Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Rubrik: Participants in the discussion of question I3

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

quées dans mon rapport. M. Schleicher signale que le module d'élasticité E du métal utilisé en Amérique atteignait 20.000 kg par mm², alors que Tetmayer est arrivé, en moyenne, pour ce module à une valeur de 21.500 kg par mm². Ceci est toutefois sans importance, car les formules qui s'appliquent à la zone plastique ne dépendent pas du module d'élasticité E et ce module n'intervient que pour limiter leur zone d'application. D'ailleurs, j'estime que les questions soulevées dans la discussion ne sont susceptibles d'être définitivement éclaircies que par des essais de plaques très poussés.

Pour terminer, j'attirerai l'attention sur une erreur contenue dans mon rapport. L'équation de départ (2) n'est valable, dans les conditions indiquées pour les bords de la plaque, que pour un nombre impair de demi-ondulations, c'est-à-dire pour $n = 1, 3, 5, \ldots$ Elle ne donne donc que la moitié des contraintes de flambage possibles. On obtient l'autre moitié, qui correspond à des déformations symétriques, par l'opération complémentaire.

$$w = \sin \frac{n \pi x}{a} [A \cosh k_1 y + C \cos k_2 y]$$

Les résultats des calculs n'en sont pas moins exacts, car la restriction valable pour la mise en équation de (2) a été implicitement laissée de côté dans le cours du calcul et on a admis des nombres d'ondulations arbitraires $n = 1, 2, 3, \ldots$

Participants à la discussion.

Diskussionsteilnehmer.

Participants in the discussion.

Dr.-Ing. F. SCHLEICHER,
Professor an der Technischen Hochschule Hannover.

I. — Weitere Versuche über die Knickung von gleichmässig gedrückten Stahlplatten.

Eine interessante Versuchsreihe ist gelegentlich des Baues der Hängebrücke zwischen Philadelphia und Camden durchgeführt worden [1], [2].

Es handelt sich um mit Winkeln gesäumte Rechteckplatten von $b = 88{,}9$ cm Gesamtbreite, bzw. $b' = 58{,}5$ cm zwischen den Saumwinkeln, $a = 305$ cm Länge und Blechdicken $h = 0{,}95$ bis $3{,}80$ cm. Die Platten waren an den Längsrändern lose geführt, das Material war Silizium-Mangan-Stahl von $\sigma_S = 3{,}165$ t/cm² Quetschgrenze und $\sigma_B = 5{,}6$ bis $6{,}7$ t/cm² Zerreissfestigkeit.

Mit $E = 2100$ t/cm², $m = 10/3$ ergibt sich die Knickspannung σ_K für das Seitenverhältnis $\alpha = 3{,}43$ und mit $n = 3$ Halbwellen zu

$$1) \qquad \sigma_K = 7750 \left(\frac{h}{b}\right)^2 \text{ in t/cm}^2.$$

1. W. Schachenmeier, Die Delaware-River-Brücke zwischen Philadelphia und Camden. Die Bautechnik 1927, Seite 513.

2. Clement E. Chase, Research and experimental tests in connection with the design of the bridge over the Delaware River between Philadelphia and Camden. Journal of the Franklin Institute, Vol. 200, Oct. 1925, p. 417.

Für $b = 88{,}9$ cm erhält man danach die folgenden Werte von σ_K. Die eingeklammerten Spannungswerte liegen über der Proportionalitätsgrenze und bedürfen deshalb einer Reduktion.

Aus dem Bericht [2] (S. 123) sind die Werte « beobachtet σ_K » entnommen.

h	b/h	σ_K theoretisch	σ_K beobachtet		Bemerkung
0,95	93,7	0,88	x		knickt vorzeitig aus
1,27	70,1	1,58	x		» » »
1,59	56,0	2,47	x		schon besser
1,90	46,8	(3,53)	3,23	3,17	Querschnitt knickt als Ganzes.
2,54	35,1	(6,30)	3,28	3,17	» » »
			3,09	3,13	
3.80	23,5	(14,1)	3,23	3,27	» » »
cm	—	t/cm²	t/cm²		

Bei 14 Versuchen wurde die Durchbiegung $w = w(\sigma)$ als Funktion der Längsspannung gemessen. Bei den mit x bezeichneten Versuchen konnte keine ausgeprägte Stabilitätsgrenze beobachtet werden, da die Platten schlecht gerichtet waren. Die Höchstlasten entsprachen für $h = 0{,}95$ bis 1,59 cm Spannungen von etwa 2,8 t/cm², wobei die Ausbiegungen bereits ein mehrfaches der Plattendicke betrugen. Abb. 1 zeigt zwei Versuche. Bei der dünnen Platte G1 nahm die Ausbiegung mit der Druckkraft stetig zu, von einer Stabilitätsgrenze kann nicht die Rede sein. Dagegen blieb sie bei den Platten von mehr als 1,9 cm Dicke, die besser gerichtet waren, klein und erreichte erst unter der gut ausgeprägten Knicklast grössere Werte. Abb. 1 zeigt als Beispiel hiefür den Versuch G7A mit einer Platte, die aus zwei 3/4" starken Blechen zusammengenietet wurde. Die Platten mit $h = 1{,}9$ bis 3,8 cm knickten ohne Rücksicht auf die Plattendicke an der Quetschgrenze. Aus zwei Platten zusammengenietete Stege erreichten die gleiche Knickspannung, wie einzelne Bleche von der doppelten Dicke.

