Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Grenzzustände des Gleichgewichtes in Erd- und Schüttmassen

Autor: Ritter, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-2759

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

VIII 4

Grenzzustände des Gleichgewichtes in Erd- und Schüttmassen.

Etats limites de l'équilibre dans les masses de terre et de dépôt.

Limits of Equilibrium of Earths and Loose Materials.

Dr. M. Ritter,
Professor an der Eidg. Technischen Hochschule, Zürich.

Im Folgenden werden die Bedingungen aufgestellt, denen die Spannungen im Innern einer Erd- oder Schüttmasse genügen müssen, wenn sich der Erdkörper im sogen. Grenzzustande des Gleichgewichtes befindet. Wir beschränken die Betrachtungen auf ebene Spannungszustände unter der drundlegenden Voraussetzung, daß sich die Spannungen mit dem Orte stetig ändern. Es gelte das klassische Reibungsgesetz; alsdann liegt in irgend einem Punkte der Grenzzustand des Gleichgewichtes vor, wenn durch diesen Punkt eine Gleitfläche geht, d. h. eine Fläche, in der die resultierende Spannung q mit der Flächennormalen den Reibungswinkel ρ einschließt.

Unter den genannten Voraussetzungen hat schon *Rankine* 1857 den nach ihm benannten klassischen Spannungszustand im Innern eines seitlich unbegrenzten Erdkörpers mit ebenem Gelände analysiert; *Winkler, Mohr, Weyrauch, Lévy* u. a. haben diese Theorie später weiter ausgebaut. *Boussinesq* und *Résal*[1] erweiterten die *Rankine*'sche Theorie auf andere Oberflächenbedingungen und versuchten, den Spannungszustand hinter einer Stützmauer anzugeben, wenn der Erddruck von der durch die *Rankine*'sche Theorie geforderte Richtung abweicht. Dieses Problem gab später, besonders im Zusammenhang mit der *Coulomb*'schen Erddrucktheorie, Anlaß zu mehrfachen Diskussionen in technischen Zeitschriften. 1893 gab *F. Kötter* die allgemeine Differentialgleichung für den Druck an einer gekrümmten Gleitfläche bekannt[2]. Obgleich später zahlreiche Ingenieure Erddruckaufgaben unter Annahme gekrümmter Gleitflächen behandelten, fand, soweit bekannt, diese Beziehung keine praktische Anwendung. In einer inhaltsreichen Arbeit nahm 1924 *H. Reissner*[3] Stellung zum Erddruckproblem und erläuterte die Schwierigkeiten, die die Analyse des allgemeinen Grenzzustandes bei Berücksichtigung des Eigengewichtes der Erdmasse bietet. Neuerdings hat *A. Caquot*[4] die Theorie im Zusammenhange dar-

---

[1] *J. Résal:* Poussée des terres, 2 Bd. Paris 1903.

[2] *H. Müller*-Breslau: Erddruck auf Stützmauern, Stuttgart 1906.

[3] *H. Reissner:* Zum Erddruckproblem. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Berlin 1924.

[4] *A. Caquot:* Equilibre des massifs à frottement interne, Paris 1934.

gestellt und auf eine Reihe praktischer Aufgaben angewandt. Als wichtigste Anwendung ist neben der Berechnung der Stützmauern die Bestimmung der Tragfähigkeit der Fundamentsstreifen im Grenzzustande des Gleichgewichtes zu nennen, eine Aufgabe, deren Lösung schon *Rankine* versucht hat. Dank der Klärung des Begriffes der Kohäsion für Erd- und Schüttmassen durch *K. Terzaghi*[5] kann die Rechnung in gewissen Fällen auch auf bindiges Erdmaterial ausgedehnt werden; so erweitert *Caquot* die Formel für die Tragfähigkeit des Fundamentstreifens auf den Erdkörper mit sogen. scheinbarer Kohäsion.

