Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Artikel: Discussion

Autor: Schleicher, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-498

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.09.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Reduktion nach *a*) ist nicht zu empfehlen, da sie durch die Beobachtungen nicht bestätigt wird und zu hoch liegende Knickspannungen gibt.

Nach *b*) erhält man für den Bereich $\sigma_P < \sigma < \sigma_S$ i. a. genügend genau zutreffende Werte, sodass diese Art der Reduktion z. B. dann brauchbar sein dürfte, wenn die Knickspannungslinie nicht bekannt ist. Für dicke Platten wird die Stabilität danach jedoch überschätzt, sodass es sich empfiehlt, Werte $\sigma_K > \sigma_S$ (bzw. die der Plastizitätsbedingung entsprechende Beanspruchung) durch σ_S zu ersetzen.

Die Abminderung nach *c*) entspricht dem heutigen Stande unserer Kenntnisse am besten. Sie kann allgemein empfohlen werden; sowohl für homogene, als für nicht homogene Spannungszustände. Für die letzteren bleibt man auf der sicheren Seite, wenn man die Reduktion für die am stärksten beanspruchte Stelle durchführt.

Traduction.

I. — Autres essais sur le flambage des plaques d'acier uniformément comprimées.

Une série d'essais très intéressants a été effectuée à l'occasion de la construction du pont suspendu reliant Philadelphie à Camden [1, 2].

Il s'agit ici de plaques rectangulaires, bordées avec des cornières et accusant les dimensions suivantes : largeur totale $b = 88{,}9$ cm. ; largeur entre les cornières $b' = 58{,}5$ cm. ; longueur $a = 305$ cm. ; épaisseurs $h = 0{,}95$ cm. à 3,80 cm.

Les plaques ne comportaient aucun encastrement sur les bords longitudinaux et étaient constituées en acier au silicium-manganèse, accusant les caractéristiques suivantes : limite de compression $\sigma_S = 3{,}165$ t/cm² ; charge de rupture $\sigma_B = 5{,}6$ à 6,7 t/cm².

Pour $E = 2100$ t/cm², $m = 10/3$, on obtient la charge de flambage σ_K, pour un rapport entre les côtés égal à $\alpha = 3{,}43$ et en tenant compte d'un nombre de demi-ondulations $n = 3$: par la relation suivante :

$$\sigma_K = 7750 \left(\frac{h}{b}\right)^2 \text{ en t/cm}^2. \tag{1}$$

Pour $b = 88{,}9$ cm., on obtient les valeurs de σ_K indiquées dans le tableau suivant. Les valeurs indiquées entre parenthèses se trouvent au-dessus de la limite de proportionnalité et doivent donc subir une diminution. Les « σ_K observés » ont été tirées du Rapport.

Au cours de 14 essais, la déformation $w = w(\sigma)$ a eté déterminée en fonction de la contrainte longitudinale. Dans les essais marqués « x », on n'a pu observer aucune limite de stabilité nettement accusée, car les plaques étaient mises en place d'une manière défectueuse. Les charges les plus élevées corres-

1. W. Schachenmeier, Die Delaware River Brücke zwischen Philadelphia und Camden. Die Bautechnik, 1927, p. 513.

2. Clement E. Chase, Research and experimental tests in connection with the design of the bridge over the Delaware River between Philadelphia and Camdem, Journal of the Franklin Institute, vol. 200, oct. 1925, p. 417.

pondaient, pour $h = 0{,}95$ à $1{,}59$ cm., à des contraintes d'environ 2,8 t/cm², les déformations correspondantes atteignant déjà une valeur multiple de l'épaisseur de la plaque. La figure 1 se rapporte à deux de ces essais. Pour la plaque mince G 1 la déformation augmenta régulièrement avec l'effort de compression et il ne peut pas dans ce cas être question d'une limite de stabilité. Par contre, pour les plaques dont l'épaisseur était supérieure à 1,9 cm., la déformation est restée faible, car ces plaques étaient fixées dans de meilleures conditions ; elle n'a atteint des valeurs élevées que sous l'influence d'une charge de flambage nettement accusée. On trouvera sur la figure 1, à titre d'exemple, l'essai G7A, effectué avec une plaque constituée par deux tôles fortes de 3/4″ (19,05 mm.) rivées ensemble. Les plaques ayant une épaisseur de $h = 1{,}9$ à 3,8 cm. ont flambé à la limite de compression sans que l'épaisseur elle-même de la plaque intervienne. Sur les pièces constituées par deux plaques rivées, on a atteint la même contrainte de flambage que sur des tôles simples d'épaisseur double.

