüngliche projektmäßige Sicherheit herabgesetzt würde.

Die Erkenntnisse führten zu einer grundsätzlichen Revision des Sicherheitsbegriffes im Stahlbau; die Fließgrenze allein reicht nicht mehr aus, um den Baustoff für den Statiker und Konstrukteur eindeutig zu definieren.

Wenn ein reiner Zugstab die Fließgrenze erreicht, so ist seine Tragfähigkeit erschöpft, sofern er nicht etwa im Verband eines innerlich statisch unbestimmten Fachwerkes in der Längenänderung behindert wird und in diesem System dadurch eine Umlagerung des Kräftespiels eintritt.

Beim Biegeträger dagegen oder bei einer kombinierten Beanspruchung auf Biegung und Normalkraft kann auch bei unbehinderter Verformung nach dem Erreichen der Fließgrenze in den äußeren Fasern die Belastung weiter gesteigert werden, da das Spannungsbild statisch unbestimmter Natur ist.

Wenn wir einen auf Biegung beanspruchten Rechteckbalken betrachten, so erklärt *die ältere Plastizitätshypothese* den Vorgang bei der Erhöhung des Tragmomentes mit einem allmählichen schichteweisen Fließen bis zum Eintritt der Vollplastizität oder bis zur Bildung des plastischen Gelenkes.

Die *neue Plastizitätstheorie* dagegen geht im gleichen Fall zunächst von einem Hinaufrücken der Fließgrenze aus und folgert schließlich eine plötzliche Plastizierung des ganzen Querschnittes bezw. plötzliche Bildung des plastischen Gelenkes.

Für den Statiker und Konstrukteur sind beide Theorien nur als Erklärung des Vorganges interessant. Für das Endergebnis: der Bildung des plastischen Gelenkes und damit der Änderung der statischen Gliederung im Bauwerk, sind diese Vorgänge weniger wichtig.

Das plastische Verhalten ist im hohen Grade von der Art des Querschnittes und ganz besonders von der Art des etwaigen mehrachsigen Spannungszustandes abhängig. Die Vorgänge sind auf Grund unserer heutigen Erkenntnisse sehr schwer rechnerisch zu erfassen.

Die größte Zahl der Arbeiten und Forschungen auf dem Gebiet der Plastizitätstheorie wurde bisher ohne Berücksichtigung des Einflusses der Zeit vorgenommen. Es ist sehr wahrscheinlich, daß bei Betrachtung der hier auftauchenden Probleme als richtige dynamische Aufgaben, das heißt unter Einschaltung einer neuen Variablen „t" eine bessere Klärung der Zusammenhänge gelingen wird.

Es ist uns ja allen bekannt, daß die „Fließgrenze" des üblichen Festigkeitsversuches nicht nur sehr stark von der Querschnittsform des Versuchsstabes sondern auch ebenso von der Versuchsdurchführung hinsichtlich der Zeit abhängt.

Die Erkenntnis, daß die Eigenschaften der Zähigkeit des Stahles, die Bemessung statisch unbestimmter Konstruktionen wirtschaftlicher gestalten lassen, hat sich bereits seit Jahren in den deutschen und anderen Hochbauvorschriften ausgewirkt, als bei der Bemessung von Durchlaufträgern ein Ausgleich der Stützen und Feldmomente (wenn vielleicht auch nicht in voller Erfassung der wirklichen Verhältnisse) in Rechnung gestellt wurde. In bewußter Weise haben jedoch bereits *Kazinczy*-Ungarn und *Kist*-Holland die Bemessung statisch unbestimmter Systeme auf Grund einer neuen Definition des Sicherheitsgrades vorgeschlagen.

Eine schärfere Erfassung des hier in Rede stehenden Problems war aber erst durch die außerordentlich tiefschürfenden Arbeiten von *Grüning* möglich geworden. Er war der erste, der den Versuch gemacht hat, die hier in Betracht kommenden Zusammenhänge analytisch zu erfassen.

Grüning hat sich in seinen Untersuchungen zunächst nur auf den Fall einer unveränderlichen Belastung des Tragwerkes beschränkt: *Hans Bleich* berücksichtigte aber bereits den Wechsel verschiedener Lastanordnungen und führte den Begriff der Selbstspannungslinien ein, die die Grundlage für die Berechnungen nach dem sogenannten Traglastverfahren bilden.

Bei der Einteilung der Referate hat die I. V. B. H. Gewicht darauf gelegt die von mir nur berührten Fragen von berufenen Forschern behandeln zu lassen, um ein möglichst geschlossenes Bild von dem derzeitigen Stand des Problems zu erhalten.

Die Arbeiten von *Fritsche, Freudenthal* und *Rinagl* behandeln die mehr materialtechnischen Fragen.

Eine andere Gruppe von Referenten behandelt unter Voraussetzung eines idealisierten Spannungsdehnungsdiagrammes die Probleme in theoretischer Beziehung wie *Mélan, Kohl* und *Lévi*.

Von besonderer Bedeutung ist bei der Abklärung aller Fragen der Plastizität selbstverständlich das Versuchswesen. *Maier-Leibnitz* berichtet hierüber in seinem Referat und nimmt durch Deutung der Versuche Stellung zu den Berechnungsmethoden.

In der eben erschienenen Nummer der Zeitschrift „Stahlbau" berichtet *Maier-Leibnitz* über weitere Versuche zur Klärung der tatsächlichen Tragfähigkeit kontinuierlicher Träger und kommt dabei zu sehr wertvollen vereinfachten Deutungshypothesen.

Schließlich zeigt das Referat *Bleich* die praktische Berechnung von Durchlaufträgern und Rahmen nach der Plastizitätstheorie.

Die Frage des Einflusses der Plastizität auf die Bemessung von Stahltragwerken erscheint von größter Wichtigkeit, da unser Bestreben dahin geht, die Wirtschaftlichkeit der Stahlbauten, ohne ihre Sicherheit zu gefährden, in weitgehendstem Maße zu erhöhen. Dies ist durch die Anwendung des Traglastverfahrens bei der Bemessung statisch unbestimmter Systeme, unter gewissen Einschränkungen, möglich. Die Einschränkungen beziehen sich darauf, daß beispielsweise Rahmen oder kontinuierliche Träger, die auf Grund der Elastizitätstheorie in allen Querschnitten ausgenutzt sind, bei Umlagerung des Systems durch Einschaltung plastischer Gelenke keine oder nur unwesentliche Reserven besitzen.

Ähnlich verhält es sich, wenigstens nach unserer vorläufigen Anschauung, mit dem Fachwerk. Bei diesem kommt selbstverständlich auch noch die Frage der Instabilität der auf Druck beanspruchten Teile hinzu.

Wir haben bisher stillschweigend von der Plastizität in Trägern bezw. biegungssteifen Konstruktionen gesprochen. Das plastische Verhalten des Baustoffes spielt aber auch eine wichtige Rolle bei den Problemen des instabilen Gleichgewichtes und daher ist auch von dieser Seite her eine gründliche Betrachtung des bisher Erreichten notwendig. Die Plastizitätstheorie gestattet uns in wesentlich vereinfachter Form die Untersuchungen der Stabilität des Stabes auch bei Berücksichtigung der Querschnittsform und speziell auch bei Berücksichtigung verschiedenster Lagerbedingungen. Die in Entwicklung begriffenen praktischen Berechnungsmethoden zur Untersuchung von Stabilitätsproblemen von Stäben und Platten dürften in allernächster Zeit auf eine wesentlich vereinfachtere Basis gestellt werden können, um damit der Praxis eine Erleichterung in der Beurteilung solcher Bauaufgaben zu geben.

Die Bemessungsverfahren statisch unbestimmter Systeme unter Berücksichtigung der Plastizitätseigenschaften des Stahles nehmen bis heute im allgemeinen keine Rücksicht auf den Ermüdungsbruch. Es ist durch Versuche und Erfahrungen noch nicht genügend erhärtet, wie weit bei wechselnden Beanspruchungen nach erstmaliger Überschreitung der Fließgrenze und Bildung von plastischen Gelenken, die in der Folge rein elastischen Spannungsüberlagerungen in Bezug auf die Ermüdung gleich behandelt werden können wie in Bauwerken ohne Eintreten von örtlichen Momentenausgleichen.

Selbst wenn man davon absehen wollte, statisch unbestimmte Systeme nach der Plastizitätstheorie zu bemessen, spielen die Erkenntnisse, die durch die Klärung der hier in Betracht kommenden Fragen eine ganz außerordentliche Rolle bei der Auswahl der Bauwerksformen. Die bisherige Angst vor der Aus-

führung von Durchlaufträgern, schon bei geringfügiger Möglichkeit von Stützensenkungen ist im Sinne unserer Erkenntnisse unbegründet.

Dort wo bisher wegen Nachgiebigkeit des Baugrundes oder elastischer Lagerung zu statisch bestimmten Bauformen gegriffen wurde, können wir heute statisch unbestimmmten Ausführungen mit wirtschaftlicherer Dimensionierung den Vorzug geben.

Wir haben bisher den Einfluß der Nebenspannungen im Fachwerk bedeutend überschätzt, obwohl schon *Engesser* vor mehr als 40 Jahren auf die Milderung der Nebenspannungen infolge der Zähigkeit des Stahles hingewiesen hat. Die Beispiele könnte ich für den Stahlbau sowohl für die Festigkeit als auch für die Stabilitätsprobleme beliebig erweitern.

Wir befinden uns heute mitten in einem Wandel unserer Anschauungen über die kritische örtliche Beanspruchung in unseren Bauwerken. Von der Materialprüfungstechnik verlangen wir wesentlich bessere Charakterisierung der Baustoffe um den Konstrukteur zu befähigen, die Bauwerke unter Berücksichtigung der erforderten Sicherheit zu dimensionieren.

Unsere wachsenden Erkenntnisse, die über manche alt hergebrachte Auffassung hinwegschreiten, sollen uns aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß wir mit den neuen Berechnungsmethoden und unserem neuen konstruktiven Erfassen der Probleme wiederum nur in Einzelheiten, in Besonderheiten eines Bauteiles hineinleuchten können.

Das Bauwerk als solches ist eine so mannigfache Vielheit von Einzelaufgaben die sich gegenseitig beeinflussen, daß dem schöpferischen Schaffen des Ingenieurs nach wie vor die Hauptverantwortung für das Bauwerk überbürdet werden muß. Es ist die Aufgabe des wirklichen Konstrukteurs, die gewonnenen neuen Einblicke in die Eigenschaften seines Baustoffes und die durch Versuche gestützten neuen Berechnungsmethoden über die Zähigkeitseigenschaften des Stahles in sinnvoller und praktischer Weise in seine bisherigen Bauerfahrungen, von denen sie nur einen kleinen Teil bilden, einzufügen um sichere und wirtschaftliche Stahlbauwerke zu schaffen.

I 1

Diskussion über die Plastizität.

Discussion relative à la plasticité.

Contribution to Discussion on Theory on Plasticity.

L. Baes,
Professeur à l'Université de Bruxelles.

I. Über die allgemeine Theorie der Plastizität, der Rolle der Gleitlinien und der Grenze zwischen dem elastischen und dem plastischen Bereich.

Die Referate I 1 und I 2 des Vorberichtes finden Zustimmung, geben aber auch Anlaß zu Bemerkungen.

1. Definition der Plastizität im allgemeinen:

Um alle falschen Auslegungen zu vermeiden, sei daran erinnert, daß man von einer *plastischen Formänderung* eines Teiles eines Körpers oder von einem plastischen Zustand eines Stoffes spricht, wenn in dem betreffenden Teil die Formänderung nicht vollkommen elastisch erfolgt und trotzdem der Zusammenhang des Stoffes nicht aufgehoben ist, selbst wenn eine Gefügeänderung erfolgt ist.

Diese Definition ist allgemein und es folgt aus derselben, daß folgende Ausdrücke synonym sind:

Plastische Formänderung und bleibende Formänderung ohne Zerstörung des Zusammenhanges (es gibt übrigens auch andere Fälle der bleibenden Formänderung, nämlich mit Rißerscheinungen oder mit teilweiser Aufhebung des Zusammenhanges).

2. Definition des plastischen Fließens und der Gleitlinien oder Fließfiguren für weiches Eisen:

Das Vorhandensein einer sehr wichtigen Eigenschaft des Baustahls auf diesem Gebiete gibt der Untersuchung der Plastizität ein ganz besonderes Interesse. Wenn nämlich der Baustahl reinen Zug- oder Druckbeanspruchungen ausgesetzt ist, zeigt er ein ganz besonderes Verhalten bezüglich des plastischen Fließens. Bei einer gegebenen Größe der Belastung steigt die Formänderung in der Längsrichtung plötzlich sehr stark an.

Dieses Verhalten läßt sich in Form eines *Sprunges* im Diagramm der Zug- oder Druckspannungen wiedergeben. Es dauert zwar bei sehr starken Formänderungen nicht an, führt jedoch vom technischen Standpunkt aus zu einer wesentlichen plastischen Formänderung, welcher ein Zustand vorausgeht, der sozusagen nur sehr geringe elastische Formänderungen umfaßt.

Diese Erscheinung und die daraus sich ergebenden Folgen haben in Wirk-

lichkeit die modernen Untersuchungen über die Plastizität ausgelöst, und man sucht diese Erscheinung zwecks Erzielung einer größeren Wirtschaftlichkeit der Konstruktionen aus weichem Eisen auszunutzen. Diese Erscheinung bildet übrigens einen sehr wertvollen Ausgleich für örtliche Spannungszunahmen.

Die genannte Erscheinung, welche man in Form des Sprunges in den Kurven darstellt, hat zum Teil zu der Vorstellung der *vollkommenen Plastizität* geführt, nämlich einer bei konstanter Belastung zunehmenden Formänderung.

Unter diesem Gesichtspunkt unterscheidet man bei der vollkommenen plastischen Formänderung lineare, ebene und räumliche Spannungs- oder Formänderungszustände.

Hieraus ergibt sich die Berechtigung und die praktische Notwendigkeit, eine *Theorie über die vollkommene Plastizität* zu entwickeln, welche im übrigen noch in der Entwicklung ist.

3. Bedeutung der Gleitlinien, welche an der Oberfläche der plastisch verformten Körper aus weichem Eisen auftreten.

Man kann sich m. E. der Ansicht von Takawa und Okuda anschließen, die unter I 1 angeführt sind:

„Das Auftreten der Gleitlinien und der plötzlichen Abweichung in der Formänderungskurve sind das Ergebnis des gleichen Vorganges, nämlich der gruppenweisen Verformung bedeutender Mengen der Kristallkörper."

Es ist also eine wirkliche Diskontinuität in der Formänderung vorhanden, welche im übrigen zonenweise auftritt und von Einfluß auf ein ganzes Gebiet zu sein scheint, so daß es sich nicht nur um rein örtliche Wirkungen handelt.

Man kann sich dieser Vorstellung anschließen, welche sehr gut verdeutlicht, daß dieses unregelmäßige Verhalten die Folge einer molekularen Unstabilität ist, analog einer Verzögerung der Formänderung.

Diese Formänderung erfordert in diesem Augenblick eine Gefügeänderung, welche in Form wesentlicher und nicht umkehrbarer Gleitungen vor sich geht, d. h. plastischer Formänderungen, welche eine Verfestigung zur Folge haben, sowie auch eine *Blockierung* der Gleitflächen (siehe *Moser*).

Aus Vorstehendem scheint hervorzugehen, daß die wahre Grenze zwischen der im elastischen Zustand verbliebenen Zone des Körpers und der in den plastischen Zustand übergegangenen nicht mit den Gleitlinien zusammenfallen kann, welche an eine Verzögerung gebunden sind und sich über eine Zone erstrecken.

Die Gleitlinien können sehr breit sein, wenn der betreffende Teil des Körpers einer reinen Zugbeanspruchung ausgesetzt ist, während sie häufig sehr schmal sind, wenn dies nicht der Fall war.

4. Einige Eigentümlichkeiten der Gleitlinien:

Dr. Ing. *Freudenthal* schreibt, daß die wichtigste Eigenschaft der Fließfiguren, welche an der Oberfläche erscheinen, darin besteht, daß sie mit den größten Schubspannungstrajektorien zusammenfallen.

Es ist jedoch zu bemerken, daß dies nur zutrifft, wenn die Gleitlinien ein *Netz* aus zwei senkrecht zueinander stehenden Kurvenscharen bilden, während dies nicht der Fall ist, wenn diese Linien nur *eine Schar von Gleitlinien bilden.*

Diesen ziemlich häufigen Fall hat man anscheinend aus den Augen verloren. Er ist jedoch klar in dem alten Aufsatz von *Hartmann* und von *Frémont* behandelt, und ist leicht zu rekonstruieren.

In diesem Fall sind die Gleitlinien offensichtlich nicht mit den Trajektorien der größten Schubspannungen verwechselt, sondern sind mit den Trajektorien der einen oder beiden Hauptspannungen (isostatische Linie) verwechselt. Es ist noch zu bemerken, daß eine Gleitlinie sowohl mitten im Stoff beginnen als auch enden kann. Wenn die Belastung zunimmt, pflanzt sich diese Linie fort, während gleichzeitig andere entstehen können.

Eine Gleitlinie tritt daher notwendigerweise nicht mit einemmal auf, vielmehr ist es häufig, daß eine derartige Linie sich nach und nach während einer Vergrößerung der Belastung fortpflanzt.

Es erscheint daher nachgewiesen, *daß die Gleitlinien nicht in allgemeiner Weise Grenzlinien zwischen dem elastischen und dem plastischen Bereich sind.*

Dies ist offensichtlich, da eine Linie, welche nicht *mit einemmal* erscheint, sondern sich bei zunehmender Belastung fortpflanzt, keine *Grenze* sein kann. Eine Grenzlinie müßte notwendigerweise in sich geschlossen sein, oder eine mit einem Teil des Körperumrisses geschlossene Kurve bilden.

Diese Schlußfolgerung von Dr. Ing. *Freudenthal* ist daher offensichtlich und läßt sich auf Grund elementarer Überlegungen ableiten. Von diesem Ergebnis bis zum Ableugnen jeder mathematischen Bedeutung der Gleitlinien ist jedoch noch ein weiter Weg, und zwar besonders dann, wenn diese Gleitlinien stark auseinandergezogen sind.

5. *Die Plastizitätsbedingung.*

Für die Metalle, welche einer plastischen Formänderung mit oder ohne klarer Fließgrenze unterworfen werden können, sind folgende hauptsächliche Hypothesen aufgestellt worden, über die Bedingungen, welchen die Spannungen an der Grenze des elastischen und des plastischen Gebietes genügen müssen[1]:

Hypothese von Saint-Venant, Maurice Lévy und Guest:

$$\tau_{max} \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = k = \frac{R_e}{2}$$

Worin R_e die Elastizitätsgrenze für reine Zugbeanspruchung ist.

Hypothese von Beltrami und Haigh:

Das Kriterium besteht in der Größe der spezifischen Arbeit für die elastische Formänderung.

Die zu erfüllende Bedingung läßt sich wie folgt ausdrücken:

$$(\sigma^2_I + \sigma^2_{II} + \sigma^2_{III}) - \frac{2}{m}(\sigma_{II} \cdot \sigma_{III} + \sigma_{III} \cdot \sigma_I + \sigma_I \cdot \sigma_{II}) = R_e^2$$

Dieses Kriterium führt zu einer Darstellung im Raum in Form eines Ellipsoids und für den ebenen Spannungszustand in Form einer Ellipse.

[1] *L. Baes:* Résistance des matériaux et éléments de la théorie de l'élasticité et de la plasticité des corps solides. Band I, Kapitel XI. — «Le problème des critères de la résistance des matériaux.» Brüssel 1930 — 34.

Hypothese von v. Mises und Hencky:

Das Kriterium ist die Größe der spezifischen Arbeit der Formänderung durch Fließen (Gleiten).

Es läßt sich wie folgt ausdrücken:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\,R_e^2 = 8\,k^2$$

oder als Funktion der größten Tangentialspannung:

$$\tau^2_{I.\,II} + \tau^2_{II.\,III} + \tau^2_{III.\,I} = \frac{1}{2} R_e^2 = k^2$$

Dieses Kriterium führt zu einer Darstellung durch einen Rotationszylinder und für den ebenen Spannungszustand durch eine Ellipse.

Hypothese von v. Mises und Hencky, abgeändert von Huber:

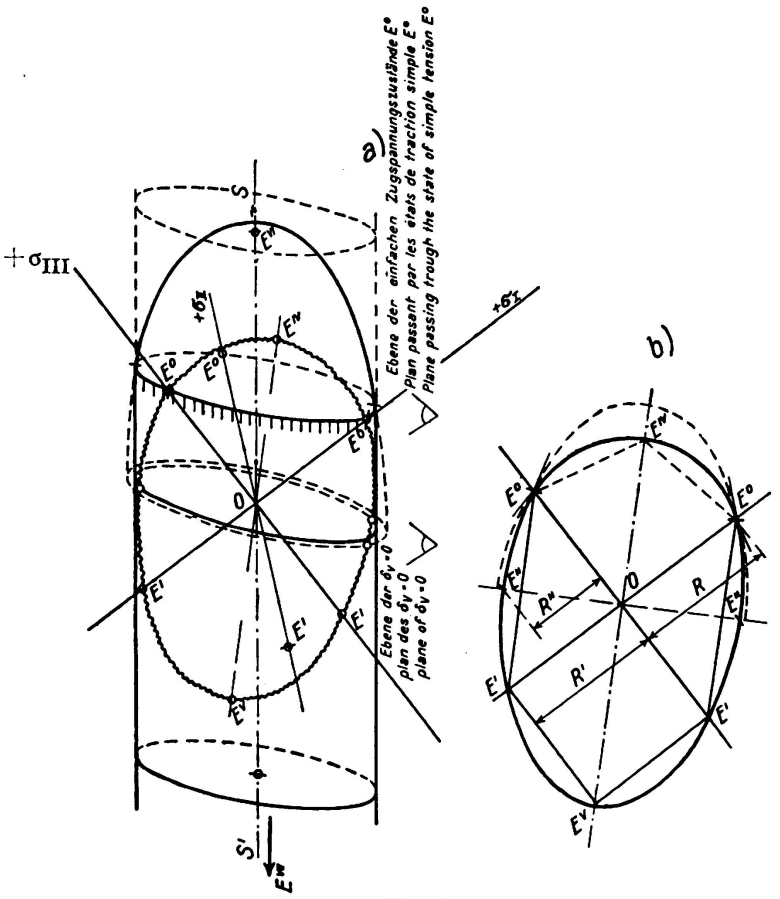


Fig. 1.

Theorie von Huber bezüglich des elastischen Grenzgleichgewichtes. (Graphische Darstellung).

a) Dreiaxige Spannungszustände.

b) Zweiaxige Spannungszustände.

Das Kriterium ist der Wert für die spezifische Formänderungsarbeit durch Gleiten, sofern die kubische Ausdehnung oder die mittlere Spannung $\frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}$ negativ sind.

Wenn sie positiv sind, muß als Kriterium dasjenige von *Beltrami*[2] übernommen werden.

Dieses Kriterium führt zu einer der Fig. 1 entsprechenden graphischen Darstellung. Für den doppelten Spannungszustand ergibt es eine aus zwei Ellipsen gebildete Figur, welche sich wenig von derjenigen von *v. Mises-Hencky* unterscheidet.

Es ist zuzugeben, daß die bisher bekannt gewordenen Erfahrungen, d. h. diejenigen von *Roš* und *Eichinger*, ergeben haben, daß die Theorie von *Huber* für weiches Eisen oder analoge Stoffe sehr befriedigend ist.

[2] Das Kriterium von *Huber* ist besonders eingehend hervorzuheben, da dieses nicht identisch mit demjenigen von *v. Mises* und *Hencky* ist. Es ist bedeutend logischer als dieses, was häufig aus den Augen verloren wird.

Es ist von Wichtigkeit, besonders zwei Sonderfälle zu betrachten, welche häufig auftreten können:

Fall des ebenen Formänderungszustandes bei vollkommener Plastizität:

Die plastische Formänderung erfolgt in diesem Fall in parallelen Ebenen. Es sei angenommen, daß diese Ebenen mit denjenigen der Hauptspannungen σ_I und σ_{III} zusammenfallen, und daß σ_{II} senkrecht darauf steht.

Für den Fall der vollkommenen Plastizität erhält man in allen Punkten:

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}$$

Daher

$$\sigma_I < \sigma_{II} < \sigma_{III}$$

Die Bedingung der Plastizität bei diesen Spannungen läßt sich dann gemäß *St. Venant* und *Maurice Lévy* wie folgt ausdrücken:

$$\sigma_I - \sigma_{III} = 2\,k = R_e$$

Die Bedingung der Plastizität von *v. Mises-Hencky* lautet:

$$|\,\sigma_I - \sigma_{III}\,| = \frac{4}{\sqrt{3}}\,k = \frac{2}{\sqrt{3}}\,R_e.$$

Man erkennt, daß für diesen Fall die beiden Bedingungen gleich einem Koeffizienten $\frac{2}{\sqrt{3}}$ sind und einem besonderen Wert von τ_{max} entsprechen.

Hieraus geht hervor, daß σ_{II} zwischen σ_I und σ_{III} liegt, sowie daß die Flächen, auf denen die Gleitbewegungen erfolgen, senkrecht zur Ebene I.—III. verlaufen.

Die Gleitflächen sind Zylinder, deren Erzeugende senkrecht zu dieser Ebene stehen.

Die Gleitungen erfolgen also parallel zu dieser Ebene und rufen auf derselben zwei einander zugeordnete Scharen von Gleitlinien hervor, welche ein Netz senkrecht zueinander stehender Kurven bilden und die Winkel des Netzes der isostatischen Kurven halbieren.

Entlang dieser Linien, in dem Maße wie sie sich bilden, erreicht die Tangentialspannung den kritischen Wert.

Sonderfall des ebenen Spannungszustandes oder des doppelten Spannungszustandes bei vollkommener Plastizität:

Dieser Fall ist sehr häufig. Er tritt an der Oberfläche des Stückes auf. Die eine der Hauptspannungen ist Null, beispielsweise $\sigma_{II} = 0$.

Wenn σ_I und σ_{III} entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, ist der Zustand der Plastizität von *St. Venant* und *Maurice Levy:*

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \pm\,k = \pm\,\frac{R_e}{2}.$$

Wenn σ_I und σ_{III} das gleiche Vorzeichen besitzen, wird diese Bedingung zu

$$\frac{\sigma_I}{2} \text{ oder } \frac{\sigma_{III}}{2} = \frac{R_e}{2}.$$

Die Bedingung der Plastizität von *v. Mises-Hencky* ist dann:

$$\sigma_I^2 - \sigma_I \cdot \sigma_{III} + \sigma_{III}^2 = 4\,k^2 = R_e^2$$

In kartesischen Koordinaten für σ_I, σ_{III} ausgedrückt, entspricht dies einer Ellipse.

Die Bedingungen von *St. Venant* und *v. Mises* unterscheiden sich daher zahlenmäßig kaum, wenn die Hauptspannungen σ_I und σ_{III} verschiedene Vorzeichen

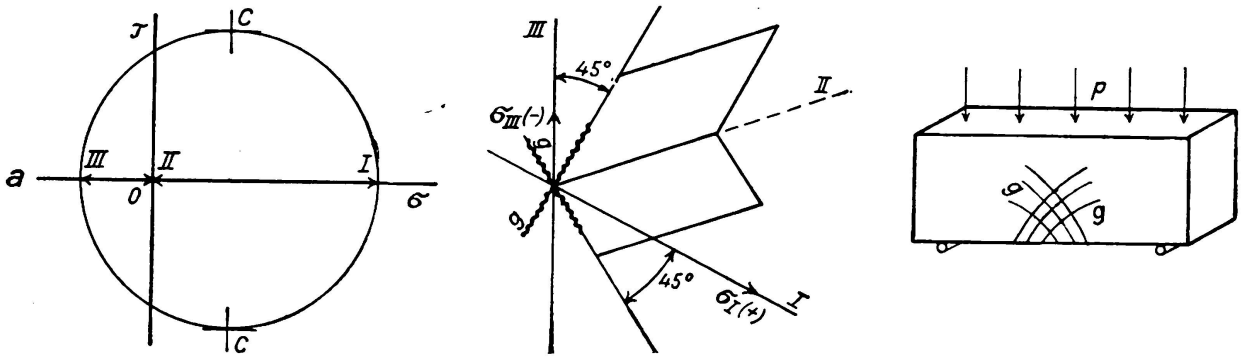


Fig. 2.

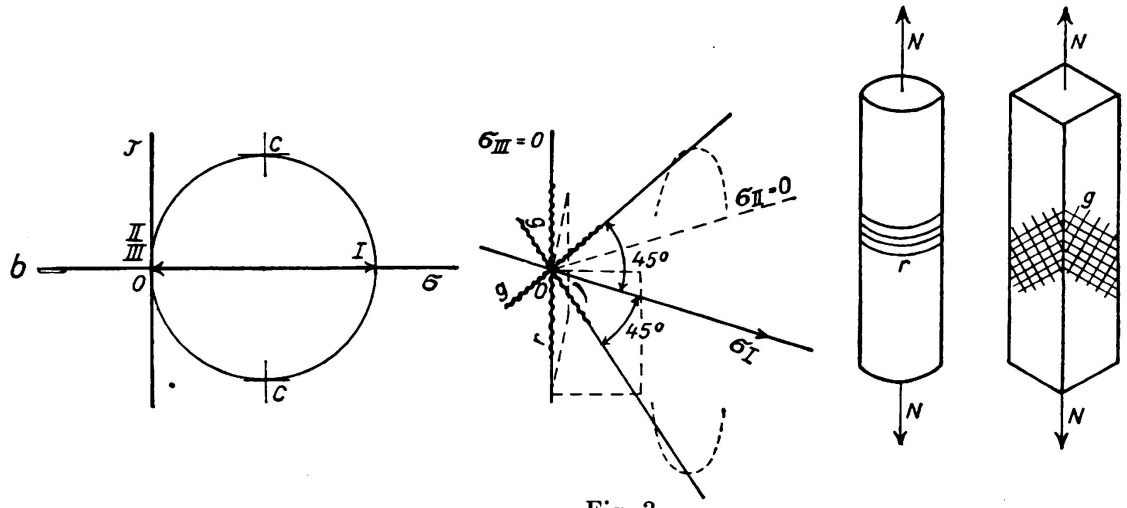


Fig. 3.