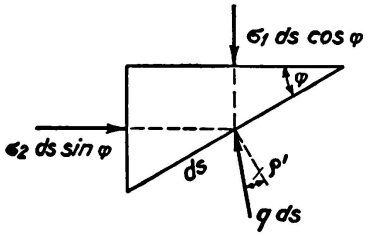
1. *Grundlagen.*

Unter der Annahme, daß sich die Spannungen im Innern des Erdkörpers von Punkt zu Punkt stetig ändern, ist der Winkel ρ', den die Spannung q' irgend eines Flächenelementes mit dessen Normalen bildet, eine stetige Funktion des Winkels φ des Flächenelementes gegenüber einer festen Richtung. In den Gleitflächen erreicht der Winkel ρ' den höchsten Wert ρ; daher sind die Gleitflächen definiert durch die grundlegende Beziehung

$$\frac{d\rho'}{d\varphi} = 0. \tag{1}$$

Diese Beziehung genügt im Verein mit den Gleichgewichtsbedingungen, um sowohl die Lage der Gleitflächen relativ zur Richtung der Hauptspannungen festzulegen, als auch das Verhältnis der Hauptspannungen anzugeben, das im Grenzzustande des Gleichgewichtes vorhanden sein muß.

Fig. 1.



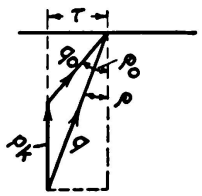


Fig. 2.

Bezeichnen σ_1 und σ_2 die Hauptspannungen, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen am unendlich kleinen Erdprisma von der Länge = 1, gemäß Fig. 1

$$q \sin \rho' = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi$$
$$q \cos \rho' = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma \sin^2 \varphi,$$

woraus

$$\operatorname{tg} \rho' = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{tg} \varphi}{\sigma_1 + \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi}. \tag{2}$$

Der größte Ausschlag $\rho' = \rho$ entsteht nach Gl. (1) für

$$\frac{d\rho'}{d\varphi} = \frac{d \operatorname{tg} \rho'}{d \operatorname{tg} \varphi} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}{(\sigma_1 + \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} = 0; \tag{3}$$

daraus folgt zunächst

$$\sigma_1 = \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi \tag{3a}$$

[5] *K. Terzaghi:* Erdbaumechanik, Wien 1925.

und Gl. (2) ergibt für die Gleitfläche

$$\operatorname{tg} \rho = - \operatorname{cotg} 2 \varphi.$$

Darnach ist $\varphi = 45^0 + \frac{\rho}{2}$; die Gleitflächen bilden mit der Fläche, auf die σ_1 wirkt, die Winkel $\pm \left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right)$, schneiden sich also unter dem Winkel $90^0 - \rho$. Die Beziehung (3a) geht damit über in

$$\sigma_2 = \sigma_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right); \tag{4}$$

dieses Verhältnis der beiden Hauptspannungen muß in jedem Punkte vorhanden sein, der einer Gleitfläche angehört, d. h. sich im Grenzzustande des Gleichgewichtes befindet. Der Druck q an der Gleitfläche läßt sich leicht durch σ_1 oder σ_2 ausdrücken; er beträgt

$$q = \sigma_1 \operatorname{tg} \left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right). \tag{5}$$

Die abgeleiteten Beziehungen lassen sich leicht auf *Erdmaterial mit Kohäsion* erweitern, unter der Annahme, daß die sogen. scheinbare Kohäsion im Sinne *Terzaghis* vorliegt. Diese kommt durch den Druck des Kapillarwassers zu Stande, der das Material zusammenbackt und es einem räumlichen Spannungszustand mit den allseitigen Druckspannungen p_k unterwirft, die sich den anderen Spannungen überlagern. Der Reibungswinkel ρ bleibt bestehen, sofern man den Spannungszustand mit Einschluß der Drücke p_k betrachtet. Das Reibungsgesetz heißt jetzt

$$\tau = (\sigma + p_k) \operatorname{tg} \rho = p_k \operatorname{tg} \rho + \sigma \operatorname{tg} \rho. \tag{6}$$

Schon *Coulomb* hatte im Grunde mit diesem Gesetze gerechnet, indem er eine Kohäsionsziffer einführte und das Reibungsgesetz mit $\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \rho$ anschrieb.

Da die Druckspannungen p_k Eigenspannungen sind und sich in irgend einem Teil der Erdmasse das Gleichgewicht halten, so muß man, wenn man die Spannungen σ_1, σ_2 und q mit äußeren Kräften in Beziehung bringt, den Anteil der Drücke p_k ausschalten. Die Beziehung (4) schreibt sich daher für Material mit Kohäsion

$$\sigma_2 + p_k = (\sigma_1 + p_k) \operatorname{tg}^2 \left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right),$$

oder

$$\sigma_2 = \sigma_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) - p_k \left[1 - \operatorname{tg}^2 \left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right)\right]. \tag{7}$$

Der Druck q an der Gleitfläche geht nach Abzug der Normalspannung p_k gemäß Fig. 2 über in

$$q_0 = q \frac{\sin \rho}{\sin \rho_0}, \quad \text{worin} \quad \operatorname{tg} \rho_0 = \frac{\operatorname{tg} \rho}{1 - \frac{p_k}{q \cos \rho}}. \tag{8}$$

Es entsteht also an der Gleitfläche ein scheinbarer (größerer) Reibungswinkel

ρ_o, während der Winkel $45^0 + \frac{\rho}{2}$ zwischen Gleitfläche und Hauptspannung erhalten bleibt.

