

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 1 (1932)

**Artikel:** Stabilité et résistance des pièces travaillant simultanément à la  
compression et la flexion: rapport d'introduction

**Autor:** Karner, L.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-439>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Doz. Dr.-Ing. Ernst CHWALLA, Wien. « Die Stabilität exzentrisch und zentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl ». Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien, 137. Band, 8. Heft, 1928. Hölder-Pichler-Tempsky A. G., Wien und Leipzig.

E. ELWITZ. « Die Lehre von der Knickfestigkeit » 1. Teil. Gebr. Jänecke, Hannover. \*

P. M. FRANDSEN. « Die Berechnung der Säulen ». 1. Band der Wissenschaftlichen Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau.

Prof. Dr. L. KARNER. « Betrachtungen über das Knickproblem unter Berücksichtigung des Spannungsverlaufes im unelastischen Bereich ». « Die Bautechnik », Heft 48, 7. Nov. 1930. Verlag W. Ernst und Sohn, Berlin.

KRIEMLER. « Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge. » Druck der G. Braun'schen Hofbuchdruckerei, Karlsruhe.

Dr.-Ing. Rudolf MAYER. « Die Knickfestigkeit », Verlag von Julius Springer, Berlin, 1921.

Dr.-Ing. h. c. H. MÜLLER — Breslau. « Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen ». Alfred Kröner, Verlag in Leipzig, 1913.

A. OSTENFELD. « Exzentrisch beanspruchte Säulen. Versuche mit Stahlsäulen. Querschnittsbemessung. » Laboratorium für Baustatik der Technischen Hochschule, Kopenhagen, Mitteilung Nr. 3.

K. A. POUKKA. « Zur Theorie der Knickfestigkeit », Helsinki, 1924.

W. REIN. « Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle, Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau, Ausgabe B. Heft 4. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1930.

Prof. Dr. M. Roš und Dr. J. BRUNNER. « Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl. » Bericht No. 13 der Eidg. Materialprüfungsanstalt an der E. T. H. und der Gruppe VI der T. K. V. S. B., Zürich, August 1926.

Prof. Dr. M. Roš. « Die Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe auf Knickung ». II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau, Wien, 1928.

TIMOSHENKO-LESSELLS. « Festigkeitslehre ». Verlag von Julius Springer, Berlin, 1928.

D. H. YOUNG. « Stresses in eccentrically loaded Steel Columns. » 1. Band der Wissenschaftlichen Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau.

## TRADUCTION

### I. Introduction

Le calcul des éléments de construction travaillant simultanément à la compression et à la flexion est l'un des problèmes les plus difficiles de la statique. Lorsque des charges extérieures créent, dans une membrure, des efforts de compression soit seuls, soit combinés à des efforts tranchants et à des moments fléchissants extérieurs, il se produit des déformations perpendiculaires aux efforts axiaux, qui, à leur tour, déterminent des moments additionnels et des efforts non négligeables.

Parmi les problèmes les plus connus et les mieux étudiés se trouve d'abord le calcul des poteaux et des barres chargés axialement. Les calculs deviennent déjà compliqués si la section d'un poteau ou d'une barre, au lieu d'être pleine, se compose de parties assemblées ; car, dans ce dernier cas, on doit calculer la stabilité de chaque élément de la barre ainsi que son influence sur la stabilité générale. Même dans le cas de sections pleines, la question du flambage joue un rôle important pour les ailes non supportées sur de courtes longueurs, ainsi que pour les âmes minces.

Dans la construction des ponts en acier, l'emploi des poutres à âme pleine et de grande portée a fait, au cours de ces dernières années, des progrès



extraordinaires. Dans ces dernières formes de construction, il est nécessaire d'assurer particulièrement la sécurité contre le flambage de l'âme et un renforcement judicieux.

Les calculs sont encore plus compliqués lorsque des moments extérieurs, provoquant des déformations perpendiculaires à l'axe des barres ou au plan des tôles, viennent s'ajouter aux efforts axiaux sur les poteaux et sur les barres ou aux moments et aux efforts agissant dans le plan des tôles.

Tant que tous les allongements restent dans les limites élastiques, les calculs de flambage et de résistance sont relativement simples, même en cas de sollicitations complexes. Par contre, la façon dont se comportent les constructions soumises à des pressions et flexions dans la zone non élastique [dite plastique] de nos matériaux, est incomparablement plus difficile à étudier et n'a pas encore été élucidée. On peut considérer comme pratiquement impossible de traiter par le calcul le travail des matériaux au delà de la limite d'allongement proportionnel ou de mettre ces phénomènes en équation ; en conséquence, dans la plupart des cas, on est dans la nécessité de faire des calculs d'essai ou de contrôle en se basant sur des données arbitraires (maintien d'une section plane, etc.) afin de pouvoir calculer, dans les cas difficiles de charge, l'équilibre entre les forces extérieures et les sollicitations intérieures. Par exemple, dans l'acier de construction, nous devons constater que presque tous les problèmes de stabilité ne peuvent pas être résolus sans tenir compte de la déformation plastique. Pour ne citer qu'un exemple, nous rappellerons celui d'une barre comprimée excentriquement, qui est, même pour un degré d'élancement élevé, partiellement inélastique dès qu'elle se trouve en état d'équilibre instable.

Signalons enfin que la plupart des problèmes de ce genre, si l'on en fait une étude minutieuse, peuvent présenter, en outre, une autre difficulté du fait que les problèmes de stabilité et de résistance s'étendent à des efforts dans l'espace et non en plan, de sorte que la variabilité des modules d'élasticité dans les diverses directions fait sentir son influence.

## **II. Développement et état des recherches scientifiques et expérimentales.**

La plus ancienne expérience sur une barre droite soumise à un effort de compression est due à EULER en 1744. Cependant, la formule d'EULER tomba en défaveur par suite de son échec pour l'application à des barres trapues ; cependant, dès 1845, LAMARLE avait signalé le fait que pour le bois la validité de la formule d'EULER est liée à la limite élastique. Plus tard, on s'aïda de formules empiriques dont les principales sont celles de TETMAYER, de SCHWARTZ et RANKINE, etc... Néanmoins, TETMAYER avait déjà réhabilité la formule d'EULER dans la zone d'élasticité. Le premier travail d'ENGESSER, dans lequel il traite de la plasticité, date de 1889 ; toutefois, il ne fut pleinement apprécié qu'à la suite des travaux de KÁRMÁN, en 1910, d'où sortirent les principes de la théorie d'ENGESSER-KÁRMÁN. D'après cette théorie, il est devenu possible, tout au moins pour le flambage axial, de mieux saisir les conditions qui règnent en dehors du domaine élastique et de calculer les poteaux et barres en maté-

riaux divers en se basant sur la connaissance de leur diagramme « compression-déformation ». Le second problème demandant une étude théorique et pratique est celui que pose une barre comprimée ; ici, il faut mentionner les travaux de KROHN et tout spécialement ceux de ROŠ et BRUNNER. Les rapports et discussions du Congrès International de Construction des Ponts et Charpentes tenu à Vienne en 1928 sont particulièrement importants pour la diffusion des connaissances et l'étude critique des diverses hypothèses ; nous les signalons tout particulièrement (voir la bibliographie).

