

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 1 (1932)

**Artikel:** Diskussion

**Autor:** Schleicher, F.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-497>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

quées dans mon rapport. M. Schleicher signale que le module d'élasticité E du métal utilisé en Amérique atteignait 20.000 kg par  $\text{mm}^2$ , alors que Tetmayer est arrivé, en moyenne, pour ce module à une valeur de 21.500 kg par  $\text{mm}^2$ . Ceci est toutefois sans importance, car les formules qui s'appliquent à la zone plastique ne dépendent pas du module d'élasticité E et ce module n'intervient que pour limiter leur zone d'application. D'ailleurs, j'estime que les questions soulevées dans la discussion ne sont susceptibles d'être définitivement éclaircies que par des essais de plaques très poussés.

Pour terminer, j'attirerai l'attention sur une erreur contenue dans mon rapport. L'équation de départ (2) n'est valable, dans les conditions indiquées pour les bords de la plaque, que pour un nombre impair de demi-ondulations, c'est-à-dire pour  $n = 1, 3, 5, \dots$  Elle ne donne donc que la moitié des contraintes de flambage possibles. On obtient l'autre moitié, qui correspond à des déformations symétriques, par l'opération complémentaire.

$$w = \sin \frac{n \pi x}{a} [A \cosh k_1 y + C \cos k_2 y]$$

Les résultats des calculs n'en sont pas moins exacts, car la restriction valable pour la mise en équation de (2) a été implicitement laissée de côté dans le cours du calcul et on a admis des nombres d'ondulations arbitraires  $n = 1, 2, 3, \dots$

#### Participants à la discussion.

*Diskussionsteilnehmer.*

#### Participants in the discussion.

Dr.-Ing. F. SCHLEICHER,  
Professor an der Technischen Hochschule Hannover.

#### I. — Weitere Versuche über die Knickung von gleichmässig gedrückten Stahlplatten.

Eine interessante Versuchsreihe ist gelegentlich des Baues der Hängebrücke zwischen Philadelphia und Camden durchgeführt worden<sup>1, 2</sup>.

Es handelt sich um mit Winkeln gesäumte Rechteckplatten von  $b = 88,9$  cm Gesamtbreite, bzw.  $b' = 58,5$  cm zwischen den Saumwinkeln,  $a = 305$  cm Länge und Blechdicken  $h = 0,95$  bis  $3,80$  cm. Die Platten waren an den Längsrändern lose geführt, das Material war Silizium-Mangan-Stahl von  $\sigma_s = 3,165$  t/cm<sup>2</sup> Quetschgrenze und  $\sigma_B = 5,6$  bis  $6,7$  t/cm<sup>2</sup> Zerreissfestigkeit.

Mit  $E = 2100$  t/cm<sup>2</sup>,  $m = 10/3$  ergibt sich die Knickspannung  $\sigma_K$  für das Seitenverhältnis  $\alpha = 3,43$  und mit  $n = 3$  Halbwellen zu

$$1) \quad \sigma_K = 7750 \left( \frac{h}{b} \right)^2 \text{ in t/cm}^2.$$

1. W. SCHACHENMEIER, Die Delaware-River-Brücke zwischen Philadelphia und Camden. Die Bautechnik 1927, Seite 513.

2. Clement E. CHASE, Research and experimental tests in connection with the design of the bridge over the Delaware River between Philadelphia and Camden. Journal of the Franklin Institute, Vol. 200, Oct. 1925, p. 417.

Für  $b = 88,9$  cm erhält man danach die folgenden Werte von  $\sigma_K$ . Die eingeschweiften Spannungswerte liegen über der Proportionalitätsgrenze und bedürfen deshalb einer Reduktion.

Aus dem Bericht<sup>2</sup> (S. 123) sind die Werte «beobachtet  $\sigma_K$ » entnommen.

| $h$  | $b/h$ | $\sigma_K$        |                            | Bemerkung                      |
|------|-------|-------------------|----------------------------|--------------------------------|
|      |       | theoretisch       | beobachtet                 |                                |
| 0,95 | 93,7  | 0,88              | x                          | knickt vorzeitig aus           |
| 1,27 | 70,1  | 1,58              | x                          | » » »                          |
| 1,59 | 56,0  | 2,47              | x                          | schon besser                   |
| 1,90 | 46,8  | (3,53)            | 3,23 3,17                  | Querschnitt knickt als Ganzes. |
| 2,54 | 35,1  | (6,30)            | { 3,28 3,17<br>3,09 3,13 } | » » »                          |
| 3,80 | 23,5  | (14,1)            | 3,23 3,27                  | » » »                          |
| cm   | —     | t/cm <sup>2</sup> | t/cm <sup>2</sup>          |                                |