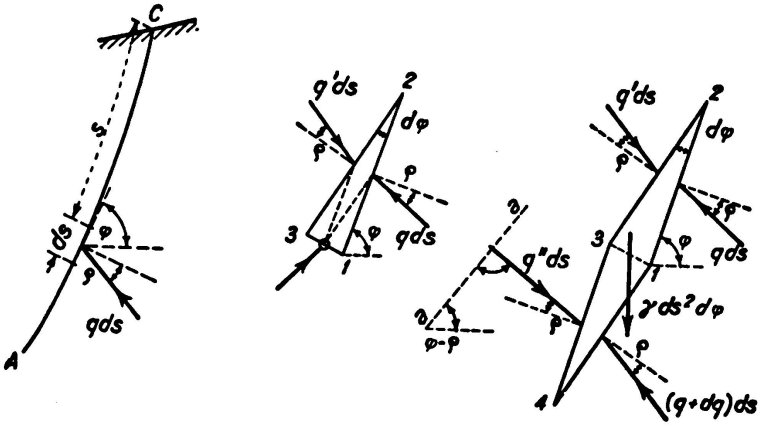


Fig. 3.

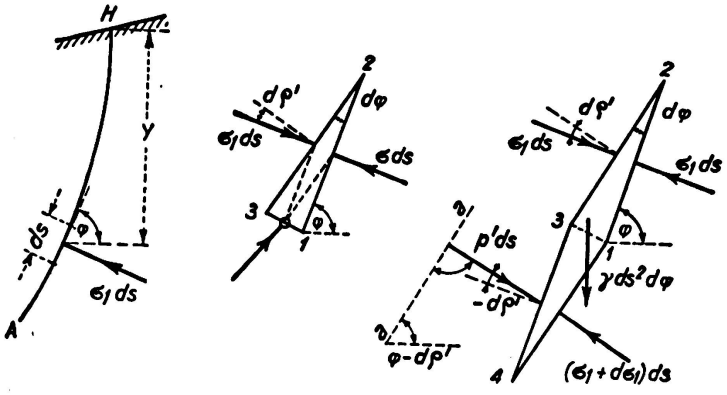


Fig. 4.

Man gewinnt am einfachsten ein Urteil über praktisch mögliche Werte von p_k, wenn man die lotrechten Wände von Baugruben beobachtet, die sich wie bekannt oft auf beträchtliche Höhen h ohne Absprießungen halten. An der Oberfläche einer solchen Wand ist $\sigma_1 = \gamma h$ und $\sigma_2 = 0$, weshalb nach Gl. (7) das Material einen Kapillardruck von mindestens

$$p_k = \gamma h \frac{1}{\operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) - 1} \tag{9}$$

besitzen muß. Bei lehmhaltigem Kiessand sind Drücke p_k von 0,3—0,5 kg/cm² häufig zu beobachten.

2. *Der Druck an der Gleitfläche.*

Im Folgenden soll die Gleichung von *F. Kötter* für den Druck an einer gekrümmten Gleitfläche in besonders einfacher und für Ingenieure bestimmten Form abgeleitet wird[6]. Wir betrachten ein unendlich kleines Erdprisma, das an

[6] *M. Ritter:* Zur Theorie des Erddruckes auf Stützmauern. Schweizerische Bauzeitung 1910. Die damaligen Ausführungen beschränken sich auf kohäsionsloses Material.