Indépendamment de l'étude des questions fondamentales relatives à la section d'une barre pleine sous une charge axiale ou excentrique, de nombreux chercheurs ont présenté des études théoriques et pratiques traitant des cas de charge complexe avec des appuis variés et des sections variables de barre, etc. Signalons ceux de BLEICH, CHWALLA, DONDORFF, ELWITZ, A. FÖPPL, HUBER, KAYSER, KRIEMLER, KROHN, KÜBLER, LOVE, MAYER, MELAN, von MIESES, MÜLLER-BRESLAU, OSTENFELD, REISSNER, TIMOSHENKO, WADDEL, ZIMMERMANN et autres. Dans le domaine de la théorie du flambage des dalles, il faut mentionner spécialement TIMOSHENKO après que BRYAN se fut, le premier, en 1891, occupé du problème du flambage des dalles rectangulaires. Outre divers chercheurs, tels que REISSNER, WAGNER, SCHLEICHER, etc., BLEICH, en particulier, par l'établissement de formules appropriées, a rendu accessible à l'application pratique la théorie des âmes et ailes des poutres en compression ainsi que la sécurité au flambage des âmes des poutres pleines en acier.

En résumé, nous pouvons dire que le calcul des barres, des dalles et systèmes complexes travaillant à la compression et à la flexion n'offre plus de difficultés insurmontables aux calculs de flambage et de résistance, tant que les déformations restent dans le domaine élastique. Toutefois, si des déformations plastiques se produisent, les recherches deviennent notablement plus difficiles, parce que la façon dont se comportent les matériaux dans la zone non élastique dépend des caractéristiques particulières des matériaux et il n'est plus possible d'établir avec certitude les conditions d'équilibre.

Les essais ont donc un double but. La pratique exige des formules pratiques de calcul, pour des charges très diverses. La science désire étudier les phénomènes, au delà des efforts et déformations admissibles en pratique, et contrôler plus exactement les phénomènes qui se produisent lorsque apparaît l'instabilité, en se maintenant avant tout en accord avec les résultats du contrôle expérimental.

Il est indispensable, pour l'étude des principes fondamentaux, de prendre en considération les conditions créées par modification d'équilibre, concurremment avec les efforts qui sont mis en jeu.

Nous considérerons maintenant, en partant de ce point de vue, et d'une façon tout à fait générale, divers cas de charge d'une barre simple, articulée à ses extrémités.

#### 1. Cas d'une barre rectiligne chargée axialement et travaillant dans la zone élastique.

Si une barre articulée à ses extrémités, supporte un effort axial de compression, elle reste rectiligne si la charge est inférieure à la charge critique de flambage (charge de flambage d'EULER). Si l'axe de la barre subit une flexion du

fait de l'intervention des moments extérieurs (et qu'il ne se produise en même temps aucune tension périphérique dépassant la limite de proportionnalité), la poutre, après disparition des causes qui ont motivé sa flexion, reprend sa forme rectiligne.

La barre reste également droite si la charge augmente; elle est en équilibre stable jusqu'à ce que la charge atteigne sa valeur critique ou charge de flambage. Jusqu'à présent, la barre n'a été soumise qu'à une force normale. Si, dès lors, la charge augmente, même d'une faible quantité, il se produit une flexion, et un moment additionnel entre en jeu. Ce n'est que ce phénomène que nous appelons flambage. L'axe de la poutre correspond de nouveau à une position d'équilibre. Si l'on continue à augmenter très lentement la charge, la flexion augmente rapidement, les tensions périphériques au milieu de la barre dépassent la limite de proportionnalité et la barre sort partiellement du domaine élastique. Pour les proportions courantes les déformations et finalement la mise hors service de la poutre se manifestent en dehors du domaine élastique.

## 2. La barre chargée excentriquement et travaillant dans les limites élastiques.

Si la compression agit excentriquement, il existe un moment initial qui occasionne une flexion de l'axe.

Dans un matériau possédant une élasticité illimitée, à n'importe quelle charge correspond un état d'équilibre. L'instabilité n'intervient pas. Mais, dans ce cas aussi, nous pouvons déterminer par le calcul pour quelle charge les tensions périphériques dépasseront les limites de proportionnalité; à partir de cette charge, c'est de nouveau l'état plastique qui intervient.

## 3. La barre chargée axialement et travaillant en dehors de la zone élastique.

Si la charge se maintient au-dessous de la valeur critique (charge de flambage) la barre reste rectiligne. Si les tensions demeurent dans les limites de proportionnalité, la barre revient à sa forme rectiligne normale lorsque des charges supplémentaires transversales, causant un fléchissement de l'axe de la barre, cessent d'agir. Si, par contre, les efforts dus à la charge axiale (qui reste cependant inférieure à la charge critique), dépassent la limite de proportionnalité, nous ne pouvons plus déformer cette barre, car autrement elle prendrait une deuxième position d'équilibre avec axe courbe impliquant la déformation plastique d'une partie de la barre. Il existe donc, au-dessous de la charge de flambage, mais au-dessus de la limite de proportionnalité, une position d'équilibre, pour laquelle l'axe reste rectiligne, et une autre, pour laquelle l'axe est infléchi (ce dernier cas correspond, lorsque la charge augmente et en raison de l'excentricité survenue, au cas 4 examiné plus loin).

Supposons de nouveau la barre rectiligne et augmentons la charge jusqu'à la valeur critique de flambage. Les phénomènes seront à peu près les mêmes que ceux de la phase de flambage dans la zone élastique. La courbure augmente rapidement; les moments additionnels croissent et la barre subit les déformations de l'état plastique.

#### 4. La barre chargée excentriquement dans le domaine plastique.

La barre se comporte tout d'abord comme en 2 ci-dessus. Si la charge augmente, la barre se déforme suivant les lois propres à la matière qui la compose, jusqu'à ce qu'elle arrive à une position d'équilibre instable. c'est-à-dire qu'elle commence à se déformer pour une très faible augmentation de la charge. Il ne faut pas confondre ce phénomène de l'apparition de l'état d'équilibre instable avec le phénomène de flambage précédemment décrit. Dans le flambage, nous avons affaire à la substitution à un état d'équilibre (axe rectiligne de la barre soumise à une force axiale), d'un autre état d'équilibre (axe fléchi sous l'action d'une force normale et d'un moment de flexion). Dans le cas de l'équilibre instable, par contre, lorsqu'une partie de la barre devient inélastique, la barre n'est plus en état d'opposer une résistance suffisante aux forces extérieures.

Pratiquement, cet état d'instabilité dans le domaine de la plasticité intervient également dans les cas 1, 2, 3, lorsque après le dépassement de la limite de proportionnalité résultent des déformations plastiques. Ce phénomène peut être suivi d'une manière très nette lorsque au cours des essais on a soin que la charge continue à agir au moment de la déformation et lorsqu'il subsiste une possibilité d'accroître encore cette déformation. L'axe de la poutre s'incurve dès le début dans toutes ses parties, même si la limite d'allongement proportionnel n'a été dépassée que dans certaines parties. C'est là le cas des barres rigides dans toutes leurs parties. Mais dès l'instant où dans la partie médiane de la barre, pour laquelle le moment fléchissant est maximum, la matière constituante n'est plus en état de supporter l'action du moment extérieur par manque de résistance intérieure, il se produit en cet endroit une sorte d'effet d'articulation. L'équilibre d'une telle barre sera impossible parce que, dans sa partie médiane, elle n'a plus qu'une résistance à la flexion très limitée ou même nulle. Dans un pareil système il se produit alors une forte diminution de l'action du moment dans les deux moitiés de la barre ; par suite, les extrémités se redressent si elles n'ont pas déjà subi, à ce moment, une déformation permanente.