Bei 14 Versuchen wurde die Durchbiegung  $w = w(\sigma)$  als Funktion der Längsspannung gemessen. Bei den mit  $x$  bezeichneten Versuchen konnte keine ausgeprägte Stabilitätsgrenze beobachtet werden, da die Platten schlecht gerichtet waren. Die Höchstlasten entsprachen für  $h = 0,95$  bis  $1,59$  cm Spannungen von etwa  $2,8$  t/cm<sup>2</sup>, wobei die Ausbiegungen bereits ein mehrfaches der Plattendicke betragen. Abb. 4 zeigt zwei Versuche. Bei der dünnen Platte G1 nahm die Ausbiegung mit der Druckkraft stetig zu, von einer Stabilitätsgrenze kann nicht die Rede sein. Dagegen blieb sie bei den Platten von mehr als  $1,9$  cm Dicke, die besser gerichtet waren, klein und erreichte erst unter der gut ausgeprägten Knicklast größere Werte. Abb. 4 zeigt als Beispiel hierfür den Versuch G7A mit einer Platte, die aus zwei  $3/4$  " starken Blechen zusammengenietet wurde. Die Platten mit  $h = 1,9$  bis  $3,8$  cm knickten ohne Rücksicht auf die Plattendicke an der Quetschgrenze. Aus zwei Platten zusammengenietete Stege erreichten die gleiche Knickspannung, wie einzelne Bleche von der doppelten Dicke.

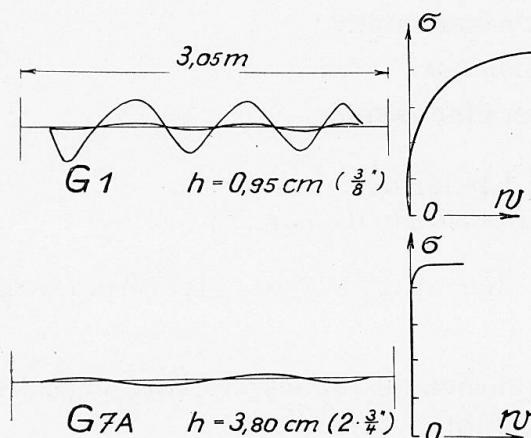


Fig. 1. — Essais de Chase. Déformation des plaques en fonction de la charge = Versuche von Chase. Ausbiegung der Platten als Funktion der Belastung = Test by Chase. Bending of the slabs as a function of the load.

Die anfänglichen Ausbiegungen hatten bei den Versuchen starken Einfluss. Eine Bestimmung der Knickspannungen der Platten mit  $h < 1,90$  cm war besonders aus diesem Grunde nicht möglich. Es ist auch nicht bekannt, wie weit sich die Stegbleche auf Kosten der vier Saumwinkel entlasteten. Dies gilt besonders für die dünnen Bleche. Von Chase wird weiter bemerkt, dass die Festigkeitszahlen für die dünnen Bleche höher lagen, als für die dickeren Platten.

Aus den Beobachtungen an den dünnen Platten können also keine Schlüsse gezogen werden. Die Kurven für  $w = w(\sigma)$  beweisen jedoch, dass die Ver-

suche für die dickeren Platten einwandfrei sind. Ein Vergleich mit der Theorie des Herrn Bleich für die Knickung im unelastischen Bereich ist somit zulässig. Bei den dünnen Blechen stellen sich die Ausbiegungen als Vergrößerung der von vornherein vorhandenen Unebenheiten dar. Die dicken Platten hatten eine gut ausgeprägte Knickgrenze und nach dem Ausbeulen 4 oder 5 Halbwellen. Eine Veränderlichkeit der Wellenzahl mit der Plattendicke ist nicht zu erkennen.

Nach der Theorie der isotropen Platte würden  $\alpha = \sqrt{12} = 3,46$  sowohl 3 als auch 4 Halbwellen auftreten können, und zwar für die gleiche Knickspannung. Die untersuchten Platten ( $\alpha = 3,43$ ) sind also gerade an der Grenze. Wenn die Verallgemeinerung der Differentialgleichung für den unelastischen Bereich zutreffen würde, (Vorbericht, S. 108)

$$2) \quad \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \tau + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \sqrt{\tau} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\sigma \cdot h \partial^2 w}{D \partial x^2} = 0$$

müsste<sup>1</sup> die Anzahl  $n$  der Halbwellen mit  $\sigma_K$  zunehmen und die Beulenlänge jedenfalls viel kleiner als die Plattenbreite sein. Dies ist aber nach Obigem nicht der Fall. Auch bei den Versuchen für die Quebecbrücke ist die zu erwartende Verkleinerung der Beulenlänge nicht zu beobachten<sup>2</sup>, sondern die Wellenlänge stimmt im Wesentlichen mit der Plattenbreite überein.

Benutzt man für die Berechnung der Knickzahl  $\tau$  die Gleichung von Tetmajer

$$3) \quad \sigma_K = 3,1 - 0,0114 (l/i)^2, \text{ in t/cm}^2,$$

die auch Bleich als Grundlage seines Vorschlags für die Dimensionierungsformeln gebraucht, dann ergeben sich Knickspannungen, die mit abnehmendem  $b/h$  ansteigen. Für Platten aus normalem Stahl wäre danach z. B. für die Werte  $b/h = 46,8$  bzw.  $23,5$  ein Unterschied von rd. 20 % in den Knickspannungen zu erwarten.