Les déformations initiales ont exercé, au cours de ces essais, une influence très marquée. Pour cette raison principalement, il ne fut pas possible de déterminer les contraintes de flambage des plaques dont l'épaisseur était inférieure à 1,90 cm. On ignore également dans quelle mesure les tôles constituant en quelque sorte l'âme ont pu être soulagées par la présence des quatre cornières de bordure ; ceci d'ailleurs particulièrement en ce qui concerne les tôles minces. Chase a remarqué ultérieurement que les chiffres de résistance des tôles minces étaient relativement plus élevés que ceux des tôles de plus forte épaisseur.

h cm	b/h	σ_K théorique t/cm²	σ_K observé t/cm²	Observations
0,95	93,7	0,88	x	flambage anticipé
1,27	70,1	1,58	x	flambage anticipé
1,59	56	2,47	x	comportement meilleur
1,90	46,8	(3,53)	3,23 3,17	la section flambe dans son ensemble
2,54	35,1	(6,3)	(3,28 3,17) (3,09 3,13)	»
3,80	23,5	(14,1)	3,23 3,27	»

Aucune conclusion n'a pu non plus être tirée des observations effectuées sur les tôles minces. Les courbes pour $w = w(\sigma)$ montrent toutefois que les essais effectués sur les tôles épaisses sont remarquablement bons. Ils permettent une comparaison avec la théorie établie par M. Bleich pour le flambage dans le domaine inélastique. Pour les tôles minces les déformations ne constituent, en somme, que les accentuations des gauchissements initiaux dont il a déjà été fait mention. Les tôles épaisses ont accusé une limite de

flambage très nette, et, après apparition du voile, 4 ou 5 demi-ondulations se sont manifestées. On n'a pas pu constater de modifications dans le nombre des ondulations en fonction de l'épaisseur des plaques.

D'après la théorie des dalles isotropes, pour $\alpha = \sqrt{12} = 3{,}46$, il pourrait se produire aussi bien 3 que 4 demi-ondulations ; cela pour la même contrainte de flambage. Les plaques étudiées se trouvaient donc à la limite, puisque $\alpha = 3{,}43$. S'il est légitime de généraliser l'équation différentielle de déformation des plaques minces dans le domaine inélastique (voir Publication Préliminaire, page 120) :

$$2) \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial_x{}^4}\tau + 2\frac{\partial^4 w}{\partial_x{}^2\,\partial_y{}^2}\sqrt{\tau} + \frac{\partial^4 w}{\partial_y{}^4} + \frac{\sigma\, h}{D}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial_x{}^2} = 0$$

le nombre n des demi-ondulations devrait [1] augmenter avec σ_K et la longueur intéressée par le voile devrait dans tous les cas être beaucoup plus faible que la largeur des plaques. D'après ce qui précède, ce n'est toutefois pas le cas. La diminution que l'on pouvait escompter sur la longueur intéressée par le voile n'a pas été observée non plus au cours des essais sur le pont de Québec [2], la longueur d'onde coïncidant sensiblement avec la largeur des plaques.

Si l'on fait appel, pour le calcul du coefficient de flambage τ, à l'équation de Tetmajer :

$$3) \qquad \sigma_K = 3{,}1 - 0{,}0114\left(\frac{l}{i}\right)^2 \text{ en t/cm}^2$$

qui est également à la base de l'étude de Bleich concernant le calcul des dimensions des plaques, on obtient alors des contraintes de flambage qui s'élèvent lorsque le rapport b/h diminue. Pour des plaques en acier normal, on arrive par exemple, pour des valeurs de b/h égales à 46,8 et 23,5, à des écarts de 20 % environ sur les contraintes de flambage, par rapport aux valeurs escomptées.