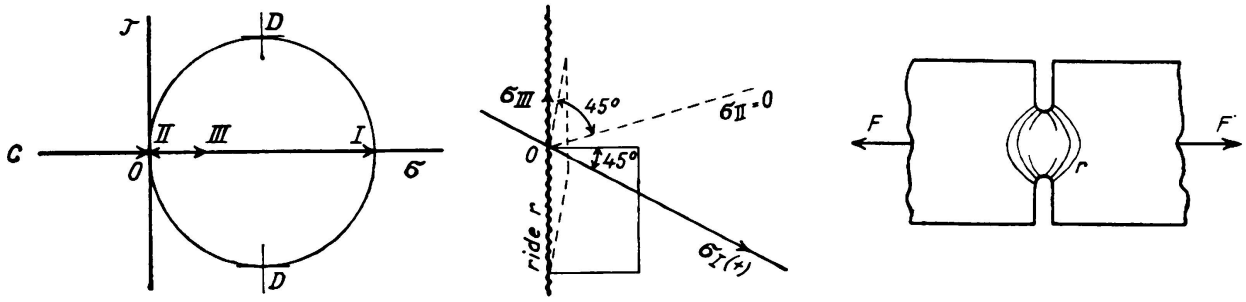


Fig. 4.

Fig. 2–4. Verlauf des Gleitliniennetzes g oder der Gleitlinienschar r erscheinend auf den Stab-Außenflächen in den durch ebenen Spannungszustand beanspruchten Gebieten.
Fall a: $\sigma_{II} = 0$, σ_I und σ_{III} von verschiedenen Vorzeichen,
Fall b: $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$,
Fall c: $\sigma_{II} = 0$, σ_I und σ_{III} von gleichen Vorzeichen.

besitzen. Die beiden Bedingungen sind jedoch nicht proportional, wie für den ebenen Formänderungszustand.

In diesem Fall bildet sich, wenn die beiden Hauptspannungen σ_I und σ_{III} entgegengesetzte Vorzeichen besitzen (Fig. 2), ein Netz von Gleitlinien.

Gemäß der Hypothese von *St. Venant* schneidet dieses Netz das Netz der isostatischen Kurven als Winkelhalbierende, und in jedem Punkt einer der Linien dieses Netzes erreicht das entsprechende τ_{max} den kritischen Wert im Augenblick, wenn das Fließen in diesem Punkt eintritt.

Gemäß der Hypothese von *v. Mises* bildet sich noch ein Netz von zwei Kurvenscharen, doch erreicht längs der Gleitlinien dieses Netzes das τ_{max} keinen bestimmten Wert mehr. Dies ist der kritische Zustand, welcher nicht mehr auf einem bestimmten Wert von τ_{max} beruht.

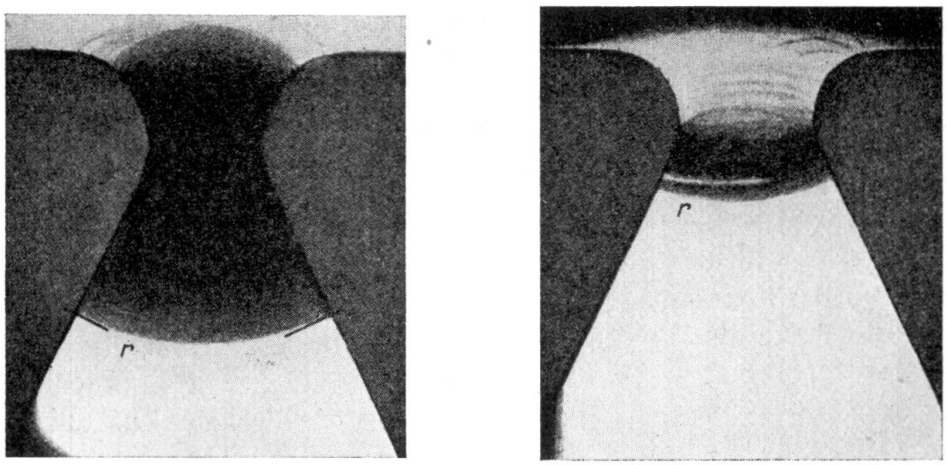


Fig. 5.

Prüfstab, auf Zug beansprucht. Die Gleitlinien r erscheinen allmählich. (Figur entnommen dem Buch „Mesure de la limite élastique des métaux", von Ch. Frémont, 1903).

Wenn die beiden Hauptspannungen σ_I und σ_{III} das gleiche Vorzeichen besitzen (Fig. 4), bildet sich kein Netz senkrecht aufeinander stehender Kurvenscharen mehr.

Die Gleitflächen stehen nicht mehr senkrecht zu der freien Fläche und zwar trifft dies auf beide Theorien zu.

Es bildet sich eine einzige Schar von Gleitlinien, welche der gemeinsamen Schnittlinie der beiden Gleitflächengruppen entsprechen (Fig. 5 und 6).

Gemäß der Hypothese von *St. Venant* fällt jedes Element dieser Linien im Augenblick seiner Bildung mit dem isostatischen Element zusammen, welches der ihrem absoluten Werte nach kleinsten Hauptspannung entspricht. In diesem Augenblick und an dieser Stelle wird die größte Hauptspannung gleich der doppelten kritischen Tangentialspannung.

Die alten Werte von *Hartmann* lassen den Unterschied zwischen den Gleitlinien und den Gleitliniennetzen deutlich erkennen, siehe Fig. 7. Trotzdem hat *Hartmann* diesen Unterschied nicht erklärt.

Gemäß der Hypothese von *v. Mises* entsprechen die in einem Punkt der

Gleitlinie im Augenblick der Bildung derselben erreichten Spannungen der Bedingung des Kriteriums, was nicht mehr ganz einfach ist.

Dieser Umstand der Bildung der Gleitlinien scheint in Vergessenheit geraten zu sein. Er tritt trotzdem ziemlich häufig auf und ist das Problem dann vollkommen verschieden von dem Fall der Bildung des Gleitliniennetzes. Er tritt häufig bei flachen Stücken mit seitlichen Kerben auf (Fig. 6).

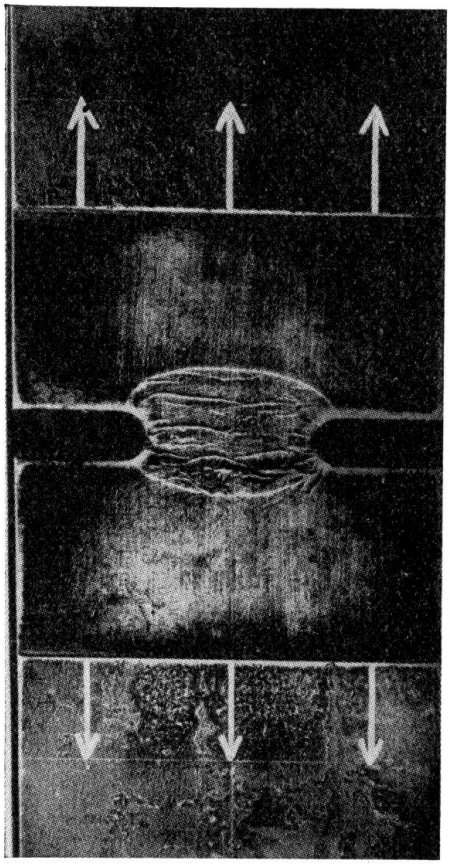


Fig. 6.
Gleitlinien in einem gekerbten Flußstahl-Stab.

Wenn eine einzige Hauptspannung nicht gleich Null ist, besteht theoretisch die Möglichkeit, daß sich ein Netz von Gleitlinien g oder eine Linienschar r bildet (Fig. 3).

Praktisch ist es wahrscheinlich, daß sich ein Netz von Gleitlinien g bildet.

Für dieses Netz sind die beiden Spannungshypothesen von *St. Venant* und *v. Mises* offensichtlich identisch.

Andererseits führt in der vollen Masse die Theorie von *St. Venant* zu Gleitflächen in allen Elementen, in denen im Augenblick des Fließens das τ_{max} den kritischen Wert erreicht.

Andererseits besteht gemäß der Theorie von *v. Mises* kein einfacher Zusammenhang mehr zwischen dem kritischen Zustand und der größten Tangentialspannung.

6. Grenze zwischen der elastisch gebliebenen und der plastischen Zone:

Dr. Ing. *Freudenthal* schreibt:

„Das angeführte Beispiel zeigt, daß die Behandlung plastischer Probleme kristalliner Stoffe immer von den Begrenzungskurven des plastischen Bereiches ausgehen muß. Die Annahme von Gleitlinien als eine solche Begrenzung und die Aufstellung von Lösungen aus den Eigenschaften der Gleitlinien wird immer zu Resultaten führen, welche der Wirklichkeit nicht entsprechen."

Bezüglich des zweiten Teiles muß man Vorbehalte machen, doch ist der erste Teil dieses Satzes in allgemeiner Weise offenbar richtig.

Es ist in der Tat unrichtig, daß allgemein die plastische Zone mit einer Gleitfläche verwechselt wird, trotzdem offensichtlich längs dieser Gleitflächen der plastische Zustand sowohl in der plastischen Zone als auch an der Grenze vorhanden ist.

An der Grenze muß er jedoch in einen elastischen Zustand übergehen.

Allgemein genommen wird die Grenzfläche nicht durch eine Gleitfläche gebildet, sondern durch Punkte verschiedener Gleitflächen.

Die Grenzfläche ist offensichtlich ihrer Definition nach eine Fläche des elastischen Zustandes, längs deren die als Kriterium genommene Funktion konstant ist.

Für ein im ebenen Formänderungszustand belastetes ebenes Stück ist daher die Grenze, sowohl wenn man das Kriterium von *St. Venant* als auch dasjenige von *v. Mises* anwendet, eine isochromatische Linie gemäß der photoelastischen Untersuchung.

Für das gleiche Stück ist sie, wenn dasselbe im ebenen Spannungszustand belastet wird, nur für die Theorie von *St. Venant* eine isochromatische Kurve und wenn die beiden Spannungen σ_I und σ_{III} entgegengesetztes Vorzeichen besitzen oder eine derselben nicht gleich Null ist.

Für das gleiche Stück wird, wenn die Belastung im ebenen Spannungszustand erfolgt, die beiden Spannungen das gleiche Vorzeichen besitzen und die Theorie von *St. Venant* angewandt wird, die Grenzlinie eine Kurve, welche einem gleichen Wert der ihrem absoluten Werte nach größten Hauptspannung entspricht. Sie ist daher keine isochromatische Kurve gemäß der photoelastischen Untersuchung.

Nach der Hypothese von *v. Mises* ist für den ebenen Spannungszustand die Grenzlinie keine isochromatische Kurve.

Man erkennt daher, daß es sehr wichtig sein kann, zwischen den Fällen des ebenen Spannungszustandes und des ebenen Formänderungszustandes zu unterscheiden. Dies ist sehr wesentlich, warum ich darauf hingewiesen habe.

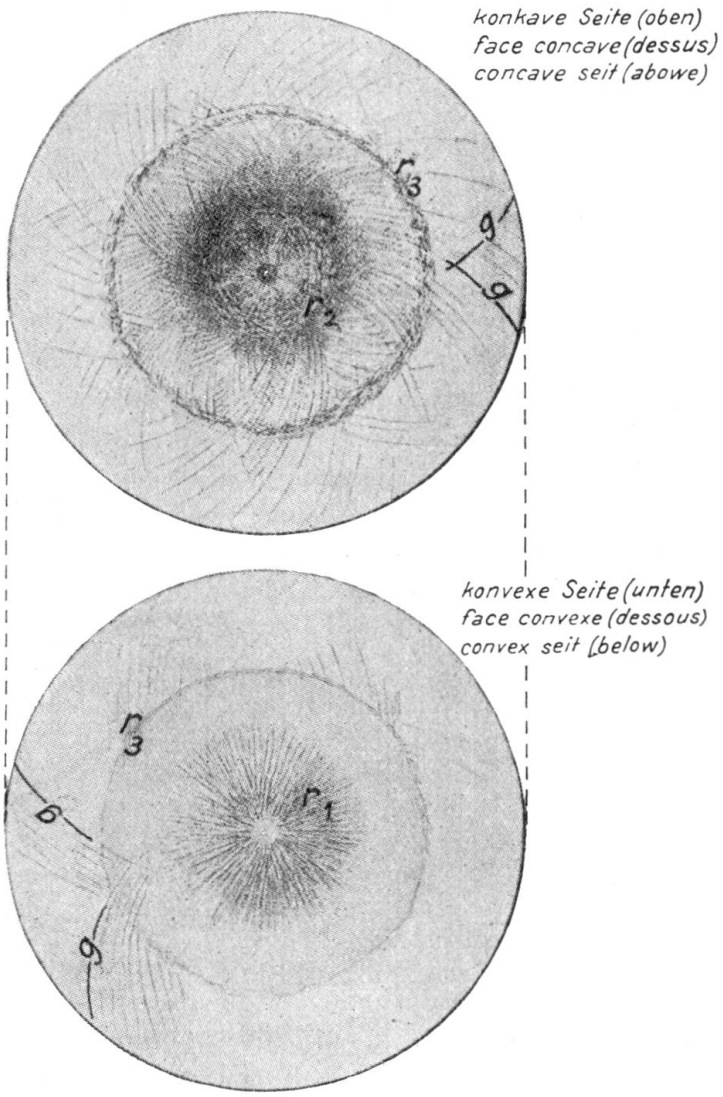


Fig. 7.

Stahlplatte, durch eine zentrische Einzellast deformiert. Gleitlinien g und r.

(Figur entnommen dem Buch: „Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts" L. Hartmann, 1896).

Um erkennen zu lassen, daß die Grenzlinie im allgemeinen keine Gleitlinie ist, genügt es, zwei einfache bekannte Fälle anzuführen:

Bei einer starken zylindrischen Hülle, welche einem stark unterschiedlichen Druck ausgesetzt ist, ist infolge der axialen Symmetrie die Grenzfläche zwischen der plastischen und der elastischen Zone ein zu dem Rohr konzentrischer

Zylinder, während in jedem Querschnitt die Schnittlinien der Gleitflächen logarithmische Spiralen sind.

Diese Formen haben nichts Gemeinsames miteinander.

Das zweite anzuführende Beispiel ist eine ebene Platte, welche am Rande durch eine quasi Einzellast belastet ist.

Die Gleitlinien in den Schnittflächen der Platte sind logarithmische Spiralen, während die Grenzlinie eine isochromatische Linie ist, d. h. ein Kreis, welcher seinen Mittelpunkt auf der Belastungslinie hat und tangential zu der Grenzlinie des Stückes verläuft.

Der Fall einer kreisförmigen Scheibe, welche durch zwei einander diametral gegenüberliegende Lasten belastet ist, ist ebenfalls typisch.

Es ist also offensichtlich, daß die Grenzlinie des plastischen und elastischen Gebietes im allgemeinen keine Gleitlinie ist.

Es war meiner Ansicht nach vorteilhaft, dies klarer und einfacher darzustellen als es der Verfasser des Aufsatzes I 1 tut, da es sich um einen klassischen Fall handelt.

Es sind noch zahlreiche und wichtige Fragen für das Gebiet der Plastizität zu erklären, da die zur Zeit aufgestellten Theorien nur ein erstes vereinfachtes Bild sind und wahrscheinlich noch weiter entwickelt werden müssen.

Seit der Ausarbeitung meiner Ausführungen ist übrigens noch der unter I 2 behandelte Aufsatz von Dr. techn. *J. Fritsche* erschienen, in dem ausgeführt ist, daß der Zustand des plastischen Fließens nicht eine Funktion des örtlichen Spannungszustandes ist, sondern des Spannungszustandes eines ganzen Gebietes.

Diese neue Fließbedingung ist von großem Interesse und enthält zahlreiche neue Elemente, welche sich auf unbezweifelbare Versuchsergebnisse stützen. Ich hatte schon selbst diese Erkenntnis anläßlich von eingehenden Versuchen, welche ich mit einbetonierten Walzträgern durchgeführt habe.

II. *Über die Anwendbarkeit der Berechnung auf Eisenkonstruktionen.*

Ich stimme vollkommen mit Dr. Ing. *F. Bleich* überein, welcher die Aufmerksamkeit darauf lenkt, daß diese Prinzipien nur mit großer Vorsicht auf die Eisenkonstruktionen anzuwenden sind.

Er führt aus, daß das neue Berechnungsverfahren weder auf solche Systeme angewandt werden darf, bei denen die Ermüdungsfestigkeit des Materials zu berücksichtigen ist, noch auf Fachwerkträger.

Es darf daher zur Zeit nur auf solche einfache Systeme angewandt werden, welche nur in geringem Maße statisch unbestimmt sind und aus mehreren auf Biegung beanspruchten Elementen bestehen, deren auf Druck beanspruchte Teile ihre Stabilität nicht verlieren. Derartige einfache Systeme treten fast nur bei Hochbauten auf, welche nicht häufig wiederholten Beanspruchungen und auch nicht den Schwingungen von Maschinen ausgesetzt sind.

Außerdem empfiehlt es sich, derartige Bauwerke gemäß der Theorie des plastischen Gleichgewichtes auf derartige Spannungen zu berechnen, daß die Fließspannung nicht erreicht wird und daß der in der Plastizität vorhandene Ausgleichsfaktor eine wirkliche Reserve bildet.

I 2

Biegung mit Querkraft, außerhalb des Gebietes der rein elastischen Formänderung.

Flexion et effort tranchant en dehors de la zone de déformation purement élastique.

Combined Bending and Shear Beyond the Range of Purely Elastic Deformation.

A. Eichinger,
Dipl.-Ingenieur, Wissenschaftlicher Mitarbeiter der E.M.P.A. Zürich.

Ist das Spannungs-Längenänderungs-Diagramm für einfachen Zug oder Druck bekannt, so kann unter der Annahme des linearen Dehnungsverlaufs die Spannungsverteilung über den Querschnitt eines auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Balkens ermittelt werden, was an einem Beispiel gezeigt wird.

Einleitung.

Die gesamte Formänderung besteht bekannterweise aus zwei Teilen[1]:

a) Der elastischen Formänderung, deren Komponenten den Elastizitätsgleichungen genügen

$$e_1 = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_1 - \frac{1}{m}(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \quad e_2 = \text{u.s.w.} \qquad \text{und}$$

b) der plastischen Formänderung, deren Komponenten die Plastizitätsgleichungen erfüllen

$$\delta_1 = \frac{1}{D} \cdot \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \quad \delta_2 = \text{usw.}$$

E ist der Elastizitäts-, D der Plastitizitätsmodul. Die Querdehnungszahl m wird für plastische Formänderung gleich 2.

Bisher wurden die statischen Berechnungen in der Regel unter der Annahme ausgeführt, daß sich die Tragwerke rein elastisch verhalten. In der letzten Zeit ist man jedoch bestrebt, die durch die plastische Formänderung bedingte Beeinflussung:

---

[1] *M. Roš* und *A. Eichinger:* Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Diskussionsberichte der Eidg. Materialprüfungsanstalt Zürich. Nr. 14 vom Sept. 1926; Nr. 34 vom Februar 1929; Nr. 87 vom April 1934.

1. der Spannungsverteilung im Balken — bzw. Stabquerschnitt und
2. des Kräfteverlaufs im Tragwerk (statisch unbestimmte Größen M, Q und N) mitzuberücksichtigen.

Grundlagen der Plastizitätstheorie.

Zu dem erwähnten Zweck sei daran erinnert,[2] daß im Falle des gleichzeitigen Wirkens einer Normal- und einer Schubspannung gilt (Fig. 1):

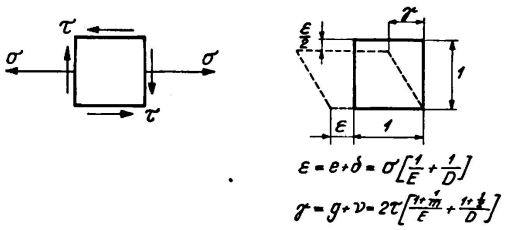


Fig. 1. Spannungs- und Formänderungszustand eines Körperelements

Elastische Gestaltänderung

$$eg = \sqrt{e^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot g^2} = \frac{\sigma_g}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right);$$

hingegen:

die plastische Gestaltänderung

$$\delta_g = \sqrt{\delta^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \nu^2} = \frac{\sigma_g}{D} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

worin $\sigma_g = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$ = Vergleichsspannung.

Die Dehnung selber beträgt:

elastisch $e = \frac{\sigma}{E}$

hingegen plastisch $\delta = \frac{\sigma}{D}$

und die spezifische Schiebung

elastisch $g = \frac{\tau}{E} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)$

hingegen plastisch $\nu = \frac{\tau}{D} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$.

Die gesamte Formänderung ist dann gleich der Summe der jeweiligen elastischen und plastischen Formänderung, nämlich:

Gestaltänderung . $\varepsilon g = eg + \delta g$
Dehnung . . . . $\varepsilon = e + \delta$ und
Schiebung . . . $\gamma = g + \nu$

[2] Diskussionsbeitrag von *M. Roš* und *A. Eichinger:* Knicken von in beiden Achsen zentrisch gedrückten, rechteckigen Platten im Gebiet oberhalb der E-Grenze. Erster Kongreß der Internat. Vereinigung für Brücken- und Hochbau, Schlußbericht.

Ist nun das Spannungs-Längenänderungs-Diagramm eines Materials für gewöhnlichen Zug oder Druck bekannt, so kann die grundlegende Beziehung zwischen der Vergleichsspannung und der von dieser allein abhängigen Gestaltänderung (Volumenänderung ist stets elastisch) mit Hilfe der vorigen Formeln gewonnen werden (Fig. 2).

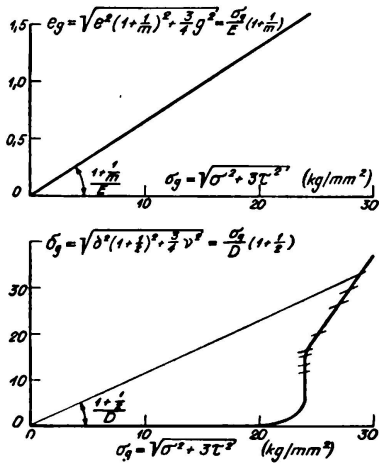


Fig. 2.
Elastische und plastische Gestaltsänderung in Abhängigkeit von der Vergleichsspannung.

Spannungsverteilung im Balkenquerschnitt.

Bevor man die Beeinflussung des Kräfteverlaufs im Tragwerk (statisch unbestimmte Größen M, Q und N) in Agriff nimmt, muß der Einfluß der plastischen Formänderung auf die Spannungsverteilung im Querschnitt untersucht werden.

Unter der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte bzw. genauer: des linearen Dehnungsverlaufs, ergibt sich die Faserdehnung im Abstand y von der neutralen Achse zu

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \frac{y}{h/2}$$

worin ε_r die gewünschte Randfaserdehnung bedeutet (Fig. 3). Weil am Rand

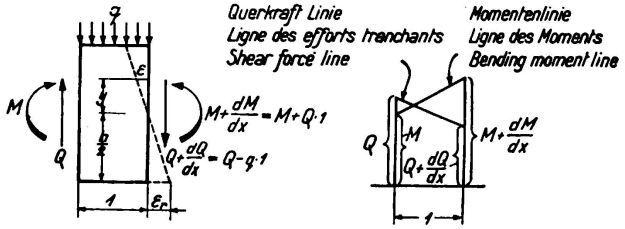


Fig. 3.
Balkenstück von der Länge 1 unter der Einwirkung von M, Q und q.

die Schubspannung und damit auch die Schiebung gleich Null sein muß, kann aus Fig. 2 die Randspannung σ_r ermittelt werden.

Nun wird in der Regel die Verteilung der Normalspannung über den Querschnitt ähnlich dem Zweig des σ-ε-Diagrammes von $\sigma = 0$ bis $\sigma = \sigma_r$ angenommen, was nur im Fall, daß überall $\tau = 0$ richtig ist. Ist dagegen τ von Null verschieden, so kann die Verteilung der Normalspannung im Querschnitt von dieser Annahme stark abweichen, weil die gesamte Dehnung ε durch eine

umso niedrigere Normalspannung σ bewirkt wird, je größer die am gleichen Körperelement wirkende Schubspannung τ ist.

Statt für ein gegebenes Moment und Querkraft die σ- und τ-Verteilung zu finden, begnügen wir uns vorläufig mit der Annahme einer σ-Verteilung. Fig. 4.

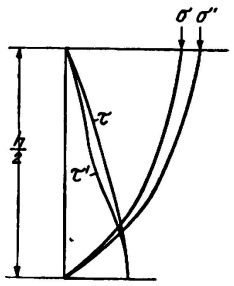


Fig. 4.
Spannungsverteilung über die obere Querschnittshälfte.

Damit ist aber auch τ an jeder Stelle im Querschnitt festgelegt. Weil nämlich:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \frac{y}{h/2} = \sigma \cdot \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{D}\right]$$

so folgt:

$$\frac{1}{D} = \frac{\varepsilon}{\sigma} - \frac{1}{E},$$

womit der Plastizitätsmodul D für jedes y bestimmt ist. Zieht man den Strahl vom Koordinaten-Nullpunkt unter dem Winkel $\frac{1 + {}^1/_2}{D}$ bis zur $\sigma g - \delta g$-Kurve der Fig. 2, so wird auch die Vergleichsspannung σg gewonnen, woraus sich die gesuchte Schubspannung ergibt gemäß:

$$\tau = \sqrt{\frac{\sigma_g^2 - \sigma^2}{3}}.$$

Da aber in den Querschnittsteilen mit konstanter Breite

$$\frac{\delta \tau}{\delta y} = \frac{\delta \sigma}{\delta x}$$

ist, wäre damit auch der Spannungsverlauf im benachbarten Querschnitt festgelegt, nämlich σ' und τ' (Fig. 4). Daraus geht hervor, daß die Verteilung der Normalspannung σ in einem Querschnitt nicht allein von dem Moment M in diesem Schnitt abhängt, wie es im elastischen Bereich der Fall ist, sondern auch durch die Querkraft Q sowie die verteilte Last $q = \frac{dQ}{dx}$ beeinflußt wird.

Die Ausführungen gelten jedoch streng genommen nur im Falle einer einmaligen Beanspruchung über die Grenze des rein elastischen Verhaltens. Sie sind somit für die Praxis nur von beschränktem Wert.

Während nämlich die erstmalige Überschreitung der Fließgrenze von großer plastischer Formänderung begleitet ist, bricht dasselbe Material nach wiederholtem Lastwechsel im Betrieb — und zwar infolge der Ermüdung — oft ohne jede wahrnehmbare bleibende Formänderung.

Man beachte auch, daß trotz veränderter oberer Lastgrenze bzw. Spannungsgrenze der stärkst beanspruchten Konstruktionsteile (infolge plastischer Formänderung) die Amplitude des Lastwechsels: (B—A), worin B = obere-, A = untere Lastgrenze, selbst an diesen Stellen unverändert bleibt. Da aber die Ermüdungsfestigkeit hauptsächlich von der Spannungswechselamplitude, hingegen von der Grundspannung $\frac{A+B}{2}$ bei den meisten Bauarten nur wenig abhängt, so ist der Gewinn ohnehin viel geringer, als etwa die Herabsetzung der oberen Spannungsgrenze vortäuscht (Fig. 5).

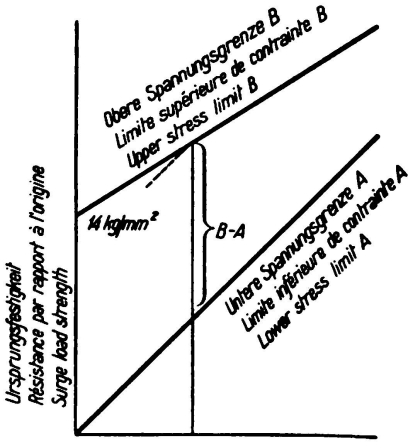


Fig. 5.
Zug-Ermüdungsversuche mit Stumpfschweißungen (EMPA Zürich).

Aus diesen Gründen sollte vorläufig die plastische Formänderung überall dort wo Ermüdung in Frage kommt (eine Ausnahme bildet das Knicken) einzig als Reserve für den Fall einer einmaligen unvorhergesehenen Überlastung (Havarie) betrachtet werden. Dagegen hätte die Berechnung des Sicherheitsgrades gegen Ermüdung auf der Grundlage des Elastizitätsgesetzes — wie bisher — zu erfolgen. Ausnahmen sollten nur dann gemacht werden, wenn Dauer- bzw. Ermüdungsversuche (nicht Kurzversuche) es rechtfertigen.