einer gekrümmten Gleitfläche AC in der Entfernung s von der Oberfläche C liegt, vgl. Fig. 3. Das Prisma besitze die Länge = 1 senkrecht zur Bildebene. Die eine Fläche 1—2 = ds · 1 liege in der Gleitfläche, die andere Fläche 2—3 sei um den Winkel $d\varphi$ gedreht. Auf die Fläche 1—2 wirkt der Druck $q\,ds$ unter dem Reibungswinkel ρ, auf die Fläche 2—3 der Druck $q'ds$ wegen Gl. (1) ebenfalls unter dem Reibungswinkel ρ. Die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehen um die Achse o in der Fläche 1—3 heißt

$$q\,ds \cdot \frac{ds}{2} \cos(\rho - d\varphi) = q'\,ds \cdot \frac{ds}{2} \cos(\rho + d\varphi);$$

daraus ergibt sich

$$q' = q\,\frac{\cos(\rho - d\varphi)}{\cos(\rho + d\varphi)} = q\,\frac{\cos\rho\cos d\varphi + \sin\rho\sin d\varphi}{\cos\rho\cos d\varphi - \sin\rho\sin d\varphi}$$

oder mit $\cos d\varphi = 1$ und $\sin d\varphi = d\varphi$

$$q' = q\,(1 + 2\,\mathrm{tg}\,\rho \cdot d\varphi). \tag{10}$$

Das Eigengewicht des Erdprisma liefert ein unendlich kleines Moment höherer Ordnung und fällt deshalb außer Betracht. Jetzt schließen wir an die Fläche 1—3 das kongruente Prisma 1—3—4 an, mit der Fläche 1—4 in der Gleitfläche. Dann wirkt der Druck $(q + dq)\,ds$ auf die Fläche 1—4 unter dem Reibungswinkel ρ, der Druck $q''ds$ auf die Fläche 3—4 mit Rücksicht auf Gl. (1) ebenfalls unter dem Reibungswinkel ρ. Das Prisma 1—2—3—4 besitzt das Eigengewicht $\gamma ds^2 d\varphi \cdot 1$, wo γ das Raumgewicht des Erdmaterials bezeichnet. Wir können q'' leicht eliminieren, indem wir die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in Richtung der zur Spannung q'' senkrechten Achse a—a anschreiben; sie lautet

$$(q + dq)\,ds\,d\varphi - q\,(1 + 2\,\mathrm{tg}\,\rho\,d\varphi)\,ds\,d\varphi = \gamma \sin(\varphi - \rho)\,ds^2\,d\varphi$$

und liefert die Differentialgleichung von *F. Kötter*

$$\frac{dq}{ds} - 2\,q\,\mathrm{tg}\,\rho \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \gamma \sin(\varphi - \rho). \tag{11}$$

Die Integration ergibt

$$q = \gamma\, e^{2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi} \int_0^s e^{-2\varphi\,\mathrm{tg}\,\rho} \sin(\varphi - \rho)\,ds + q_a,$$

wo q_a den Druck q im Punkte C, durch Auflast erzeugt, bezeichnet. Im Falle einer ebenen Gleitfläche verschwindet $d\varphi/ds$ und man erhält

$$q = \gamma\, s \sin(\varphi - \rho) + q_a. \tag{12}$$

Bei Material mit Kohäsion können aus q und ρ, q_o und ρ_o mit Gl. (8) berechnet werden, wobei zu beachten ist, daß ρ_o sich längs der Gleitfläche mit wechselndem Verhältnis p_k/q ändert; die Verwertung der Gleichung wird dadurch wesentlich erschwert.

3. *Die Hauptspannungen.*

Für die Hauptspannung σ_1 (oder σ_2) läßt sich in gleicher Weise, wie für den Druck q an der Gleitfläche, eine Beziehung aufstellen, mit der σ_1 in irgend einer Tiefe unter der Oberfläche sehr leicht zu berechnen ist. In Fig. 4 sei AH eine Hauptspannungsfläche, deren Tangenten die Richtung der Hauptspannung σ_2 besitzen mögen. Wir betrachten das unendlich kleine Erdprisma 1—2—3 von der Länge = 1, dessen eine Fläche 1—2 = ds · 1 in der Hauptfläche AH liegt und mit der Fläche 2—3 den Winkel $d\varphi$ einschließt. Auf die Fläche 1—2 wirkt die Hauptspannung σ_1, auf die Fläche 2—3 die Spannung p, die sich von σ_1 nur durch eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung unterscheidet; da nämlich die Hauptspannungen bekanntlich Extremalwerte sind, so ist an der Hauptfläche $d\sigma/d\varphi = o$. Zu beachten ist, daß p nicht normal zur Fläche 2—3 wirkt, sondern unter einem Winkel $d\rho'$, der sich leicht berechnen läßt. Für ein Erdprisma mit dem beliebigen Winkel φ folgt aus Gl. (2)

$$\frac{d\rho'}{d\varphi} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}{(\sigma_1 + \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^2};$$

dreht man nun die Fläche ds · 1 in die Hauptebene, setzt also $\varphi = o$, so ergibt sich

$$\left(\frac{d\rho'}{d\varphi}\right)_{\varphi=o} = 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 - \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right). \tag{13}$$