Les essais de Chase ont donné comme contrainte de flambage, pour toutes les plaques dont l'épaisseur est supérieure au 1/50 de la largeur totale, la limite de compression elle-même ; pour $h > b/50$, on n'a pas pu observer de valeurs supérieures pour une augmentation de l'épaisseur de la plaque. Les essais qui précèdent permettent donc de conclure que la formule de Tetmajer, ou toute autre relation correspondante, en liaison avec la théorie généralisée de Bleich, ne permettent pas de déterminer d'une manière suffisamment précise la contrainte de flambage.

Faisons encore une remarque, pour conclure, au sujet des conditions régnant aux bords de la plaque, sur les grands côtés. Il n'est pas admissible de mesurer, pour l'interprétation des essais de Chase, la largeur libre b de la plaque entre les rangées de rivets ou entre les arêtes des cornières seulement. Dans le troisième essai, avec $b' = 58{,}5$ on obtient :

$$\sigma_K^{el} = 5{,}75 \text{ t/cm}^2$$

---

1. Voir : Die Beulenlänge bei Knickung im elastischen Bereich.
2. Voir : Fig. 8, p. 117 de la Publication Préliminaire, ou R. Mayer, Die Knickfestigkeit, fig. 212, p. 425 et fig. 215, p. 427.

tandis que l'essai donne une valeur qui se trouve très nettement au-dessous de la limite de compression.

La photographie d'une des tôles ayant subi le flambage montre (Chase, p. 420, ou Schachenmeier, p. 514) que le voile n'est pas limité par les cornières de bordure. On ne peut donc pas dire qu'il y ait eu effectivement un encastrement de la tôle par la cornière de bordure. Cette observation correspond au projet de Bleich (Publication Préliminaire, p. 112, fig. 3 *c* et *d*) d'introduire la largeur entière de la plaque dans le calcul.

Il n'y a effectivement un encastrement élastique sur les bords de la plaque que lorsque les pièces qui sont susceptibles de constituer cet encastrement ne peuvent pas simultanément participer au voile de la plaque elle-même. Dans le cas général, il faut admettre que les bords de la plaque comportent un appui articulé et la largeur totale de la plaque doit être introduite dans les calculs sans aucune réduction.

II. — Importance du voile par flambage dans le domaine plastique.

Pour une plaque rectangulaire reposant librement sur ses quatre bords, et soumise à des contraintes uniformément réparties, on obtient la contrainte de flambage, suivant Bleich, dans le domaine inélastique, par la relation :

1) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \frac{\sqrt{\tau}}{4} \left(\frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} + \frac{n\sqrt[4]{\tau}}{\alpha} \right)^2.$$

relation dans laquelle :

2) $$\sigma_{K1}^{el} = \frac{\pi^2 E}{2{,}73} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \text{ avec } m = 10/3$$

représente la charge de flambage d'une plaque constituée par un matériau présentant une limite de proportionnalité infiniment élevée pour le voile rectangulaire ($n = \alpha$). Cette contrainte de flambage a la même valeur que la contrainte de flambage d'Euler pour une barre constituée avec le même matériau et ayant un degré de finesse :

3) $$\lambda = 1{,}652 . \frac{b}{h}$$

Le coefficient de flambage

$$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{\sigma_{Euler}}$$

est fourni par les essais de flambage sur barre rectilignes.

Si, à titre de première approximation, on fait abstraction du fait que τ dépend de la forme de la section, suivant la théorie d'Engesser-Kármán, on obtient τ en le considérant comme fonction définie de la contrainte de flambage σ_K^{pl} ou de la contrainte de flambage d'Euler correspondante σ_{Euler}.

On atteint le minimum de la contrainte de flambage dans le domaine plastique :

4) $$\min \sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \sqrt{\tau}.$$

lorsque le nombre de demi-ondulations n est égal à [1] :

5) $$n = \frac{\alpha}{\sqrt[4]{\tau}}$$

La longueur du voile $l = \frac{a}{n}$ de la plaque ayant subi le flambage est donc variable suivant le niveau des contraintes de flambage ; en pratique, elle diminue d'ailleurs lorsque l'épaisseur de la plaque augmente.