$\frac{y}{h/2}$	σ	ε	$\frac{\varepsilon}{\sigma}$	$\frac{1}{D}\cdot 10^3$	σ_g	τ	$\frac{\delta\tau}{\delta y}$	σ'	ε'	$\frac{\varepsilon'}{\sigma'}$	$\frac{1}{D}\cdot 10^3$	σ'_g	τ'
	kg/mm²	‰	·10³	mm²/kg	kg/mm²	kg/mm²	kg/mm³	kg/mm²	‰	·10³	mm²/kg	kg/mm²	kg/mm²
1,0	25,0	14,58	0,584	0,534	25,0	0	0,40	29,0	23,5	0,810	0,760	29,0	0
0,8	23,2	11,66	0,503	0,453	24,2	4,0	0,35	26,7	18,8	0,705	0,655	27,1	2,7
0,6	20,8	8,75	0,421	0,371	24,0	6,9	0,29	23,7	14,1	0,595	0,545	25,1	4,8
0,4	17,0	5,84	0,343	0,293	24,0	9,8	0,28	19,8	9,4	0,475	0,425	24,1	7,9
0,2	10,5	2,92	0,278	0,228	24,0	12,5	0,20	12,5	4,7	0,376	0,326	24,0	11,8
0	0	0	—	—	—	13,8	0	0	0	—	—	—	13,8

Bemerkung: σ'- ε'-Querschnitt um $\frac{h}{10}$ vom σ- ε-Querschnitt entfernt. Siehe Fig. 4.

I 3

Betrachtungen über die Zähigkeit.

Considérations sur la ductilité.

Observations on Ductility.

Professor Dr.-Ing. W. Kuntze,
Staatliches Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem.

Im Maschinenbau ist man heute bestrebt hochbeanspruchte Konstruktionsteile (z. B. Kurbelwellen) aus hochzähem Edelstahl durch solche aus Gußeisen zu ersetzen, weil das Verhalten derselben im Betrieb bei geringeren Erstehungskosten den ersteren fast ebenbürtig ist. Dieses Gleichnis aus dem benachbarten Konstruktionsgebiet zeigt, daß wir heute von der „Zähigkeit" der Stähle einen anderen Begriff bekommen haben, als früher. Nicht die *große* Plastizität ist ausschlaggebend, sondern die *Widerstandsfähigkeit gegenüber ungleichförmigen Spannungszuständen.*

Diese Widerstandsfähigkeit wird erreicht, bei einer verhältnismäßig geringen aber gerade ausreichenden Gefügeplastizität bei gleichzeitiger hoher Gefüge-

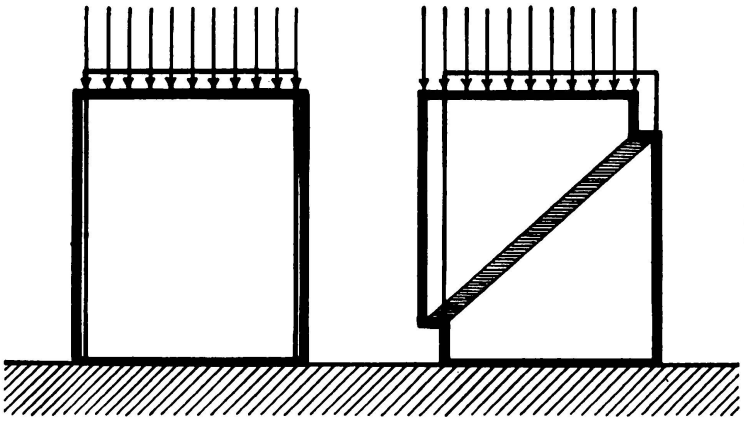


Fig. 1.
Elastische und plastische Verformung.

Kohäsion. Der plastische Verformungsmechanismus unterscheidet sich nach Fig. 1 vom elastischen durch spontan auftretende Fließ- oder Umklapp-Schichten. Diese Fließschichten sind infolge ihrer kinetischen Entstehung grundsätzlich im statischen Sinne unempfindlich gegenüber unterschiedlichen Anspannungen.[1] Ihre Hervorrufung erfordert eine summarische Kraft, die sich aus einer Gleichgewichtsbedingung von Kräftesummen ermittelt und „*Widerstandsmittel*" heißt.[2]

[1] *W. Kuntze:* Einfluß ungleichförmig verteilter Spannungen auf die Festigkeit von Werkstoffen. Maschinenelemente-Tagung Aachen. Berlin, VDI.-Verlag, 1936.

[2] *W. Kuntze:* Ermittlung des Einflusses ungleichförmiger Spannungen und Querschnitte auf die Streckgrenze. Der Stahlbau, Bd. 6 (1933) S. 49/52.

Mit diesem Ansatz als Grundlage hat *Fritsche* erfolgreiche Berechnungen von Biegebalken und bei sinngemäßer Erweiterung des Gedankens auch der Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stäbe durchgeführt.[3] [4]

Nun verhalten sich unsere Baustähle nicht so ideal, wie es das schematische Bild zeigt. Die Gleitschichtenbildung bedeutet zwar eine Umgehung der rein elastischen Auswirkung und damit der Gefahr des spröden Bruches. Doch läßt sich bei unseren Gebrauchsstählen eine innere *mikroskopische Brüchigkeit* nie ganz bannen. Örtliche mikroskopische Risse sind je nach der Güte des Werkstoffes eine Begleiterscheinung der plastischen Verformung überhaupt, besonders

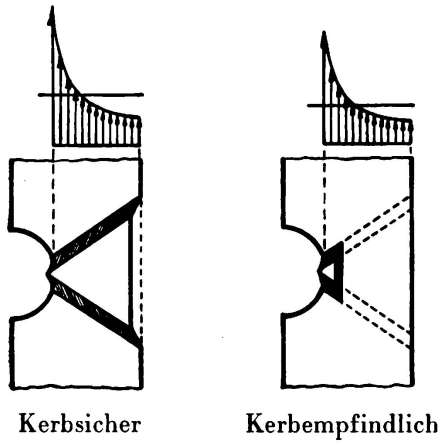


Fig. 2.
Schema der Kerbempfindlichkeit bei Wechselbeanspruchung.

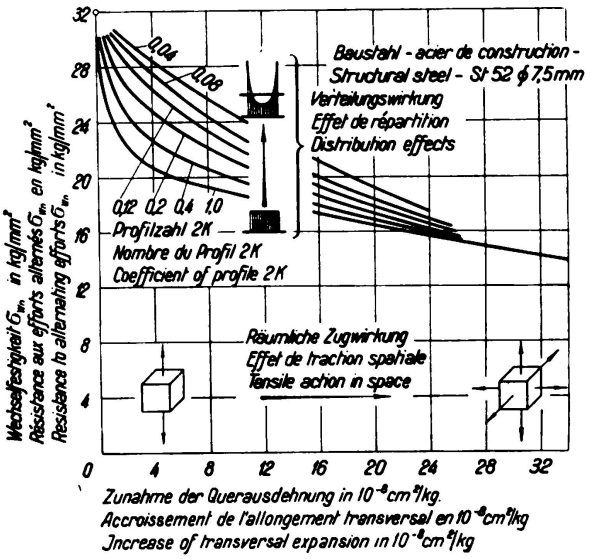


Fig. 3.
Abhängigkeit der Wechselfestigkeit von der Spannungsverteilung und der mehrdimensionalen Beanspruchung.[5]

aber bei ungleichförmigen Spannungen. Sie verursachen entsprechend der Fig. 2 eine Abkürzung der Fließwege. Hiermit ist eine geringere Tragfähigkeit verbunden, die in der Praxis als *„Kerbempfindlichkeit"* bezeichnet wird. Der kerbunempfindliche Idealfall (linke Figur) zeigt hingegen durchlaufende Fließschichten.[1]

Die Festigkeitsergebnisse von Versuchen, die man bei Anwesenheit ungleichförmiger Spannungen erhält, sind daher meist niedriger als die auf der Grundlage des ideal gedachten Widerstandsmittels errechnete Tragfähigkeit.

Die Neigung der Werkstoffe zur inneren Brüchigkeit schränkt daher die Genauigkeit der Berechnung mit Hilfe des Widerstandsmittels ein. — Welche

---

[3] *J. Fritsche:* Grundsätzliches zur Plastizitätstheorie. Der Stahlbau, Bd. 9 (1936) S. 65/68.

[4] *J. Fritsche:* Der Einfluß der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stabstützen. Der Stahlbau, Bd. 9 (1936) S. 90/96.

[5] *W. Kuntze:* Einfluß des durch die Gestalt erzeugten Spannungszustandes auf die Biegewechselfestigkeit. Arch. Eisenhüttenwes. 10 (1936/37) S. 369/73; Ber. Nr. 367 Werkstoffaussch. Ver. dtsch. Eisenhüttenl.

Fälle werden nun hiervon besonders betroffen, und welche Kräfteeinwirkungen begünstigen das Auftreten vorzeitiger Brüchigkeit? — Eine Einordnung der Ergebnisse von Kerbwechsel-Versuchen in Abhängigkeit von den räumlichen Zugspannungen und der Spannungsverteilung (Fig. 3) zeigt, daß in erster Linie *nicht Spannungsspitzen die Herabsetzung der Wechselfestigkeit erzeugen, sondern*

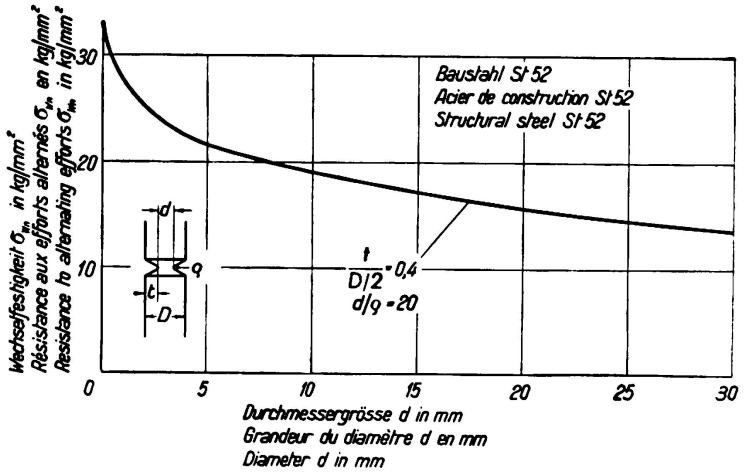


Fig. 4.
Wechselfestigkeit in Abhängigkeit von der Größe.

der mehrdimensionale Zugspannungszustand. In der vorliegenden Zusammenstellung haben sogar die Proben mit hoher Spannungsspitze bei gleicher elastischer Querdehnung die höhere Kerbwechselfestigkeit gegenüber solchen, mit gleichmäßiger Verteilung. Das sind wirkliche Versuchsergebnisse und lassen sich nicht übergehen.

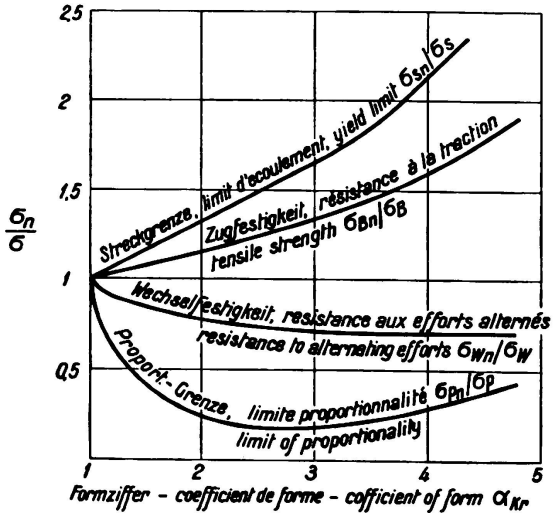


Fig. 5.
Relative Zu- oder Abnahme verschiedener Festigkeitsgrenzen mit zunehmender Spannungsspitze (Formziffer α_{kr}).

Zur erniedrigenden Wirkung des mehrdimensionalen Spannungszustandes auf die Wechselfestigkeit kommt diejenige der absoluten Größe des Konstruktionsteiles hinzu. Figur 4 zeigt, wie bei proportional gehaltener Kerbtiefe $\frac{t}{D/2}$ und Kerbschärfe $\frac{d}{\rho}$ *die zunehmende Größe des Probendurchmessers eine ständige Abnahme der Wechselfestigkeit hervorruft.*

Die *Proportionalitätsgrenze* unterliegt ebenfalls sehr dem Einfluß der Gefügekohäsion.[1] Ihr Verhalten bei ungleichförmigen Spannungen ähnelt daher demjenigen der Wechselfestigkeit. Auf die *Streckgrenze* hingegen (als ausgeprägten Gleitwiderstand) wirkt umgekehrt die mehrdimensionale Beanspruchung erhöhend, die Spannungsspitze aber erniedrigend, besonders dann, wenn die Abmessungen groß sind. Fig. 5.

Diese zum Teil gegenläufigen Einwirkungen mögen als Erklärung dafür angesehen werden, daß häufig über sich widersprechende Meßergebnisse berichtet wird.

Mehrdimensionale Spannungen entstehen in der Konstruktion

1. infolge äußerer Gestaltung,
2. infolge Schrumpfung von Schweißverbindungen.

Wann wirken sie nachteilig? — Ist z. B. durch Schrumpfung an irgend einer Stelle ein mehrdimensionaler Zugspannungszustand vorhanden, so finden wir in

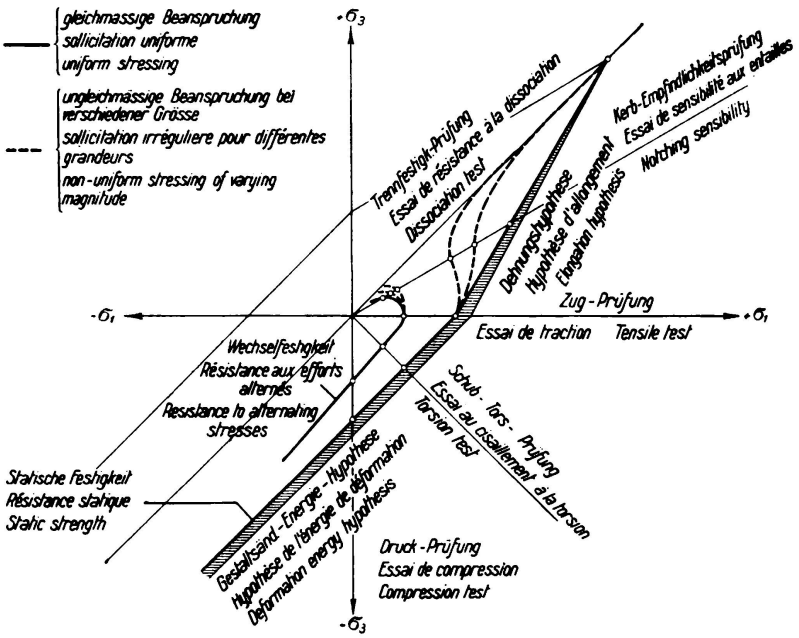


Fig. 6. Übersicht mehrdimensionaler Festigkeitsprüfung.

nächster Nachbarschaft Druckspannungen, weil ein inneres Gleichgewicht im Konstruktionskörper vorhanden sein muß. Bei Anwendung des Gesetzes vom Widerstandsmittel, welches ja einer Durchschnittswirkung entspricht, ist zu erwarten, daß die Streckgrenze in einem solchen Fall nicht wesentlich beeinflußt wird. Und doch *wird bei großen Abmessungen die statische Festigkeit infolge der Spannungsspitze etwas erniedrigt und die Wechselfestigkeit infolge mehrdimensionaler Zugspannung wesentlich herabgesetzt werden.*

Die geschilderten Einflüsse sind bei verschiedenen Werkstoffen verschieden groß. Die *Entwicklung der Werkstoffprüfung* muß dem Rechnung tragen. Die klassischen Prüfungen der Druck-, Schub-, Zugfestigkeit bei zügiger und wechselnder Beanspruchung liegen nach Fig. 6 in dem Quadranten aus größter Zug-Hauptspannung und größter Druck-Hauptspannung. Die neuzeitlichen Prüfungen auf *Trennfestigkeit* und *Kerbempfindlichkeit* bei statischer oder wechselnder

Beanspruchung liegen im reinen Zugquadranten.[6] Mit ihrer Hilfe lassen sich die Werkstoffe nach ihrem Verhalten unter mehrdimensionalen Zugbeanspruchungen bei verschiedener Körpergröße beurteilen. Das Prüfungsergebnis gibt dann einen ungefähren Maßstab, um wieviel für irgendeinen Werkstoff der Rechnungswert auf Grund des Widerstandsmittels unterschritten sein wird. Die Einführung des von *Klöppel* geforderten Proportionalitätsfaktors zwecks Korrektur wird hiermit ermöglicht.[7]

Die vorgetragenen Ergebnisse neuerer Forschung sollen für die Berechnung und Gestaltung richtungweisend sein. Sie berühren nicht die Frage, in welchem Ausmaße sich im Brückenbau, besonders bei statisch unbestimmten Systemen die aufgebrachten Lastveränderungen als wirkliche Dauerwechselbeanspruchungen im Sinne der Werkstoff-Prüfung auswirken. Dies bleibt eine stets zu beachtende Sonderaufgabe des Brückenbaues.

---

[6] *W. Kuntze:* Kohäsionsfestigkeit. Berlin 1932, J. Springer. Auch Sonderheft XX der Mitt. deutscher Materialprüfungsanstalten. (Die Methodik der Kohäsionsprüfung ist inzwischen weiterentwickelt worden.)

[7] *K. Klöppel:* Gemeinschaftsversuche zur Bestimmung der Schwellfestigkeit voller, gelochter und genieteter Stäbe aus St. 37 und St. 52. Der Stahlbau, Bd. 9 (1936) S. 97/119.

I 4

Die Zähigkeit des Stahles, die Wirkung der raschen und der wiederholten Beanspruchungen.

La ductilité de l'acier, l'action des efforts rapides et des efforts répétés.

The Ductility of Steel; the Effect of Rapidly Imposed and Repeated Loading.

R. L'Hermite,
Directeur adjoint des Laboratoires du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris.

Die meisten Arbeiten, die sich auf die Zähigkeit des Stahles und der Auswirkung derselben auf die Sicherheit der Bauwerke beziehen, heben den Einfluß des Faktors „Zeit" nicht deutlich genug hervor. Es besteht kein Zweifel, daß dieser Faktor eine hervorragende Rolle spielt, besonders in jenen Fällen, wo die äußeren Kräfte rasch wirken, d. h. wenn die Belastungs- und Dehnungsgeschwindigkeiten groß sind. Dies tritt ein für dynamische Lasten, für welche eine Spannungsangleichung im allgemeinen nicht eintritt.

Für einen durch die Kraft F beanspruchten festen Körper ist die relative Formänderung zwischen zwei Punkten die Summe von zwei Formänderungen: einer elastischen, die mehr oder weniger rasch mit der Kraft F wieder verschwindet, und einer zweiten bleibenden oder plastischen Formänderung. Damit tritt die Frage der elastischen Nachwirkungen auf, die von *Volterra* in der Physik eingeführt wurde. In diesem Sonderfall werden wir sagen, daß der Angriff einer kleinen Kraft dF nicht unmittelbar die gesamte Deformation, elastische und plastische, erzeugt. Bei der Belastung und bei der Entlastung tritt eine zeitliche Verschiebung in der Verformung ein; die Folge davon ist ein Deformationsrückstand abhängig von einer Funktion Φ der elastischen Nachwirkung. Der Wert der Funktion Φ nimmt in unbestimmter Weise mit der Zeit ab. Unter diesen Bedingungen lautet der Ausdruck der elastischen Formänderung wie folgt:

$$x(t) = \int_0^t M[(t-r), F]\, N(F) \cdot \frac{dF}{dr}\, dr$$

der Ausdruck der plastischen Deformation lautet:

$$x'(t) = \int_0^t \mathfrak{M}[(t-r), F]\, \mathfrak{N}(F) \cdot \frac{dF}{dr}\, dr$$

Der erste Ausdruck gilt für alle Fälle der Belastung und der Entlastung; der zweite Ausdruck ist nur in dem Falle gültig, wo $\frac{dF}{dr}$ positiv ist. Im Falle der wiederholten Belastung, beispielsweise, wird die plastische Formänderung bei der ersten Belastung erreicht, sie kann in erster Annäherung durch eine Anfangskonstante ausgedrückt werden.

Für M(t) ergibt die Rechnung in erster Annäherung $M = 1 - e^{-\lambda t}$ und für N eine von der Beschaffenheit des betrachteten Körpers abhängige Funktion. In gleicher Weise haben wir

$$\mathfrak{M} = \alpha - \beta \cdot e^{-\mu t}.$$

Auf diesem Wege erhalten wir eine gewisse Anzahl von Ausdrücken, deren Anwendung geläufig ist:

Plastisches Fließen unter konstanter Last

$$x'(t) = [\alpha t + \beta (1 - e^{-\mu t})]\, \sigma(F).$$

(Diese Formel stimmt genau mit jener von Professor *Roš* auf experimentellem Wege ermittelten Formel.)

Elastische Deformation unter einer nach bestimmtem Gesetze wachsenden Last

$$x(t) = \frac{F(t)}{E} - \frac{1}{E} \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{dF}{dr} \cdot dr$$

Für den Fall einer linear zunehmenden Last hat man:

$$x(t) = \frac{p}{E}\left(t - \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)$$

das erste Glied stellt die gesamte elastische Formänderung und das zweite Glied die Verzögerung oder elastische Hysteresis dar.

Die Formänderung unter einer mit der Zeit sinusförmig veränderlichen Kraft

$$x(t) = \frac{p}{E} \cdot \sin \varkappa\eta t - \frac{\varkappa\eta p}{E} \cdot \frac{\lambda \cos \varkappa\eta t + \varkappa\eta \sin \varkappa\eta t}{\lambda^2 + \varkappa^2\eta^2}$$

Das zweite Glied stellt die Abnahme der Schwingweite der Formänderung in Funktion der Frequenz dar. Durch den Vergleich dieses zweiten Gliedes mit den experimentellen Ergebnissen bei wiederholter Biegung kann der Beiwert λ berechnet werden. Für einen Kohlenstoff-Stahl mit einer Bruchgrenze von 60 kg/mm² fanden wir den Wert λ gleich $5{,}25 \cdot 10^3$.

Die gesamte Formänderung unter einer wachsenden Last ist durch den Ausdruck gegeben:

$$X(t) = \frac{F(t)}{E} - \frac{1}{E} \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{dF}{dr}\, dr$$

$$+ \alpha \int_0^t \mathfrak{N}(F)\,(t - r) \frac{dF}{dr}\, dr + \beta \int_0^t \mathfrak{N}(F)\,(1 - e^{-\mu(t-r)}) \frac{dF}{dr}\, dr$$

Die genaue Betrachtung dieser Funktion zeigt, daß die plastische Formänderung für eine bestimmte Gesamtlast mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit abnimmt. Der Fall der raschen Belastungszunahme tritt für die Bauwerke sehr häufig auf; es ist also augenscheinlich, daß für ein gleiches Bauwerk verschiedene Anpassungsfähigkeiten und Plastizitätsgesetze vorausgesetzt werden müssen, je nachdem es sich um einen Stoß oder um eine langsame Belastung handelt.

Experimentelle Untersuchungen bezüglich dieser Fragen haben ferner gezeigt, daß für den Fall einer harmonisch wiederholten Belastung der Elastizitätsmodul mit der Zeit veränderlich ist. Wir haben überdies beobachtet, daß diese Änderung von der Schwingweite der Belastung abhängt. Für eine kleine Belastung nimmt der Beiwert λ ab und nähert sich dem Endwert λ; der Körper paßt sich den Beanspruchungen an, denen er unterworfen ist. Im Gegensatz dazu weist der Quozient λ eine Zunahmetendenz auf, sobald die Schwingweite der Kraft eine genau bestimmte Grenze überschreitet. Dieser Grenzwert zwischen den beiden Erscheinungen ist ungefähr gleich der Dauerfestigkeit, die für den gleichen Körper in unabhängiger Weise gemessen worden ist. Man findet hier die bisher fehlende Verbindung zwischen der Verformung und dem Bruch für den Fall der wiederholten Belastung. Dies stimmt übrigens mit den Messungen der Fähigkeit der Milderung überein; nach diesen Messungen nehmen die logarithmischen Dekremente der Schwingungen, hervorgerufen durch aufeinander folgende Impulse ab, wenn man sich unterhalb der Dauerfestigkeitsgrenze, und zu, wenn man sich oberhalb dieser Grenze befindet.

Diese Theorie gibt uns die Möglichkeit, die Frage der Fortpflanzung der Schwingungen in festen Körpern zu studieren. Fügen wir bei, daß mit Rücksicht auf die hohen Schwingungszahlen und die geringen Schwingungsweiten der akustischen Schwingungen z. B., die plastischen Erscheinungen bezüglich der Fortpflanzung eine eingeschränkte Rolle spielen. Einzig die elastische Hysteresis kann eine gewisse Bedeutung haben. Aus unseren ersten Gleichungen folgt die allgemeine Gleichung der Fortpflanzung einer Erschütterung:

$$\delta \frac{d^2 u}{dt^2} = E \frac{d^2 u}{dx^2} + \int_0^t e^{-\lambda (t-r)} \frac{d^3 u}{dx^2 dr} \, dr$$

und

$$\delta \frac{d^2 u}{dt^2} = E \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{E}{\lambda} \cdot \frac{d^3 u}{dx^2 dt} - \frac{E}{\lambda^2} \frac{d^4 u}{dx^2 dt^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{E}{\lambda^n} \frac{d^{n+2} u}{dx^2 dr^n} + \ldots$$

Da λ einen hohen Wert hat, kann obige Gleichung auf die beiden ersten Glieder des Ausdrucks rechts beschränkt werden. Die Gleichung stimmt alsdann mit der bereits bekannten Gleichung der Fortpflanzung in zähen Medien überein, wobei $\frac{E}{\lambda}$ den Zähigkeitswert darstellt.

I 5

Kritische Betrachtungen zur Plastizitätstheorie.

Considérations critiques sur la théorie de la plasticité.

Critical observations on the theory of plasticity.

Oberbaurat Dr. v. Kazinczy,
Budapest.

Im Jahre 1914 veröffentlichte ich in einer Ungarischen Zeitschrift[1] als Erster die Ansicht, daß bei der Bestimmung der wahren Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke auch die bleibende Formänderung des Stahles berücksichtigt werden müsse. Da diese wahre Tragfähigkeit größer ist als diejenige, die sich nach der Elastizitätstheorie ergibt, dürfte auch bei der praktischen Berechnung der Bauwerke die bleibende Formänderung berücksichtigt werden. In der Zwischenzeit wurde das Problem von verschiedenen Seiten besprochen, beleuchtet, und durch Versuche überprüft. Im folgenden soll ein kritischer Überblick über das ganze Gebiet gegeben werden.

Die neue Berechnungsweise wird mit verschiedenen Namen bezeichnet. Unter *Plastizitätstheorie* ist eine Berechnungsweise zu verstehen, bei der auch die bleibenden Formänderungen berücksicht werden, im Gegensatz zur Elastizitätslehre, die nur auf die elastischen Formänderungen aufgebaut ist. Daneben wird auch die Bezeichnung *Traglastverfahren* verwendet; diese Bezeichnung ist jedoch nicht eindeutig, da unter Traglast manche z. B. *Stüssi* die höchste tragbare Last, dagegen *F. Bleich, Maier-Leibnitz* und ich, in meinen früheren Veröffentlichungen, eine „praktisch" tragbare Last verstehen. Die Stellungnahme in unserem Problem ist durch die Beurteilung einiger Hauptprinzipien bedingt. *Was ist der Zweck unserer Berechnung von Bauwerken?* Es ist die Verwendbarkeit während des Gebrauches. Mit Rücksicht auf Ungenauigkeiten der Berechnung, der Herstellung, der Materialeigenschaften und der Belastung müssen wir unsere Bauwerke mit einer gewissen „Sicherheit" gegen das Unbrauchbarwerden bemessen. Ich habe am Wiener Kongreß[2] ausgeführt, daß der Grad der Sicherheit eine Frage der Wirtschaftlichkeit sei. Man soll einerseits möglichst billig bauen, andererseits so, daß der mögliche Schaden unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit nicht größer wird, als die durch die kleineren Abmessungen der Bauelemente erzielten Ersparnisse. Die Sicherheit soll also umso größer sein, je größer der Schaden sein kann. Durch diese Überlegungen erklärt sich, warum wir uns mit einer 1,6 bis 1,8fachen Sicherheit in solchen Fällen begnügen, wo das Unbrauchbarwerden zunächst nur in unzulässig großer Biegung in Erscheinung tritt, und eine etwa dreifache Sicherheit dort anwenden, wo ohne vorherige Anzeichen ein sofortiger Einsturz die Folge der Überbeanspruchung eines

Baugliedes ist (z. B. Knicken). Bei Baugliedern, die durch starke Formänderung unbrauchbar werden, streben wir eine genügende Sicherheit gegen unzulässig große Formänderung an und nicht gegen Bruch. Um eine allgemeine Regel für die Größe der zulässigen Durchbiegung aufzustellen, könnte man vielleicht sagen, daß jene Belastung als Grenzlast (kritische Last, bzw. praktisch tragbare Last) betrachtet werden soll, bei welcher die Durchbiegung bei gleichmäßig anwachsender Belastung rasch anzuwachsen beginnt. Ich würde also bei den Versuchen von *F. Stüssi* und *C. F. Kollbrunner*[3] (Fig. 1) die Last 1,71 t als Grenzlast bei den Balken auf zwei Stützen bezeichnen und nicht 2,35 t. Von diesem Standpunkt aus betrachtet, klingen auch die Schlußfolgerungen aus diesen Versuchen etwas anders, nämlich daß die Grenzlast (also nicht die wahre Traglast) in allen auch den extremen Fällen, bei elastisch eingespannten Balken eine zweifache* ist. Eine Ausnahme liegt vor bei zu großer Nachgiebigkeit der Einspannung, weil in diesem Fall die elastischen Durchbiegungen nach Erreichen der Fließgrenze in der Mitte so schnell anwachsen, daß der unzulässige Wert noch vor Erreichen der Fließgrenze über den Innenstützen erreicht wird. Fig. 2 zeigt wie sich die Durchbiegungslinien bei verschiedenen Einspannungsgraden eines idealplastischen Balkens unter gleichmäßig verteilter Belastung gestalten. Man sieht daraus, daß in Einzelfällen auch die Formänderungen zu berücksichtigen sind.