#### 5. Conclusions.

Ces phénomènes de flambage et d'instabilité interviennent également pour des barres dont les appuis ne sont pas articulés, pour des dalles et autres systèmes. Ajoutons en outre que, dans la zone élastique, les différentes charges peuvent être appliquées les unes après les autres et dans un ordre successif quelconque, sans que les déformations résultantes et l'état final résultant en soient modifiés. Ceci ne se produit plus lorsque certaines parties du système subissent des déformations plastiques.

Il est évident que les phénomènes que nous venons de décrire se présentent de manière différente pour des éléments constitués par des matériaux différents et suivant les caractéristiques propres de ces matériaux. Les considérations qui précèdent s'appliquent à l'acier de construction de qualité courante.

Nous en arrivons maintenant à cette conclusion que, pour l'étude pratique et théorique de la question du flambage, et tout particulièrement en ce qui concerne l'apparition des états d'équilibre instable dans la zone plastique, il

est nécessaire de connaître les efforts qui se trouvent mis en jeu. Il serait également intéressant de connaître les conditions de charge pour lesquelles la limite de proportionnalité est dépassée en un point quelconque, pour pouvoir déterminer à quel moment précis commence la déformation plastique.

### III. Calculs d'équilibre pour les matériaux élastiques.

Supposons un matériau possédant une élasticité illimitée (module d'élasticité  $E$ ) et admettons, pour situer la question d'une manière tout à fait générale, le cas d'une charge excentrique. La figure 1 s'applique à une barre articulée à ses deux appuis d'extrémité. Si nous tenons à considérer de faibles excentricités et le cas de la charge axiale limite, nous devons faire intervenir la courbe effective de flexion et poser :

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{P(e \cos \alpha + y)}{EJ}$$

$J$  est le moment d'inertie de la section;  $y$ ,  $ds$  et  $\varphi$  sont liés entre eux par la relation  $y = \int_0^s ds \sin \varphi$ .

Si nous posons  $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$  nous obtenons :  $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2k^2 \cos \varphi + C$ .

On peut déterminer la constante  $C$  d'après les conditions aux extrémités pour  $\varphi = \alpha$ ,  $\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{M\alpha}{EJ} = -k^2 e \cos \alpha$ . On obtient par suite la relation :

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{K^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \cdot \frac{1}{2k} \text{ dans laquelle } K^2 = \left(\frac{1}{4} k^2 e^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)$$

Si l'on intègre sur toute la longueur de l'axe de la barre fléchie, soit  $l$ , en négligeant la contraction résultant de l'effort de compression simple  $P \cos \varphi$ , on obtient la forme générale suivante :

$$l = \frac{1}{k} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{K^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \dots \dots \dots (1)$$

Cette intégrale ne peut être résolue que par un développement en série et on a :

$$\begin{aligned} l = \frac{2}{k} & \left[ \arcsin \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{K} \right\} 1 + 0,25 K^2 + 0,1406 K^4 + 0,0977 K^6 + \dots \left\{ \right. \\ & - \frac{k}{2} e \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \left\} 0,25 + 0,1406 K^2 + 0,0977 K^4 + \dots \left\{ \right. \\ & - \frac{k}{2} e \cos \alpha \sin^3 \frac{\alpha}{2} \left\} 0,0937 + 0,0651 K^2 + 0,0050 K^4 + \dots \left\{ \right. \\ & - \frac{k}{2} e \cos \alpha \sin^5 \frac{\alpha}{2} \left\} 0,0391 + 0,0299 K^2 + \dots \left\{ - \dots \right\} \right] \dots (2) \end{aligned}$$

Si  $e = 0$ ,  $K = \sin \frac{\alpha}{2}$ , et comme :  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

on obtient pour la charge axiale, pour une déformation déjà existante :

$$l = -\frac{\pi}{k} \left\{ 1 + 0,25 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 0,1406 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 0,0977 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\} \quad (3)$$

Si  $\alpha$  tend également vers 0, ce qui n'est possible que pour  $e = 0$ , on a alors :

$$l = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{EJ}{P}} \quad (4)$$

ce qui correspond à l'effort de flambage d'Euler pour une charge axiale.

L'équation (2) n'est pas résoluble par rapport à  $P$ . Pour des dimensions et une charge données, la position d'équilibre ne peut être déterminée qu'expérimentalement. Toutefois, sous la forme (2), elle convient parfaitement à l'établissement de tables et de représentations graphiques. Dans la pratique et en tenant compte de l'impossibilité d'admettre de grosses déformations pour lesquelles la limite de proportionnalité se trouverait dépassée dans les fibres périphériques, on peut se limiter, pour ces calculs, à un nombre restreint de termes.

On obtient en outre les déformations :

$$y = \frac{2}{k} \sqrt{K^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - e \cos \alpha \quad (5) \quad f = \frac{2}{k} \sqrt{K^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (6)$$

$$y_m = \frac{2}{k} K - e \cos \alpha \quad (7) \quad f_m = \frac{2}{k} K \quad (8)$$

Dans les calculs qui précèdent, on a négligé l'influence des efforts tranchants, de la contraction de la barre et des modifications de sa section. Comme nous n'envisageons ici que des considérations relatives, nous introduirons, pour interpréter l'équation (2), l'effort au centre de gravité :  $\sigma_n = \frac{P}{F}$  et le coefficient définissant la finesse :  $\lambda = \frac{l}{i}$ .

Considérons maintenant une section rectangulaire de hauteur  $h$  et de largeur  $b$  et exprimons l'excentricité en fonction de la largeur du noyau central, de sorte que :  $e = m \frac{h}{6}$ . On aura :  $k = \frac{\lambda}{l} \sqrt{\frac{\sigma_n}{E}}$  et  $e.k = 0,577 m \sqrt{\frac{\sigma_n}{E}}$ .

Enfin, à partir de l'équation (8) nous obtenons, pour le plus grand bras de levier, correspondant à la charge  $P$ , au milieu de la barre et en tenant compte des valeurs ci-dessus :

$$\frac{f_m}{h} = \frac{1}{6} \sqrt{m^2 \cos^2 \alpha + 12 \frac{E}{\sigma_n} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (11)$$

Prenons comme module d'élasticité  $E = 22.100$  kg par  $\text{mm}^2$ , valeur qui correspond à l'acier de construction de qualité ordinaire et que nous supposons tout d'abord constante.

En partant des points ci-dessus, on obtient pour l'équation (2) et pour le rapport  $\frac{f_m}{h}$  des familles de courbes qui sont représentées sur la figure (2) et qui correspondent à différentes valeurs de  $m$ . Chacun des points de ces graphiques donne, pour l'excentricité correspondante, les valeurs correspondantes de  $\sigma_n$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$  et  $\frac{f_m}{h}$  qui impliquent l'équilibre.