Il est intéressant d'étudier d'une manière plus approfondie la relation qui existe entre la longueur du voile et l'épaisseur de la plaque.

a) Si l'on se base sur la formule de Tetmajer pour le calcul de τ dans le cas de l'acier doux :

6) $$\sigma_K^{pl} = 3{,}1 - 0{,}0114\ \lambda \text{ en t/cm}^2$$

on obtient, d'après Engesser :

7) $$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E}\left(\frac{3{,}1 - \sigma_K^{pl}}{\pi\, 0{,}0114}\right)^2.$$

Si l'on se limite à la plus faible valeur de la contrainte de flambage, on obtient alors, pour une épaisseur de plaque $h > b/64$:

8) $${}_{\min}\sigma_K^{pl} = 3{,}1 + 2{,}282.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4 - \sqrt{\left(3{,}1 + 2{,}282.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4\right)^2 - 9{,}61}$$

en t/cm², et :

9) $$\tau = 1{,}655.10^{-8}\left({}_{\min}\sigma_K^{pl}\right)^2 . \left(\frac{b}{h}\right)^4 \text{ en t/cm}^2.$$

Dans les équations, suivant la méthode de Tetmajer et de Bleich, on pose $E = 2150$ t/cm² [2]. Le nombre n des voiles est défini par la relation :

10) $$n = \frac{88{,}1}{\sqrt{{}_{\min}\sigma_K^{pl}}} . \frac{h}{b} . \alpha \ (\sigma_K^{pl} \text{ en t/cm}^2)$$

alors que $n = \alpha$ dans le domaine plastique ($h < b/64$). On trouvera dans le tableau 2 ci-contre les valeurs obtenues pour différentes valeurs de l'épaisseur des plaques.

$\frac{b}{h}$	50	40	30	25	20	15	10
${}_{\min}\sigma_K^{pl}$	2,292	2,554	2,779	2,874	2,953	3,017	3,063
τ	0,544	0,276	0,104	0,0533	0,0232	0,00755	0,00152
n/α	1,16	1,38	1,76	2,08	2,56	3,39	5,06

1. Le nombre d'ondulations est ici supposé variable d'une manière continue, tandis qu'en réalité il ne peut prendre que des valeurs entières. Le minimum absolu suivant la relation (4) ne se produit que lorsque α est un multiple entier de la racine quatrième de τ. Si ce n'est pas le cas, il faut rechercher les deux valeurs voisines de n et σ_K^{pl} est un peu plus élevé que ${}_{\min}\sigma_K^{pl}$. La différence est toutefois sans importance lorsqu'il s'agit de plus de deux ondulations.

2. Voir Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1924, page 131.

b) Pour un matériau admettant une limite de compression très nette σ_{-S} pour lequel la contrainte de flambage à l'état de barre concorde avec σ_{-S} pour une large marge de variation du degré de finesse λ, on obtient les relations qui suivent :

Si la contrainte de flambage est donnée en fonction du degré de finesse à l'état de barre (figure 2) :

11) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl}(\lambda)$$

on peut alors calculer le coefficient de flambage τ en partant de la relation :

12) $$\sigma_K^{pl} = \tau . \sigma_{(Euler)}$$

et on obtient :

13) $$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E} \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2$$

ou, en déterminant λ par inversion de l'équation (11) et en la remplaçant par sa valeur dans l'équation (13) :

$$\tau = \tau\,(\sigma_K^{pl}).$$

Quelques commentaires sont nécessaires au sujet de la courbe de σ_K^{pl} représentée sur la figure 2.

Si $\lambda \geqslant \lambda_P$ alors $\sigma_K^{el} = \sigma_{Euler}$ et $\tau = 1$. Dans la zone définie par : $\lambda_2 < \lambda < \lambda_P$, $\tau < 1$, dans laquelle les contraintes de flambage $\sigma_K^{pl} < \sigma_{-S}$ varient avec λ, on peut inverser l'équation (11) et calculer τ comme une fonction définie de σ_K^{pl}. Il en est de même pour la zone $\lambda < \lambda_1$ pour des contraintes de flambage qui se trouvent au-dessus de la limite de compression.