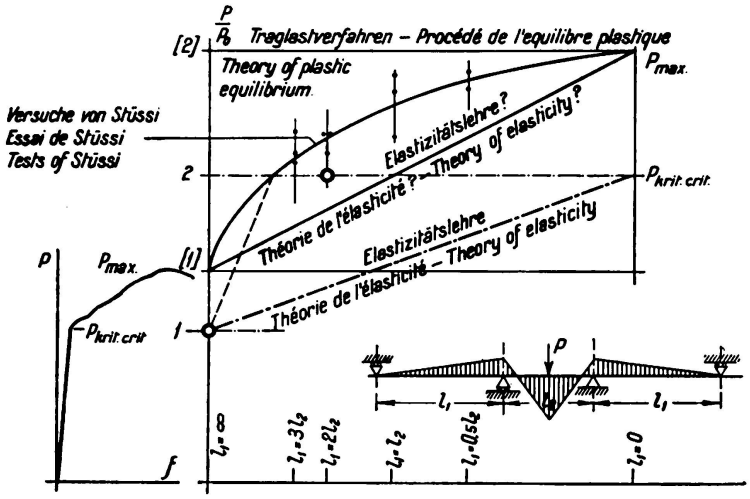


Fig. 1,

Zur Einhaltung des gewünschten Sicherheitsgrades bei der Bemessung bestehen zwei Wege: Entweder setzen wir die mit dem Sicherheitsfaktor multiplizierte Last ein oder

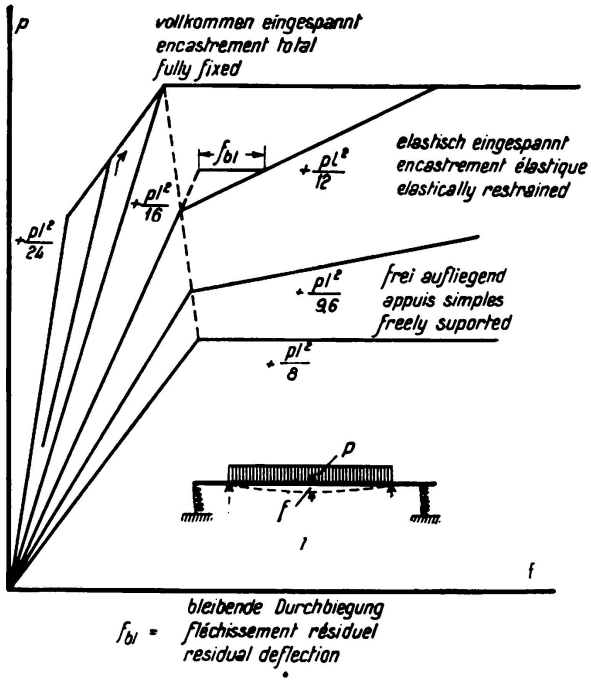


Fig. 2.

* Einfacher Balken auf zwei Stützen $P_{T'} = 1{,}71$ t; $P_V = 2{,}35$ t; $\frac{3{,}46}{1{,}71} = 2{,}02$.

Durchlaufender Balken $l = 160 - 60 \cdot 120$; $P_{T'} = 3{,}46$ t; $P_V = 3{,}82$ t; $\frac{3{,}82}{2{,}35} = 1{,}62$.

$P_{T'}$ = Grenzlast, P_V = Traglast.

wir lassen eine durch den Sicherheitsfaktor dividierte Grenzspannung als zulässige Spannung zu. Der letztere Weg ist üblich. Das Verhältnis der Grenzspannung zur zulässigen Spannung sollte also den Sicherheitsgrad darstellen. Das wäre richtig, wenn die Spannungen bis zur Grenzlast geradlinig wachsen würden, was aber oft und bei statisch unbestimmten Tragwerken in der Regel nicht der Fall ist (Spannungsausgleich). Wenn wir mit dem Sicherheitsbeiwert multiplizierten Spannungen rechnen würden, wäre der Spannungsausgleich, der ja erst oberhalb der zulässigen Spannung eintritt und deshalb nur für die Beurteilung der Sicherheit nicht der tatsächlichen Beanspruchung maßgebend ist, verständlicher.

Um die Grenzbelastung statisch unbestimmter Träger theoretisch zu bestimmen, hat man wegen der mathematischen Schwierigkeiten einen Stoff mit idealen Eigenschaften, d. h. einem idealisierten Spannungs-Dehnungsdiagramm zugrunde gelegt. Ferner wurde angenommen, daß der Querschnitt während der Formänderungen eben bleibe und daß sich der Fließvorgang von den Randfasern aus ins Innere des Balkens allmählich ausbreite. Nach dieser Theorie kann sich ein auf Biegung beanspruchter Querschnitt nur dann ohne weitern Zuwachs der Momente weiter verformen, wenn er bis zur Nullinie plastisch geworden ist. Zur plastischen Gelenkwirkung gehört also ein unendlich großes Biegungsmaß. Bei Flußstahl kann dieses wegen der Verfestigung nicht erreicht werden. Aus diesen Gründen untersuchten in neuerer Zeit einige Forscher die Entstehung der plastischen Verformung näher, insbesondere diejenigen Fälle, wo das Spannungsfeld nicht gleichmäßig ist, die Fließerscheinung nicht stetig fortschreitet, sondern wo die weniger beanspruchten Teile die Formänderung der plastizierten Elemente verzögern (Arbeiten von *W. Kuntze*[4], *W. Prager*[5] und *J. Fritsche*[6]: Neuere Plastizitätstheorie). Die Beobachtung bestätigte jedoch diese Theorie nicht. Die Verzögerung der Fließfiguren geht nicht so weit, daß der Balken auf einmal bis zur Nullinie fließt. Dies ist auch aus den Bildern im Werke *Nádai's* der „Bildsame Zustand der Werkstoffe", S. 127, Fig. 230 zu ersehen: Die Fließerscheinungen breiten sich allmählich nach innen aus. Dagegen kann man bei I-Balken beobachten, daß die Fließfiguren auf einer Flanschhälfte auf einmal auftreten. *Rinagl*[7] behauptet dagegen, daß die Verzögerung des Fließens in dieser Auffassung ein Irrtum und auf eine obere Fließgrenze zurückzuführen sei, die sich bei Biegung immer auswirke, dagegen bei einer Zugprobe nur undeutlich in Erscheinung trete. Ich teile auch die Meinung von Herrn Prof. *Rinagl* nicht, da ich selbst die Verzögerung des Fließens bei ungleichmäßigem Spannungsfeld in Fachwerkstäben beobachten konnte, worüber ich weiter unten berichten werde. Nach allen diesen Theorien führt die Berück-

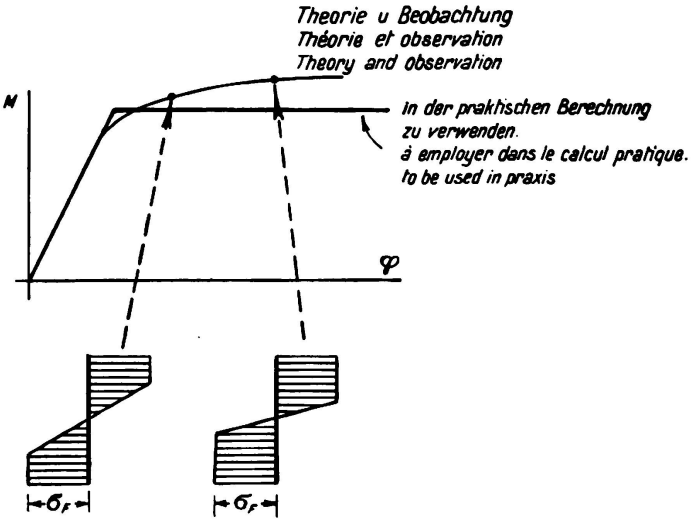


Fig. 3.

sichtigung der wahren Stoffeigenschaften zu komplizierten Berechnungen. Da aber unser Endziel die Bemessung von Tragwerken und nicht der theoretische Nachweis von Versuchsresultaten ist, müssen wir eine einfache Rechnungsweise finden. Dies kann geschehen, wenn wir auch bei Biegebeanspruchung einen scharfen Übergang vom elastischen in den plastischen Zustand voraussetzen.

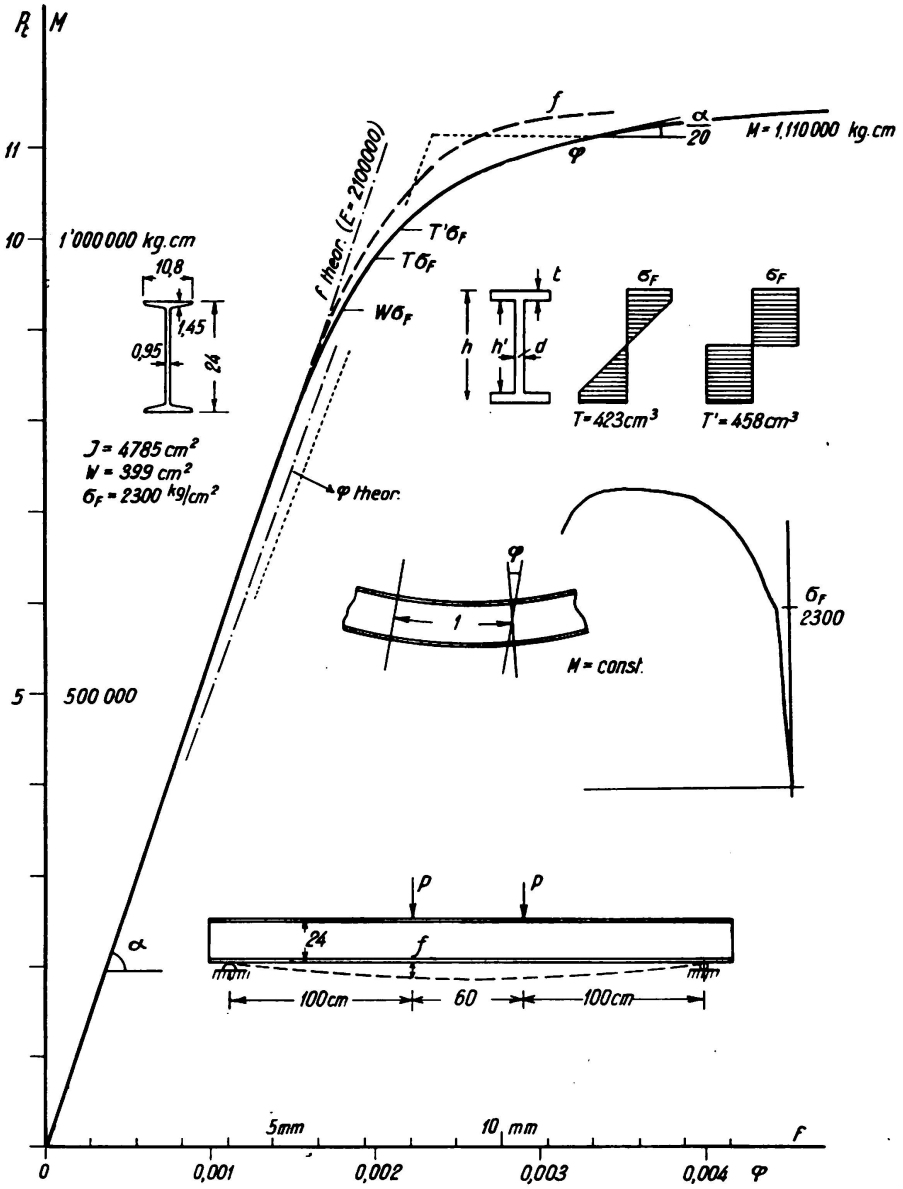


Fig. 4.

Maier-Leibnitz[8] hat gezeigt, wie man einfache Aufgaben mit der wahren Momenten-Verformungslehre lösen kann; ein praktisches Verfahren jedoch können wir nur auf die vereinfachte Deutung aufbauen (Fig. 3). *Maier-Leibnitz* schlägt vor, jenes Moment als Grenzmoment zu betrachten, bei dem die bleibende Verformungsmomentenlinie die stärkste Krümmung zeigt. Ich würde dagegen vorschlagen, jenen Wert als Grenzmoment zu betrachten, bei welchem die bleibende Verbiegung zwanzigmal so groß ist als die elastische. Zur weitern Untersuchung dieser Frage habe ich einen I-Balken ung. NP 24 (W = 399 cm³),

der zur bessern Beobachtung der Fließerscheinungen mit Lack überzogen war, über die Fließgrenze hinaus belastet. Die Biegelinie war praktisch bis $\sigma = 2250$ kg/cm² gerade (Fig. 4). Am gezogenen Flansch erschienen die Fließfiguren bei 2500 kg/cm², während am Druckflansch offenbar aber auch infolge einer örtlichen Unebenheit schon bei $\sigma = \frac{M}{W} = 2120$ kg/cm² zu beobachten gewesen waren. Bei $\frac{M}{W} = 2800$ kg/cm² war jener Grad der Verformung erreicht, den ich als Kennzeichen des Grenzmomentes eingeführt habe. Der Balken wurde aus der Biegemaschine genommen, genau untersucht und photographiert (Fig. 5). Bei dem mit gleichbleibendem Höchstmoment beanspruchten Teil des Trägers wurde ungefähr die Hälfte der Gurtfläche durch Fließfiguren bedeckt. Die Fließfiguren reichten entgegen theoretischen Überlegungen bis in die Nähe der Nullinie. An einem nach dem Versuch aus einem unbelasteten Ende herausgearbeiteten Zugstab wurde die Fließgrenze zu 2300 kg/cm² bestimmt bei sehr kleiner Fließlänge. Aus diesem Versuch ist zu schließen, daß das Grenzmoment nicht theoretisch, sondern empirisch bestimmt werden muß. Wahrscheinlich ist, daß Grenzmoment und Fließgrenze nicht in einem einfachen Zusammenhang miteinander stehen, da Querschnittsform und Materialeigenschaften von Einfluß sind. Sind für bestimmte Querschnitte und Stahlsorten diese Grenzmomente empirisch festgestellt, so steht der Anwendung der neuen Betrachtungsweise nichts mehr im Weg.* Haben wir uns entschlossen, mit der idealisierten Biegelinie (M-φ-Diagramm) zu rechnen, dann ist die Berechnung der Tragwerke nach folgenden Regeln durchzuführen.

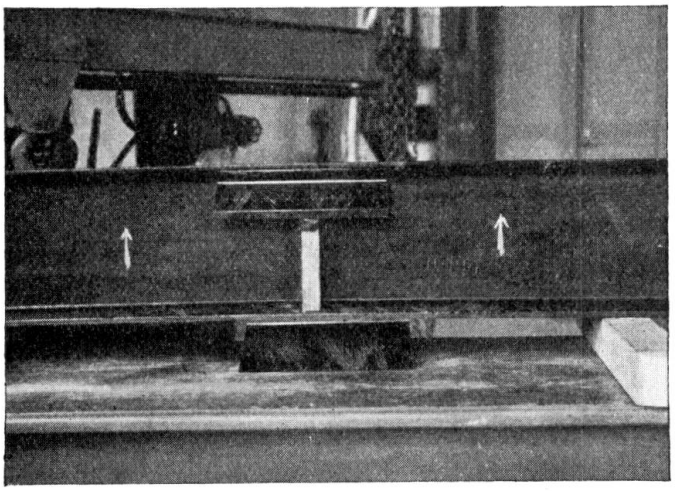


Fig. 5.

1. *Auf Biegung beanspruchte statisch bestimmte Tragwerke.*

Die Grenze des Tragvermögens wird nicht dann erreicht, wenn in der äußersten Faser die Fließgrenze erreicht wird, sondern wenn der „Balken" zum Fließen kommt. Das Tragmoment ist nicht $M = W \cdot \sigma_F$ sondern $M = T \cdot \sigma_F$, wobei T etwa 6—20 % größer ist als W und vorläufig durch Versuche bestimmt werden muß.

2. *Statisch bestimmte Fachwerkträger.*

Die Berechnung bleibt gleich wie bisher. Die Nebenspannungen aus der Steifigkeit der Knotenpunkte können außer Acht gelassen werden. Bei Druck-

* Für die rechnerische Bestimmung der Grenzmomente liegen Vorschläge von *v. Kazinczy*[9], *Kist*[10], *Fritsche*[11] und *Kuntze*[4] vor, die jedoch sämtliche geringere Werte für das Tragmoment ergeben haben, als meine Versuche.

kräften ist jedoch für die Knicklänge auch in der Fachwerkebene die ganze theoretische Stabwerklänge einzusetzen. Druckstäbe sind mit einer größeren Sicherheit zu bemessen als Zugstäbe, da bei Überschreiten der Knicklast der Einsturz des Tragwerkes zu befürchten ist.

3. *Die Berechnung der Anschlußnieten.*

Diese erfolgt wie bisher, d. h. die gesamte Stabkraft wird auf alle Anschlußnieten gleichmäßig verteilt. Hier hat die Praxis und die Erfahrung die Richtigkeit der Plastizitätstheorie vollkommen bestätigt. Man sollte aber die Anschlußnieten bzw. Schweißnähte nicht aus der gerechneten, sondern aus der größtzulässigen Stabkraft bestimmen, damit bei evtl. Überanstrengung nicht der Anschluß, sondern der Stab zum Fließen kommt. Wegen des Ausgleichs der Nebenspannungen in den Stäben selbst ist eine biegungsfeste Ausbildung der Anschlüsse wünschenswert.

4. *Die Berechnung durchlaufender Balken.*

Bei Balken aus einem einzigen Walzprofil (konstanter Querschnitt) bestimmt man in jeder Öffnung die M_0-Momente wie bei einfachen Balken und legt die Schlußlinie so ein, daß negative und positive Momente gleich groß werden. Der Balken ist dann für das größte der so berechneten Momente zu bemessen.

Bei Balken, deren Querschnitte durch Gurtplatten dem Momentenverlauf angepaßt sind, hat eigentlich die Berechnung nach der Plastizitätslehre nicht mehr viel Sinn. Wenn man trotzdem mit Rücksicht auf größte Wirtschaftlichkeit auch hier das neue Verfahren anwenden will, so ist die Schlußlinie willkürlich so einzuziehen, daß die Herstellungskosten minimal werden. Als Regel ist zu betrachten, daß die negativen Momente beliebig verkleinert werden können, während ein Fließen in Balkenmitte immer mit großen Durchbiegungen verknüpft ist.

Bei beweglicher Belastung sind die Momentengrenzwerte zunächst nach der Elastizitätslehre zu bestimmen, worauf die Schlußlinie im Sinne des Momentenausgleichs beliebig verschoben werden kann.[12 13]

Eines der wichtigsten Ergebnisse der Plastizitätstheorie ist das, daß bleibende Stützensenkungen nicht mehr berücksichtigt werden müssen. Die Nachgiebigkeit elastisch senkbarer Stützen ist dagegen weiter in ihren Auswirkungen zu verfolgen.

Walz- und Schrumpfspannungen brauchen nicht berücksichtigt werden, wohl aber Spannungen infolge ungleichmäßiger Erwärmung während des Gebrauches.[13]

Rechnet man mit stärkerem Momentenausgleich, besonders wenn er durch Fließen der Balkenmitte erfolgen soll, so ist es wünschenswert, den Druckgurt kräftiger auszubilden, damit der Fließvorgang sich im Zuggurt abspielt.

5. *Tragwerke aus biegungsfesten Stabzügen.*

Mehrere Autoren haben angegeben, daß in einem n-fach statisch unbestimmten Rahmentragwerk die Fließgrenze an n-Stellen erreicht werden könne, ohne daß dadurch das Tragwerk unbrauchbar würde. Man kann das Problem so auffassen, als ob an diesen Stellen Gelenke wären, an denen Momente von konstanter Größe wirken. Ich selbst habe diese Auffassung früher geteilt[14], muß sie jedoch heute etwas ändern. Damit ein solches Tragwerk unstabil werde, müssen so viel

Gelenke eingeschaltet werden, daß eine kinematische Kette entsteht. Bei der Bewegung drehen sich die Gelenke in einer bestimmten Richtung. Das Fließgelenk wirkt somit nur in einer Richtung als Gelenk, während es sich in der andern Richtung als vollkommen elastischer Trägerteil erhält. Diejenigen Fließgelenke, die eine entgegengesetzte Drehrichtung besitzen, als es in der kinematischen Kette sein sollte, sind daher nicht als Gelenke zu bewerten. So ist es möglich, daß in einem n-fach statisch unbestimmten Tragwerk die Fließgrenze an mehr als n-Stellen überschritten werden muß, bevor das Tragwerk unstabil wird.

Ein rahmenartiges Tragwerk ist dann unter einer gewissen Belastung mit Sicherheit tragfähig, wenn irgend eine mögliche den Gleichgewichtsbedingungen mit den äußern Kräften entsprechende Momentenlinie an keiner Stelle den Wert $M = T \cdot \sigma_{zul}$ überschreitet. Ein exakteres Verfahren kann analog zur Methode von Prof. *Cross* durchgeführt werden. Man bestimmt zuerst die Momente nach der Elastizitätslehre. An den Stellen, wo die Momente abgebaut werden sollen, denkt man sich das Tragwerk durchschnitten und führt hier zum Ausgleich entlastende Zusatzmomente ein. An Stellen, wo der Abbau schon durchgeführt ist, führen wir Gelenke ein, aber nur dort, wo ein Zusatz der Momente zu erwarten ist (Fig. 6). Der Hauptvorteil der Plastizitätslehre besteht darin, daß wir die Momente regeln und dadurch gefährlichere Stellen vor Überbeanspruchung schützen können. Im allgemeinen ist bei einem Rahmen die Säule der wichtigere Tragwerksteil. Es ist also möglich, durch Schwächung der Balken bei der Einspannung auch die Säule zu schonen, da der Balken nach Erreichen des Grenzmomentes der Einspannstelle keine weitern Momente mehr an die Säule abgeben kann. Das gefährliche Ausbiegen der Säule kann also durch ungefährliches Fließen der Balken an die Einspannstelle vermieden werden.

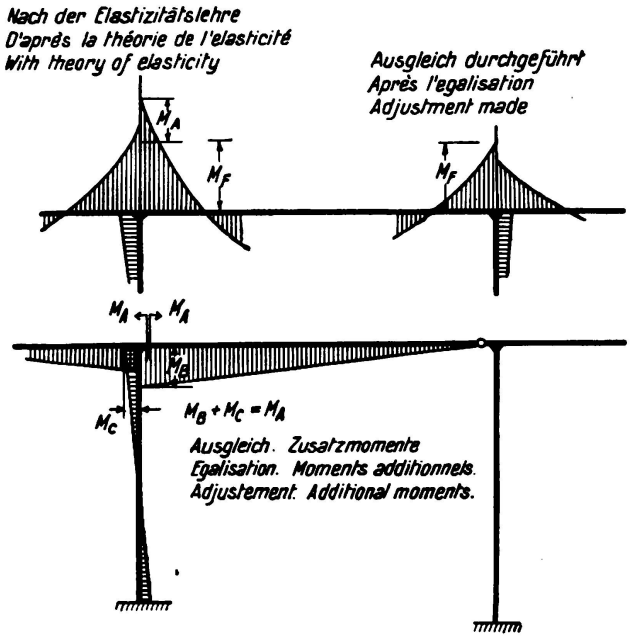


Fig. 6.

6. *Fachwerkträger.*

Äußerlich statisch unbestimmte Fachwerkträger werden so bemessen wie die Balken- und Rahmentragwerke. Die Fließerscheinungen spielen sich in einem Teile eines Stabes ab. Für den Ausgleich sollen aber nur Zugstäbe verwendet werden, da der Widerstand eines Druckstabes nach seinem Ausknicken sofort auf einen kleinen Wert zurückgeht, wie ich es schon in Lüttich[9] angegeben habe. In neuerer Zeit hat *E. Chwalla*[15] dieses Problem durchgearbeitet und auch mit Versuchen bestätigt, daß der Druckwiderstand sehr rasch abfällt. Bei innerlich

statisch unbestimmten Fachwerken kommt es nicht selten vor, daß es nach der Elastizitätslehre unmöglich ist, alle Stäbe voll auszunützen. So z. B. im Fachwerk der Fig. 7, wo nach der Elastizitätslehre das Teilsystem B nicht voll ausgenützt

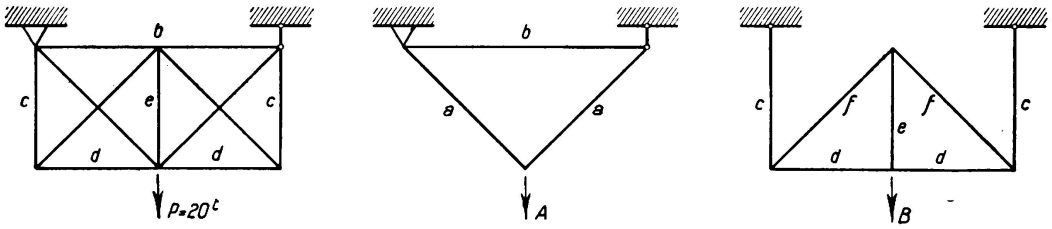


Fig. 7.

werden kann. Hier besitzt die Plastizitätslehre wirtschaftliche Vorteile, weil dann alle Stäbe voll ausgenützt werden können. Die Berechnung solcher Tragwerke ist normaler Weise sehr einfach. Man schaltet die überzähligen Zugstäbe aus und führt an ihrer Stelle die bekannten Kräfte $F \cdot \sigma_{zul}$ ein. Dabei sind die höchstbeanspruchten Zugstäbe, die also zuerst zum Fließen kommen, auszuschalten, wobei, wenn der Entscheid nicht durch eine einfache Betrachtung erfolgen kann, die Elastizitätslehre beizuziehen ist. Die Querschnitte sind so zu regeln, daß immer nur Zugstäbe zum Fließen gebracht werden und nie Druckstäbe zum Ausknicken.

Bei beweglicher Belastung sind besondere Methoden, beispielsweise diejenige von *E. Melan*[16], zu verwenden, mit der Einwendung allerdings, daß in den Druckstäben keine plastischen Formänderungen zuzulassen sind.

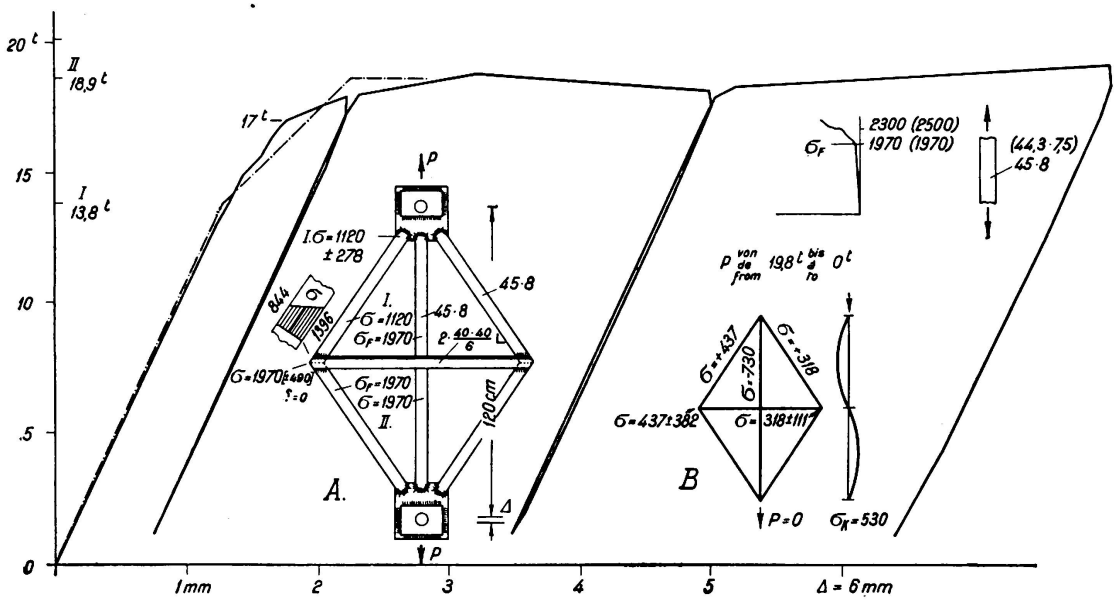


Fig. 8.

Um die theoretischen Erwägungen über die Plastizitätslehre bei Fachwerken nachzuprüfen, habe ich einige Versuche durchgeführt, über die kurz berichtet werden soll. Dabei habe ich zwei Arten von innerlich statisch unbestimmten Fachwerken untersucht, nämlich geschweißte und genietete, während *G. Grüning*

und *E. Kohl*[17] ihre Versuche an äußerlich statisch unbestimmten Trägern durchgeführt haben, bei denen die höchst beanspruchten Zugstäbe als Augenstäbe ausgebildet waren, sodaß Rückschlüsse auf die gewöhnlichen Knotenpunktverbindungen aus diesen Versuchen nicht gezogen werden konnten. Die Form der Versuchsfachwerke mit den Abmessungen und Resultaten ist aus Fig. 8 ersichtlich. Das Verhalten bei idealplastischem Stoff ist in Fig. 9 dargestellt. Man kann das Fachwerk aus zwei Grundsystemen A und B zusammengesetzt auffassen. Die Widerstände der einzelnen Systeme A und B sind als Ordinaten in Funktion der erzwungenen Längenänderungen aufgetragen. P_I sei als „erste Grenzlast" und P_{II} als „zweite Grenzlast" (= Traggrenze) bezeichnet. Nach der Entlastung bleiben die einzelnen Systeme nicht spannungslos. (Restkräfte der Fig. 9).