An die Fläche 1—3 schließen wir das kongruente Prisma 1—3—4 an, dessen Fläche 1—4 in der Hauptfläche AH liegt und die Hauptspannung $\sigma_1 + d\sigma_1$ erhält, während auf die Fläche 3—4 der Druck $p'ds$ unter dem Ausschlag $-d\rho'$ wirkt (man erkennt leicht, daß $d^2\rho'/d\varphi^2$ für $\varphi = o$ verschwindet). Das Eigengewicht des Prismas 1—2—3—4 beträgt $\gamma ds^2 d\varphi \cdot 1$. Die Bedingung gegen Verschieben in Richtung der unter dem Winkel $\varphi - d\rho'$ geneigten, zu p' senkrechten Achse a — a lautet

$$(\sigma_1 + d\sigma_1)\, ds\, (d\varphi - d\rho') - \sigma_1\, ds\, d\rho' - \sigma_1\, ds\, (d\varphi - 2\, d\rho') = \gamma\, ds^2\, d\varphi \sin(\varphi - d\varphi);$$

daraus folgt

$$\frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{\gamma \sin\varphi}{1 - \frac{d\rho'}{d\varphi}} = \gamma \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) \sin\varphi. \tag{14}$$

Die Integration von der Oberfläche aus ergibt

$$\sigma_1 = \gamma \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) \cdot \int_0^s \sin\varphi\, ds = \gamma \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) \cdot y + \sigma_{a1}, \tag{15}$$

worin σ_{a1} die (durch Auflast entstandene) Hauptspannung σ_1 an der Oberfläche bezeichnet. Gl. (15) besagt, daß die vom Gewicht γ in der Tiefe y erzeugte Hauptspannung σ_1 dem Drucke einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht $\gamma \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right)$ entspricht.

In entsprechender Weise läßt sich die Hauptspannung σ_2 berechnen. Die Gleichgewichtsbedingung am unendlich kleinen Erdprisma liefert hier

$$\frac{d\sigma_2}{ds} = \frac{\gamma \sin\varphi}{1 + \frac{d\rho'}{d\varphi}};$$

darin ist

$$\left(\frac{d\rho'}{d\varphi}\right)_{\varphi = 90^0} = \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) - 1$$

einzusetzen. Man erhält durch Integration

$$\sigma_2 = \gamma \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) \cdot y + \sigma_{a2}, \tag{16}$$

wo σ_{a2} die Hauptspannung σ_2 an der Oberfläche darstellt.

Für Erde mit Kohäsion schreibt sich Gl. (15)

$$\sigma_1 + p_k = \gamma \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) \cdot y + (\sigma_{a1} + p_k).$$

Gl. (15) und ebenso (16) bleiben also erhalten, indem sich die Drücke p_k wegheben; der Einfluß der Kohäsion kommt durch die Änderung von σ_{a1} entsprechend Gl. (7) zum Ausdruck.

4. *Tragfähigkeit des Fundamentstreifens.*

Die in den Abschnitten 2 und 3 entwickelten Beziehungen ermöglichen die Berechnung der größtmöglichen Belastung eines Fundamentstreifens, die mit dem Gleichgewicht verträglich ist. Es ist dies jene Belastung, bei der infolge Gleitflächenbildung das Erdreich seitlich ausweicht und der Fundamentblock einsinkt. Die Fundamentfläche liege in der Fundationstiefe h unter der Oberfläche, ihre Breite sei gleich 2b und ihre Länge so groß, daß die Aufgabe als

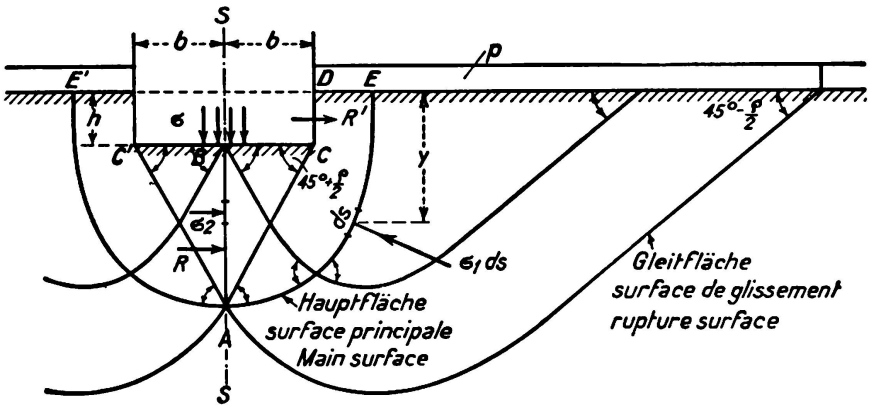


Fig. 5.