La figure 2 a, pour  $m = 0$ , correspond à une charge axiale. Dans ce dia-

gramme, l'échelle des  $\lambda$  ne correspond à celle des autres diagrammes que jusqu'à la charge de flambage. A partir de ce point, et pour une charge constante ( $\sigma_n$  constant), à un plus grand angle  $\alpha$  correspond un plus grand coefficient de finesse  $\lambda$ . L'accroissement  $\Delta\lambda$  est toutefois porté à une échelle cent fois plus forte que celle des  $\lambda$  eux-mêmes.

Les figures 2b à 2f montrent que, pour une valeur donnée de  $m$ , chaque courbe  $\sigma_n$  est asymptote à la verticale correspondant au  $\lambda_k$  pour lequel le flambage se produit avec une charge axiale. Pour une section de la barre correspondant à une charge de  $\sigma_n$  au centre de gravité et pour de faibles excentricités, les déformations restent tout d'abord faibles. Elles augmentent brusquement à l'approche du degré de finesse correspondant au flambage axial.

Pour des excentricités plus importantes, l'influence prédominante du moment provoque, pour un degré de finesse croissant, une augmentation rapide des valeurs de  $\alpha$  et de  $f_m$ . Toutefois, la zone correspondant au degré de finesse critique est moins accusée.

Pour le module d'élasticité  $E$  choisi et pour une limite de proportionnalité correspondante  $\sigma_p = 19$  kg par mm<sup>2</sup> on atteint rapidement, avec les courbes individuelles, la limite pour laquelle  $\sigma_p$  se trouve dépassée dans les fibres périphériques du côté comprimé, et à partir de laquelle l'élément sort partiellement de la zone élastique.

On a tracé les lignes représentant les valeurs de  $\sigma_p$  pour des excentricités de  $m = 0,50 - 1,0 -$  et 3. Par leur intersection avec une courbe  $\sigma_n$ , on obtient le coefficient de finesse pour lequel la valeur de  $\sigma_p$  sera en même temps atteinte dans la fibre périphérique du côté comprimé. Ce n'est qu'aux valeurs correspondantes de  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $\sigma_n$  qui se trouvent *au-dessous* de la courbe  $\sigma_p$  qu'il existe des cas de charge pour lesquels la barre entière travaille dans la zone élastique. Au-dessus de cette courbe  $\sigma_p$  nous avons affaire à des cas de charge pour lesquels l'élément travaille soit intégralement, soit partiellement, en dehors de la zone élastique. Nos familles de courbes ne sont donc valables que jusqu'à la courbe  $\sigma_p$ .

Pour les mêmes valeurs de  $m$ , on a également tracé les courbes de  $\sigma_{kr}$ . Ce sont les efforts critiques au centre de gravité, pour lesquels, suivant les résultats expérimentaux de Roš, il se produit un flambage de la barre chargée excentriquement, ou, d'après les considérations que nous avons exposées au début, une instabilité.

Pour les trois cas d'excentricité envisagés, et pour les finesses admissibles dans la pratique, les états d'instabilité se manifestent dans des zones pour lesquelles l'élément travaille partiellement ou intégralement en dehors du domaine élastique. Même pour de très faibles valeurs de  $m$ , il est impossible que la courbe de  $\sigma_{kr}$  passe au dessous de la droite  $\sigma_p$ .

Pour pouvoir mieux nous rendre compte de la distribution des efforts dans le cas d'une compression excentrique, nous nous proposons encore de déterminer les efforts qui se trouvent mis en jeu. Nous nous limiterons au calcul des efforts maxima sur les bords de la section rectangulaire située au milieu de la barre.

$$\sigma_{m \max}^{\min} = \frac{P}{F} \pm \frac{P \cdot f_m}{J} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_n \left( 1 \pm 6 \frac{f_m}{h} \right) \dots \dots \dots (12)$$

$F$  représente la section et  $J$  le moment d'inertie.



Les efforts maxima et minima au milieu de la barre peuvent également s'écrire comme suit :  $\sigma_{m \min}^{\max} = \sigma_n \left( 1 \pm \lambda \frac{h}{l} \sqrt{\frac{E}{\sigma_n}} \cdot K \right)$ . . . . . (13)

On a déterminé d'après l'équation (13) différentes valeurs des efforts pour  $m = 0,5, 1$  et  $3$  pour chacun des coefficients de finesse de  $100, 150$  et  $200$  et pour une charge croissante  $P = \sigma_s \cdot F$ .

Ces valeurs ont permis d'établir les courbes des figures 3a, 3b et 3c.

Sur les ordonnées qui correspondent aux différentes charges, on a porté les efforts, les déviations  $\alpha$  et les valeurs des fléchissements  $\frac{f_m}{h}$ .

$\sigma_s$ , désigne l'effort au centre de gravité.

$\sigma'$  l'effort périphérique au milieu de la barre, dans les fibres comprimées;

$\sigma''$  — — — — — dans les fibres tendues;

ces deux efforts étant considérés sans tenir compte de la déformation de l'axe de la barre;

$\sigma_{\max}$  et  $\sigma_{\min}$  désignent respectivement les efforts effectifs périphériques dans les fibres comprimées et dans les fibres tendues, en tenant compte d'une manière précise de la déformation de cet axe. Les différences  $(\sigma_{\max} - \sigma')$  et  $(\sigma_{\min} - \sigma'')$  représentent l'influence du fléchissement de l'élément, qui paraît dépendre largement de  $m$  et de  $\lambda$ .

L'intersection de l'horizontale  $\sigma_p$  avec la courbe de  $\sigma_{\max}$  donne la charge  $P$  pour laquelle les fibres extérieures du milieu de la barre dépassent la limite de proportionnalité. Ce passage est indiqué dans les figures par un trait vertical double. A gauche de ce trait double, l'élément travaille dans la zone élastique, et à droite, il travaille partiellement en dehors de la zone élastique.

L'intersection de l'horizontale correspondant à un effort admissible  $\sigma_z = 15 \text{ kg par mm}^2$  avec la courbe  $\sigma_{\max}$  donne la charge pour laquelle on atteint dans les fibres périphériques le taux de  $\sigma_z$ . Sur les figures 3 sont encore indiquées :

- 1) l'effort de flambage de l'élément  $\sigma_k$  pour une charge axiale ;
- 2) l'effort admissible au flambage  $\sigma_{kz}$  pour un coefficient de sécurité de  $2,5$  ;
- 3) l'effort critique  $\sigma''_k$  pour un élément chargé excentriquement, suivant Roß ;
- 4) l'effort admissible  $\sigma''_{kz}$  avec un même coefficient de sécurité de  $2,5$ .

Les indications fournies par les figures 3 nous montrent les influences de  $m$  et de  $\lambda$  sur la répartition des efforts et des fléchissements dans la section du milieu de la barre et nous constatons ici encore, de même qu'il est résulté des figures 2, que l'instabilité des éléments doués d'une certaine finesse est conditionnée par le moment où le matériau de cet élément commence à sortir de la zone élastique.