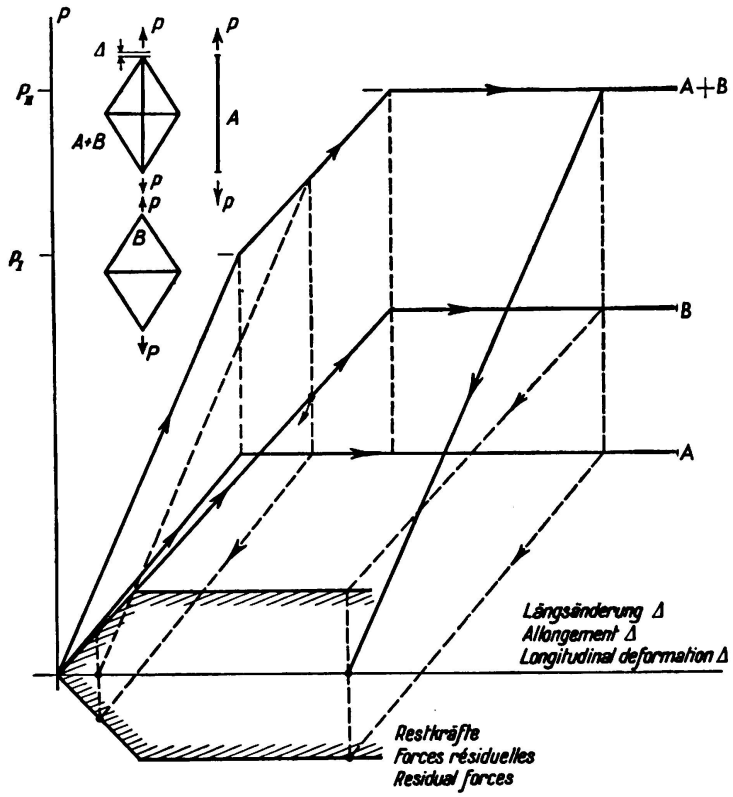


Fig. 9.

Die Festigkeitsuntersuchung des gewählten Baustoffes hat ergeben, daß der Bandstahl sehr weich war und mit anwachsender Spannung einen sehr großen Fließbereich besaß. Die Fließgrenze wurde zuerst im lotrechten Zugstabe erreicht (erste Grenzlast). Bei weiterer Belastung bleiben Spannungen in diesem lotrechten Stab konstant und wachsen nur in den übrigen Stäben, bis auch dort die Fließgrenze erreicht ist (zweite Grenzlast). Die in Fig. 8 auch eingetragenen theoretischen Nebenspannungen verschwinden nach heutiger Auffassung durch das Fließen. Bei der Entlastung verhält sich das Fachwerk vollkommen elastisch, die zurückbleibenden Spannungen sind in Fig. 8 ersichtlich. Der lotrechte Stab ist aber den bleibenden Spannungen von 730 kg/cm² nicht gewachsen, da er aus Bandstahl besteht und schon bei 530 kg/cm² ausknicken muß.

Dieses Ausknicken konnte auch am Versuchsstück beobachtet werden. Die ersten Fließlinien wurden in der Nähe der Mitte des lotrechten Stabes bei P = 14 t beachtet, das eigentliche Fließen begann im lotrechten Stab jedoch erst bei 17 t. Das Probestück hat eine beträchtliche Formänderung erlitten, trotzdem flossen nur ganz kurze Teile der Stäbe (Fig. 10). Die plastische Längenänderung ist somit auf gewisse Stellen begrenzt, wo sie dann einen stets gleichbleibenden prozentualen Wert erreicht. Die Längenänderung eines Flußstahlstabes muß man sich nach Fig. 11 vorstellen, wo K_I und K_{II} verschiedene erzwungene Längenänderungen sind. Die Linien e stellen elastische, die Linien p plastische Dehnungen dar. Die Traggrenze (zweite Grenzlast) stimmt mit dem

theoretischen Wert gut überein, was zeigt, daß die Schrumpfspannungen infolge der Schweißung ohne Einfluß auf die Tragfähigkeit sind. Sie beeinflussen ledigich den Beginn des Kräfteausgleichs.

Um die Höhe der Schrumpfspannungen zu bestimmen, habe ich weitere Versuchsstücke so herstellen lassen, daß während des Schweißens und Abkühlens an verschiedenen Stellen Dehnungen beobachtet wurden, wobei ich Schrumpfspannungen von 900 kg/cm² feststellen konnte. Eine Verzögerung der Fließerscheinungen, also eine obere Fließgrenze konnte nicht beobachtet werden; bei den schiefen Stäben mit großen Nebenspannungen ist das Fließen dann eingetreten, wenn die durchschnittlichen Spannungen die Fließgrenze erreicht haben. Diese Versuche scheinen also die neuere Plastizitätslehre zu unterstützen. Bei allen durchgeführten Versuchen konnte dagegen die ältere Fließbedingung

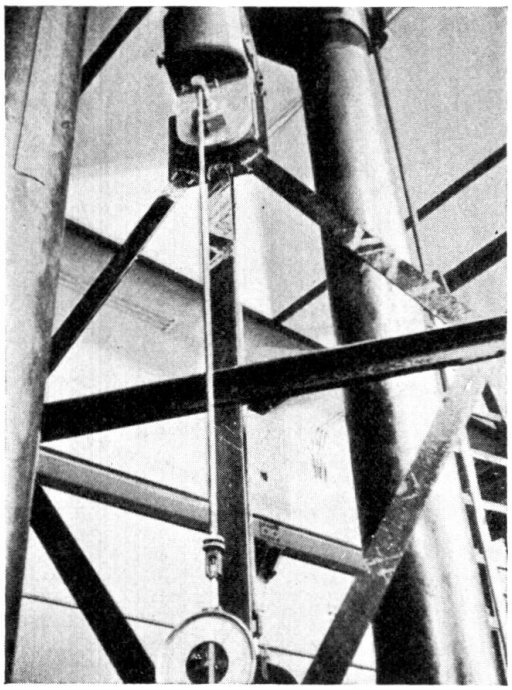


Fig. 10.

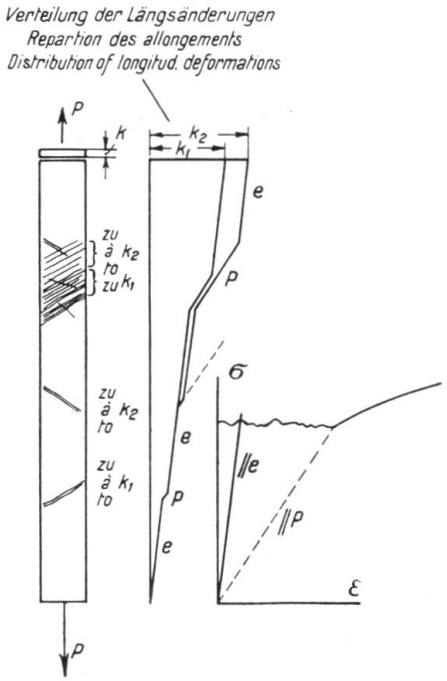


Fig. 11.

nicht beobachtet werden. Auf diese Versuche werde ich in einer ausführlichen Veröffentlichung in der Fachpresse zurückkommen.

Ein gleiches Fachwerk habe ich auch genietet herstellen lassen (Fig. 12). Infolge der etwas höheren Streckgrenze des verwendeten Bandeisens war die erreichte Höchstlast größer als beim geschweißten Träger (20,4 t gegen 19,1 t). Bei einer ersten Belastung war ein Nachgeben der Nietung festzustellen. Bei den weiteren Belastungen war das Verhalten elastisch. Trotz der Nietlöcher konnte die Fließgrenze im vollen Querschnitte erreicht werden.

Aus diesen Versuchen können wir folgende Folgerungen ziehen: Bei geschweißten statisch unbestimmten Fachwerken haben die Schrumpfspannungen nur einen Einfluß auf den Beginn des Kräfteausgleichs, dagegen nicht auf die Größe der kritischen Last. Es ist darauf zu achten, daß die Schrumpfspannungen

die Grundspannungen in den Zugstäben erhöhen und in den Druckstäben verkleinern. (Wahl des Arbeitsvorganges.).

In genieteten statisch unbestimmten Fachwerkträgern beginnt sich die plastische Dehnung im Anschluß auszubilden, wobei die Reibung die dazu notwendige Kraft etwas vergrößert. Von ähnlichem Einfluß könnte jedoch auch die Überhöhung der Fließgrenze am Lochrand oder die Verfestigung des Stahles infolge der Art der Nietung gewesen sein. Bei geringen Stablängen genügt eine

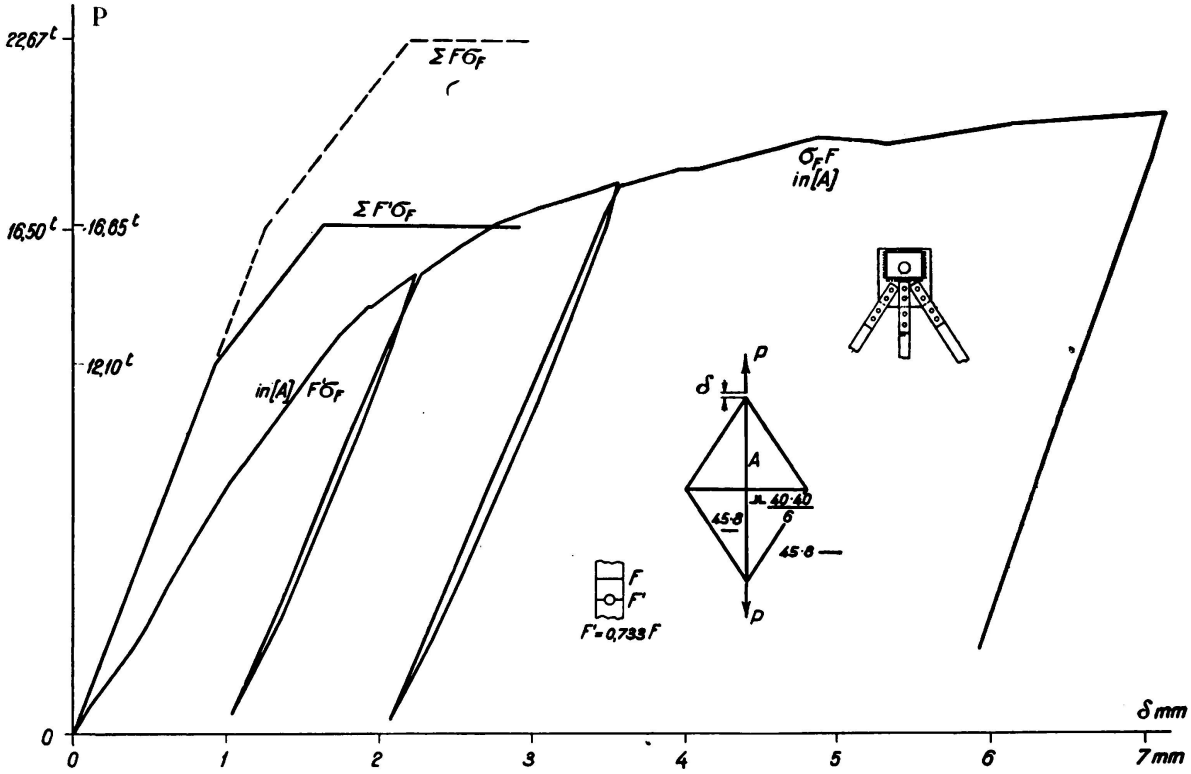


Fig. 12.

geringe Nachgiebigkeit des Anschlusses zum Kräfteausgleich. Die Stabanschlüsse sollen immer so stark sein, daß vor ihrer Zerstörung der volle Stab die Fließgrenze erreicht. Die Traggrenze eines genieteten Fachwerkes ist etwa diejenige, die die Plastizitätslehre aus den durch Nietlöcher nicht geschwächten Querschnitten ergibt, vorausgesetzt, daß kein Druckstab zum Ausknicken kommt. Mit Rücksicht auf die großen bleibenden Verformungen erhalten wir die praktische Traggrenze bei Abzug der Nietlöcher, und unter Inanspruchnahme des Kräfteausgleichs. Die Sicherheit wird dann so immer größer sein als bei geschweißten Tragwerken, die mit vollem Querschnitt berechnet werden.

Außer den Fachwerkträgern habe ich auch genietete Blechträger untersucht. Die Balken auf zwei Stützen wurden in den Drittelspunkten belastet. Der Biegewinkel des durch ein konstantes Moment beanspruchten Mittelteiles wurde gemessen. Die Versuchsresultate sind in Fig. 13 zu sehen. Bei der Bestimmung von J wurden die Nietlöcher nicht abgezogen. Die gemessene Durchbiegung ist etwas größer als die mit $E = 2100$ t/cm² berechnete, dagegen stimmt das Biegungsmaß bei der Entlastung (Elastisches Verhalten) gut damit überein. Nach einer zweitägigen Ruhepause erhöhte sich die Fließgrenze um 6 % und

der Träger verhielt sich rein elastisch. Als kritische Last fand ich für die empfohlene Annahme $d\sigma/d\varepsilon = 1/20$ E den Wert 14 t. Fig. 13 zeigt das

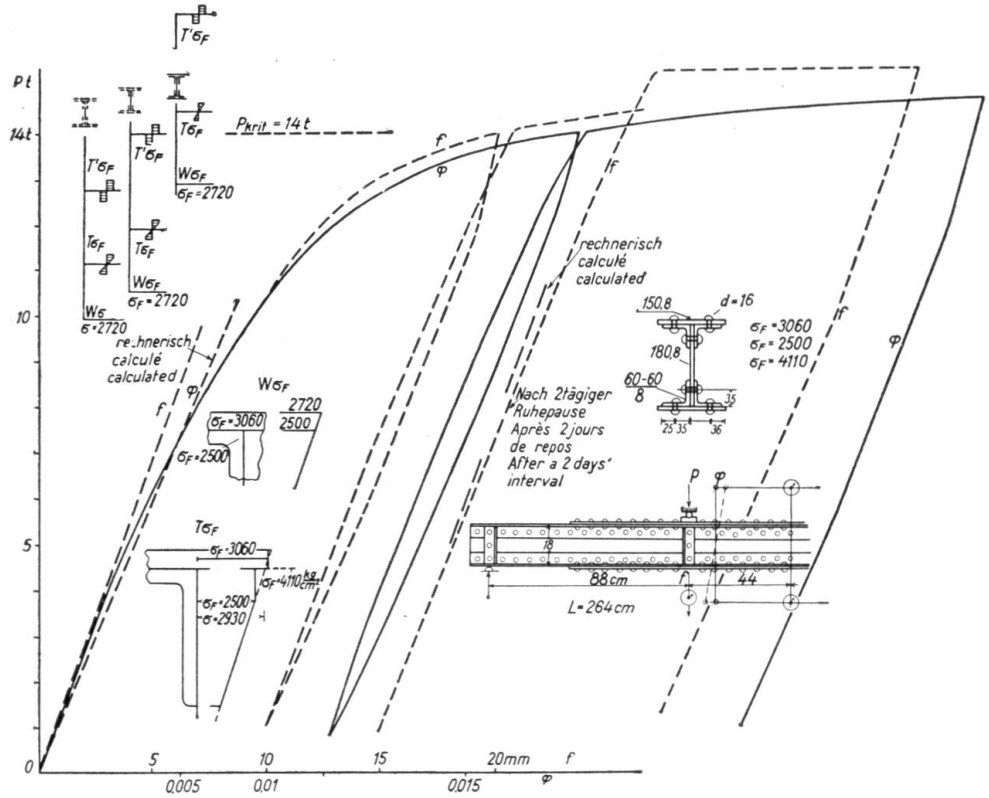


Fig. 13.

Resultat der Vergleiche dieses Versuchswertes mit den verschiedenen Auffassungen, wobei die kleinste Fließgrenze bei Winkeleisen mit 2500 kg/cm² eingesetzt wurde. Dadurch ergibt sich in der äußersten Faser der Gurtplatte eine

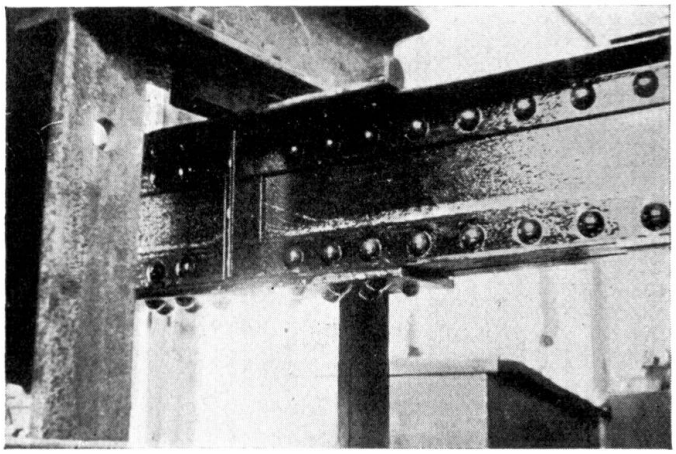


Fig. 14.

entsprechende größte Randspannung von 2720 kg/cm². Zur Bestimmung des Tragmomentes $T \cdot \sigma_{zul}$ habe ich den Zustand angenommen, wo die Gurtplatte die Fließgrenze erreicht hat. (Fig. 13.) Da bei diesem Versuch eine weitere

Unbekannte auftritt, nämlich mit welchen Werten die Nietlöcher zu berücksichtigen seien, habe ich Vergleichsversuche mit genieteten und geschweißten Trägern von gleichem Profil und Werkstoff durchgeführt. Die Resultate sind in Zahlentafel I zusammengestellt.

Zahlentafel I.

I-Träger geschweißt			I-Träger genietet d = 16 mm	
σ_F kg/cm²	Querschnitt mm		Querschnitt mm	σ_F kg/cm²
2680	152,6 · 13	Druckgurt	152 · 12,8	2680
2620	155 · 7,7	Zuggurt	154 · 7,7	2590
2750	60 · 60 · 6,1	4 L	60 · 60 · 6,1	2780
4280	182 · 8,2	Steg	183 · 8,6	4060
1 513 000		Kritisches Moment kg/cm laut Versuch	**1 266 000**	
Zug 1 180 000	Druck 1 420 000	$W\sigma_F$ (σ_F = Gurt)	Zug 1 170 000	Druck 1 140 000
		$W\sigma_F$ Nietloch abgezogen	**965 000**	**1 135 000**
		$W\sigma_F$ Nietloch abgezogen auch von Steg	906 000	1 087 000
1 644 000		$T\sigma_F$ Vollquerschnitt	1 632 000	
		$T\sigma_F$ Nietloch abgezogen	**1 387 000**	
		$T\sigma_F$ Nietloch abgezogen auch von Steg	1 266 400	
1 513 000		$T\sigma_F$ der Gurten und L-Eisen + $W\sigma_F$ des Steges	Mit Nietlochabzug **1 259 000**	

Auch ein durchlaufender genieteter Träger auf drei Stützen wurde untersucht (Fig. 15). Die Durchbiegungen sind größer als die berechneten, auch bei der Entlastung. Von der Mittelstütze bis zur Laststelle erreichte der Steg die Fließgrenze durch Schubkraft, (Fig. 14) wodurch die von *Stüssi*[18] theoretisch gefundene Erscheinung, daß die Schubspannungen erheblich anwachsen müssen, wenn vom Balkenrand das Fließen in eine gewisse Tiefe vorrückt, versuchsmäßig erwiesen worden ist, wenn auch quantitativ in geringerem Maße. Das ist viel-

leicht darauf zurückzuführen, daß infolge der raschen Abnahme der Momente nur ein kurzer Trägerteil gefährdet ist, der außerdem durch die Nachbarteile in seiner Bewegung behindert ist. Als Endresultat fand ich, daß die Höchstlast durch vollkommenen Momentenausgleich mit $T' \cdot \sigma_F$ gekennzeichnet ist.

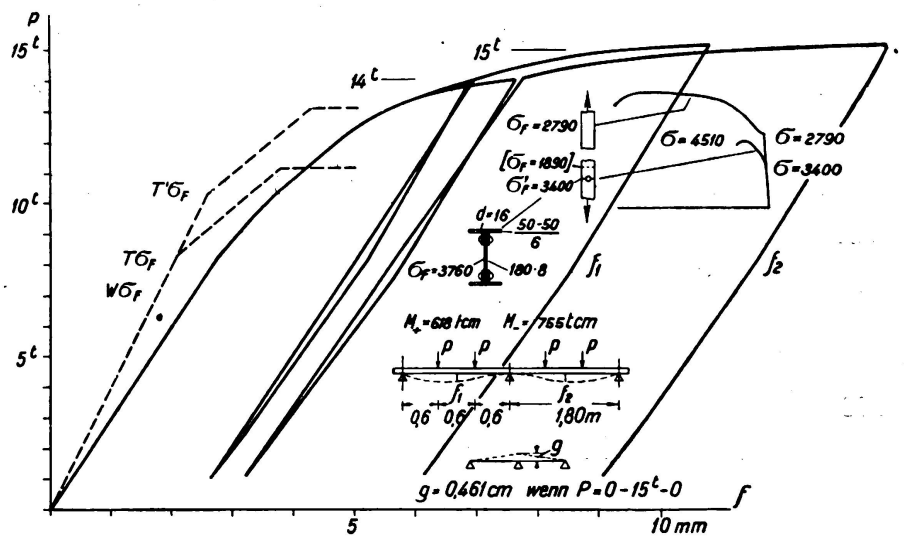


Fig. 15.

Bibliographie.

1 *v. Kazinczy:* Versuche mit eingespannten Trägern. Betonszemle 1914, Heft 4, 5, 6.

2 *v. Kazinczy:* Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau. Wien 1928, S. 249.

3 *F. Stüssi* und *C. F. Kollbrunner:* Beitrag zum Traglastverfahren. Bautechnik 1935, Heft 21, S. 264.

4 *W. Kuntze:* Ermittlung des Einflusses ungleichförmiger Spannungen und Querschnitte auf die Streckgrenze. Stahlbau 1933, Heft 7, S. 19.

5 *W. Prager:* Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung. Forschungen auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1933.

6 *J. Fritsche:* Grundsätzliches zur Plastizitätstheorie. Stahlbau 1936, Heft 9.

7 *F. Rinagl:* Über Fließgrenze und Biegekennlinien. Vorbericht S 1589.

8 *H. Maier-Leibnitz:* Versuche, Ausdeutung und Anwendung der Ergebnisse. Vorbericht S. 106.

9 *G. v. Kazinczy:* Internationaler Kongreß für Eisenbau. Liége 1930.

10 *N. C. Kist:* Internationaler Kongreß für Eisenbau. Liége 1930.

11 *J. Fritsche:* Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens. Der Bauingenieur 1930, Heft 49—51.

12 *G. v. Kazinczy:* Die Weiterentwicklung der Plastizitätslehre. Technika 1931.

13 *H. Bleich:* Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes. Der Bauingenieur 1932, Heft 19, 20, S. 261.

14 *G. v. Kazinczy:* Statisch unbestimmte Tragwerke unter Berücksichtigung der Plastizität. Der Stahbau 1931, S. 58.

15 *E. Chwalla:* Drei Beiträge zur Frage des Tragvermögens statisch unbestimmter Stahltragwerke. Abhandlungen II. Bd.

16 *E. Melan:* Theorie statisch unbestimmter Systeme. Vorbericht S. 45.

17 *G. Grüning* und *E. Kohl:* Tragfähigkeitsversuche an einem durchlaufenden Fachwerkbalken aus Stahl. Der Bauingenieur 1933, Heft 5/6, S. 67.

18 *F. Stüssi:* Über den Verlauf der Schubspannungen in auf Biegung beanspruchten Balken aus Stahl. Schweizerische Bauzeitung 1931, Bd. 98, Heft 1, S. 2.

I 6

Die Beziehungen M_{st} (P) und M_F (P) beim durchlaufenden Balken mit drei Öffnungen, belastet durch P im Mittelfeld (siehe Vorbericht Seite 126—128).[1])

Les expressions M_{st} (P) et M_F (P) dans la poutre continue à trois ouvertures, soumise à une charge P agissant dans la travée médiane (voir la Publication Préliminaire, pages 121—126).[1])

The Relations M_{st} (P) and M_F (P) in Girders Continuous over Three Spans Carrying a Load P in the Central Span (see Preliminary Report, pages 121—126).[1])

Dr. Ing. H. Maier-Leibnitz,
Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart.

Belastet man den Träger der Fig. 1 mit einer von 0 anwachsenden Last P, so entsteht zunächst eine nach rein elastischen Gesetzen zu berechnende Momenten-

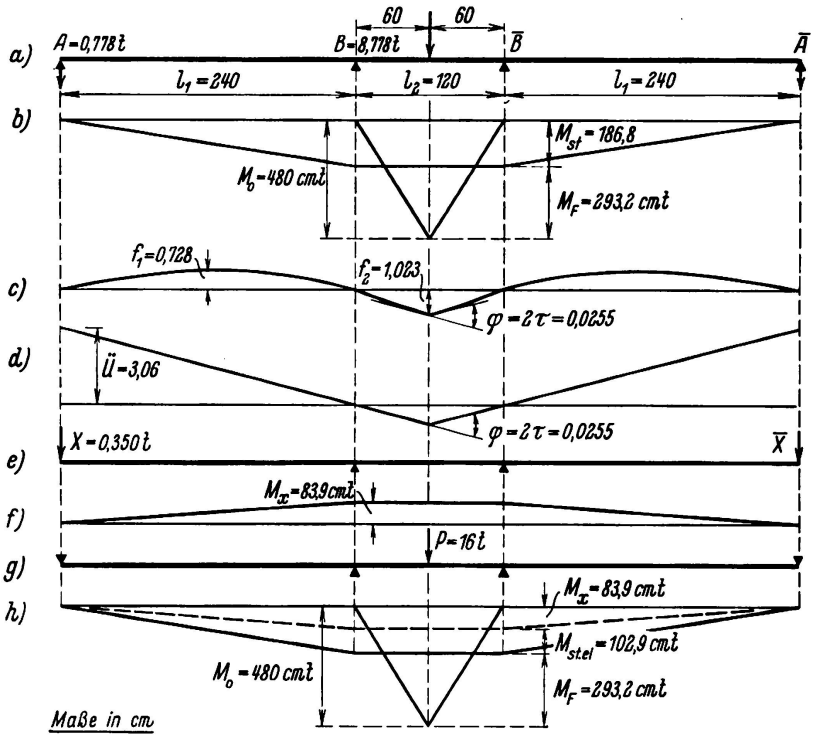


Fig. 1.
Verhalten des Trägers unter einer Belastung P = 16 t.

[1] siehe auch Zeitschrift „Der Stahlbau" 1936, H. 20, S. 153 ff.

fläche charakterisiert durch M_o, M_{st}, M_F. Unter $P = P_s$ ($= \sim 11$ t) wird in der äußersten Faser der Feldmitte die Streckgrenze σ_s erreicht.

Wenn $P > P_s$ wird, z. B. bei $P = 16$ t, kann M_F nicht wesentlich über $M_s = W \cdot \sigma_s$ anwachsen. Mit Hilfe des Mohrschen Satzes kann man aus der Momentenlinie (Fig. 1b) von A über B einen Ausdruck für den Winkel φ der Durchbiegungslinie in Balkenmitte ableiten, die dort einen Knick aufweist. Im dargestellten Fall ist

$$EJ\varphi = 6600\ P - 280\ M_F.$$

Wird der Balken entlastet, so zeigt sich die Balkenform der Fig. 1 d mit der Aufbiegung ü. Vor der Wiederbelastung muß zunächst ü rückgängig gemacht

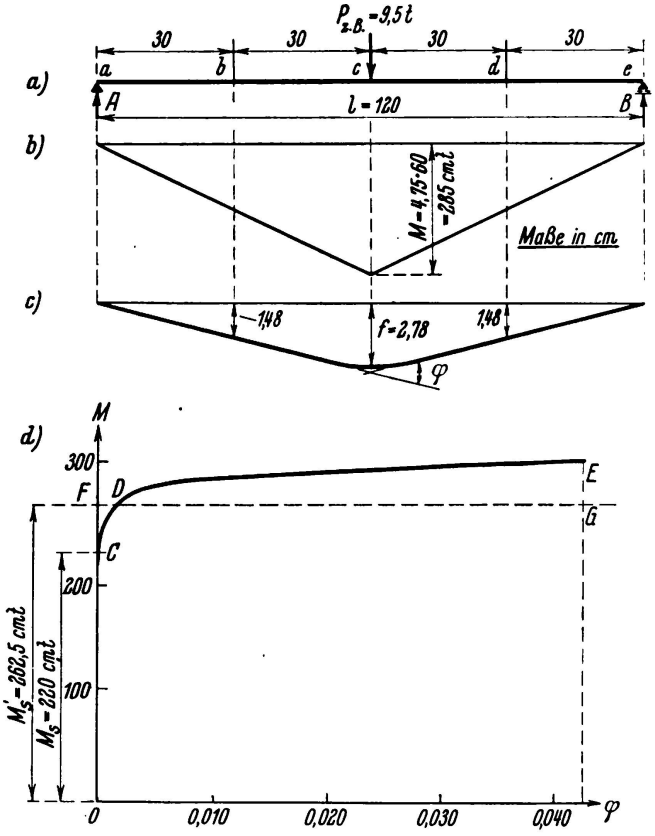


Fig. 2.
Abhängigkeit φ (M) des einfachen Balkens.

werden durch die beiden Kräfte X und $\overline{X}$, denen die Stützenmomente M_x entsprechen. Bei der Wiederbelastung mit $P = 16$ t tritt zu M_x das rein elastische Stützenmoment $M_{st\,el}$ hinzu (Momentenlinie entsprechend Fig. 1h).