ebenes Spannungsproblem behandelt werden kann. In Fig. 5 ist der ungefähre Charakter des Spannungszustandes im Grenzzustande skizziert. Die spezifische Fundamentpressung sei mit σ bezeichnet; außerhalb des Fundamentes sei noch eine Oberflächenbelastung p vorhanden.

Die Ebene s — s ist aus Symmetriegründen eine Hauptfläche im Sinne von

Abschnitt 3, daher wirkt in der Tiefe y gemäß Gl. (16) die waagrechte Hauptspannung

$$\sigma_2 = \gamma \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) \cdot y + \sigma \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right). \tag{17}$$

Die Gleitflächen müssen mit der Hauptfläche s — s den Winkel $45^0 - \frac{\rho}{2}$ und mit der Fundamentsohle den Winkel $45^0 + \frac{\rho}{2}$ bilden. Unter dem Fundament herrscht also innerhalb der Zone CAC′ der klassischen *Rankine*'sche Spannungszustand mit ebenen Gleitflächen und es ist

$$z = b \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right). \tag{18}$$

Außerhalb der Gleitflächen AC und AC′ ist das Spannungsbild verwickelt; es entstehen, wie aus Fig. 5 ersichtlich, gekrümmte Gleitflächen, deren eine Schar die freie Oberfläche unter dem Winkel $45^0 - \frac{\rho}{2}$ schneidet, da die mit p belastete Oberfläche eine Hauptfläche darstellt. Die Hauptfläche der Spannungen σ_1, die durch A geht, schneidet diese Gleitflächenschar unter dem Winkel $45^0 + \frac{\rho}{2}$, bildet daher im Schnitt mit der Bildebene die Kurve EAE′, die der Symmetrie wegen bei A eine waagrechte Tangente besitzt und bei E und E′ lotrecht an die freie Oberfläche stößt.

Obgleich die Gestalt der Hauptfläche EAE′ nicht genau festliegt, kann die Hauptspannung σ_1 aus Gl. (15) leicht berechnet werden, da σ_1 nicht vom Verlauf der Fläche, sondern nur von der Tiefe y abhängt. Nach Gl. (4) besteht an der Oberfläche die Beziehung

$$p = \sigma_{a1} \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right),$$

aus der σ_{a1} zu entnehmen und in Gl. (15) einzusetzen ist. Darnach ist in der Tiefe y

$$\sigma_1 = \gamma \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) \cdot y + p \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right). \tag{19}$$

Wir zerlegen den Druck $\sigma_1 ds \cdot 1$ in die waagrechte Komponente $\sigma_1 ds \sin\varphi = \sigma_1 dy$ und die lotrechte Komponente $\sigma_1 ds \cos\varphi$. Die Gleichgewichtsbedingung am Erdkörper ABCDE gegen Verschieben in waagrechter Richtung liefert alsdann die Fundamentspannung σ im Grenzzustande des Gleichgewichtes. Diese Bedingung lautet

$$R + R' = \int_0^{h+z} \sigma_1 \, dy. \tag{20}$$

Die Resultierende R in der Fläche AB folgt aus Gl. (17) durch Integration zu

$$R = \frac{1}{2} \gamma z^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) + \sigma z \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right).$$

Für die Resultierende R′ ist dagegen Gl. (18) zu benützen; sie liefert

$$R' = \frac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) + p\, h \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right).$$

Die Summe der waagrechten Kräfte an der gekrümmten Hauptfläche AE ist

$$\int_0^{h+z} \sigma_1\, d\,y = \int_0^{h+z} \gamma \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) y\, d\,y + \int_0^{h+z} p \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) d\,y$$

$$= \frac{1}{2}\gamma (h+z)^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) + p\,(h+z) \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right).$$

Werden diese Ausdrücke in Gl. (20) eingesetzt, und wird z nach Gl. (18) durch b ausgedrückt, so ergibt sich die Fundamentpressung σ im Grenzzustande des Gleichgewichtes zu

$$\sigma = \frac{1}{2}\gamma b \left[\operatorname{tg}^5\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right)\right] + (\gamma h + p) \operatorname{tg}^4\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right). \quad (21)$$

Der erste Summand stellt die Tragfähigkeit dar, wenn das Fundament direkt auf eine freie Oberfläche aufgesetzt wird. Das zweite Glied, das den Einfluß der Fundationstiefe, sowie einer Oberflächenbelastung zum Ausdruck bringt, ist schon von *Rankine* selbst abgeleitet worden und in manchen Lehrbüchern enthalten.