#### IV. Calcul de l'équilibre pour des matériaux partiellement ou intégralement plastiques.

Nous avons déjà signalé, dès le début, qu'il est extrêmement difficile d'interpréter analytiquement la manière dont se comportent les parties d'ouvrages dont les déformations sortent, en totalité ou en partie, du domaine élastique, du fait que la mécanique actuelle de la plasticité ne peut pas encore mettre à



notre disposition des relations sûres, basées sur des recherches expérimentales, entre les efforts et les déformations.

Pour l'exécution pratique des calculs, nous supposons, pour toute la barre, un module d'élasticité  $E$  constant, auquel correspond une variation linéaire d'efforts réduits comme suit : pour pouvoir tenir compte de la variation effective du module  $E$  d'une fibre à l'autre, nous réduisons les valeurs des sections successives, de telle sorte que les résultantes des efforts internes effectifs soient équivalents à ceux qui sont déterminés par les efforts et sections réduits.

Si, à un endroit donné, la largeur d'une fibre est  $b_\eta$  et si l'effort effectif correspondant atteint  $\sigma_\eta$ , il leur correspond, après la réduction (voir figure 5), la largeur réduite  $b^r_\eta$  et l'effort réduit  $\sigma^r_\eta$ . On doit avoir  $b_\eta \cdot \sigma_\eta = b^r_\eta \cdot \sigma^r_\eta$  d'où l'on déduit la largeur réduite correspondante d'une fibre de la section :  $b^r_\eta = b_\eta \cdot \frac{\sigma_\eta}{\sigma^r_\eta}$ .

La section initiale  $F$  se trouve remplacée par une section réduite  $F^r$ .

La figure 4 représente l'état d'une barre soumise à une charge excentrique et articulée à ses deux appuis d'extrémité, dans le cas où cette barre travaille partiellement ou intégralement en dehors de la zone élastique. L'axe statique qui doit être pris en considération dans les présentes recherches théoriques passe par les centres de gravité des sections réduites. Cet axe statique accuse par rapport à l'axe géométrique un écart  $e^r$ .

Considérons à nouveau la section rectangulaire, en introduisant toutefois, comme variable pour le rayon de courbure, l'élément d'arc  $ds$  de l'axe statique et l'angle  $\varphi$  correspondant. Sur la figure 5, on a porté, pour une section rectangulaire, le diagramme des allongements et des tensions, de même que la section réduite.

Considérons maintenant deux allongements  $\varepsilon_d$  et  $\varepsilon_z$  de fibres périphériques ; nous en déduisons, par le diagramme des allongements, les efforts correspondants à la périphérie  $\sigma_d$  et  $\sigma_z$ , de même que les valeurs des efforts réduits  $\sigma^r_d$  et  $\sigma^r_z$ . Nous déterminons la largeur réduite des fibres particulières et, pour toute la section réduite, la valeur  $F^r$ , la position du centre de gravité  $S^r$ , ainsi que le moment d'inertie  $J^r_s$  de la surface  $F^r$  par rapport au centre de gravité  $S^r$ . Au centre de gravité de la section réduite, on a l'allongement  $\varepsilon_n$  suivant l'axe statique et les efforts correspondants  $\sigma_n$  ou  $\sigma^r_n$ . De la figure 5, il résulte enfin, pour le rayon de courbure, la relation :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_z}{h} \quad (16)$$

de sorte que nous pouvons fixer également la position de l'axe neutre de la section au moyen de la relation :  $s = \rho \cdot \varepsilon_n$ .

Un allongement quelconque à une distance  $\eta$  du centre de gravité est donné par :  $\varepsilon_\eta = \varepsilon_n + \frac{\eta}{s}$ .

En partant du module constant  $E$ , des efforts réduits et de la section réduite, nous pouvons maintenant effectuer le calcul suivant NAVIER et nous obtenons les relations concernant les efforts extérieurs :

$$P = \sigma^r_n F^r \quad (17) \quad \text{et} \quad M = \frac{E J^r_s}{\rho} \quad (18)$$

Le bras de levier par rapport à l'axe statique de la barre est enfin donné

par  $y = M : P$ . Si pour une section déterminée, on connaît le point d'application de la charge, on atteindra l'équilibre lorsque l'effort  $P$  déduit des allongements considérés pour les fibres périphériques concordera avec la charge effective et  $y = e^r + \frac{y}{\cos \varphi}$  avec l'intervalle entre le point d'application de la charge et l'axe statique de la barre (voir figure 5).

Pour la détermination exacte de l'axe de la barre, il faut maintenant procéder d'une manière analogue à ce qui a été fait pour le matériau élastique, en

$$\text{intégrant l'équation différentielle : } \frac{1}{\rho} = - \frac{d\varphi}{ds} = - \frac{P \cos \varphi y}{E J^r_s}$$

dans laquelle  $y = \int_0^s ds \sin \varphi$ . Comme le moment d'inertie  $J^r_s$  varie avec l'angle  $\varphi$ , l'intégration ne peut être effectuée que graphiquement.

Nous sommes donc maintenant en mesure d'établir des diagrammes d'équilibre pour un diagramme d'allongement donné. Pour une charge  $P$  déterminée (ou pour un effort correspondant  $\sigma_n = \frac{P}{F}$  au centre de gravité), considérons tout d'abord différentes valeurs de  $\varepsilon_d$  et de  $\varepsilon_z$ . Ces valeurs doivent être choisies telles que :  $P = \sigma_n \cdot F^r$ . Pour chaque cas, nous déterminons  $e^r$  et  $s$  ainsi que le moment  $M$  des efforts intérieurs :  $M = \frac{E J^r_s}{h} (\varepsilon_d - \varepsilon_z)$ .

Enfin nous avons pour le bras de levier de la charge extérieure  $P$  par rapport à l'axe statique de la barre :  $y = \frac{M}{P} = \frac{E}{P \cdot h} \cdot J^r_s (\varepsilon_d - \varepsilon_z)$

Si l'on considère des éléments d'arc finis  $\Delta s$ , on a pour la variation de l'angle correspondant :  $\Delta \varphi = \Delta s \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_z}{h}$ , d'où l'on peut déterminer progressivement l'axe de la barre et les modifications corrélatives de  $y$ .

Pour la conduite pratique des opérations, on pourra établir des graphiques pour différentes valeurs de  $P$  (ou de  $\sigma_n$ ); pour toutes déterminations ultérieures, on obtiendra les valeurs demandées par interpolation des courbes des graphiques.