Pour les limites λ_1 et λ_2 de la zone moyenne, la contrainte de flambage coïncide avec la limite de compression :

$$\sigma_K^{pl} > \sigma_{-S}.$$

Les coefficients de flambage correspondants τ_1 et τ_2 peuvent être déduits de la relation suivante :

14) $$\tau_{1,2} = \frac{\sigma_{-S}}{E} \cdot \left(\frac{\lambda_{1,2}}{\pi}\right)^2.$$

Les épaisseurs correspondantes des plaques sont données par la relation :

15) $$\left(\frac{h}{b}\right)_{1,2} = \frac{0{,}527}{\sqrt[4]{\tau_{1,2}}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{-S}}{E}}.$$

Pour toutes les valeurs de τ telles que : $\tau_1 < \tau < \tau_2$ on a :

$$\sigma_K^{pl} = \sigma_{-S}.$$

Comme $\tau = \tau\,(\sigma_K^{pl})$ est connu pour $\tau < \tau_1$ et $\tau > \tau_2$ la charge de flambage d'une plaque peut être calculée directement à partir de la relation :

16) $$\min \sigma_K^{pl} = \sqrt{\tau} \cdot \frac{\pi^2 E}{2,73} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2 .$$

Pour la zone $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ on peut donc conclure :

Si $h_1 \geqslant h \geqslant h_2$ la contrainte de flambage coïncide avec la limite de résistance à la compression : $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$ car $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ et l'on a :

17) $$\tau = \left(\frac{2,73\ \sigma_S}{\pi^2 E}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{h}\right)^4 .$$

En particulier, pour l'acier St. 37, on obtient avec $\sigma_S = 2,4$ t/cm² et [1] $E = 2150$ t/cm²

18) $$\tau = 9,53.10^{-8} \left(\frac{b}{h}\right)^4 \text{ et}$$

19) $$n = 56,9 . \frac{h}{b} \alpha .$$

$b/h = 56,9$ correspondrait à la limite $\tau = 1$ du voile dans le domaine élastique, si σ_P pouvait coïncider avec σ_S. Pour $b/h = 28,4$ on pourrait déjà escompter un nombre d'ondulations double, par rapport au flambage dans le domaine élastique. Pour les mêmes épaisseurs de plaque que dans le tableau 2 précédent, on arrive aux chiffres du tableau 3 ci-contre.

$\frac{b}{h}$	50	40	30	25	20	15	10
$\min \sigma_K^{pl}$	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40
τ	0,597	0,244	0,0773	0,0373	0,01526	0,00483	0,000953
n/α	1,14	1,42	1,90	2,28	2,85	3,80	5,70

Si l'on compare les tableaux 2 et 3, on constate que les valeurs de n/α diffèrent très peu. Les hypothèses concernant les contraintes de flambage de la barre sont donc, dans de larges limites, sans influence sensible sur le coefficient n. Cette augmentation du nombre de voiles lorsque l'épaisseur de la plaque augmente demande toutefois à être établie en toute certitude, par des essais, pour les plaques épaisses. Les essais qui ont été effectués jusqu'à maintenant, avec $b/h = 23,5$ ne permettent pas de mettre en évidence une telle relation [2].

---

1. Cette valeur élevée est adoptée ici afin de permettre la comparaison avec le cas *a* précédent.

2. Dans le cas limite d'une plaque très large ($\alpha \rightarrow 0$), la contrainte de flambage devient :

$$\sigma_{K0}^{pl} = \sigma_{K0}^{el}$$

relation dans laquelle σ_{K0}^{el} désigne la contrainte de flambage connue d'Euler pour une barre ayant une longueur de flambage *a* et sous réserve de l'introduction d'un facteur dépendant de la contraction transversale. Cette concordance ne prouve toutefois nullement que la réduction se présente également, dans le domaine plastique, dans le cas général.