Die Versuche von Chase gaben für alle Platten, die dicker waren als  $1/50$  der ganzen Plattenbreite, die Quetschgrenze als Knickspannung, ein Anwachsen mit der Plattendicke konnte für  $h > b/50$  nicht beobachtet werden. Aus den obigen Versuchen muss also die Folgerung gezogen werden, dass die Tetmajer-Formel, bzw. eine ihr entsprechende Gleichung, verbunden mit der verallgemeinerten Theorie von Bleich, keine genügend genaue Ermittlung der Knickspannung gestattet.

Zum Schlusse noch eine Bemerkung über die Randbedingungen an den Längsseiten der Platten. Für die Versuche von Chase ist es unzulässig, die freie Plattenbreite  $b$  etwa nur zwischen den Nietreihen oder den Winkelschenkeln zu messen. Beim dritten Versuch wird mit  $b' = 58,5$  cm Breite  $\sigma_K^{el} = 5,75$  t/cm<sup>2</sup>, während der Versuch einen weit unter der Quetschgrenze liegenden Wert ergab.

In der Abbildung eines der ausgeknickten Bleche (Chase, p. 420 oder

1. Man vergl. : II. Die Beulenlänge bei Knickung im unelastischen Bereich.

2. Man vergl. : Abb. 8 auf Seite 417 des Vorberichts oder R. Mayer, Die Knickfestigkeit, Abb. 212 auf Seite 423 und Abb. 213 auf Seite 427.

Schachenmeier, S. 514) ist zu erkennen, dass die Beulen nicht durch die Saumwinkel begrenzt sind. Eine nennenswerte Einspannung des Stegbleches in den Saumwinkel war also nicht vorhanden. Diese Beobachtung entspricht dem Vorschlag von Bleich (Vorbericht, S. 112, Fig. 3c und d), die ganze Plattenbreite in die Rechnung einzuführen.

Eine wirksame elastische Einspannung an den Rändern ist nur vorhanden, wenn die einspannenden Konstruktionsteile nicht gleichzeitig mit der Platte ausbeulen können. Im Normalfall sind gelenkig gelagerte Ränder anzunehmen und in die Rechnung ist die ganze Plattenbreite ohne Abzüge einzuführen.

## II. — Die Beulenlänge bei Knickung im unelastischen Bereich.

Für eine an allen Rändern frei aufliegende Rechteckplatte mit gleichmässigen Druckspannungen erhält man nach Bleich die Knickspannung  $\sigma_K^{pl}$  im unelastischen Bereich zu

$$1) \quad \sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \frac{\sqrt{\tau}}{4} \left\{ \frac{\alpha}{n\sqrt{\tau}} + \frac{n^4\sqrt{\tau}}{\alpha} \right\}^2.$$

Darin bedeutet

$$2) \quad \sigma_{K1}^{el} = \frac{\pi^2 E}{2,73} \left( \frac{h}{b} \right)^2, \text{ mit } m = 10/3,$$

die Knickspannung einer Platte aus Material von unbegrenzt hoher Proportionalitätsgrenze bei quadratischen Beulen ( $n = \alpha$ ). Sie ist ebenso gross, wie die Euler-Knickspannung eines Stabes aus dem gleichen Material mit der Schlankheit

$$3) \quad \lambda = 1, 652 (b/h).$$

Die Knickzahl

$$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{\sigma_{Euler}}$$

ist von Knickversuchen mit geraden Stäben zu entnehmen. Sieht man in erster Annäherung davon ab, dass  $\tau$  nach der Theorie von Engesser-Kármán von der Querschnittsform abhängt, so ergibt sich  $\tau$  als eindeutige Funktion der Knickspannung  $\sigma_K^{pl}$ , bzw. der zugeordneten Euler-Knickspannung  $\sigma_{Euler}$ .

Das Minimum der Knickspannung im unelastischen Bereich

$$4) \quad \min \sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \sqrt{\tau}.$$

tritt ein, wenn die Beulenzahl  $n$  gleich

$$5) \quad n = \alpha / \sqrt{\tau}$$

ist<sup>1</sup>. Die Beulenlänge  $l = a/n$  der ausgeknickten Platten ist also mit der Höhe der Knickspannungen veränderlich, und zwar nimmt sie mit wachsender Plattendicke ab.

1. Die Beulenzahl ist hier als stetig veränderlich vorausgesetzt, während sie in Wirklichkeit nur ganzzahlige Werte annehmen kann. Das absolute Minimum nach Gl. 4 tritt nur ein, wenn  $\alpha$  ein ganzzahliges Vielfaches der vierten Wurzel aus  $\tau$  ist. Ist das nicht der Fall, dann sind die beiden benachbarten Werte  $n$  zu untersuchen und  $\sigma_K^{pl}$  ist etwas grösser als  $\min \sigma_K^{pl}$ . Der Unterschied ist jedoch bei mehr als zwei Beulen praktisch ohne Bedeutung.