Für Erdmaterial mit Kohäsion muß in Gl. (21) $\sigma' + p_k$ statt σ und $p + p_k$ statt p gesetzt werden. Man erhält damit die erhöhte Fundamentpressung σ' für den Grenzzustand des Gleichgewichtes

$$\sigma' = \sigma + p_k \left[\operatorname{tg}^4\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) - 1\right]. \quad (22)$$

Die Benützung der Hauptflächen zur Berechnung der Tragfähigkeit σ bzw. σ' hat den Vorzug, daß der Verlauf der Hauptflächen außerhalb der Zone ACC′ nicht genau bekannt sein muß. Man kann indessen auch versuchen, die durch A gehende Gleitfläche AF zur Spannungsermittlung zu benützen. Von *A. Prandtl*, *H. Reißner* und *A. Caquot* (l. c.) wurde für h = o und unter Vernachlässigung des Gewichtes γ die Beziehung

$$\sigma = p \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) \cdot e^{\pi \operatorname{tg} \rho} \quad (23)$$

abgeleitet, die für Erdmaterial mit Kohäsion (indem $\sigma' + p_k$ statt σ und $p + p_k$ satt p gesetzt wird) übergeht in

$$\sigma' = \sigma + p_k \left[\operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\rho}{2}\right) e^{\pi \operatorname{tg} \rho} - 1\right]. \quad (24)$$

Man gelangt zu diesen Beziehungen, indem man den in Fig. 6 skizzierten Spannungszustand zugrunde legt, bei dem die Forderung des stetigen Verlaufes der Spannungen erfüllt ist. In den Bezirken ACC′ und CFG sind die *Rankine*'schen Spannungszustände mit ebenen Gleitflächen vorausgesetzt, im Bereiche ACF dient für den stetigen Übergang der von *Résal* angegebene Spannungszustand, bei

dem die eine Gleitlinienschar durch ein Strahlenbüschel, die andere (sie unter dem Winkel $90^0 - \rho$ kreuzende) durch logarithmische Spiralen dargestellt wird. Man erkennt dann leicht, daß die Drücke an der Gleitfläche AG durch den Punkt C gehen und daß der Winkel ACG ein rechter Winkel ist. Die Momentengleichung für den Punkt C am Erdkörper ABCJG liefert dann ohne weiteres die Beziehungen (23) und (24). Indessen erscheint dem Verfasser diese Berechnung, die zu wesentlich höheren Grenzlasten als Gl. (21) führt, sehr unsicher.

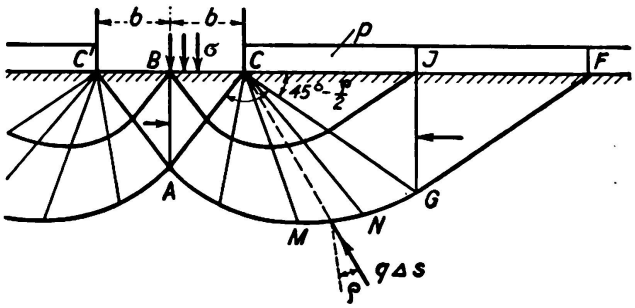


Fig. 6.

Zunächst ist keineswegs bewiesen, daß der (an sich mögliche und widerspruchsfreie) Spannungszustand der Fig. 6 den Grenzwerten von σ bzw. σ' entspricht. Ferner ist eine Erweiterung der Rechnung zwecks Berücksichtigung des Erdgewichtes γ unmöglich, da das Gleichgewicht der Kräfte am Element CMN verloren geht, wenn die Drücke an den Flächen CM und CN nach Gl. (12) bestimmt werden und das Eigengewicht in der Rechnung berücksichtigt wird.