Il faut maintenant déterminer la position d'équilibre qui correspond à une charge donnée appliquée à une barre donnée. Déterminons tout d'abord si le milieu de cette barre se comporte plastiquement. Comme, avec les hypothèses que nous avons faites, nous ne connaissons que l'angle de déviation de l'axe de la barre en son milieu pour  $m = 0$ , il faut commencer par tracer la courbe de flexion. Admettons tout d'abord un bras de levier  $y_m$ , sans perdre toutefois de vue que cette valeur comprend non seulement le fléchissement de l'axe de la barre, mais également l'excentricité initiale; déterminons les valeurs correspondantes de la déviation de l'axe de la barre  $\Delta \varphi$  à partir des résultats graphiques obtenus précédemment et pour un  $\Delta s$  fini. Nous obtenons ainsi pour un écart  $\Delta s$  du milieu de la barre, un point de son axe ainsi que la valeur correspondante  $y'$  du bras de levier. Pour ce nouveau bras de levier, déterminons à nouveau la variation  $\Delta \varphi$  correspondante pour un nouveau  $\Delta s$ , nous obtenons le bras de levier  $y''$  qui correspond à  $2 \Delta s$  et ainsi de suite. En arrivant à l'extrémité de la section de la barre, nous devons obtenir la valeur  $y_0$ .

qui, étant donné le  $e_0^r$  connu, doit nous conduire au point d'application de la charge à l'extrémité de cette section. Sinon, il conviendra de choisir une autre valeur de départ  $y_m$  jusqu'à ce que l'on arrive à un résultat exact. Dans la pratique, la section du milieu de la barre seule travaillera en dehors de la zone élastique, le reste pouvant être calculé sur la base de l'élasticité.

Si nous devons enfin rechercher quelle est la charge critique d'instabilité, nous devons partir des valeurs limites pour le moment dans le milieu de la barre, ou des maxima possibles du bras de levier et déterminer la courbe de flexion comme précédemment. C'est cette courbe de flexion de la barre qui servira de point de départ, pour *toutes* les excentricités possibles du point d'application de la charge à l'extrémité de la barre. Cette courbe de flexion une fois établie, nous sommes en mesure de déterminer les longueurs critiques de la barre qui correspondent à une charge donnée et à une excentricité initiale arbitraire, et d'établir la valeur limite précise à partir de laquelle il y a instabilité.

Le procédé de calcul développé dans les lignes qui précèdent s'applique, indépendamment des charges excentriques, à tous les systèmes de charge axiale, lorsque l'on se trouve en présence de fléchissements provoqués par des causes quelconques ayant conduit à un dépassement de  $\sigma_p$ . Si, en définitive, la résistance à la flexion se trouve dépassée au milieu de la barre, on se trouve en présence du cas de l'instabilité d'une barre soumise à une charge axiale, et qu'il ne faut pas confondre avec le flambage. Notre méthode permet également de prendre en considération le cas du flambage des barres trapues lorsque, suivant l'esprit de notre définition, le calcul est basé sur la considération de l'instant où l'axe de la barre, de droit, devient incurvé, en tenant compte de la réduction de la charge sur le côté tendu.

Cette méthode de calcul se rattache étroitement, pour les cas de plasticité partielle, au calcul exact applicable dans la zone élastique, et naturellement l'englobe. Elle permet de suivre exactement les déformations et les efforts de section en section, même pour des cas de charge compliqués.

## V. Études expérimentales.

Les considérations qui ont été exposées jusqu'à maintenant nous amènent à envisager la vérification des hypothèses et des résultats obtenus. Les études expérimentales ont deux objectifs : l'un de caractère théorique, l'autre de caractère pratique. Ce dernier consiste à déterminer les charges critiques, telles qu'elles se présentent en pratique, dans les différents éléments utilisés en construction, afin de permettre l'établissement de formules et de diagrammes.

C'est en ce qui concerne les barres chargées axialement que l'on possède le plus de résultats pratiques. Ces résultats ont permis de déterminer les courbes des efforts de flambage, donnant les valeurs critiques des efforts au centre de gravité, pour lesquelles le flambage se produit.

Les essais pratiques pour la détermination de la résistance au flambage des tôles d'âme et des ailes des poutres, etc... n'ont pas encore été établis en nombre suffisant pour pouvoir servir de base aux recherches théoriques.

La question de l'instabilité des barres chargées excentriquement a été suivie

tout particulièrement par Roß au Laboratoire Fédéral d'Essai des Matériaux à Zurich. A la suite de nombreux essais, on a déterminé pour des excentricités variables, les courbes des tensions critiques au centre de gravité, analogues aux courbes des efforts de flambage. On a envisagé des marges de sécurité équivalentes à celles qui ont été adoptées pour les recherches sur le flambage. Cette méthode est évidemment pratique, mais elle ne permet pas de traduire l'influence des moments fléchissants, dont l'importance est pourtant prépondérante en ce qui concerne l'apparition de l'état d'instabilité. Il n'est pas possible de déterminer pour quelles relations entre les moments et les efforts (excentricités) il faut procéder à un calcul d'instabilité et pour quelles autres on peut se contenter d'une simple étude portant sur les efforts. Il ne faut d'ailleurs pas perdre de vue que les questions concernant l'importance de la marge de sécurité doivent être traitées d'une manière concordante dans les deux cas.

On ne possède encore que très peu de résultats expérimentaux, susceptibles d'intéresser la technique pratique de la construction, en ce qui concerne les efforts s'exerçant excentriquement sur les dalles, les âmes, les ailes des poutres, etc... (les cas de charges groupées n'étant toujours pas considérés).

Nous pouvons donc constater que ce domaine très intéressant de la stabilité et de la résistance des barres et des dalles comprimées et fléchies offre encore aux recherches expérimentales un champ très vaste.

Il convient donc tout d'abord de poursuivre des effets d'ordre scientifique, afin de dégager les bases de la question. Seules de telles investigations permettront de mieux saisir la manière dont se comportent les barres, les dalles, etc... dans le domaine plastique. Corrélativement, ces recherches apporteront également leur contribution à l'étude des questions d'ordre statique et dynamique dans lesquelles le problème que pose l'entrée de certains éléments de construction dans le domaine plastique conduit non pas à envisager le point de vue de la marge de sécurité, mais l'adoption, pour l'ensemble du système statique, de dispositions plus rationnelles.

L'exécution de tels essais de base, portant sur des éléments de construction travaillant dans le domaine plastique, demande des installations particulières. Suivant la vitesse de déformation, les frottements internes, suivant l'allure du diagramme des allongements, etc..., l'apparition des déformations considérables dans le domaine critique est plus ou moins rapide; il ne doit pas en résulter la plus petite répercussion sur la charge (c'est-à-dire sur la machine d'essai), pas plus que de la déviation de l'axe de la barre ou du plan des tôles, si l'on veut que l'essai soit effectué dans les conditions désirables de précision.

Dans ces recherches, les possibilités d'augmentations progressives aussi faibles que possible de la charge, ainsi que le temps, jouent un rôle important; il sera par exemple intéressant de pouvoir déterminer, en correspondance avec le diagramme des allongements, dans quelles conditions on pourra, après dépassement d'une zone d'instabilité déterminée, réaliser une nouvelle position d'équilibre.

Il est en outre nécessaire de contrôler l'influence des charges statiques répétées (avec dépassement de la limite de proportionnalité), ainsi que l'influence des charges de nature dynamique, sur ces questions d'instabilité.

Pour l'étude expérimentale des questions ainsi indiquées, il conviendra de

travailler sur des modèles de barres et de dalles préparés avec les matériaux utilisés en pratique, ou avec d'autres matériaux appropriés admettant des diagrammes d'allongement nettement déterminés.