Der Zusammenhang zwischen Beulenlänge und Plattendicke soll nachstehend näher verfolgt werden.

a) Legt man für weichen Flusstahl zur Berechnung von  $\tau$  die Tetmajer-Formel

$$6) \quad \sigma_K^{pl} = 3,1 - 0,0114 \lambda, \text{ in t/cm}^2,$$

zugrunde, dann ist nach Engesser

$$7) \quad \tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E} \left( \frac{3,1 - \sigma_K^{pl}}{\pi \cdot 0,0114} \right)^2.$$

Beschränkt man sich auf den Kleinstwert der Knickspannung, dann ist für Plattendicken  $h > b/64$

$$8) \quad \min \sigma_K^{pl} = 3,1 + 2,282 \cdot 10^{-8} \left( \frac{b}{h} \right)^4 - \sqrt{\left\{ 3,1 + 2,282 \cdot 10^{-8} \left( \frac{b}{h} \right)^4 \right\}^2 - 9,61}, \text{ in t/cm}^2$$

$$9) \quad \tau = 1,655 \cdot 10^{-8} \left( \min \sigma_K^{pl} \right)^2 \cdot \left( \frac{b}{h} \right)^4, \text{ in t/cm}^2,$$

In diesen Gleichungen ist nach dem Vorgang von Tetmajer und Bleich  $E = 2150 \text{ t/cm}^2$  gesetzt<sup>1</sup>. Die Anzahl  $n$  der Beulen ergibt sich damit zu

$$10) \quad n = \frac{88,4}{\sqrt{\min \sigma_K^{pl}}} \left( \frac{h}{b} \right) \alpha, \quad \sigma_K \text{ in t/cm}^2,$$

gegenüber  $n = \alpha$  im elastischen Bereich ( $h < b/64$ ). Für verschiedene Plattendicken ergeben sich nach Obigem die in Tabelle 1 zusammengestellten Werte.

Tabelle 1.

| $b/h$                | 50    | 40    | 30     | 25     | 20     | 15      | 10      | —                 |
|----------------------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|---------|-------------------|
| $\min \sigma_K^{pl}$ | 2,292 | 2,554 | 2,779  | 2,874  | 2,953  | 3,017   | 3,063   | t/cm <sup>2</sup> |
| $\tau$               | 0,544 | 0,276 | 0,1041 | 0,0533 | 0,0232 | 0,00755 | 0,00152 | —                 |
| $n/\alpha$           | 1,16  | 1,38  | 1,76   | 2,08   | 2,36   | 3,39    | 5,06    | —                 |

b) Für Material mit ausgeprägter Quetschgrenze  $\sigma_s$ , für das die Knickspannung bei Stäben in einem grösseren Bereich der Schlankheit  $\lambda$  mit  $\sigma_s$  zusammenfällt, erhält man folgende Zusammenhänge.

Ist die Knickspannung als Funktion der Stabschlankheit gegeben (Abb. 2),

$$11) \quad \sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl}(\lambda),$$

so kann man die Knickzahl  $\tau$  aus

$$12) \quad \sigma_K^{pl} = \tau \cdot \sigma_{Euler}$$

berechnen. Man erhält

$$13) \quad \tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E} \cdot \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2$$

1. Vergl. BLEICH, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1924, S. 131.

oder wenn man  $\lambda$  durch Umkehrung der Gl. 11 ermittelt und in Gl. 13 einsetzt

$$\tau = \tau(\sigma_K^{pl}).$$

Für die in Abb. 2 dargestellte  $\sigma_K^{pl}$ -Kurve sind einige Ergänzungen notwendig. Wenn  $\lambda \geq \lambda_P$  ist, gilt  $\sigma_K^{pl} = \sigma_{Euler}$  und  $\tau = 1$ . In dem Bereich  $\lambda_2 < \lambda < \lambda_P$ ,  $\tau < 1$ , in dem sich die Knickspannungen  $\sigma_K^{pl} < \sigma_S$  mit  $\lambda$  ändern, kann man Gl. 11 umkehren und  $\tau$  als einwertige Funktion von  $\sigma_K^{pl}$  berechnen.

Gleiches gilt für das Gebiet  $\lambda < \lambda_1$ , bei Knickspannungen, die über der Quetschgrenze liegen,

$$\sigma_K^{pl} > \sigma_S.$$

An den Grenzen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  des mittleren Bereichs stimmt die Knickspannung mit der Quetschgrenze überein,  $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$ . Die zugehörigen Knickzahlen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  ergeben sich zu

$$14) \quad \tau_{1,2} = \frac{\sigma_S}{E} \left( \frac{\lambda_{1,2}}{\pi} \right)^2.$$

Die entsprechenden Plattendicken sind

$$15) \quad \left( \frac{h}{b} \right)_{1,2} = \frac{0,527}{\sqrt{\tau_{1,2}}} \sqrt{\frac{\sigma_S}{E}}.$$

Für alle Werte  $\tau_1 < \tau < \tau_2$  ist  $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$ .

Da  $\tau = \tau(\sigma_K^{pl})$  für  $\tau < \tau_1$  und  $\tau > \tau_2$  bekannt ist, kann die Knickspannung einer Platte unmittelbar aus

$$16) \quad \min \sigma_K^{pl} = \sqrt{\tau} \frac{\pi^2}{2,73} \left( \frac{h}{b} \right)^2$$

berechnet werden. Für den Bereich  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$  kann man somit schliessen:

Fig. 2. — Représentation schématique de la relation entre la contrainte de flambage et le coefficient de flambage = Schematische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Knickspannung und Knickzahl = Diagrammatic representation of connection between buckling stress and buckling coefficient.