Wie groß ist M_F und damit das Stützenmoment $M_{st} = M_o - M_F$, sowie φ, ü, X?

Beim einfachen Balken (Vergleichsbalken $l = 120$ cm $= l_2$) kann man rein experimentell die Beziehung φ (M), wie Fig. 2 zeigt, bestimmen, wobei M das Moment in Balkenmitte ist. Um das tatsächliche Verhalten des durchlaufenden Balkens zu deuten, kann man dieses Ergebnis auf den durchlaufenden Balken übertragen, d. h. auf die Beziehung M_F (φ), für die andererseits die oben angegebene Beziehung

$$EJ\varphi = 6600\ P - 280\ M_F$$

gilt.

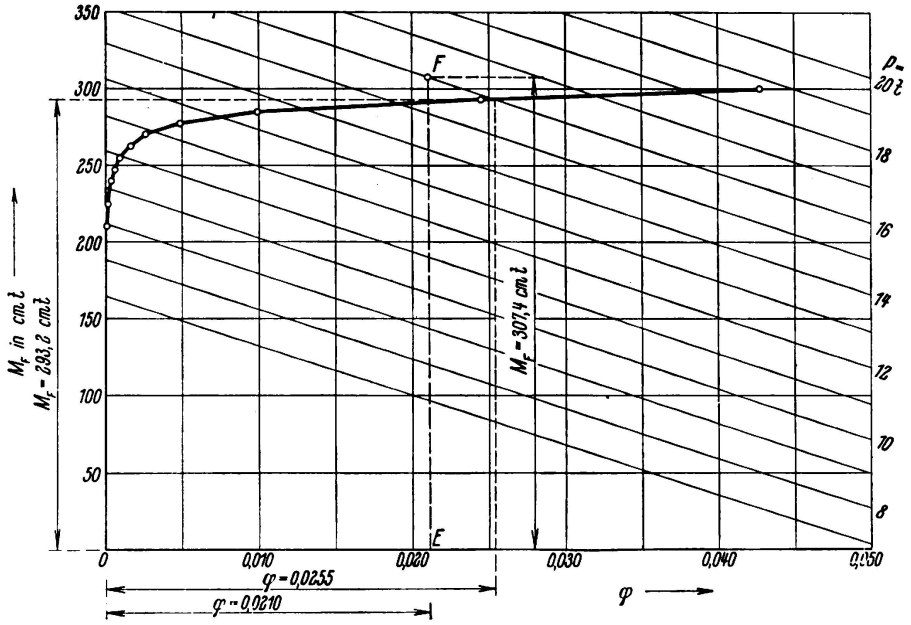


Fig. 3.

Bestimmung der M_F für $l_1 = 240$ cm und $l_2 = 120$ cm mit Hilfe von: $EJ\varphi = 6600\,P - 280\,M_F$ insbesondere für P 16 t,

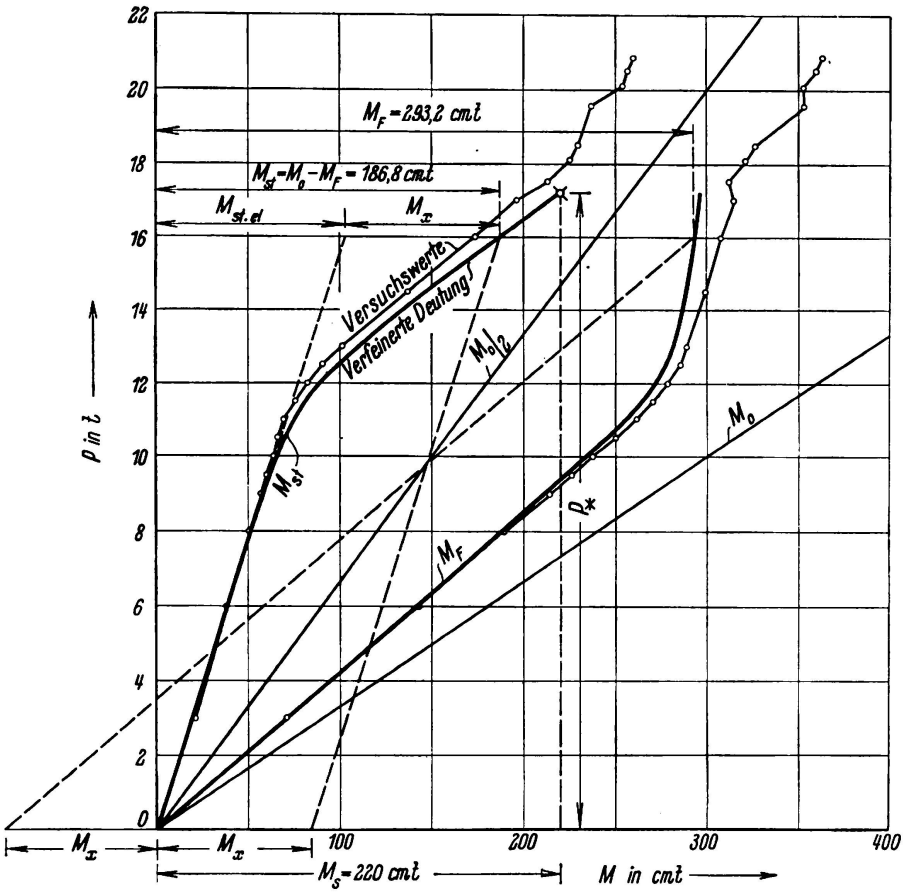


Fig. 4.

Beziehungen M_{st} (P) und M_F (P) für $l_1 = 240$ cm.

In Fig. 3 sind die beiden Beziehungen aufgetragen. Für P = 16 t ergibt sich: M_F = 293,2 cmt und φ = 0,0255 (verfeinerte Deutung).

Führt man diese Bestimmung auch für die anderen Lasten durch, so entsteht das Bild der Fig. 4. M_{st} und M_F wachsen zunächst geradlinig; dann von P'_s = 11,12 t an in Kurven. Bei P = 16 t sind die oben erwähnten Werte M_x und $M_{st\,el}$ eingetragen (Fig. 1h). Man sieht auch aus dem Bild, wie nach einer Entlastung eine Widerbelastung vor sich geht und, daß die Werte der verfeinerten Deutung gut mit den dünner ausgezogenen Versuchswerten übereinstimmen.

In Fig. 3 ist bei P = 16 t als Ordinate E F der Versuchswert M_F = 307,4 cmt eingetragen. Die Ordinaten der Kurve φ (M_F) sind also größer als die der Kurve φ (M) des Vergleichsbalkens mit l = 120 cm. Dies rührt davon her, daß man eigentlich zum Vergleich kürzere Versuchsbalken mit einer Spannweite = der Entfernung der Momentennullpunkte im Mittelfeld hätte heranziehen sollen. Nach dem Kongreß durchgeführte Versuche mit l = 950 cm entsprechend P_s und l = 730 cm entsprechend P_T bestätigen es.

Mit dem Vorstehenden ist die Grundlage geschaffen für eine genauere als bisher mögliche Lösung des Problems der tatsächlichen Tragfähigkeit durchlaufender Träger aus Baustahl und eine Lücke geschlossen, auf die *J. Fritsche* in der Zeitschrift „Der Stahlbau" 9 (1936), Seite 67 aufmerksam gemacht hat. Man braucht also künftig wie bei den bisherigen Untersuchungen nach dem „Traglastverfahren" nicht mehr von der zu primitiven Voraussetzung des Momentenausgleichs Gebrauch zu machen.

I 7

Zur Auswertung von Versuchen über das Traglastverfahren.

L'interprétation des essais sur la méthode de l'équilibre plastique.

Interpretation of Tests of the Equilibrium Load Method.

Privatdozent Dr. F. Stüssi,
Berat. Ing., Zürich.

Herr Prof. *Dr. Maier-Leibnitz* hat in seinem Beitrag zum Vorbericht des Kongresses[1] die Ergebnisse der durch die Fachpresse bekannt gewordenen Versuche über das Traglastverfahren zusammengestellt und ausgewertet. Unter diesen Versuchen möchte ich diejenigen zu einer kurzen Ergänzung der Auswertung nochmals herausgreifen, die Herr Prof. *Maier-Leibnitz* kürzlich selbst durchgeführt hat[2] und die, in Übereinstimmung mit unsern Zürcher Versuchen,[3] keine vollständige Angleichung von Feld- und Stützenmomenten ergeben haben.

Bei einem durchlaufenden Träger nach Fig. 1 müssen auch im unelastischen Bereich die Gleichgewichts- und Elastizitätsbedingungen der Baustatik gültig

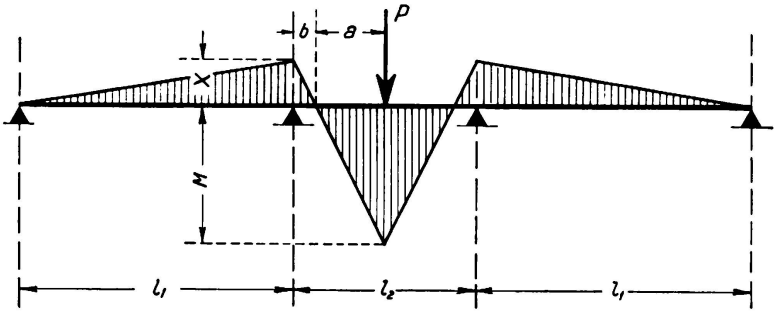


Fig. 1.
Versuchsanordnung.

bleiben; insbesondere wird die Biegungslinie über einer Zwischenstütze stetig verlaufen. Bezeichnen wir die Drehwinkelsumme eines durch eine dreieckförmige Momentenfläche M belasteten einfachen Balkens der Spannweite $l = 1$ mit A, den größeren Auflagerdrehwinkel mit B, so läßt sich diese Elastizitätsbedingung anschreiben zu

$$B_X \cdot l_1 = A_M \cdot a - A_X \cdot b. \qquad (1)$$

---

[1] *H. Maier-Leibnitz:* Versuche, Ausdeutung und Anwendung der Ergebnisse. I.V.B.H., Zweiter Kongreß Berlin 1936, Vorbericht.

[2] *H. Maier-Leibnitz:* Versuche zur weiteren Klärung der Frage der tatsächlichen Tragfähigkeit durchlaufender Träger aus Baustahl. Stahlbau 1936, H. 20.

[3] *F. Stüssi* und *C. F. Kollbrunner:* Beitrag zum Traglastverfahren. Bautechnik 1935, H. 21.

Wenn nun, wie im vorliegenden Fall (Fig. 2) der Momentenverlauf bei wachsender Belastung durch Beobachtung gegeben ist, so kann aus Gl. 1 die Unbekannte A_M berechnet werden. Die Werte A_X und B_X sind zunächst im elastischen Bereich bekannt; für höhere Belastungsstufen sind sie sukzessive aus den Werten A_M für kleinere Belastungen festgelegt. In Fig. 3 ist der so bestimmte Verlauf der Drehwinkelsumme A dargestellt. Es zeigt sich eine deutlich ausgesprochene Verfestigung für Biegungsmomente über etwa 315 cmt, also in der Zone, die beim Vergleichsversuch mit dem einfachen Balken nicht mehr beobachtet wurde.

Damit sind nun aus diesem einen Versuch die Hilfswerte bestimmt, die uns die Berechnung des Momentenverlaufs mit Hilfe der Elastizitätsbedingung Gl. 1

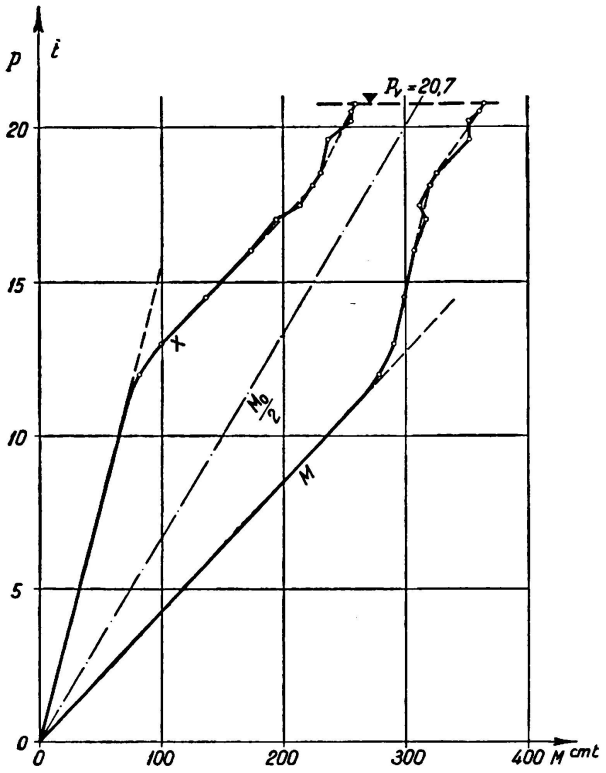


Fig. 2.
Momentenverlauf.
Versuche von Prof. Dr. Maier-Leibnitz.

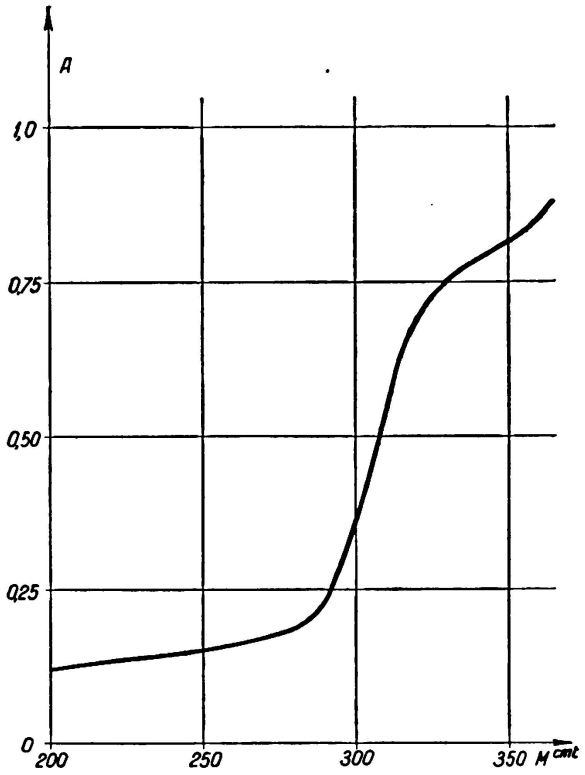


Fig. 3.
Drehwinkelsumme A.

auch bei andern Verhältnissen der Spannweiten erlauben. Wenn wir daraus einen Schluß auf den Verlauf der Tragfähigkeiten ziehen wollen, so müssen wir noch eine Annahme treffen, nämlich die, daß in allen Fällen die Grenze der Tragfähigkeit dann erreicht sei, wenn das größte Biegungsmoment, das hier unter der Last auftritt, einen bestimmten Grenzwert erreicht hat. Diese Annahme ist an sich plausibel; wäre sie unrichtig, so hätte die ganze in der Baupraxis übliche Berechnung von Spannungen keinen Sinn mehr. Die erste Folge unserer Annahme ist die, daß wir aus den elementaren Gleichgewichtsbedingungen des Mittelfeldes einen Vergleich zwischen der Tragfähigkeit des durchlaufenden (P) und derjenigen des einfachen Balkens (P_o) erhalten. Es ist nämlich

$$P : P_o = (M + X) : M \qquad (2)$$

Da aber, auch nach diesen Versuchen von Herrn Prof. *Maier-Leibnitz*, kein voller Momentenausgleich eintritt, beträgt die Tragfähigkeit des durchlaufenden Balkens nicht das Doppelte des einfachen Balkens. Ein nach dem Traglastverfahren bemessener Durchlaufbalken besitzt somit eine geringere Sicherheit gegen Erreichen der Belastungsgrenze als der einfache Balken.

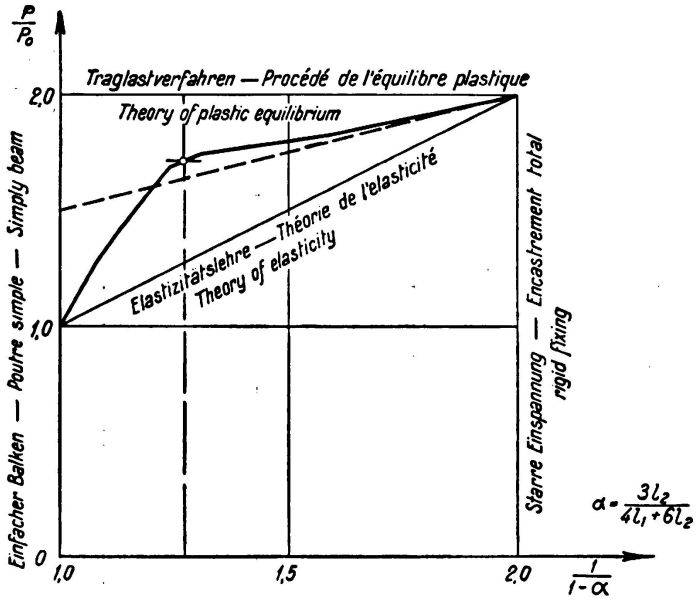


Fig. 4.
Berechnete Tragfähigkeiten.

In Fig. 4 sind noch die berechneten Verhältnisse der Tragfähigkeiten aufgetragen. Der Verlauf dieser Kurve stimmt grundsätzlich mit unseren früher versuchstechnisch bestimmten Kurven überein. Abgesehen von den abnormalen Fällen mit sehr großer Seitenöffnung liegen diese Werte noch etwas oberhalb einer Geraden (gestrichelt), die den Unterschied zwischen Traglastverfahren und Elastizitätslehre halbiert. Mein Vorschlag geht deshalb dahin, die durch das Traglastverfahren angegebene Vergrößerung der Tragfähigkeit von Durchlaufbalken aus Baustahl gegenüber der Elastizitätslehre wenn überhaupt, dann nur zur Hälfte auszunützen und außerdem diese Ausnützung der Sicherheitsvergrößerung vorläufig auf gewalzte Träger des Hochbaues zu beschränken.

I 8

Beitrag zur Frage der Ausnutzbarkeit der Plastizität bei dauerbeanspruchten Durchlaufträgern.

Sur la plasticité dans les poutres continues sollicitées dynamiquement.

Contribution to the Question of Utilising Plasticity in Continuous Girders Subject to Repeated Stresses.

Dr. Ing. K. Klöppel,
Leiter der technisch-wissenschaftlichen Abteilung des deutschen Stahlbau-Verbandes, Berlin.

Der von *Dr. Hans Bleich*[1] unter Annahme eines idealplastischen Werkstoffes aufgestellte Satz

„Wenn es in einem statisch unbestimmten System möglich ist, durch passende Wahl der statisch unbestimmbaren Größen einen Selbstspannungszustand anzugeben, derart, daß in jedem Punkt die Summe der Selbstspannung und der nach dem Elastizitätsgesetz bestimmten Größtspannung gerade unterhalb der Fließspannung bleibt, so ist das System auch bei unendlich oft wiederholter Belastung tragfähig"

muß durch Dauerversuche nachgeprüft werden können, da die Belastungsfrequenz keine Rolle spielt.

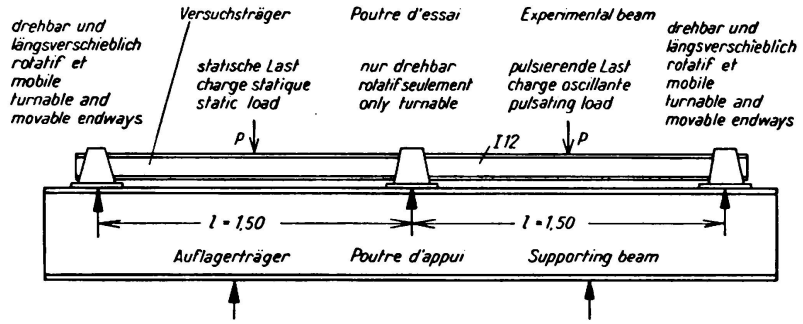


Fig. 1.
Versuchsanordnung.

Gewählt wurde ein ungelochter Träger (I 12) auf drei Stützen mit Einzelspannweiten von je 1,50 m aus Handelsbaustahl (Fig. 1). Sämtliche Lager konnten Zug- und Druckkräfte aufnehmen, die äußeren waren auch noch längsverschieblich.[2]

---

[1] Zeitschrift „Der Bauingenieur" 1932, Heft 19/20.

[2] Die Versuche wurden in der MPA. Stuttgart (Professor *Graf*) durchgeführt.

Der Bleichsche Satz widerlegt die Auffassung, daß der Träger, wenn er für je einen mehrerer Belastungsfälle im Sinne des Traglastverfahrens tragfähig ist, dies unbedingt auch dann ist, wenn die sämtlichen Belastungsfälle beliebig oft wechseln.

Die gewählten Belastungsfälle sind in Fig. 1 dargestellt. Mit Rücksicht auf die maschinellen Gegebenheiten wirkte die linke Last dauernd und die rechte Last schwellend, und zwar mit kleiner Grundlast (200 kg) und minutlich etwa 10 Lastspielen. Einen Zwischenzustand der völligen Entlastung gab es also nicht.

Die Größe der Lasten P wurde zunächst so bestimmt, daß in dem nach der Elastizitätslehre höchstbeanspruchten Querschnitt die Fließgrenze ($\sigma_F = M:W$) erreicht war. Diese ergab sich zu $\sigma_F = 2420$ und 2730 kg/cm² für die Flansche der beiden 12 m langen Träger, aus denen die je etwa 3 m langen Versuchskörper hergestellt wurden.

Nach dem Bleichschen Satz hätte durch Annahme des günstigsten Selbstspannungszustandes (Fig. 2), der Stützen- und Feldmoment ausgleicht, die

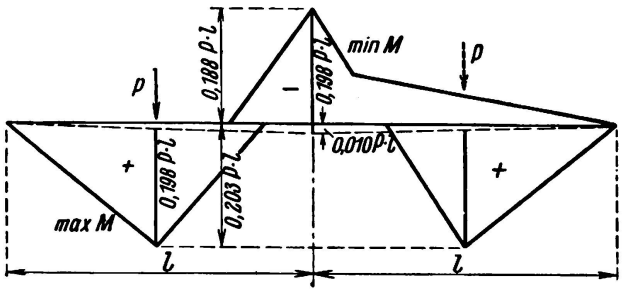


Fig. 2.

Fließgrenze bei der Bestimmung von P überschritten werden dürfen, aber nur um etwa 2,5 %, da für die beiden Belastungsfälle fast „natürlicher Momentenausgleich" vorliegt.

Der Träger ertrug mit P = 4210 kg 700 000 Lastspiele, ohne Anzeichen eines bevorstehenden Dauerbruches erkennen zu lassen. Die federnden Durchbiegungen, die bis zu $^1/_{100}$ mm genau von einem Rahmen aus abgelesen wurden, entsprachen den rechnerischen Werten, und die bleibenden Durchbiegungen waren praktisch Null. Eine Selbstspannungswirkung schaltete also aus.

Die Lasten P wurden nun für denselben Träger soweit erhöht, daß die Fließgrenze um 20 % überschritten war. Auch bei dieser Belastung ertrug der Träger weitere 630 000 Lastspiele. Die Durchbiegungen stiegen gegenüber der ersten Belastung nur unwesentlich schneller als die Belastung. Der Versuch wurde abgebrochen, da wiederum kein Dauerbruch zu erwarten war. Die bleibenden Durchbiegungen erreichten etwa nur 15 % ihres rechnerisch bestimmten Wertes, der folgendermaßen ermittelt werden kann:

Um über der mittleren Stütze das Selbstspannungsmoment von 0,01 P · l zu erhalten, muß im statisch bestimmten Grundsystem, als welches der Kragträger gewählt sei, an dessen Ende die Kraft 0,01 · P angreifen. Diese erzeugt eine Durchbiegung des Tragrandes von

$$f = \frac{0{,}01 \cdot P \cdot 2\,l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

Die gleiche Durchbiegung ergibt sich im statisch bestimmten Grundsystem, wenn in Feldmitte infolge Kaltverformung die Durchbiegung f/2 beträgt. Hierfür errechnet sich mit $E = 2100\ t/cm^2$ und $J = 328\ cm^4$:

$$f/2 = \frac{0{,}01\ P \cdot 150^3}{3 \cdot 2100 \cdot 328} = 0{,}0165\ P.$$

Der kaltverformte Träger wird als Balken auf drei Stützen, der Momentenfläche des Selbstspannungszustandes entsprechend, noch federnd verbogen, so daß sich f/2 um einen Betrag δ vermindert:

$$\delta = \frac{0{,}01 \cdot P \cdot l^3}{16 \cdot EJ}$$

$$= \frac{0{,}01 \cdot P \cdot 150^3}{16 \cdot 2100 \cdot 328} = 0{,}0031\ P.$$

Mithin sind die bleibenden Durchbiegungen in Mitte des linken Feldes für den Selbstspannungszustand in mm

$$\delta_{bl} = (0{,}165 - 0{,}031)\ P = \mathbf{0{,}134\ P.}$$

Der Selbstspannungszustand kann frühestens eintreten, wenn in Feldmitte die Fließgrenze σ_F erreicht ist. Somit gilt für P

$$P \geqq \frac{W \cdot \sigma_F}{0{,}203 \cdot l}$$

Durch die ausgleichende Wirkung des Selbstspannungszustandes kann P erhöht werden auf

$$P' = \frac{0{,}203}{0{,}198}\ P = \sim 1{,}025\ P$$

Hierzu gehört die bleibende Verformung

$$\delta_{bl} = 0{,}134\ P'$$

die auch bei vielfach wiederholter Belastung nicht zunehmen darf.

Die federnden Durchbiegungen für $P = 1$ t in der Mitte des linken Trägerfeldes sind bei dessen alleiniger Belastung (Fall A)

$$\delta_{el} = 0{,}734\ mm$$

und bei Belastung beider Felder (Fall B)

$$\delta_{el} = 0{,}446\ mm.$$

Von den durchgeführten Versuchen sollen zwei kurz betrachtet werden. Die Lasten P betrugen 5,04 t und 5,83 t. Für Fließgrenze und Widerstandsmoment ergaben sich $\sigma_F = 2420\ kg/cm^2$ und $W = 53{,}1\ cm^3$. Die Last, bei der die Fließgrenze erreicht wird, war um das 1,2 und 1,38fache überschritten. In beiden Fällen trat nach mehr als 500000 Lastspielen kein Dauerbruch ein. In der Mitte des linken Feldes wurden für die beiden Belastungsfälle A und B die in Tafel 1 enthaltenen Durchbiegungen gemessen und rechnerisch bestimmt.

Tafel 1,

Last	Belastungsfall	$\delta_{el} + \delta_{bl}$		δ_{bl}	δ_{bl}
		gemessen	rechn. Wert	gemessen	rechn. Wert
5,04 t	A	3,65 mm	**4,37** mm	0,18 mm	**0,67** mm
	B	2,49 „	**2,92** „		
5,83 t	A	**5,25** „	5,055 „	**1,68** „	0,775 „
	B	**4,75** „	3,375 „		

Unter P = 5,04 t bleiben die gemessenen Werte hinter den rechnerischen zurück. Die wirkliche bleibende Durchbiegung ist sehr gering, so daß, obwohl in den Flanschen die Fließgrenze um 20 % überschritten ist, der Selbstspannungszustand noch gar nicht in Anspruch genommen war. Bei P = 5,83 t ist es umgekehrt; hier überwiegen die tatsächlichen Durchbiegungen. Die Abweichung ist bei den bleibenden Durchbiegungen besonders groß. Offenbar ist hier — wogegen die Einhaltung des Bleichschen Satzes sonst schützen würde — durch Belastungsfall B ein zusätzlicher Selbstspannungszustand erzeugt; denn im rechten Feld traten auch bleibende Durchbiegungen und keine bleibenden Überhöhungen auf. Stütz- und Feldmoment sind ja auch fast gleich groß. Die bleibenden Durchbiegungen wuchsen jedoch im späteren Verlauf des Dauerversuches nicht mehr. Daraus geht hervor, daß nach dem Bleichschen Satz bemessene biegungssteife Tragkonstruktionen auch bei Dauerbeanspruchung noch zusätzliche Sicherheiten aufweisen. Diese Feststellung ist in dem inhomogenen Verlauf der Biegespannungen begründet; erreichen die Randzonen des Querschnittes die Fließgrenze, so setzen die übrigen nur federnd gespannten Zonen bleibenden Verformungen noch Widerstand entgegen. Dadurch sind etwa 16 % Festigkeitszunahme zu erwarten. Die Zahl ergibt sich, wenn W durch 2 S_x (S_x = statisches Moment des halben Trägerquerschnittes, bezogen auf die x-Achse) ersetzt wird. Diese Wirkung wird noch dadurch gesteigert, daß die Fließgrenze des Steges in der Regel höher liegt als diejenige des Flansches. Ferner können auch Verfestigungserscheinungen sowie Wirkungen einer oberen Fließgrenze den Widerstand erhöhen. Schließlich werden auch die Walzspannungen die Ausbildung bleibender Verformungen bis zu einer gewissen oberhalb der Fließgrenze liegenden Spannung verzögern.