L'auteur a conçu, à l'Institut pour la Statique de la Construction de l'École Polytechnique Fédérale de Zurich, différents appareils et dispositifs, permettant l'étude systématique des questions importantes de la statique qui viennent d'être indiquées.

Concrétisons les considérations précédemment exposées par la discussion de quelques essais effectués. La série de photographies de la figure 6 se rapporte à l'application d'une charge excentrique avec  $m = 3$ , sur une barre préparée avec un matériau expérimental particulier. Le quatrième cliché à partir de la gauche représente un cas typique d'équilibre, dans des conditions intégralement élastiques. Pour une faible augmentation de la charge (cliché 5) il se produit dans le milieu de la barre un fort fléchissement, tandis que les extrémités de cette barre accusent un commencement de redressement. On a alors une position d'équilibre correspondant à un travail partiellement plastique pour le milieu de la barre. Si, après de telles conditions de charge, on supprime la charge, le milieu de la barre accuse un fléchissement permanent (cliché 6).

La série inférieure des clichés de cette même figure se rapporte à un essai effectué sur une barre en acier de construction et pour  $m = 3$  également. Le quatrième cliché à partir de la gauche concerne encore un travail entièrement élastique. Sur le cinquième cliché, on arrive au moment où, par suite d'une légère augmentation de la charge, l'état d'instabilité apparaît. On constate, là encore, que pour une même charge, la déformation se localise au milieu de la barre, tandis que ses extrémités accusent un redressement. Après enlèvement de la charge, aucune nouvelle position d'équilibre n'ayant été atteinte, la déformation est restée localisée au milieu de la barre, les extrémités restant entièrement droites, suivant le cliché 6.

L'essai de la figure 7 a été effectué sur une barre trapue en acier doux et également pour  $m = 3$ . On ne peut pas suivre aussi bien, sur ces clichés, les formes d'équilibre tout d'abord entièrement élastique, puis partiellement plastique, par suite de l'aspect plus ramassé de la figure. Le deuxième cliché représente la position extrême d'équilibre à partir de laquelle la barre commence à s'infléchir pour une faible augmentation de la charge. Le cliché inférieur de gauche montre que seul le milieu de la barre participe à la déformation ultérieure, tandis que les extrémités subissent un redressement. Le dernier cliché représente enfin la barre après suppression de la charge.

La figure 8 représente deux barres, après la suppression de la charge. L'une de ces barres est très mince et allongée et l'autre plus courte et ramassée ; on peut observer très nettement le mode de déformation après dépassement de la limite d'instabilité.

Les exemples qui viennent d'être exposés montrent que pour les barres, les dalles et les dispositions complexes de formes et de charges, l'instabilité se manifeste toujours et exclusivement dans une zone partiellement inélastique. Il est extrêmement important d'étudier d'une manière précise le travail des systèmes de construction, dans ce domaine, tout particulièrement en vue des ouvrages que l'on fait sortir intentionnellement de la zone élastique, sans faire intervenir l'instabilité.

### **Zusammenfassung.**

Werden Stäbe mit gerader Achse durch Druckkräfte, oder werden ebene Platten durch Momente und Querkräfte in ihrer Schwerebene beansprucht (Zentrische Belastung), dann bleiben die Stabachsen gerade und die Platten eben, bis bei allmählichem, statischem Anwachsen die kritische Belastung, die Knicklast, erreicht wird. Stäbe und Platten nehmen gebogene Formen an, die neuen Gleichgewichtslagen entsprechen. Zu den ursprünglichen äusseren Lasten treten noch Biegemomente und Querkräfte hinzu, die senkrecht zur Stabachse oder senkrecht zur Plattenebene wirken. Aus der reinen Druckbelastung des Stabes wird eine kombinierte Druck-Biegebeanspruchung, und aus dem ebenen Spannungsproblem der Platte ein räumliches. Nach dem Wechsel der Gleichgewichtslage verhalten sich ausgeknickte Bauglieder bei weiterer Belastung wie solche mit anfänglichen Biegemomenten. Knicken ist somit nur dann möglich, wenn die ursprüngliche Belastung bei gerader Stabachse oder ebenen Platten zentrisch wirkt.

Sind Stabachsen oder Schwerebenen von Platten von Anfang an gekrümmt, oder wirken ausser anderen Lasten Kräfte, die infolge von Deformationen Biegemomente hervorrufen, so haben wir es mit kombinierter Druck-Biegebeanspruchung zu tun. Hieher gehören: exzentrischer Druck, Druck mit Querbelaustung, zentrischer Druck nach Überschreiten der Knicklast usw.

Die Ausbiegungen, und Spannungen nehmen infolge der von den Deformationen abhängigen Biegemomente schneller zu als die Last; jedoch entspricht jeder Last eine Gleichgewichtslage, solange wir unbegrenzt elastisches Material voraussetzen. Die Materialeigenschaften der Baustoffe bedingen, dass bei Eintreten grösserer örtlicher Verformungen die Biegesteifigkeit erschöpft wird und zunächst an der Stelle des ungünstigsten äusseren Momentes die inneren Kräfte nicht mehr im Stande sind, Gleichgewicht mit der äusseren Belastung herzustellen. Wir erhalten eine Änderung in der statischen Gliederung des Bauteiles und damit eine Umlagerung des Spannungsverlaufes. Ist nach der teilweisen oder gänzlichen Ausschaltung von Teilen des Tragsystems eine neue Gleichgewichtsform möglich (kontinuierlicher Träger bei Überschreitung der Fliessgrenze über einer Stütze, ausgesteifte Stegbleche von Biegeträgern nach teilweisem Ausbeulen der Stege usw.), so ist diese bei der Prüfung der Tragfähigkeit nach weiterer Laststeigerung den Untersuchungen zu Grunde zu legen. Treten die Einschränkungen der Biegesteifigkeit jedoch an Stellen auf, die nicht gestützt sind, beispielsweise die Mitte eines exzentrisch gedrückten Stabes, und daher ausweichen können, so ist keine neue stabile Gleichgewichtslage mehr möglich. Wir sprechen in diesem Falle von Instabilität; der Bauteil ist gänzlich unbrauchbar geworden.

Instabilität von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen kann demnach nur eintreten, wenn nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze in einzelnen Teilen unelastisches Verhalten auftritt. Die Form des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes ist von grundlegendem Einfluss. Das Problem selbst kann als Gleichgewichtsaufgabe oder als Spannungsuntersuchung behandelt werden.



Die genaue rechnerische Behandlung der geschilderten Belastungsfälle ist im elastischen Gebiet ohne weiteres, im unelastischen nur nach gewissen Annahmen möglich. Um der Praxis wirtschaftliches Dimensionieren von Baugliedern, die auf Druck und Biegung beansprucht werden, zu ermöglichen und um genügende Sicherheit gegen das Erreichen von Instabilität im unelastischen Bereich zu gewährleisten, ist das Verhalten der Baustoffe im plastischen Gebiet zunächst auf wissenschaftlich-versuchstechnischer Basis eingehend zu erforschen. Über die speziellen Aufgaben der « Stabilität und Festigkeit von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen » hinaus müssen die Grundlagen geschaffen werden, die eine praktische Berechnung der Bauglieder im unelastischen Gebiet ermöglichen, um eine Reihe von wichtigen Fragen der Statik und Dynamik ihrer Lösung entgegenführen zu können.