Wenn  $h_1 \geq h \geq h_2$  ist, liegt die Knickspannung wegen  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$  an der Quetschgrenze,  $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$ , und es gilt

$$17) \quad \tau = \left( \frac{2,73 \sigma_S}{\pi^2 E} \right)^2 \cdot \left( \frac{h}{b} \right)^4.$$

Insbesondere für St 37 ergibt sich mit  $\sigma_S = 2,4 \text{ t/cm}^2$  und  $E = 2150 \text{ t/cm}^2$

$$18) \quad \tau = 9,53 \cdot 10^{-8} \left( \frac{h}{b} \right)^4 \text{ und}$$

$$19) \quad n = 56,9 \left( \frac{h}{b} \right) \alpha.$$

$b/h = 56,9$  würde dem Grenzfall  $\tau = 1$  der elastischen Beulung entspre-

1. Dieser hohe Wert wird eingesetzt, damit ein Vergleich mit a) möglich ist.

chen, wenn  $\sigma_P$  mit  $\sigma_S$  zusammenfallen könnte. Für  $b/h = 28,4$  wäre im Vergleich zu der elastischen Knickung bereits die doppelte Beulenzahl zu erwarten. Für dieselben Plattendicken wie in Tabelle 1 ergeben sich die nachstehenden Zahlen.

Tabelle 2.

| $b/h$                | 50    | 40    | 30     | 25     | 20      | 15      | 10       | —                 |
|----------------------|-------|-------|--------|--------|---------|---------|----------|-------------------|
| $\min \sigma_K^{pl}$ | 2,40  | 2,40  | 2,40   | 2,40   | 2,40    | 2,40    | 2,40     | t/cm <sup>2</sup> |
| $\tau$               | 0,597 | 0,244 | 0,0773 | 0,0373 | 0,01526 | 0,00483 | 0,000953 | —                 |
| $n/\alpha$           | 1,14  | 1,42  | 1,90   | 2,28   | 2,85    | 3,80    | 5,70     | —                 |

Vergleicht man Tabelle 1 und 2, so erkennt man, dass sich die Werte  $n/\alpha$  nur wenig unterscheiden. Die Annahmen über die Knickspannungen beim Stab sind also in weiten Grenzen von geringem Einfluss auf die Beulenzahl. Diese Zunahme der Beulenzahl mit steigender Plattendicke müsste aber bei Versuchen mit dicken Platten deutlich festzustellen sein. Die bisherigen Versuche (mit  $b/h = 23,5$ ) lassen eine solche Abhängigkeit nicht erkennen<sup>1</sup>.

Bei der Beulung von ebenen Platten durch Schubspannungen liegen für  $\tau_K \geq \tau_P = 0,58 \sigma_P$  ähnliche Verhältnisse vor, wie bei der Knickung durch gleichmässige Druckspannungen. Versuche von Bollenrath zur Bestimmung der kritischen Schubspannungen zeigten ebenfalls keinen Unterschied in der Beulenlänge für elastische und unelastische Knickung. Bollenrath<sup>2</sup> sagt darüber: « Ein Unterschied in der Wellenlänge für elastische und unelastische Ausbeulung war nicht festzustellen » und « Die Wellenlänge der Ausbeulung steht in einem konstanten Verhältnis zur Plattenbreite und erweist sich als unabhängig von der Plattendicke und dem Werkstoffe ».

Der nach der Theorie von Bleich bestehende Zusammenhang zwischen Knickspannungen und Beulenlänge im unelastischen Bereich wird durch die Versuche nicht bestätigt.

Die hier angeschnittene Frage ist von grundlegender Bedeutung für die richtige Anordnung der Aussteifungen. Eine Klärung der Verhältnisse ist deshalb dringend notwendig.

### III. — Beulung von Platten im unelastischen Bereich.

Die Nachrechnung auf S. 118 des Vorberichts ist mit  $E = 2150 \text{ t/cm}^2$  durchgeführt, während für das betr. Material im Mittel nur  $E = 2000 \text{ t/cm}^2$  ange-

1. Für den Grenzfall der sehr breiten Platte ( $\alpha \rightarrow 0$ ) geht die Knickspannung in

$$\sigma_{K0}^{pl} = \sigma_{K0}^{el} \cdot \tau$$

über, worin  $\sigma_{K0}^{el}$  bis auf einen von der Querkontraktion abhängenden Faktor die bekannte Euler-Knickspannung eines Stabes von der Knicklänge  $a$  bedeutet. Diese Uebereinstimmung ist jedoch kein Beweis dafür, dass die Reduktion im unelastischen Bereich auch im allgemeinen Fall zutrifft.

2. F. BOLLENRATH, Ausbeulerscheinungen an ebenen auf Schub beanspruchten Platten, Dissertation Technische Hochschule Aachen, 1928, Seite 11 bzw. 16.

geben wird. Die Zerreissfestigkeit betrug <sup>1</sup> 4,79 t/cm<sup>2</sup>. Da die Gültigkeit der Tetmajer-Formel auf Material mit weniger als 4,5 t/cm<sup>2</sup> Zugfestigkeit beschränkt ist <sup>2</sup>, wäre mit der « Tetmajer-Formel für Flusseisen von Stahlcharakter » <sup>3</sup> zu rechnen. Berücksichtigt man diese Umstände, dann erhält man eine weniger gute Uebereinstimmung. Die von Bleich für den unelastischen Bereich zugrunde gelegte Differentialgleichung entspricht orthotropen Platten. Diese Voraussetzung « steht jedoch mit der Erfahrung in Widerspruch und führt zu fehlerhaften, auf der Seite der Unsicherheit liegenden Ergebnissen » <sup>4</sup>.