Es wurde noch Belastungsfall A allein untersucht, da hier der Unterschied zwischen Stütz- und Feldmoment groß ist. Die bleibende Durchbiegung unter P = 6,28 t, entsprechend einer 1,3fachen Überschreitung der Fließgrenze (σ_F = 27,3 kg/mm²), betrug nur 1,6 mm, während der momentenausgleichende Selbstspannungszustand (Stützmoment = 3/2 [0,203 — 0,094] P l = 0,072 P l) eine bleibende Durchbiegung von 5,75 mm erfordern würde. Für die federnde Durchbiegung wurden in guter Übereinstimmung mit der Rechnung etwa 4,6 mm gemessen; sie ist also kleiner als die für den Momentenausgleich erforliche bleibende Durchbiegung. Nach mehr als einer Million Lastspielen wich der Träger seitlich aus. Ein Dauerbruch trat nicht ein.

Die theoretisch und durch Versuche gewonnenen Erkenntnisse könnten für eine sparsamere Bemessung durchlaufender auf Dauerfestigkeit beanspruchter Träger nur dann verwertet werden, wenn diese, insbesondere in den Flanschen, keine Kerben wie z. B. Löcher oder Kehlnähte aufweisen. Eine solche Einschränkung schließt Nietkonstruktionen und Nietverbindungen weitgehend aus. Dagegen könnten für ungelochte Walzträger mit einwandfrei stumpfgeschweißten Stößen, deren Oberflächen kerbfrei bearbeitet sind, auch bei Dauerbeanspruchungen im Sinne des Traglastverfahrens höhere Beanspruchungen berechtigt sein. Die Ausnutzung des Traglastverfahrens kann jedoch durch eine vorzeitige Instabilität des Trägers verhindert werden. Es ist ferner auch möglich, daß sich der günstigste Selbstspannungszustand, wenn er sehr große bleibende Verformungen bedingt — also in den wirtschaftlich wichtigsten Fällen — unter der ihm zugeordneten Last nicht einstellt.[3] In diesen Fällen kann natürlich nicht mit Momentenausgleich gerechnet werden.

---

[3] *Stüssi* und *Kollbrunner:* „Bautechnik" 1935, Heft 21; *Maier-Leibnitz:* „Stahlbau" 1936, Heft 20; *Klöppel:* „Stahlbau" 1937, Heft 14/15.

I 9

Formelmäßige Lösung des Stabilitätsproblemes exzentrisch gedrückter Stahlstäbe.

Les formules de la stabilité des barres excentriquement comprimées.

Formulae for the Solution of Eccentrically Loaded Steel Columns.

Dr. Ing. K. Ježek,
Dozent an der Technischen Hochschule Wien.

Das klassische Stabilitätsproblem des zentrisch gedrückten geraden Stabes wurde durch die Forschungsarbeiten von *Euler, Engesser* und *Kármán* einer befriedigenden Lösung zugeführt.[1] Diese Art der Beanspruchung stellt allerdings einen praktisch niemals zu verwirklichenden Idealfall dar, da die geringsten Abweichungen von den Voraussetzungen wie z. B. unvermeidliche und verschwindend kleine Exzentrizitäten des Kraftangriffes oder Stabkrümmungen eine zusätzliche Biegung hervorrufen und damit unter Umständen eine recht erhebliche Herabsetzung der Tragfähigkeit bewirken. Bei einem derart auf axialen Druck und Biegung beanspruchten Stahlstab besteht nun ebenfalls die Gefahr des Eintrittes eines labilen Gleichgewichtszustandes, allerdings erst dann, wenn mit zunehmender Belastung bereits bleibende Formänderungen aufgetreten sind. Durch diese *wesentliche* Bedingung unterscheidet sich daher die Aufgabe der Bestimmung der Traglast *grundsätzlich* vom Knickproblem des geraden Stabes.

Dieses eigenartige Stabilitätsproblem wurde erstmalig von *Kármán* im Anschlusse an seine bekannten Knickversuche für sehr kleine Exzentrizitäten des Kraftangriffes theoretisch und experimentell untersucht.[1] Hierbei ging *Kármán* von der Arbeitslinie einer bestimmten Stahlsorte aus und entwickelte zur Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie ein sinnreiches graphisches Integrationsverfahren; dieser Teil der *Kármán*'schen Arbeit blieb jedoch lange Zeit unbeachtet. Auch das etwa 13 Jahre später von *Krohn*[2] angegebene Näherungsverfahren teilte infolge seines wenig durchsichtigen Rechnungsganges und wohl in erster Linie mangels einer zahlenmäßigen Auswertung der Ergebnisse das Schicksal der *Kármán*'schen Untersuchung. Einige Jahre später entwickelten *Roš* und *Brunner* ein zeichnerisches Näherungsverfahren und legten die Ergebnisse in einem Diagramm nieder, welches zum ersten Male ziffernmäßig den

[1] *Th. v. Kármán:* „Untersuchungen über Knickfestigkeit". V.D.I., H. 81, 1910.
[2] *R. Krohn:* „Knickfestigkeit". Bautechnik 1923.

Zusammenhang zwischen Tragkraft, Exzentrizität und Schlankheit für ein bestimmtes Formänderungsgesetz erkennen läßt.[3] Schließlich entwickelte *Chwalla* in Anknüpfung an die Gedankengänge *Kármán's* die strenge Lösung für Stäbe mit beliebig großer Exzentrizität des Kraftangriffes.[4]

Allen diesen Untersuchungen haftet der fühlbare Mangel an, daß ihre Ergebnisse nur nach sehr langwierigen Rechnungen erhalten werden und ausschließlich in der Form eines Diagrammes oder einer Zahlentafel darstellbar sind. Bedenkt man außerdem, daß eine *große* Anzahl derartiger nach der *Stahlsorte* und *Querschnittsform* geordneter Diagramme erforderlich ist, so erkennt man leicht, daß dieser Umstand für die praktische Anwendung nicht nur beschwerlich ist, sondern geradezu ein Hindernis bildet; dies kommt am deutlichsten darin zum Ausdruck, daß die behördlichen Vorschriften nahezu aller Staaten — eine Ausnahme bilden meines Wissens nur die Schweizerischen Bestimmungen — den neuen und vollkommen gesicherten Erkenntnissen hinsichtlich der Bemessung exzentrisch gedrückter Stahlstäbe bisher — offenbar in Ermangelung einer theoretisch begründeten und einfachen Formel — nicht Rechnung getragen haben.

Ich möchte nun kurz den Weg schildern, der zu einer *formelmäßigen* Lösung dieser für den Stahlbau bedeutungsvollen Aufgabe führt. Zunächst kann das Formänderungsgesetz der derzeit gebräuchlichen Stähle für den vorliegenden Zweck durch eine ideal-plastische Arbeitslinie ersetzt werden, da eine Verfestigung nur bei extrem kurzen und praktisch nie ausgeführten Stäben mit einer Schlankheit $\lambda < 20$ eintreten könnte. Die Annahme der Gültigkeit des *Hooke*'schen Gesetzes bis zur Fließgrenze ist durch die sorgfältig durchgeführten Druckversuche des Deutschen Stahlbau-Ausschusses hinreichend begründet.[5] Ersetzt man ferner die Biegelinie durch eine Sinuslinie, so gelangt man zunächst im einfachsten Falle des Rechteckquerschnittes zu der von mir angegebenen formelmäßigen Lösung,[6] deren Ergebnisse mit den aus der genauen Biegelinie abgeleiteten strengen Werten weitgehende Übereinstimmung (größter Fehler 3 %) zeigt;[7] die Fließgrenze ist hierbei in üblicher Weise aus einem Druckversuch zu bestimmen. Ich habe schließlich unter den gleichen Voraussetzungen das Tragverhalten exzentrisch gedrückter Stahlstäbe in Abhängigkeit von der Querschnittsform untersucht,[8] wobei im Hinblick auf die dünnwandigen Profile des Stahlbaues die Stabilitätsverhältnisse sowohl in der Momentenebene als auch senkrecht dazu einer Klärung bedürfen. Fig. 1 zeigt für den am häufigsten verwendeten Stahl St. 37 und ein Exzentrizitätsmaß $m = 1$ (die Axialkraft

[3] Vgl. die Berichte der I. Internat. Tagung und des I. Internat. Kongresses für Brückenbau und Hochbau, Wien 1928 und Paris 1932.

[4] *E. Chwalla:* „Theorie des außermittig gedrückten Stabes aus Baustahl." Stahlbau 1934. (Zusammenfassende Darstellung des strengen graphischen Verfahrens.)

[5] *W. Rein:* „Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle." H. 4 der Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau. J. Springer, Berlin 1930.

[6] *K. Ježek:* „Näherungsberechnung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stahlstäbe." Stahlbau 1935. — „Die Tragfähigkeit axial gedrückter und auf Biegung beanspruchter Stahlstäbe." Stahlbau 1936.

[7] *K. Ježek:* „Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal plastischem Stahl." Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Kl., Abt. IIa, 143. Bd., 7. H., 1934.

[8] *K. Ježek:* „Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl." — Julius Springer, Wien 1937.

greift im Kernpunkt an) die kritische Axialspannung σ_{kr}, oberhalb welcher ein Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften unmöglich ist, in Abhängigkeit von der Schlankheit λ und der Querschnittsform. Man erkennt, daß der Einfluß der Profilform bei kurzen Stäben bedeutend ist, jedoch sowohl mit wachsender Schlankheit als auch mit abnehmender Exzentrizität rasch abklingt. Am günstigsten verhalten sich Stäbe mit Kreuzquerschnitt, am ungünstigsten Stäbe mit I- und T-Querschnitt; insbesonders liegt in den beiden letzten Fällen die kritische Spannung nur wenig über der Grenzspannung σ_n des elastischen Bereiches. Die für $m = 0{,}01$ gezeichnete Linie der kritischen Spannungen (σ_k-Linie) ist von der Querschnittsform nahezu unabhängig und zeigt deutlich den bei mittelschlanken Stäben verhängnisvollen Einfluß einer verschwindend kleinen Exzentrizität von $\frac{1}{100}$ der Kernweite auf die Tragfähigkeit.

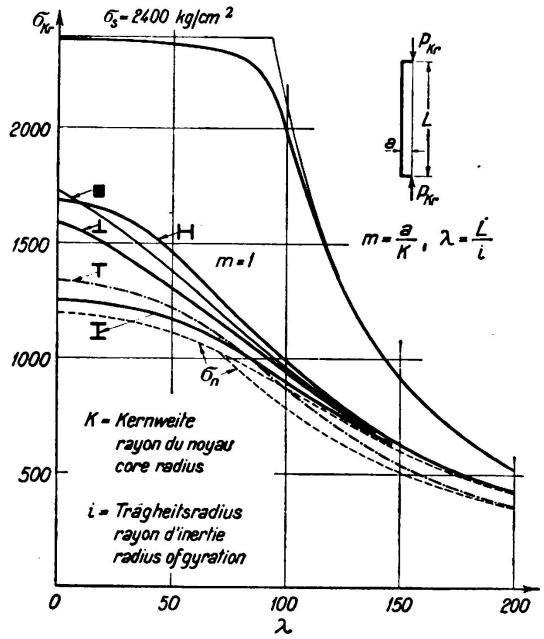
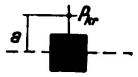
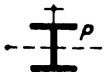


Fig. 1.

Schließlich gelingt es aus einer Betrachtung über Stäbe beliebiger Querschnittsform die in Tafel I angegebene einheitliche und für jede Stahlsorte anwendbare Näherungsformel abzuleiten, deren Beiwerte μ_1 und μ_2 von der Profilform abhängig sind. Für Stäbe mit T-Querschnitt ist unterhalb einer bestimmten Axialspannung eine zweite ähnlich gebaute Formel zu verwenden. Diese Berechnungsgrundlagen gelten ganz allgemein für axial gedrückte und auf Biegung beanspruchte Stahlstäbe, wenn als Exzentrizität im erweiterten Sinne das Verhältnis aus Biegemoment (bezogen auf die nicht verformte Stabachse) zu Axialkraft verstanden wird; bezüglich näherer Erläuterungen verweise ich auf meine Veröffentlichungen. Für $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = 0$ erhält man die zur Berechnung der in Fig. 1 strichliert eingezeichneten σ_n-Linie erforderlichen Formeln.

Für die praktische Bemessung von *„entwurfsgemäß" zentrisch gedrückten* Stäben schlage ich vor mindestens eine unvermeidliche Exzentrizität von $\frac{1}{100}$ der Kernweite in Rechnung zu stellen; man erhält dann mit $m_0 = 0{,}01$ und $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ eine einfache *„Knickformel"*, welche der heute wohl unbestrittenen Tatsache, daß die Stauchgrenze σ_s die obere Grenze für die Knickspannung darstellt, grundsätzlich entspricht und für sehr schlanke Stäbe praktisch in die Euler-Formel übergeht. Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß diese Formeln durch die bekannt gewordenen Versuchsergebnisse gut bestätigt werden und daher bei geringer Rechenarbeit und größter Allgemeingültigkeit eine verläßliche Beurteilung der Tragfähigkeit gewährleisten. Hiermit dürfte dieses Problem in einer sowohl vom theoretischen als auch praktischen Standpunkt aus befriedigenden Form hinreichend geklärt sein.

Tafel I. Berechnungsgrundlagen für exzentrisch gedrückte Stahlstäbe.

Querschnitt	Formel für die kritische Schlankheit	Gültigkeitsbereich	Beiwerte μ_1	Beiwerte μ_2	Anmerkungen
	$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}\left[1-\mu_1\frac{m\,\sigma_{Kr}}{(\sigma_s-\sigma_{Kr})}\right]\left[1-\mu_2\frac{m\,\sigma_{Kr}}{(\sigma_s-\sigma_{Kr})}\right]$	unbeschränkt $0 \leqq \sigma_{Kr} \leqq \sigma_s$	0,5	0,5	Es bedeutet:
			0.5	0,5	L . . . . Stablänge F . . . . Querschnittsfläche $W_{1,2}$ . . Widerstandsmoment des Biegedruck- bezw. des Biegezugrandes
			0,4	0,4	i . . . . Trägheitsradius $\lambda = \frac{L}{i}$ . . Schlankheit
			0,9	0,1	a . . . . Exzentrizität $m = \frac{a\,F}{W_1}$ . . Exzentrizitätsmaß σ_s . . . . Fließgrenze
			0,9	0,1	E . . . . Elastizitätsmodul σ_{Kr} . . . Kritische Spannung $P_{Kr} = F\sigma_{Kr}$ . . . Tragkraft
		$\frac{\sigma_{Kr}}{\sigma_s} \geqq \frac{W_1-W_2}{W_1+W_2}$	0,8	0,2	
	$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}\left[1-\mu_1\frac{W_1 m\,\sigma_{Kr}}{W_2(\sigma_s+\sigma_{Kr})}\right]\left[1-\mu_2\frac{W_1 m\,\sigma_{Kr}}{W_2(\sigma_s+\sigma_{Kr})}\right]$	$\frac{\sigma_{Kr}}{\sigma_s} \leqq \frac{W_1-W_2}{W_1+W_2}$			

I 10

Der Einfluß einer Ungleichartigkeit der Fehlerhebel auf die Tragfähigkeit einer Stahlstütze.

L'influence des erreurs de centrage sur la résistance des colonnes métalliques.

The Effect of Unequal Eccentricities on the Carrying Capacity of a Steel Column.

Dr. techn. J. Fritsche,
Professor an der Deutschen Techn. Hochschule, Prag.

Im wirklichen Stahlbauwerke ist die Eintragung der Kraft in den Druckstab in den meisten Fällen recht unklar und unbestimmt und die Annahme eines mittigen Druckes oder eines solchen mit gleichen Außermittigkeiten an den beiden Stabenden ist lediglich als ein Mittel zu werten, um für die Tragfähigkeit einen Vergleichsmaßstab zu schaffen und den Einfluß von Querschnittsform, Stablänge und Größe der Außermittigkeit der Druckkraft zu erkennen. Diese letztere Größe ist für den Druckstab des Fachwerkes oder den des Stahlskelettes durch seine steife Verbindung mit den Nachbarstäben und durch die Einzelheiten der konstruktiven Ausbildung dieser Verbindung bestimmt und sie kann genau nur dann angegeben werden, wenn man die sogenannten Nebenspannungen des Fachwerkes ermittelt. Die Berechnung derselben würde in jedem Falle sehr mühselige und zeitraubende Zahlenrechnungen erfordern, die vom entwerfenden Ingenieur nicht verlangt werden können; außerdem ist aber auch sehr fraglich, ob ihr Einfluß auf die Sicherheit des Tragwerkes mit Rücksicht auf das plastische Verhalten des Werkstoffes mit dem der Grundspannungen unmittelbar verglichen werden darf.

Die ungefähre Größe der Nebenspannungen und ihre Verteilung im Stabwerke darf heute als bekannt gelten;[1] das Ergebnis der theoretischen Untersuchungen ist übrigens auch durch Dehnungsmessungen an fertigen Bauwerken überprüft worden. Man weiß daher, daß die Außermittigkeiten des Lastangriffes an den Stabenden meist verschieden sind, und daß die Stützlinie des Druckgurtes in der Regel sogar die Stabachse schneidet. Die Lösung dieses allgemeineren Problems macht unter der Voraussetzung unbegrenzten, elastischen Verhaltens des Werkstoffes keine besondere Schwierigkeiten; es liegt ein gewöhnliches Spannungsproblem vor und es könnte daher auch die Sicherheit eines derartig

[1] *M. Roš:* Nebenspannungen infolge vernieteter Knotenpunktverbindungen eiserner Fachwerkbrücken. Bericht der Gruppe V der Technischen Kommission des Verbandes Schweiz. Brücken- und Eisenhochbaufabriken, Juni 1922.

beanspruchten Stabes bei Angabe einer zulässigen Spannung einwandfrei festgelegt werden. Erst die Berücksichtigung der plastischen Verformungsvorgänge macht die Aufgabe verwickelt; dann entsteht ein Problem mit kritischen Lasten und eine Bemessung mit einer zulässigen Spannung kann eine gleiche Sicherheit aller Stäbe nicht mehr gewährleisten.

Bei der rechnerischen Behandlung aller Plastizitätsaufgaben spielt die Fließbedingung eine maßgebende Rolle; diese F.B. ist der analytische Ausdruck für die Umstände, unter denen der Baustahl aus dem elastisch festen in den plastisch verformbaren Zustand übergeht. Bei gleichmäßigen Spannungszuständen besteht heute bereits Übereinstimmung über ihren Aufbau, es ist aber noch fraglich, ob sie in derselben Form auch auf ungleichmäßige Spannungszustände übertragen werden darf. Eine neuere Hypothese nimmt an, daß die Kenntnis des örtlichen Spannungszustandes für die Vorhersage von Fließerscheinungen nicht ausreicht und nur die Betrachtung des Spannungszustandes in einem größeren Gebiete eine Entscheidung der Frage nach der Fließgefahr ermöglicht. Auf Grund dieser „neueren F.B.“ läßt sich nun rechnungsmäßig recht weit an die tatsächliche Tragfähigkeit eines mit verschiedenen Fehlerhebeln gedrückten Stabes unter Berücksichtigung der wirklichen Querschnittsform herankommen.

Bei gleichen Fehlerhebeln an den Stabenden tritt das Größtmoment in der Stabmitte auf; es fällt daher mit dem Orte von y_{max} zusammen. Das Tragvermögen der Stütze ist erschöpft, wenn diese Stelle durch den plötzlich einsetzenden Fließvorgang in ihrer Widerstandsfähigkeit so weit geschwächt wird, daß sie bei einer Laststeigerung keinen wesentlichen Beitrag mehr zum Gleichgewicht zwischen angreifenden Kräften und inneren Widerständen leisten kann. Die seitlichen Ausbiegungen wachsen dann sehr rasch an und können erst beim Einsetzen einer Werkstoffverfestigung zu einem neuerlichen Stillstande gelangen. Bei ungleichen Fehlerhebeln wandert y_{max} von der Stabmitte weg gegen das Stabende mit dem größeren Fehlerhebel zu (Fig. 1). Solange es sich innerhalb der Stablänge l befindet, ist gegen früher kein wesentlicher Unterschied. Wenn aber das Max. der elastischen Linie erst außerhalb der Stablänge auftritt und der Stab den Größtwert seines Biegungsmomentes am Stabende mit dem Betrage $P\,p_1$ erreicht, treten ganz andere Erscheinungen auf (Fig. 2). Die Erfüllung der F.B. am Stabende bedeutet dann noch nicht die Erschöpfung seines Tragvermögens, denn der Stab kann unter der Last noch nicht weggehen, weder seitlich, noch in dem Sinne, daß unzulässige Stauchungen in der Richtung der Stabachse auftreten. Fließen am gestützten Stabende kann keine Instabilität des Gleichgewichtes hervorbringen, denn der Stab muß dabei im wesentlichen noch Form und Lage beibehalten, da eine Änderung dieser Größen ohne Kraftaufwand nicht möglich ist. Der in seiner ganzen Länge ausschließlich elastisch verformte Stab steuert noch die Verformung an der Fließstelle, die Erfüllung der F.B. kann daher in diesem Falle nur eine Bereitschaft zu plastischer Verformung bedeuten.

Bei wachsender Belastung wird die Stütze nun unter anderen Randbedingungen weiter verformt und es ist auf Grund des früher Gesagten einleuchtend, daß das Tragvermögen erst dann seinen Grenzwert erreicht hat, wenn das Größtmoment am Stabende gleichzeitig auch durch ein Max. der elastischen Linie gekennzeichnet ist; ihre Tangente muß dann dort gleichlaufend mit der Kraftrichtung sein.

Es ist naturgemäß schwierig, die sich nun abspielenden Vorgänge richtig und zutreffend wiederzugeben und es ist verständlich, daß dies überhaupt nur ungefähr möglich ist. Bezeichnet man mit P_1 die Last, bei der am Stabende die F.B. erfüllt ist, so überlagert sich nun zu dem Spannungszustande an der Fließstelle die Druckkraft $P - P_1$ und es ist auf Grund der allerdings mit Verdrehen bis zum Fließen und darauf folgenden Zug durchgeführten Versuche von *Hohenemser*[2] und *Prager*[3] zu schließen, daß bei der Biegung bis zum

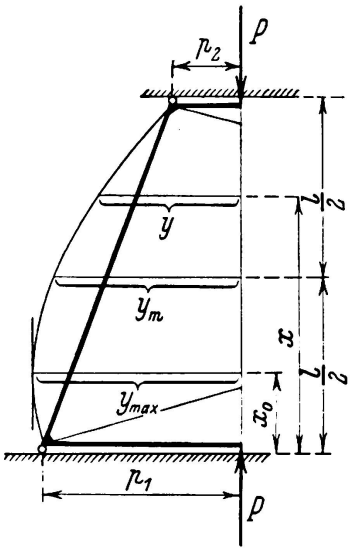


Fig. 1.

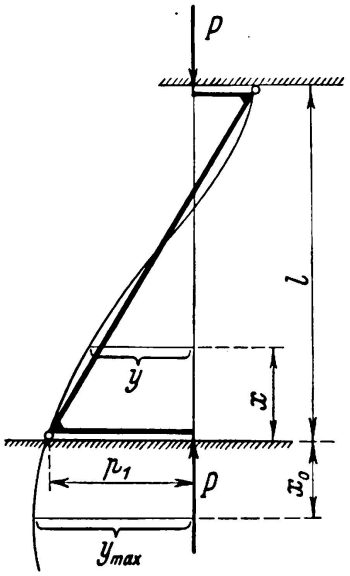


Fig. 2.

Fließen und darauf folgenden Druck das vom Querschnitt aufnehmbare Biegungsmoment allmählich vermindert wird. Damit könnte sich die Laststeigerung nur mehr in einen Stab eintragen, bei dem sich am Stabende ein Fließgelenk ausgebildet hätte. Das Fließen zentriert daher in einem gewissen Sinne die Laststeigerung, indem durch das Versagen der Fließstelle das Stabendmoment der Laststeigerung $(P - P_1)\,p_1$ und ein ständig wachsender Teil des schon aufgenommenen Fließmomentes $P_1 p_1$ auf andere Weise vom Tragwerk verarbeitet werden muß. Das Versagen des Biegungswiderstandes am Stabende kann dadurch zum Ausdrucke gebracht werden, daß man zu den bisherigen äußeren Kräften an der Fließstelle zwei Momente hinzufügt, die dort die Krümmung der elastischen Linie den neuen Randbedingungen anzupassen haben. Die Steigerung des Stabendmomentes beim Wachsen von P über P_1 hinaus verhindert ein entgegengesetzt drehendes Moment von der Größe $(P - P_1)\,p_1$ und die Verminderung des Fließmomentes durch die dazutretende Längskraft kann durch ein Moment ΔM bewirkt werden, das sich aus der angenommenen Fließbedingung berechnen läßt. Aus Platzmangel ist es nicht möglich, hier die recht umfangreichen Berechnungen anzuführen; sie sind ausführlich in meiner

[2] *K. Hohenemser:* Neuere Versuchsergebnisse über das plastische Verhalten der Metalle. Zeitschrift für angew. Math. u. Mech. 1931, S. 423.

[3] *K. Hohenemser* und *W. Prager:* Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flußstahl. Zeitschrift für angew. Math. u. Mech. 1932, S. 1.

in der Zeitschrift „Der Stahlbau" erschienenen Arbeit dargestellt worden.[4] Die Fig. 3 und 4, die dieser Veröffentlichung entnommen sind und die sich auf den Fall einseitiger und entgegengesetzt gleicher Außermittigkeit des Last-

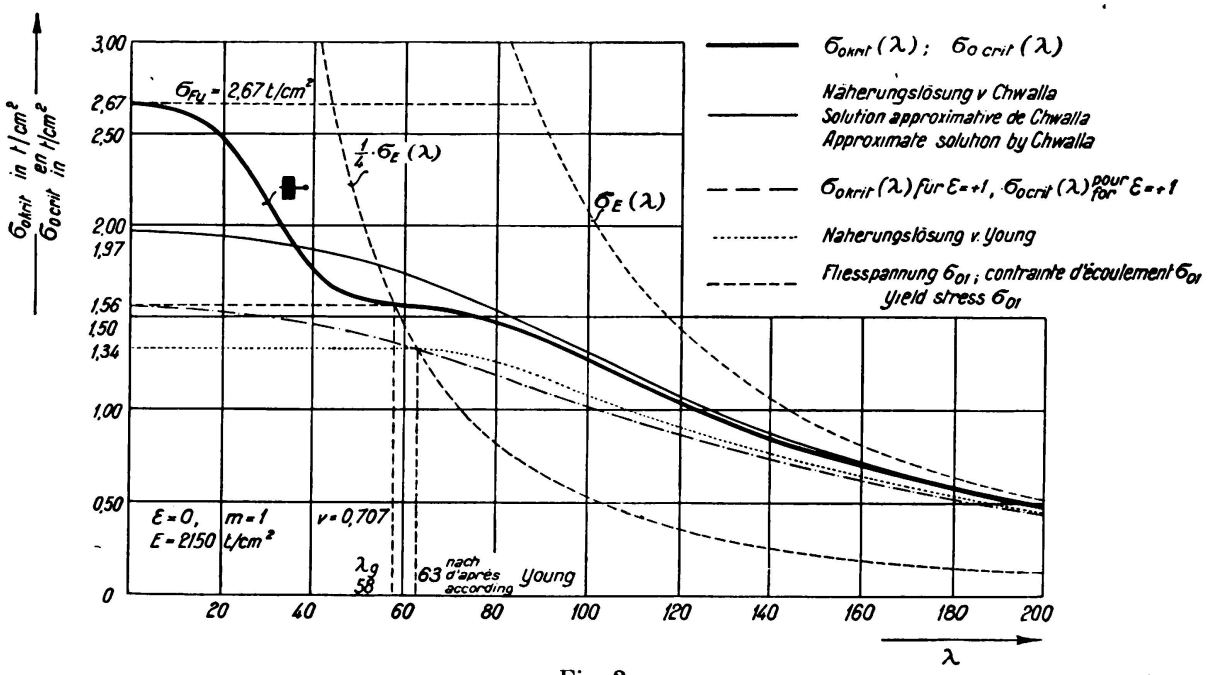


Fig. 3.

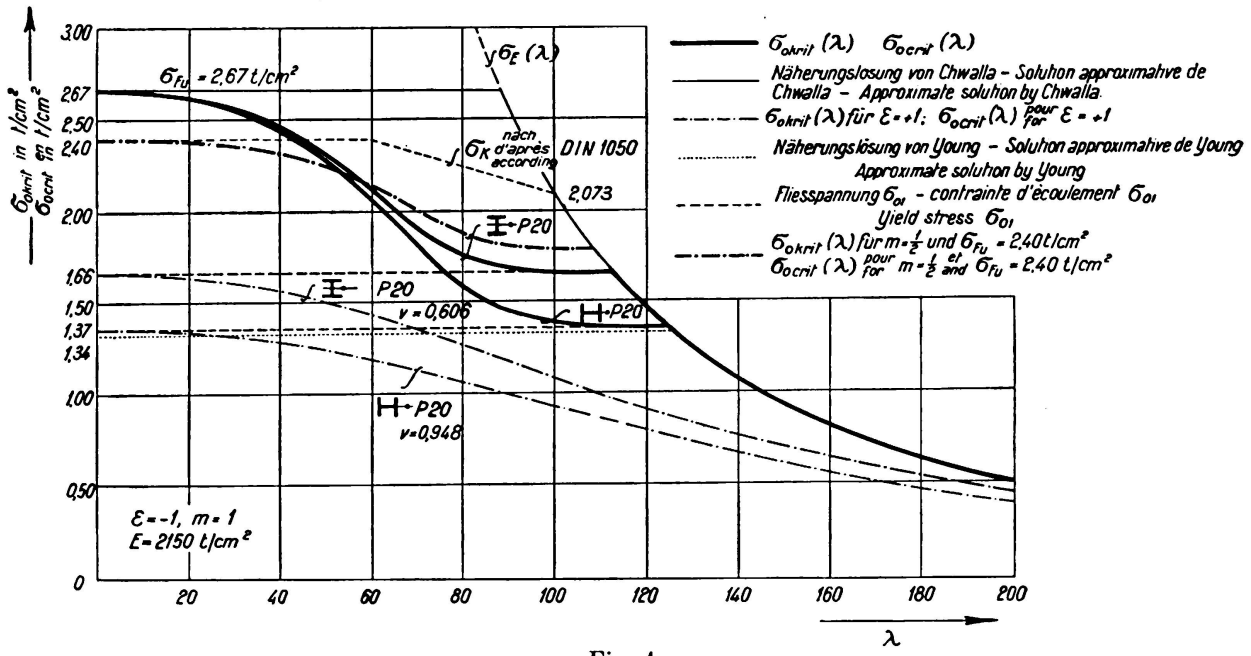


Fig. 4.