Dans le cas du voile de plaques planes par suite de contraintes de cisaillement et pour :

$$\tau_K \geqslant \tau_P = 0{,}58\ \sigma_P$$

on se trouve en présence de conditions semblables à celles que présente le flambage sous l'action de contraintes de compression uniformément réparties. Les essais effectués par Bollenrath en vue de la détermination des contraintes critiques de cisaillement n'ont également mis en évidence aucune différence pour les longueurs de voile, entre les flambages élastique et plastique. Bollenrath [1] dit, à ce sujet : « Il n'y a pas à mettre en évidence une différence entre les flambages élastique et plastique » et « Les longueurs d'onde au voile sont dans un rapport constant avec la largeur des plaques et se montrent indépendantes de l'épaisseur des plaques et du matériau utilisé ».

La relation qui, suivant la théorie de Bleich, existe entre : la contrainte de flambage et la longueur du voile, dans le domaine plastique, n'est pas confirmée par les essais.

La question étudiée ici est d'une importance capitale pour la disposition judicieuse des éléments de renforcement. Il est absolument nécessaire, par conséquent, d'aboutir à une notion très nette des conditions effectives.

III. — Le voile des plaques dans le domaine plastique.

Le calcul de la page 126 de la Publication Préliminaire est exécuté avec $E = 2150$ t/cm², tandis que pour le métal considéré, on n'a environ, en moyenne, que $E = 2000$ t/cm². La résistance à la traction a atteint 4,79 t/cm² [2]. Comme la validité de la formule de Tetmajer est limitée à un métal accusant une résistance à la traction inférieure à 4,5 t/cm² [3], le calcul devrait être effectué avec la « formule de Tetmajer pour fontes présentant les caractéristiques de l'acier » [4].

Si l'on tient compte de cette remarque, on obtient alors une concordance moins bonne. L'équation différentielle sur laquelle se base Bleich pour le domaine plastique correspond aux plaques orthotropes. Cette hypothèse « est toutefois en contradiction avec les faits expérimentaux et conduit à des résultats erronés, tendant à provoquer une certaine insécurité » [5].

Enfin, il faut attirer l'attention sur le fait que jusqu'à maintenant, il n'existe pas de généralisation pour l'étude du flambage dans le domaine plastique, sous l'influence de contraintes de cisaillement, pas plus d'ailleurs que pour tous

---

1. F. Bollenrath, Ausbeulerscheinungen an ebenen auf Schub beanspruchten Platten. Dissertation, Ecole Polytechnique d'Aix-la-Chapelle, 1928, p. 11 et 16.
2. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, tableau 39, p. 423.
3. L. v. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technich wichtigsten Baustoffe, 3e édition, Leipzig et Vienne, 1903.
4. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, page 61, Formule pour aciers accusant une résistance à la traction de plus de 4,5 t/cm².
5. E. Chwalla, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Rapport de Séance de l'Académie des Sciences de Vienne, Mathématiques-Sc. Naturelles, Sec. IIa, Vol. 137, fasc. 8, Vienne, 1928.

autres cas de charges ; en pratique, on est toutefois obligé de faire entrer en ligne de compte une réduction de la charge de flambage dans le domaine plastique. Tant que la théorie et la recherche expérimentale n'auront pas accompli de nouveaux progrès, il importe de chercher un moyen permettant de tenir compte de cette influence, s'appliquant, dans toute la mesure du possible, à tous les cas d'instabilité d'une manière également simple. On se trouve, à ce sujet, en présence des possibilités suivantes :

a) Suivant l'équation (6) de la page 121 de la Publication Préliminaire,

1) $$_{\min}\,\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl} \cdot \sqrt{\tau}$$

on pourrait réduire dans le rapport $\sqrt{\tau}$, d'une manière générale, les contraintes de flambage calculées dans l'hypothèse d'un matériau possédant une élasticité illimitée [1]. La figure 3 représente la variation des contraintes de flambage suivant l'équation (1) pour une plaque rectangulaire soumise à une compression uniformément répartie en acier St. 37, en fonction de l'épaisseur de cette plaque. La courbe a_1 s'applique au cas où $\sqrt{\tau}$ est calculé à partir de la formule de Tetmajer (équation (8) de la partie II, *a*) ; la courbe a_2 s'applique à une courbe de flambage correspondant aux prescriptions des Chemins de Fer Allemands pour l'acier St. 37, avec $(b/h)_2 = 45{,}3$ (voir II, *b*).