Schliesslich ist darauf hinzuweisen, dass eine Verallgemeinerung für unelastische Beulung durch Schubspannungen bisher fehlt, ebenso für alle anderen Belastungsfälle. Für praktische Zwecke ist man jedoch bereits heute gezwungen, die Abminderung der Knicklasten im unelastischen Bereich in Rechnung zu stellen. Bis Theorie und Versuchswesen weitere Fortschritte gemacht haben, ist ein Weg zu suchen, um diese Wirkung, möglichst für alle Fälle von Instabilität, auf die gleiche einfache Weise zu berücksichtigen. Es stehen dafür folgende Möglichkeiten offen :

a) Entsprechend Gl. 6 auf S. 110 des Vorberichts

$$1) \quad \min \sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{pl} \sqrt{\tau}.$$

Fig. 3. — Contraintes de flambage sur des plaques rectangulaires soumises à une compression uniformément répartie, dans le domaine inélastique = Knickspannungen gleichmässig gedrückter Rechteckplatten im unelastischen Bereich = Rectangular slabs under uniform pressure; buckling stresses in the non-elastic zone.

Voile élastique = Elast. Beulung = Elast. buckling.

könnte man die unter Annahme unbegrenzt elastischen Materials berechneten Knickspannungen allgemein mit  $\sqrt{\tau}$  reduzieren <sup>5</sup>. Die Abb. 3 zeigt den Verlauf der Knickspannungen nach Gl. 1, für eine gleichmässig gedrückte

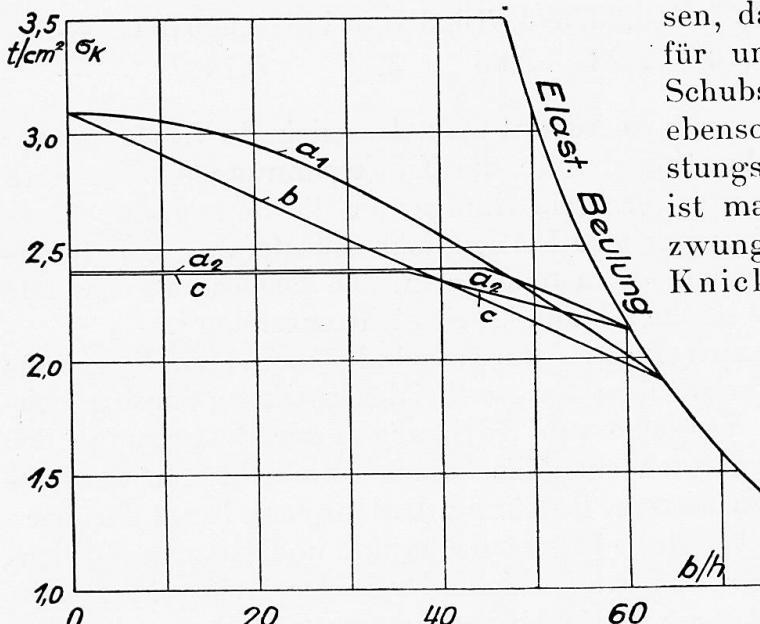
1. R. MAYER, Die Knickfestigkeit, Tabelle 39. S. 423.

2. L. v. TETMAJER, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe, 3. Aufl. Leipzig und Wien, 1903.

3. R. MAYER, Die Knickfestigkeit, S. 61, Formel für Flusseisen von mehr als 4,5 t/cm<sup>2</sup> Zugfestigkeit.

4. E. CHWALLA, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturw. Klasse, Abt. IIa, 137. Band, 8. Heft, Wien, 1928.

5. Die Bezeichnung  $\tau$  für die « Knickzahl » kann zu Verwechslungen Anlass geben, wenn sich die Stabilitätsuntersuchung auf Belastungen durch Schubspannungen  $\tau$  bezieht. Es empfiehlt sich, die Bezeichnung  $\tau$  für die Knickzahl zu vermeiden und nur mit  $T = \tau E$  bzw  $T/E$  zu rechnen.