### Résumé.

Si l'on soumet des barres à axe rectiligne à des efforts de compression, ou des dalles planes à des moments et à des efforts tranchants s'exerçant dans le plan du centre de gravité, les axes des barres restent rectilignes et les dalles restent planes, jusqu'à ce que la charge, augmentée progressivement, atteigne la valeur critique, c'est-à-dire la charge de flambage. Les barres et les dalles accusent ensuite des fléchissements qui correspondent à de nouvelles positions d'équilibre. Aux charges extérieures initiales s'ajoutent encore des moments fléchissants et des efforts tranchants, qui s'exercent perpendiculairement à l'axe de la barre ou au plan de la dalle. A partir de la charge de compression simple de la barre, prennent naissance des systèmes combinés d'efforts de compression et de flexion. L'étude de la dalle devient un problème intéressant les trois dimensions. Après modification du système d'équilibre, les éléments fléchis se comportent, pour les nouvelles augmentations de la charge, comme des éléments soumis à des moments fléchissants initiaux. Le flambage n'est ainsi possible que lorsque la charge initiale s'exerce axialement, tant dans les barres rectilignes que dans les dalles planes.

Si les axes des barres ou les plans des dalles ont subi un fléchissement initial, ou si ces éléments se trouvent, en outre, soumis à des charges qui se traduisent, par suite des déformations initiales ci-dessus, par des moments fléchissants, nous aurons alors affaire à un système combiné d'efforts de compression et de flexion. A ce cas appartiennent : les charges appliquées excentriquement, les compressions avec efforts tranchants, les compressions axiales après dépassement de la charge de flambage, etc...

Par suite de l'intervention des moments fléchissants résultant des déformations, les fléchissements augmentent plus rapidement que les charges. Toutefois, à chaque charge correspond une position d'équilibre, tant qu'il s'agit de matériaux ayant une élasticité illimitée. Les caractéristiques propres des matériaux employés conditionnent le dépassement de la résistance à la flexion, lorsque de plus grandes déformations locales entrent en jeu ; c'est d'elle que dépend la possibilité d'un équilibre entre les efforts internes et la charge extérieure, à l'endroit où le moment s'exerce de la manière la plus défavorable. Il en résulte

une modification dans la conception statique des éléments de la construction et un regroupement des efforts. Si, après la mise hors de cause partielle ou totale de certaines parties du système porteur, une nouvelle forme d'équilibre est possible (cas des poutres continues après dépassement de la limite d'écoulement au-dessus d'un appui, élançonnement des poutres travaillant à la flexion après flambage partiel de l'âme, etc...), cette nouvelle forme doit servir de point de départ pour le contrôle de la capacité de charge, pour de nouvelles augmentations de la charge. Si toutefois la résistance à la flexion se trouve dépassée à des endroits non soutenus, par exemple au milieu d'une barre comprimée excentriquement, endroits qui sont par conséquent susceptibles de fléchir, on ne pourra plus trouver une nouvelle position d'équilibre stable. Nous dirons alors qu'il y a apparition de l'état d'instabilité; l'élément est complètement mis hors service.

L'instabilité des éléments soumis à des efforts de compression et de flexion ne peut donc se produire que lorsque certains éléments sortent de la zone élastique, par suite du dépassement de la limite de proportionnalité. La forme du diagramme des allongements est là d'une importance déterminante. Le problème peut être traité comme une question d'équilibre ou comme une question d'efforts.

L'étude rigoureuse des cas de charges indiqués est possible immédiatement dans le domaine élastique; mais elle ne peut être abordée, en dehors de ce domaine, qu'en partant de certaines hypothèses. Il importe tout d'abord d'étudier d'une manière approfondie, théoriquement et expérimentalement, la manière dont se comportent les matériaux utilisés en construction; cette question est nécessaire si l'on veut pouvoir arriver, pour les différentes parties de la construction, à des dimensions économiques et si l'on veut réaliser des marges de sécurité suffisantes, par rapport à l'instabilité dans le domaine plastique. Pour pouvoir résoudre toute une série de questions capitales, en statique et en dynamique, on devra mettre sur pied les bases d'une étude spéciale de la « Stabilité et de la résistance des éléments travaillant simultanément à la compression et à la flexion », étude destinée à permettre le calcul pratique des éléments dans le domaine plastique.

### Summary.

If members with straight axes are submitted to compression, or if flat plates are stressed by moments and transverse forces in the plane of their centre of gravity (central loading), the ends of the members remain straight and the plates flat, until through gradual static increase the load reaches the critical (buckling) load. Members and plates then assume bent shapes, corresponding to the new positions of equilibrium. In addition to the original external loads, there come into play also bending moments and transverse forces, which act perpendicular to the axis of the member or perpendicular to the plane of the plate. The purely compression loading of the member becomes a combined compression and bending stressing, and the problem of the stresses in the plate is in three dimensions instead of in two. After the position of equilibrium has altered, buckled structural members when still further loaded behave as members



with initial bending moments. Buckling is consequently only possible, when the original load acts centrally in the case of a member with straight axis or in the case of a flat plate.

If the axes of members, or the central planes of plates, are initially bent, or if in addition to other loads forces act which cause bending moments in consequence of deformations, we have to deal with combined compression and bending. To these belong : eccentric pressure, compression with transverse loading, central pressure after the buckling load has been exceeded, etc.

The deflections and stresses, in consequence of the bending moments depending on the deformations, increase more quickly than the load; but to every load there is a corresponding position of equilibrium, as long as we assume unlimited elasticity of the material. From the properties of the structural material it results that, when larger local deformations occur, the resistance to bending becomes weak and at first at the place where the external moment is most unfavourable the internal forces are no longer able to bring about equilibrium with the external loading. We get a change in the static conditions of the structural part and therefore a change in the run of the stresses. If, after partial or complete elimination of parts of the system, it is possible to have a new form in equilibrium (continuous girders with the elastic limit exceeded over one support, stiffened webs of plate girders after partial buckling of the web, etc.), this has to be taken into consideration when testing the carrying capacity after further increase in load. If however the reductions in the resistance to bending occur at places which are not supported, — for example in the middle of an eccentrically compressed member, — and may consequently give way, a new stable position of equilibrium is no longer possible. In this case we speak of instability; the system will be destructed.

Instability of structural parts submitted to compression and bending can accordingly only occur if inelastic conditions result after the limit of proportionality is exceeded in individual parts. The shape of the stress-strain diagram is of fundamental significance. The problem itself may be treated as a problem in equilibrium or as an investigation of stresses.

The exact mathematical treatment of the described cases of loading is quite possible in the elastic zone; in the inelastic zone certain assumptions must first be made. In order to make possible in practice to obtain economical dimensioning of structural members which are submitted to compression and bending, and in order to ensure sufficient safety against reaching instability in the inelastic zone, the behaviour of the structural material in the plastic zone must first of all be thoroughly investigated scientifically and technically. For the special problems of the “ stability and strength of structural members subjected to compression and bending ”, one must search for principles which will enable to make practical calculations for structural members in the inelastic zone, in order to solve a series of important questions in statics and dynamics.

---