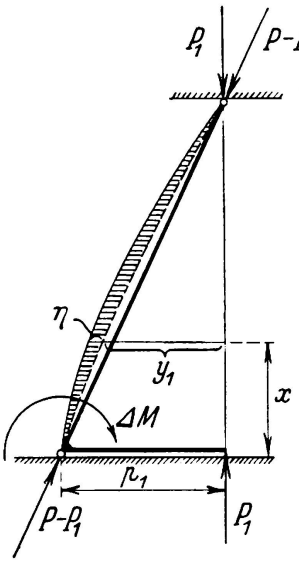
angriffes beziehen, zeigen die gewonnenen Ergebnisse. Es stellen sich ganz beträchtliche Abweichungen gegenüber den bisher untersuchten Fällen des mittigen und des außermittigen Druckes mit gleichen Fehlerhebeln ein.

---

[4] *J. Fritsche:* Der Einfluß einer Ungleichartigkeit der Fehlerhebel auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stahlstützen. Der Stahlbau 1936, Heft 23 und 24.

Wie schon bemerkt, liegen die Verhältnisse für den in ein Stabsystem biegungssteif eingebauten Druckstab so, daß sich $\varepsilon = p_2 : p_1$ dem Betrage -1 nähert. Die Fälle mit $\varepsilon > o$ oder $\varepsilon = 1$ bilden eine seltene Ausnahme; außerdem sind in solchen Fällen die Außermittigkeiten gewöhnlich klein, so daß es nicht gerechtfertigt ist, das Bemessungsverfahren von Druckstäben auf solche Ausnahmefälle zu gründen. Für $\varepsilon = -1$ kommen nun die Linien $\sigma_{o\,krit}\cdot(\lambda)$ recht nahe an die Linien $\sigma_K\,(\lambda)$ heran, die die Tragfähigkeit bei mittigem Drucke zum Ausdruck bringen und es erscheint mir daher gerechtfertigt, bei der Festlegung einer „Knickspannungslinie" zur Berechnung gedrückter Fachwerksstäbe von diesem Linienzuge auszugehen, wie dies z. B. bei den reichsdeutschen Be-

Fig. 3a.



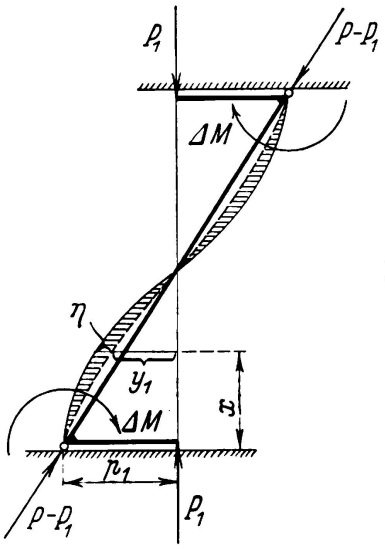


Fig. 4a.

rechnungsvorschriften nach DIN 1050 geschieht. Es würde sich dann nur noch darum handeln, Größtwerte der vorkommenden Außermittigkeiten zu berechnen oder auf Grund von Messungen zu schätzen und diese bei der Festlegung einer für alle Druckstäbe gültigen Linie $\sigma_{krit}\,(\lambda)$ zu berücksichtigen. p selbst wird dabei gewöhnlich nicht eingeführt, sondern das Verhältnis von p zur Kernweite k des Querschnittes, das man mit m bezeichnet. $m = 1$ liegt sicher bereits zu hoch, man dürfte eher mit $m = 0{,}5$ an die tatsächlich vorliegenden Verhältnisse herankommen. Damit würde sich dann eine „Knickspannungslinie" ergeben, die von der nach DIN 1050 nur wenig abweicht, nur würde es sich empfehlen, von der Euler-Linie früher als bei 2073 kg/cm², etwa bei 1800 kg/cm², abzuzweigen.

Versuche zur Überprüfung der vorliegenden Rechenergebnisse liegen meines Wissens nicht vor; es ist auch nicht leicht, solche Versuche auszuführen, da zu diesem Zwecke zunächst eine Lagerung des Versuchsstabes gefunden werden muß, die ebenso die Zentrierung der Last von gewissen Belastungsgrenzen ab ermöglicht, wie dies beim steif eingebauten Fachwerkstab eintritt. Es handelt sich darum, die veränderlichen Randbedingungen eines Systemstabes im Festigkeitslaboratorium beim Einzelstab nachzuahmen. Wie weit dies überhaupt möglich ist, entzieht sich zunächst meiner Kenntnis und es wäre sehr erwünscht, derartige Versuchsanordnungen kennen zu lernen, da sie einen weiteren Einblick in das tatsächliche Verhalten des Druckstabes im Bauwerk ermöglichen.

I 11

Zur Physik des Zerreißversuchs.

La physique de l'essai de rupture par traction.

The Physics of the Tensile Breaking Test.

Dr. phil. W. Späth,
Wuppertal-Barmen.

Die Grundlage für die Werkstoffprüfung bildet auch heute noch der Zerreißversuch. Die Aufzeichnung des Zusammenhangs zwischen aufgebrachter Last und erzeugter Verformung des Probestücks scheint grundsätzlich so einfach zu sein, daß die physikalische Durchdringung des Belastungsvorgangs gegenüber Fragen technisch-praktischer Art bei der konstruktiven Gestaltung der Prüfeinrichtungen in den Hintergrund getreten ist. Die Auswertung der von den heutigen Prüfeinrichtungen gelieferten Schaubilder läßt dagegen eine Reihe von Fragen offen und ein großer Anteil des Schrifttums beschäftigt sich hiermit. So sind z. B. auch heute noch die Meinungen über den Wert oder Unwert der Elastizitätsgrenze oder auch der oberen und unteren Streckgrenze geteilt. Ebenso zeigen die Ergebnisse von Dauerversuchen, daß die durch Übereinkunft festgelegten Werkstoffkennwerte des Zerreißversuchs in keinen übersichtlichen Zusammenhang mit der entscheidend wichtigen Dauerwechselfestigkeit zu bringen sind.

Zur Prüfung eines Werkstoffes oder auch ganzer Konstruktionsteile werden die zu prüfenden Teile in einer Prüfeinrichtung eingespannt und auf irgend welche Art unter allmählich wachsende Belastung gesetzt. Der Prüfkörper wird also mit den verschiedenen Baugliedern der Prüfeinrichtung, die entweder im wesentlichen als träge Massen oder aber als Federungen wirken, in einen gemeinsamen Kraftfluß geschaltet. Eine nähere Betrachtung zeigt, daß die Eigenfederung des Gestells, die Zusammendrückbarkeit der Preßflüssigkeit und auch der Eigenhub der Kraftanzeigegeräte der heute üblichen Prüfmaschinen keineswegs zu vernachlässigen sind, daß im Gegenteil die elastische Nachgiebigkeit der Prüfeinrichtungen meist wesentlich größer ist, als die Verformung des Prüfkörpers selbst.[1,2]

Die sich hieraus ergebende Beeinflussung des Belastungsvorgangs wird in Fig. 1 erläutert. Die Linie OA stelle den Anstieg der Kraft mit wachsender Verformung in einem Prüfstück dar. Auch in der Belastungsvorrichtung selbst spielt sich hierbei ein Belastungsvorgang ab, der durch die Gerade CA dargestellt werden kann. Im Punkt A herrscht statisches Gleichgewicht zwischen der elastischen Kraft des Prüflings und der elastischen Gegenkraft der Belastungsvorrichtung Der Prüfling hat sich unter der durch das Stück AB gegebenen Belastung um das Stück OB verformt, während die entsprechende Verformung

der Belastungsvorrichtung durch das Stück CB dargestellt wird. Die beiden Winkel α und β geben die Größe der Federkonstanten des Prüfstücks bzw. der Belastungsvorrichtung an. Tritt nun plötzlich eine plastische Dehnung des Prüfstücks von A nach D ein, so sucht sich der Prüfkörper gemäß der Linie DO′ zu entlasten. Im Schnittpunkt E dieser Geraden mit der Belastungslinie der Prüfeinrichtung kommt die Anordnung wieder ins Gleichgewicht, denn hier ist die im Prüfling herrschende Kraft wiederum gerade gleich der elastischen Gegenkraft der Belastungsvorrichtung. Durch das plastische Fließen von A nach D kommen zwei Effekte zustande. Die ursprüngliche Spannung fällt um das Stück AA′ ab, während die außen meßbare Verformung des Prüflings sich um das Stück A′E vergrößert hat. Man erkennt sofort, daß dieser Vorgang nicht nur vom Prüfling, sondern sehr stark auch von den elastischen Eigenschaften der Prüfeinrichtung abhängig ist. Je nach der Eigenfederung der Prüfeinrichtung,

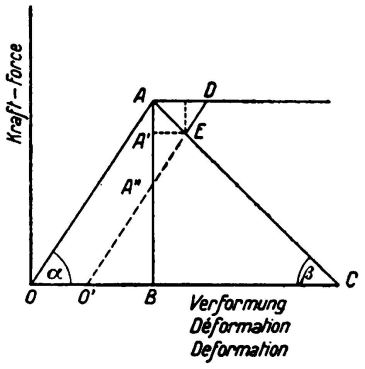


Fig. 1.

also im wesentlichen je nach der Neigung der Geraden CA sind die Ergebnisse ganz verschieden. Eine sehr „weiche" Maschine, die zur Erreichung der Kraft AB eine sehr große eigene Verformung aufgezwungen erhält, zeigt innerhalb der hier zu besprechenden sehr kleinen Verformungen des Prüfkörpers einen angenähert horizontalen Verlauf der Linie CA. Die Verlängerung des Prüflings um AD erfolgt deshalb unter angenähert gleichbleibender Spannung, und die außen meßbare Verformungszunahme entspricht diesem Stück AD. Eine solche weiche Maschine kann auch als Nachwirkungsmaschine angesprochen werden, da sie einen einsetzenden Fließvorgang unter gleichbleibender Last abrollen läßt. Ganz anders liegen die Verhältnisse bei einer „harten" Maschine, deren Kennlinie im Grenzfall unendlich großer Federkonstanten durch die Senkrechte AB gegeben ist. Durch das Fließen des Prüfstücks sinkt jetzt die Last von A nach A″, wobei die außen meßbare Verformung des Prüflings unverändert bleibt. Eine solche harte Maschine kann auch als Relaxationsmaschine angesprochen werden, denn bei ihr bleibt die anfängliche Verformung aufrecht erhalten und der einsetzende Fließvorgang hat eine entsprechende Lastabnahme zur Folge. Die heutigen Maschinen liegen zwischen diesen beiden Grenzfällen und ihre Angaben sind ohne Kenntnis ihrer eigenen Elastizität nicht ohne weiteres zu vergleichen.

Diese theoretischen Ableitungen wurden durch eine Reihe von Versuchen des Verfassers erhärtet. Auch an mehreren Forschungsstellen wird nunmehr diesen Fragen nachgegangen, die von grundsätzlicher Wichtigkeit für die Werkstoffprüfung sind.

Bereits in der unter [1] genannten Arbeit wurde vom Verfasser vorgeschlagen, eine vorhandene Prüfmaschine dadurch weich zu machen, daß eine Feder in den Kraftfluß eingeschaltet wird. Derartige Versuche wurden von *G. Welter*[3] durchgeführt, deren Ergebnis den Erwartungen entspricht. Eine durch Zwischenschaltung einer Feder künstlich weich gemachte Prüfmaschine muß nach den obigen Ableitungen einen einsetzenden Fließvorgang unter gleichbleibender Spannung ablaufen lassen. Es kann also z. B. ein Werkstoff, der bei der üblichen Prüfung eine obere und untere Streckgrenze zeigt, auf einer solchen Maschine keinen Spannungsabfall zur unteren Streckgrenze zeigen, was bestätigt gefunden wird.

Bei sehr großen Kräften ist die Zwischenschaltung einer Feder nicht möglich, da diese sehr große Abmessungen annehmen würde. Beim Losenhausenwerk Düsseldorf wurde daher nach einem Vorschlag von Baurat *von Bohuszewicz*

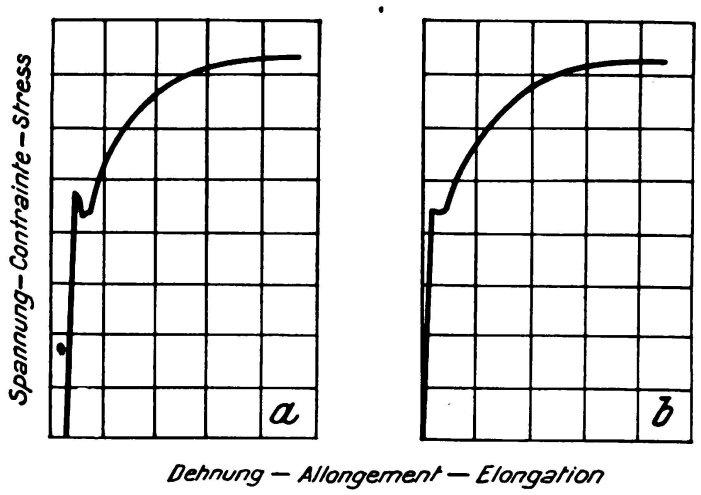


Fig. 2.
Fließvorgang auf üblicher Maschine (a).
„ nach Vergrößerung des Preßwasserraums (b).

eine hydraulische 60 t-Maschine dadurch weich gemacht, daß zum Preßzylinder ein großer Druckwasserbehälter zugeschaltet wurde. Das Ergebnis zeigt Fig. 2. Links ist die Kurve dargestellt, die sich bei dem üblichen Gebrauch der Maschine zeigt. Eine klare Ausbildung von oberer und unterer Streckgrenze ist erkennbar. Wurde nun die Maschine durch Zuschaltung des Druckwasserbehälters künstlich weich gemacht, so lieferte ein zweiter Prüfstab desselben Werkstoffs die rechte Kurve. Man erkennt, daß der Fließvorgang infolge der großen Nachgiebigkeit des Preßwassers nunmehr unter gleichbleibender Last verläuft. Es lassen sich eine große Zahl von weiteren Folgerungen für die Abhängigkeit der Ausbildung von oberer und unterer Streckgrenze von den Prüfbedingungen angeben, worauf jedoch hier nicht eingegangen werden kann.

Von Interesse ist jedoch eine Versuchsreihe, die vom Verfasser kürzlich beendigt wurde, und die gerade den umgekehrten Weg beschreitet. Wenn man eine Maschine sehr hart macht, so ist zu hoffen, daß wesentlich schärfer in die Vorgänge belasteter Werkstoffe eingedrungen werden kann.[4] Bekanntlich werden an rotierenden Dauerbiegemaschinen häufig sogenannte Kurzversuche ausgeführt,

bei denen die Durchbiegung des rotierenden Stabes in Abhängigkeit von der Belastung aufgetragen wird. Die bekannte Maschine von *Schenck*-Darmstadt, aber auch andere Maschinen bringen die Belastung durch Gewichte auf. Hierbei wird als Durchbiegungslinie eine Linie erhalten, die allmählich vom geradlinigen Verlauf abweicht. Macht man jedoch eine solche Maschine künstlich hart, derart, daß die Belastung durch eine Feder aufgebracht wird, die wesentlich härter ist als der Prüfstab selbst, so erhält man einen Verlauf der Durchbiegungskurve, der sehr lebhaft an Zerreißkurven mit oberer und unterer Streckgrenze erinnert. Die Spannung fällt ganz deutlich von einer „oberen" zu einer „unteren" Laststufe ab. Bei sehr plastischen Werkstoffen, z. B. bei Aluminium, besteht die ganze Belastungskurve aus einer großen Anzahl von solchen Lastsprüngen. Ferner wurde gefunden, daß die Empfindlichkeit ausreicht, selbst den wichtigen Fragen der Kerbwirkung nachzugehen. Im Einzelnen muß auf die demnächst erscheinende Arbeit verwiesen werden.[5]

Aus diesen Betrachtungen ergeben sich einige wichtige Folgerungen für die Weiterentwicklung von Prüfmaschinen. Insbesondere wird es in Zukunft gelingen, durch systematische Ausbildung wesentlich härtere Maschinen herzustellen. Derartige Maschinen haben den unschätzbaren Vorteil, daß sie werkstoffbedingte, kritische Belastungsgrenzen sehr scharf durch einen deutlich erkennbaren Spannungsabfall anzeigen. Die heute üblichen Prüfmaschinen dagegen verwischen diese wichtigen Grenzübergänge infolge ihrer eigenen Nachgiebigkeit bis zur völligen Unkenntlichkeit.

Schrifttum.

1 *W. Späth:* Arch. Eisenhüttenwesen 9 (1935/36) S. 277.

2 *W. Späth:* Meßtechnik, XII (1936) S. 21.

3 *G. Welter:* Metallwirtschaft XIV (1935) S. 1043.

4 *W. Späth:* Metallwirtschaft, 16 (1937) S. 193.

5 *W. Späth:* Z.V.D.I. erscheint demnächst.

Die Firma Schenck-Darmstadt stellt neben der üblichen Maschine mit Gewichtsbelastung nun auch diese neuartigen, „harten" rotierenden Dauerbiegemaschinen her.

I 12

Der Einfluß der Zähigkeit des Stahles auf die Stabilität der Stahlkonstruktionen.

Rôle de la ductilité de l'acier dans la stabilité des constructions.

The Influence of Ductility of the Steel to the Stability of Structures.

F. Aimond,

Docteur ès sciences, Ingénieur des Ponts et Chaussées détaché au Ministére de l'Air, Paris.

Die Zähigkeit ist die Eigenschaft, auf Grund welcher ein Werkstoff nach Erreichung seiner Elastizitätsgrenze bedeutende Formänderungen erleiden kann. Beim Baustahl ändern die bedeutenden Formänderungen, die eintreten, wenn die Elastizitätsgrenze erreicht ist, das Gefüge des Metalls in mechanischer Hinsicht nicht erheblich. Dieser Bereich der Formänderung im Anschluß an den Elastizitätsbereich heißt Plastizitätsbereich.

Seit langem hat man bemerkt, daß die Stabilität der Stahlkonstruktionen auf das Vorhandensein kleiner Zonen im Zustand der plastischen Verformung zurückzuführen war, die sich an allen Stellen bilden, wo infolge der Größe der elastischen Formänderungen die Elastizitätsgrenze erreicht war, so daß schließlich die maximale Beanspruchung des Stoffes niedriger war als die mit den üblichen Methoden der Elastizität errechnete. Die Zähigkeit des Stahls hatte also, so schien es, die Wirkung, die Festigkeit der Konstruktionen zu erhöhen, indem sie die Zonen der größten elastischen Formänderungen beseitigte. Diese Eigenschaft, richtig verallgemeinert, wird heute „Anpassung" genannt.

Aber die Anpassung gilt nur für die ruhenden oder nur vereinzelt auftretenden Lasten, da die sich ständig wiederholenden Formänderungen des Werkstoffes zu einem baldigen Bruch führen. Die Anpassung ist nicht zu berücksichtigen, wenn es sich um die Festigkeit gegen wechselnde Belastungen handelt. Es ist sogar bekannt, daß gegenüber diesen Belastungen der Elastizitätsbereich noch zu groß ist, und daß jeder Werkstoff einen wirklichen inneren Elastizitätsbereich innerhalb des üblichen Elastizitätsbereiches aufweist, den man auch Dauerfestigkeitsbereich nennt.

Die Zähigkeit des Stahls spielt somit keine Rolle hinsichtlich der Stabilität bei wechselnden Beanspruchungen. Sie spielt dagegen vermöge der Anpassung eine wesentliche Rolle bei allem, was die Stabilität bei ruhenden oder praktisch ruhenden Belastungen anbelangt.

Die Zähigkeit des Stahls tritt auf Grund des Anpassungsgesetzes in allen jenen

Zonen einer Konstruktion auf, wo aus verschiedenen Gründen die Elastizitätsgrenze erreicht ist. Die Zonen der plastischen Formänderungen befinden sich infolgedessen in der Nähe aller Punkte geometrischer oder mechanischer Unstetigkeit, von denen es in einer Konstruktion unzählige gibt, und in den Zonen großer elastischer Formänderungen. Diese Zonen der plastischen Formänderungen sind aber im allgemeinen in einer gut ausgeführten Konstruktion äußerst beschränkt. Tatsächlich ist der Anstieg der Festigkeit, den die Anpassungsverformungen bewirken, auf die ungleiche Verteilung der Beanspruchungen und auf das dadurch bewirkte Vorhandensein von weniger ermüdeten Zonen zurückzuführen. Diese Zonen sind in gut entworfenen Konstruktionen zwangsläufig von geringer Bedeutung.

Daraus ergibt sich eine erste Folgerung: wenn die Zähigkeit des Stahls hinsichtlich der Stabilität der Konstruktionen ein wesentlicher Faktor ist, so verbessert sie nicht die Festigkeit gut entworfener Konstruktionen, sie korrigiert nur etwaige Konstruktionsfehler, die Mängel an Homogenität des Stoffes und die Wirkung der Stützensenkungen. Unseres Erachtens könnte man eine neue Berechnungsmethode für die Konstruktionen unter Verwertung der Eigenschaften der plastischen Verformung nicht aufbauen.

Dennoch sind die Berechnungsmethoden, die sich auf das Vorhandensein der plastischen Formänderungen stützen, nicht zu verwerfen, und, was uns betrifft, so wenden wir sie täglich an. Aus verschiedenen Gründen entspricht nämlich die Form, die den einzelnen Bauteilen gegeben wird, nicht der Höchstleistungsfähigkeit des Stoffes. Es ist daher ganz erklärlich, daß man die Zähigkeit des Stahls ausnützt, um den auf unzweckmäßige Formgebung zurückzuführenden mechanischen Fehler teilweise zu verbessern. Ich möchte mich näher ausdrücken: nehmen wir z. B. einen Bogen, einen Rahmen oder einen durchlaufenden Träger an. Das Beste wäre, diese Teile, soweit angängig, so auszuführen, daß die Elastizitätsgrenze bei ungünstigster Belastung an allen Stellen gleichzeitig erreicht wird. Die Zähigkeit des Werkstoffes ist dann für die Berechnung ohne Wert. Wenn man jedoch gezwungen ist, Formen anzuwenden, die hinsichtlich des mechanischen Wirkungsgrades ungünstig sind, so darf man nicht den Fehler begehen, sie auf Grund der Annahme elastischer Formänderung unter der Einwirkung der ruhenden Belastungen zu berechnen, denn dann würde man dem ersten Fehler einen zweiten hinzufügen; man muß sie vielmehr auf Grund der Annahme der plastischen Formänderung berechnen, um den Verlust an Wirkungsgrad, der durch eine unrichtige Wahl der Form hervorgerufen wird, auf ein Mindestmaß herabzusetzen.

Unseres Erachtens stellen also die Berechnungsmethoden mit der Plastizitätstheorie äußerste Notbehelfe dar, die man für die Berechnung von mechanischen Elementen mit schlechtem Wirkungsgrad und selbstverständlich nur für die ruhenden Lasten anwenden sollte.

Von diesem letzten Gesichtspunkt aus ist es wünschenswert, daß die jetzt angewandten Methoden genormt werden, und daß man zu einfachen Formeln für die Behandlung der üblichen statisch unbestimmten Systeme, insbesondere Bögen und Rahmen, gelangt. Es dürfte heute nicht mehr vorkommen, daß man diese üblichen Bauelemente bei ruhenden oder wenig veränderlichen Lasten anders berechnet als unter Anwendung des Anpassungsgesetzes.

Unsererseits haben wir für die Berechnung jeder ruhenden oder als solche aufzufassenden Lasten unterliegenden Konstruktion folgende Regel aufgestellt: jedes Kräfte- und Beanspruchungssystem, das ein gegebenes mechanisches Gebilde im Gleichgewicht hält, ist ein System, das verwirklicht werden kann, wenn man die Anpassung berücksichtigt.

Wenn dieses System von einer gewissen Anzahl willkürlicher Parameter abhängt, so muß man möglichst versuchen, diese Parameter so zu bestimmen, daß das Minimum des Höchstwertes der Beanspruchungen an den verschiedenen Punkten des Systems erreicht wird. Mit anderen Worten, wenn ein rein statisches Gleichgewicht möglich ist, so ist die Konstruktion bei ruhenden Lasten stabil, ohne sich fragen zu müssen, ob das System der errechneten Beanspruchungen auch tatsächlich das wirkliche ist.

Das vorstehend genannte Prinzip hat uns bei der Projektierung aller von uns entworfenen Bauten geleitet. Es hat sich als ein besonders wirksames Hilfsmittel bei jenen Bauten erwiesen, wo, im Gegensatz zum üblichen Fall, nicht die Verformungen für die Beanspruchungen bestimmend sind, da deren Wert ausschließlich von der Lage der Lasten und der Art der Auflager abhängt.

Es ist dies besonders der Fall bei den zweidimensionalen mechanischen Systemen, d. h. wo die Belastungen sich mehr oder weniger gemäß einer Fläche ausbreiten. Die Eigenschaften dieser Systeme sind eng an die mechanischen Eigenschaften der Flächen gebunden. Wenn man die mechanischen Vorgänge, die durch das Gleichgewicht der Flächen hervorgerufen werden, untersucht, so kommt man bald zu Systemen, die sich im Gleichgewicht befinden und beiderseits derselben Kurve der Fläche Unstetigkeiten in den Beanspruchungen der parallelen Elemente aufweisen, welche Unstetigkeiten zu plötzlichen Längenänderungen der Elemente führen. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß infolge der Elastizität des Stoffes ein solches Gleichgewicht ohne Bruch des Werkstoffs nicht möglich ist. Die Erfahrung lehrt aber, daß solche Systeme durchaus stabil sind. Die Erklärung für diesen Widerspruch wird ebenfalls durch die Zähigkeitstheorie gegeben.

Wenn infolge plötzlicher Veränderungen der Beanspruchungen das Linienelement einer Fläche bedeutende Formänderungen erleidet, so kann sich die Fläche entweder geometrisch so verändern, daß ihr Linienelement die fragliche Änderung erleidet, oder es bilden sich bleibende Dehnungen, die einen Ausgleich der durch die mechanische Wirkung der Beanspruchungen hervorgerufenen Formänderungen bewirken. Unseres Erachtens spielt die Zähigkeit des Stahls hierbei eine sehr bedeutende Rolle, obwohl sie ziemlich schwer zu bestimmen ist.

Die Unstetigkeitslinien der Beanspruchungen, die sich somit im Gleichgewicht der Flächen zeigen, gehen gewöhnlich von den Unstetigkeitspunkten des Umfangs aus oder fallen mit letzterem zusammen. Es ist ein Leichtes, die durch die Unstetigkeit am Umfang hervorgerufenen Unstetigkeitslinien zum Verschwinden zu bringen; es genügt, die Ecken, wenigstens für die Berechnung, abzurunden. Die Unstetigkeitslinien entlang dem Umfang selbst sind schwieriger zu beseitigen; gerade hier spielt die Dehnbarkeit des Stoffes eine ausschlaggebende Rolle.

Unter diesen Unstetigkeitslinien der Beanspruchungen einer Fläche, spielen die asymptotischen Linien, sofern sie vorhanden sind, die größte Rolle. Gemäß gewissen dieser Linien führen die Gleichgewichtsbedingungen zur Auffindung von

Unstetigkeiten der Beanspruchungen, woraus sich eine Unstetigkeit der Dehnung ergibt. Wenn die Oberfläche genügend biegsam ist, um sich zu verformen, so wird die Verformung der Fläche, wenn diese asymptotischen Unstetigkeitslinien am Umfang liegen, eine Veränderung der Lage dieser asymptotischen Linien bewirken, die dann den Umfang verlassen. Man wird dadurch zurückgeführt auf den Fall von asymptotischen Unstetigkeitslinien, die ihren Ursprung in einer Ecke des Umfangs haben. Die Zähigkeit des Stahls in der Nähe dieser Ecke bewirkt die Beseitigung dieser Unstetigkeit, indem der wirkliche Umfang durch einen fiktiven Umfang ersetzt wird, in dem jede Unstetigkeit verschwunden ist.

Die Untersuchung der plastischen Formänderungen des Stahls in solchen Systemen, wie die von uns eben untersuchten, spielt eine vielleicht noch größere Rolle als in den gewöhnlichen Hochbauten; denn, im Gegensatz zu dem, was sich bei diesen abspielt, wäre es unmöglich, standhafte Systeme zu bauen, ohne die Anpassung des Werkstoffes einwirken zu lassen, welche durch die Zähigkeit des Werkstoffs ermöglicht wird. Es ist dies ein a priori paradoxes Beispiel eines statisch bestimmten Systems, das die Plastizitätstheorie rechtfertigt.