Rechteckplatte aus Flusstahl (St 37), als Funktion der Plattendicke. Die Kurve  $a_1$  gilt, wenn  $\sqrt{\tau}$  aus der Tetmajer-Formel berechnet wird (Gl. 8 von II, a), Kurve  $a_2$  für eine den Reichsbahnvorschriften für St 37 entsprechende Knickspannungslinie, mit  $(b/h)_2 = 45,3$  (vgl. II, b).

b) Man könnte analog dem Vorschlag von Timoshenko für den unelastischen Bereich der Kippspannungen von Balken (vgl. S. 134 des Vorberichts, bzw. Abb. 3 auf S. 133) auch bei Platten einen geradlinigen Zusammenhang zwischen «Schlankheit»  $b/h$  und Knickspannungen  $\sigma_K^{pl}$  annehmen. Die Gerade ist bestimmt durch die Elastizitätsgrenze  $\sigma_E$  (besser Proportionalitätsgrenze  $\sigma_P$ ) und die Druckfestigkeit  $\sigma_B$ , letztere vielleicht mit einem etwas ermässigten fiktiven Betrag. Die Kurve  $b$  in Abb. 3 zeigt diese Gerade mit den Tetmajer-schen Grenzwerten der Spannungen.

c) Wenn die  $\sigma_K$ -Linie für Stäbe<sup>1</sup> bekannt ist, kann man die unter Voraussetzung unbegrenzt elastischen Materials berechneten Spannungen  $\sigma_K^{el}$  bei Platten und Schalen im gleichen Verhältnis wie die Euler-Knickspannung bei Stäben reduzieren.

$$2) \quad \sigma_K^{pl} = \tau \cdot \sigma_K^{el}.$$

Für diesen Zweck braucht man nur die der gleichgrossen Euler-Spannung entsprechende Vergleichsschlankheit

$$3) \quad \lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_K^{el}}}$$

zu berechnen und in die als bekannt vorausgesetzte Gl. 4 einzusetzen.

$$4) \quad \sigma_K^{pl} = \sigma_K^p(\lambda).$$

Z. B. bei der gleichmässig gedrückten Rechteckplatte ist die Ersatzschlankheit<sup>2</sup> gleich

$$4') \quad \lambda = 1,652 (b/h).$$

Die Kurve  $c$  in Abb. 3 zeigt die Knickspannungen, wenn die Knickspannungslinie für St 37 der Reichsbahnvorschriften zugrunde gelegt wird.

Für andere Spannungszustände ist die Höhe der Beanspruchung nach der Plastizitätsbedingung<sup>3</sup> zu messen. Z. B. für Plattenknickung durch Schubspannungen oder Instabilität von Zylinderschalen unter Torsionsbeanspruchung gilt bei dehnbaren Metallen

$$5) \quad \tau_S = 0,58 \sigma_S \text{ bzw. } \tau_P = 0,58 \sigma_P.$$

1. Für den vorliegenden Zweck ist  $\sigma_K$  und  $\tau$  für Stäbe von Rechteckquerschnitt zu benutzen. Ueber den Einfluss der Querschnittsform vergl. man F. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1929, № 35.

2. Man vergl. den Vorschlag von E. CHWALLA (S. 322 des Berichts über die II. internat. Tagung für Brückenbau und Hochbau, Wien, 1928), für gleichmässig gedrückte Platten den Knickmodul allen drei Gliedern der Differentialgleichung zuzuordnen, bei Vernachlässigung der Aenderungen der Poisson'schen Zahl  $m$ . Man erkennt, dass dieser Vorschlag mit der Reduktion nach c) übereinstimmt.

3. Man vgl. F. SCHLEICHER, Ueber die Sicherheit gegen Ueberschreiten der Fliessgrenze bei statischer Beanspruchung. Der Bauingenieur (9), 1928, Heft 45.

Bei allgemeinen kritischen Spannungszuständen ist anstatt Gl. 5 die Plastizitätsbedingung zu benutzen. Die Vergleichsspannung  $\sigma_{gK}$ , welche die Platte als einfache Druckspannung ebenso hoch beansprucht, wie der gegebene allgemeine Spannungszustand, tritt an die Stelle der Euler-Knickspannung  $\sigma_K^{el}$ , sodass die reduzierte Knickspannung wird

$$6) \quad \sigma_{gK}^{pl} = \sigma_{gk}^{pl} (\sigma_{gk}^{el}) = \sigma_K^{pl} (\gamma_g).$$

Diese Art der Reduktion entspricht der Tatsache, dass die Quasi-Isotropie des Stahls auch im unelastischen Bereich der Spannungen erhalten bleibt<sup>1</sup>. Aus diesem Grunde tritt nur eine Abminderung in der Höhe der Knickspannungen ein, während die Beulenform wie bei der elastischen Knickung bleibt.

Die Abminderung nach c) lässt sich ohne Weiteres bei beliebiger Knickspannungslinie anwenden. Sie wurde in neuerer Zeit z. B. für die Stabilitätsuntersuchungen bei der « Dreirosenbrücke » über den Rhein in Basel (kontinuierlicher Blechbalken mit 75 + 105 + 75 m Stützweite) angewendet, die von der M.A.N., Werk Gustavsburg, und der Buss A.G., Basel, erbaut wird.

Wenn die Plattensteifigkeit gleichmässig abgemindert wird (sog. homogene Spannungszustände), so sind die Gleichungen genau zutreffend. Ist dagegen der Spannungszustand veränderlich, dann variiert  $\tau$  D mit der Stelle und die nach c) reduzierten Spannungen sind zu klein, wenn die Reduktion für die grösste Beanspruchung durchgeführt wird.