b) On pourrait également, suivant le projet de Timoshenko concernant les tensions critiques des poutres dans le domaine plastique (voir figure 3, page 133 et page 152 de la Publication Préliminaire), admettre une relation linéaire, même en ce qui concerne les plaques, entre le degré de finesse b/h et les contraintes de flambage σ_K^{pl}. Cette droite est déterminée par la limite d'élasticité (ou mieux par la limite de proportionnalité) et par la résistance à la compression, cette dernière étant représentée ici d'une manière fictive avec une certaine réduction. Cette droite est représentée par la courbe *b* de la figure 3, avec les valeurs limites des contraintes suivant Tetmajer.

c) Si l'on connaît la courbe σ_K pour les barres [2] on peut réduire les contraintes calculées dans l'hypothèse d'un matériau infiniment élastique σ_K^{el} pour les plaques et les parois minces, dans le même rapport que l'on réduit la contrainte d'Euler pour les barres.

2) $$\sigma_K^{pl} = \tau . \sigma_K^{el}.$$

Il suffit pour cela de calculer le degré de finesse relatif correspondant à la contrainte d'Euler équivalente :

3) $$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_K^{el}}}$$

---

1. L'appellation τ adoptée pour le coefficient de flambage peut donner lieu à des confusions, si le problème de stabilité envisagé se rapporte à des charges de cisaillement τ. Il est donc à recommander d'éviter l'emploi de la désignation τ pour le coefficient de flambage et de ne faire intervenir que $T = \tau E$ ou T/E.

2. Dans le cas présent, il faut faire intervenir σ_K et τ pour des barres de section rectangulaire. En ce qui concerne l'influence de la forme de la section, voir F. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1929, nº 35.

et de le reporter dans l'équation (4) supposée connue :

4) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl}(\lambda).$$

Par exemple, pour la plaque rectangulaire soumise à une compression uniformément répartie, le degré de finesse équivalent est égal à [1] :

4') $$\lambda = 1{,}652\,(b/h).$$

La courbe *c* de la figure 3 représente les contraintes de flambage obtenues lorsque l'on adopte la courbe de flambage prévue dans les prescriptions des Chemins de Fer Allemands pour l'acier St. 37.

Pour d'autres régimes de charge, la valeur de la contrainte doit être calculée d'après les considérations de plasticité [2]. Par exemple, pour le flambage des plaques par contraintes de cisaillement ou l'instabilité des parois cylindriques minces sous l'influence de contraintes de torsion, on a, pour des métaux susceptibles d'accuser un allongement :

5) $$\tau_S = 0{,}58\,\sigma_S \text{ et } \tau_P = 0{,}58\,\sigma_P.$$

Pour tous les régimes critiques en général, on utilisera la condition de plasticité au lieu de l'équation 5. La contrainte de comparaison σ_{gK} qui correspond pour la plaque, à titre de compression simple, à la même contrainte que le régime de charge général indiqué, intervient à la place de la contrainte de flambage d'Euler, de telle sorte que la contrainte de flambage devient, après réduction :

6) $$\sigma_{gK}^{pl} = \sigma_{gK}^{pl}(\sigma_{gK}^{el}) = \sigma_K^{pl}(\lambda_g).$$

Ce mode de réduction correspond au fait que la quasi-isotropie de l'acier se conserve même dans le domaine inélastique des charges [3].

Par suite, il ne se manifeste qu'une diminution dans la valeur des contraintes de flambage, la forme que prend le voile restant la même que dans le cas du flambage élastique.

La méthode de réduction suivant *c* peut être utilisée sans dispositions spé-

---

1. Voir la proposition de E. Chwalla (p. 322 du Rapport sur la 2e Conférence Internationale des Ponts et Charpentes, Vienne, 1929) tendant à rapporter le module de flambage, pour les plaques soumises à une compression uniformément répartie, aux trois termes de l'équation différentielle, en négligeant les variations du coefficient de Poisson m. On voit que cette proposition concorde avec la réduction indiquée en *c*.