5. *Erddruck auf Stützmauern.*

Die in den Abschnitten 2 und 3 vorgeführten, allgemeinen Beziehungen ermöglichen die Berechnung des Erddruckes E, der unter einem willkürlichen, d. h. im Sinne *Coulombs* gegebenen Einfallswinkel ρ' ($\rho' < \rho$) auf die Wand AB einer Stützmauer wirkt, vgl. Fig. 7. Die Annahme ebener Gleitflächen führt bekanntlich bei willkürlicher Verfügung über die Richtung von E zu Widersprüchen im

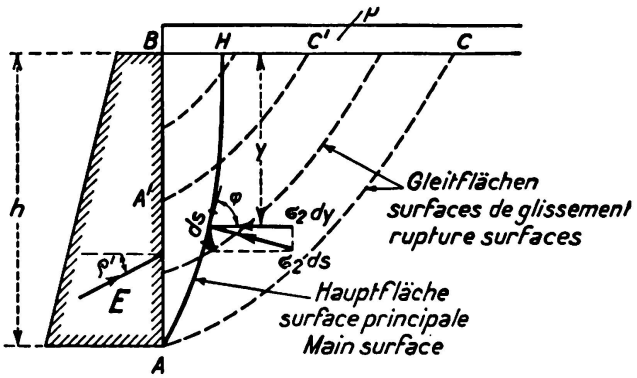


Fig. 7.

Gleichgewicht der Kräfte am abgleitenden Erdprisma, weshalb u. a. *H. Müller-Breslau* und *H. Reißner* (l. c.) sich veranlaßt sahen, mit gekrümmten Gleitflächen zu rechnen. Das Hauptproblem, die Bestimmung der Gestalt derjenigen Gleitfläche, die zur Sicherung des Gleichgewichtes den größten Erddruck E erfordert, ist heute noch nicht gelöst.

Wir beschränken uns im Folgenden auf waagrechtes Gelände und lotrechte Stützwand. Die Gleitflächen A C, A′ C′ von unbekannter Form werden unter dem Winkel $\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right)$ von der Hauptfläche A H durchkreuzt, an der die Hauptspannungen σ_2 angreifen, die aus Gl. (16) zu berechnen sind. In der Tiefe y ist somit

$$\sigma_2 = \gamma \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) \cdot y + p \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right),$$

worin p eine gleichmäßig verteilte Auflast bezeichnet. Wir zerlegen $\sigma_2 ds$ in die waagrechte Komponente $\sigma_2 ds \sin\varphi = \sigma_2 dy$ und die lotrechte Komponente $\sigma_2 ds \cos\varphi$. Das Gleichgewicht der Kräfte am Erdkörper A B H gegen Verschieben in waagrechter Richtung liefert

$$E \cos\rho' = \int_A^H \sigma_2 \, dy = \gamma \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) \cdot \int_0^h y \, dy + p \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) \cdot \int_0^h dy,$$

woraus

$$E = \left(\frac{1}{2} \gamma h^2 + p h\right) \frac{\operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right)}{\cos\rho'}. \tag{25}$$

Nach dieser Formel, die auf der Bildung gekrümmter Gleitflächen beruht, erhält man merklich höhere Erddrücke, als nach der *Coulomb*'schen Erddruckformel, die ebene Gleitflächen voraussetzt.

Handelt es sich um Erde mit Kohäsion, so ist in Gl. (25) $p + p_k$ statt p zu schreiben und zu $E' \cos\rho'$ ist $p_k h$ hinzuzufügen. Damit ergibt sich

$$E' = E - p_k h \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right)}{\cos\rho'} \tag{26}$$

Die Beziehungen (25) und (26) gehen von der Annahme aus, daß in allen Punkten des Erdkörpers A B C der Grenzzustand des Gleichgewichtes erreicht ist. Ob dieser Zustand den größten Erddruck liefert, oder ob der Fall, daß sich nur eine einzige Gleitfläche A C ausbildet, ungünstiger ist, kann vom Verfasser nicht entschieden werden.

Zusammenfassung.

Für den Grenzzustand des Gleichgewichtes, in dem jeder Punkt des Erdkörpers einer (gekrümmten) Gleitfläche angehört, werden die Differentialgleichungen für den Druck an der Gleitfläche und an der Hauptfläche (Hauptspannungen) abgeleitet und integriert. Diese Beziehungen, aufgestellt für Erdmaterial ohne und mit Kohäsion, werden angewendet auf die Berechnung der Tragfähigkeit eines Fundamentstreifens, sowie auf die Bestimmung des Erddruckes auf eine Stützmauer unter Annahme gekrümmter Gleitflächen.

Leere Seite
Blank page
Page vide