Bei nicht homogenen Spannungszuständen ist nach Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze in der Regel mit einem Spannungsausgleich zu rechnen. Um in solchen Fällen eine genauere Berechnung durchführen zu können, müsste man, bekannte Spannungsverteilung vorausgesetzt, die Plattensteifigkeit in der Plattenbiegungsgleichung als Funktion der Höhe der Beanspruchung einführen.

$$7) \quad \nabla^4 w + \frac{h \cdot \sigma_x (y)}{D \cdot \tau (y)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Schliesslich wäre noch zu untersuchen, wie sich der Umstand auswirkt, dass die bleibenden Formänderungen ohne Volumdehnung erfolgen<sup>2</sup>. Den Werten  $m = 10/3$  im elastischen, bzw.  $m = 2$  im plastischen Bereich würde ein Unterschied von 21 % in den Plattensteifigkeiten D entsprechen.

Wir fassen unsere Meinung über die Reduktion der kritischen Spannungszustände für allgemeine Stabilitätsgrenzen zusammen :

1. Man vergl.: M. Roš und A. EICHINGER, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. 1) Verhandlungen des zweiten internat. Kongresses für technische Mechanik, Zürich 1926. 2) Mitteilungen des schweizer. Verbandes für die Materialprüfungen der Technik, Zürich, September 1926. 3) Diskussionsbericht № 34 der eidgen. Materialprüfungsanstalt in Zürich, Februar 1929.

W. LODE, Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle. Dissertation Göttingen, 1926 (Heft 303 der Forsch. Arbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Berlin, 1928).

Neue Versuche weisen allerdings darauf hin, dass unter gewissen Umständen auch ein von der Isotropie abweichendes Verhalten eintreten kann. Man vgl. K. Hohenemser und W. PRAGER, Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flusstahl. Z. A. M. M. (12), 1932.

2. Man vergl. die in 1) genannten Arbeiten von Roš und EICHINGER, und zwar Abb. 12 von №. 2 und Abb. 44, 65, 66 von №. 3.

Die Reduktion nach a) ist nicht zu empfehlen, da sie durch die Beobachtungen nicht bestätigt wird und zu hoch liegende Knickspannungen gibt.

Nach b) erhält man für den Bereich  $\sigma_p < \sigma < \sigma_s$  i. a. genügend genau zutreffende Werte, sodass diese Art der Reduktion z. B. dann brauchbar sein dürfte, wenn die Knickspannungslinie nicht bekannt ist. Für dicke Platten wird die Stabilität danach jedoch überschätzt, sodass es sich empfiehlt, Werte  $\sigma_k > \sigma_s$  (bzw. die der Plastizitätsbedingung entsprechende Beanspruchung) durch  $\sigma_s$  zu ersetzen.

Die Abminderung nach c) entspricht dem heutigen Stande unserer Kenntnisse am besten. Sie kann allgemein empfohlen werden; sowohl für homogene, als für nicht homogene Spannungszustände. Für die letzteren bleibt man auf der sicheren Seite, wenn man die Reduktion für die am stärksten beanspruchte Stelle durchführt.

### Traduction.

#### I. — Autres essais sur le flambage des plaques d'acier uniformément comprimées.

Une série d'essais très intéressants a été effectuée à l'occasion de la construction du pont suspendu reliant Philadelphie à Camden<sup>1, 2</sup>.

Il s'agit ici de plaques rectangulaires, bordées avec des cornières et accusant les dimensions suivantes : largeur totale  $b = 88,9$  cm. ; largeur entre les cornières  $b' = 58,5$  cm. ; longueur  $a = 305$  cm. ; épaisseurs  $h = 0,95$  cm. à  $3,80$  cm.

Les plaques ne comportaient aucun enca斯特ement sur les bords longitudinaux et étaient constituées en acier au silicium-manganèse, accusant les caractéristiques suivantes : limite de compression  $\sigma_s = 3,165$  t/cm<sup>2</sup> ; charge de rupture  $\sigma_b = 5,6$  à  $6,7$  t/cm<sup>2</sup>.

Pour  $E = 2100$  t/cm<sup>2</sup>,  $m = 10/3$ , on obtient la charge de flambage  $\sigma_k$ , pour un rapport entre les côtés égal à  $\alpha = 3,43$  et en tenant compte d'un nombre de demi-ondulations  $n = 3$  : par la relation suivante :

$$1) \quad \sigma_k = 7750 \left( \frac{h}{b} \right)^2 \text{ en t/cm}^2.$$

Pour  $b = 88,9$  cm., on obtient les valeurs de  $\sigma_k$  indiquées dans le tableau suivant. Les valeurs indiquées entre parenthèses se trouvent au-dessus de la limite de proportionnalité et doivent donc subir une diminution. Les «  $\sigma_k$  observés » ont été tirées du Rapport.

Au cours de 14 essais, la déformation  $w = w(\sigma)$  a été déterminée en fonction de la contrainte longitudinale. Dans les essais marqués « x », on n'a pu observer aucune limite de stabilité nettement accusée, car les plaques étaient mises en place d'une manière défectueuse. Les charges les plus élevées corres-

1. W. SCHACHENMEIER, Die Delaware River Brücke zwischen Philadelphia und Camden. Die Bautechnik, 1927, p. 513.

2. Clement E. CHASE, Research and experimental tests in connection with the design of the bridge over the Delaware River between Philadelphia and Camden, Journal of the Franklin Institute, vol. 200, oct. 1925, p. 417.