2. Voir Schleicher, Ueber die Sicherheit gegen Ueberschreiten der Fliessgrenze bei statischer Beanspruchuug. Bauingenieur, 9, 1928, n° 15.

3. Voir : M. Roš et A. Eichinger, Versuche zur Erklärung der Frage der Bruchgefahr. 1. Communications au 2e Congrès International de Mécanique Industrielle, Zurich, 1926. 2. Communications de l'Association Suisse pour l'Essai des Matériaux, Zurich, septembre 1926. 3. Discussion, n° 34, Laboratoire Fédéral pour l'Essai des Matériaux, Zurich, février 1929.

W. Lode, Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle. Dissertation, Göttingen, 1926, Fasc. 303 der Forsch. Arbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Berlin, 1928.

De récents essais montrent d'ailleurs que dans certains cas on peut constater un comportement s'écartant de l'isotropie (voir Hohenemser et Prager : Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flussstahl. Z.A.M.M., 12, 1932.

ciales pour une courbe de contraintes de flambage arbitraire. Elle a été d'ailleurs employée récemment par exemple, pour les recherches de stabilité concernant le Pont des Trois Roses, sur le Rhin, à Bâle (poutres continues en tôles avec portées de 75 + 105 + 75 mètres), pont qui a été construit par la M.A.N., les Ateliers de Gustavsburg et la Buss A.G., de Bâle.

Lorsque la rigidité de la plaque se trouve uniformement réduite (état de contrainte dit homogène), les équations s'appliquent exactement. Si, par contre, l'état de contrainte n'est pas uniforme, τ_D varie alors avec le point considéré et les contraintes réduites suivant *c* sont alors trop faibles lorsque la réduction porte sur la contrainte maximum.

Dans le cas d'un régime de charge non homogène, et après le dépassement de la limite de proportionnalité, il faut en règle générale, compter sur une certaine compensation des contraintes. Pour pouvoir, en pareil cas, effectuer un calcul plus précis, il faudrait, en supposant connue la répartition des contraintes, introduire la rigidité de la plaque dans l'équation de déformation de cette plaque, à titre de fonction de la valeur de la contrainte.

$$\nabla^4 w + \frac{h.\,\sigma_x(y)}{D.\,\tau(y)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{7}$$

Il conviendrait enfin de rechercher également comment il se fait que les déformations permanentes s'accomplissent sans augmentation de volume [1]. Aux valeurs $m = 10/3$ dans le domaine élastique et $m = 2$ dans le domaine plastique, il devrait correspondre une différence de 21 °/₀ dans la rigidité des plaques.

Résumons maintenant notre manière de voir au sujet de la réduction du régime critique de charge dans le cas des limites générales de stabilité :

La réduction suivant *a* n'est pas à préconiser, car elle ne se trouve pas confirmée par les observations effectives et elle conduit à des contraintes de flambage trop élevées ;

Suivant *b*, et pour la zone $\sigma_P < \sigma < \sigma_S$ on obtient en général des valeurs suffisamment précises, de sorte que ce mode de réduction pourrait par exemple être appliqué lorsque les courbes des contraintes de flambage ne sont pas connues. Pour les plaques épaisses, la stabilité est toutefois ainsi surestimée, de sorte qu'il est à recommander de remplacer les valeurs de σ_K supérieures à σ_S par σ_S (ou la contrainte correspondant aux conditions de plasticité).

La réduction suivant *c* correspond au mieux à l'état actuel de nos connaissances. Elle est à recommander d'une manière générale, tant pour les régimes de charge homogènes que pour les régimes non homogènes. Pour ces derniers, on conservera une marge de sécurité, en effectuant la réduction pour les points qui sont soumis aux contraintes les plus élevées.

---

1. Voir les travaux de Roš et Eichinger mentionnés en (3) et, en particulier, la figure 12 du nº 2 et les figures 44, 65 et 66 du nº 3.