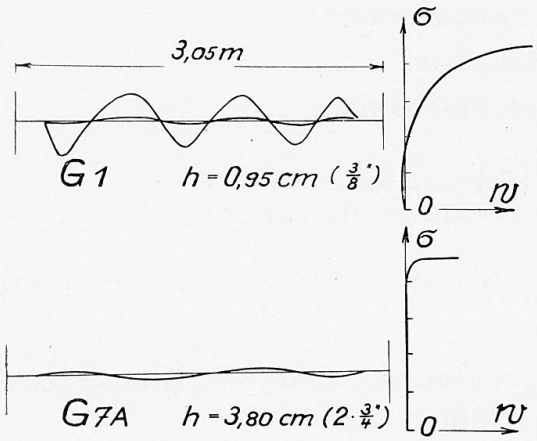

Fig. 1. — Essais de Chase. Déformation des plaques en fonction de la charge = Versuche von Chase. Ausbiegung der Platten als Funktion der Belastung = Test by Chase. Bending of the slabs as a function of the load.

Die anfänglichen Ausbiegungen hatten bei den Versuchen starken Einfluss. Eine Bestimmung der Knickspannungen der Platten mit $h < 1{,}90$ cm war besonders aus diesem Grunde nicht möglich. Es ist auch nicht bekannt, wie weit sich die Stegbleche auf Kosten der vier Saumwinkel entlasteten. Dies gilt besonders für die dünnen Bleche. Von Chase wird weiter bemerkt, dass die Festigkeitszahlen für die dünnen Bleche höher lagen, als für die dickeren Platten.

Aus den Beobachtungen an den dünneren Platten können also keine Schlüsse gezogen werden. Die Kurven für $w = w(\sigma)$ beweisen jedoch, dass die Ver-

suche für die dickeren Platten einwandfrei sind. Ein Vergleich mit der Theorie des Herrn Bleich für die Knickung im unelastischen Bereich ist somit zulässig. Bei den dünnen Blechen stellen sich die Ausbiegungen als Vergrösserung der von vornherein vorhandenen Unebenheiten dar. Die dicken Platten hatten eine gut ausgeprägte Knickgrenze und nach dem Ausbeulen 4 oder 5 Halbwellen. Eine Veränderlichkeit der Wellenzahl mit der Plattendicke ist nicht zu erkennen.

Nach der Theorie der isotropen Platte würden $\alpha = \sqrt{12} = 3{,}46$ sowohl 3 als auch 4 Halbwellen auftreten können, und zwar für die gleiche Knickspannung. Die untersuchten Platten ($\alpha = 3{,}43$) sind also gerade an der Grenze. Wenn die Verallgemeinerung der Differentialgleichung für den unelastischen Bereich zutreffen würde, (Vorbericht, S. 108)

$$2)\qquad \left(\frac{\partial^4 w}{\partial_x{}^4}\tau + 2\frac{\partial^4 w}{\partial_x{}^2\,\partial_y{}^2}\sqrt{\tau} + \frac{\partial^4 w}{\partial_y{}^4}\right) + \frac{\sigma.\,h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial_x{}^2} = 0$$

müsste[1] die Anzahl n der Halbwellen mit σ_K zunehmen und die Beulenlänge jedenfalls viel kleiner als die Plattenbreite sein. Dies ist aber nach Obigem nicht der Fall. Auch bei den Versuchen für die Quebecbrücke ist die zu erwartende Verkleinerung der Beulenlänge nicht zu beobachten[2], sondern die Wellenlänge stimmt im Wesentlichen mit der Plattenbreite überein.

Benützt man für die Berechnung der Knickzahl τ die Gleichung von Tetmajer

$$3)\qquad \sigma_K = 3{,}1 - 0{,}0114\,(l/i)^2,\ \text{in t/cm}^2,$$

die auch Bleich als Grundlage seines Vorschlags für die Dimensionierungsformeln gebraucht, dann ergeben sich Knickspannungen, die mit abnehmendem b/h ansteigen. Für Platten aus normalem Stahl wäre danach z. B. für die Werte $b/h = 46{,}8$ bzw. $23{,}5$ ein Unterschied von rd. 20 % in den Knickspannungen zu erwarten.

Die Versuche von Chase gaben für alle Platten, die dicker waren als 1/50 der ganzen Plattenbreite, die Quetschgrenze als Knickspannung, ein Anwachsen mit der Plattendicke konnte für $h > b/50$ nicht beobachtet werden. Aus den obigen Versuchen muss also die Folgerung gezogen werden, dass die Tetmajer-Formel, bzw. eine ihr entsprechende Gleichung, verbunden mit der verallgemeinerten Theorie von Bleich, keine genügend genaue Ermittlung der Knickspannung gestattet.

Zum Schlusse noch eine Bemerkung über die Randbedingungen an den Längsseiten der Platten. Für die Versuche von Chase ist es unzulässig, die freie Plattenbreite b etwa nur zwischen den Nietreihen oder den Winkelschenkeln zu messen. Beim dritten Versuch wird mit $b' = 58{,}5$ cm Breite $\sigma_K^{el} = 5{,}75$ t/cm², während der Versuch einen weit unter der Quetschgrenze liegenden Wert ergab.

In der Abbildung eines der ausgeknickten Bleche (Chase, p. 420 oder

1. Man vergl. : II. Die Beulenlänge bei Knickung im unelastischen Bereich.
2. Man vergl. : Abb. 8 auf Seite 117 des Vorberichts oder R. Mayer, Die Knickfestigkeit, Abb. 212 auf Seite 425 und Abb. 215 auf Seite 427.

Schachenmeier, S. 514) ist zu erkennen, dass die Beulen nicht durch die Saumwinkel begrenzt sind. Eine nennenswerte Einspannung des Stegbleches in den Saumwinkel war also nicht vorhanden. Diese Beobachtung entspricht dem Vorschlag von Bleich (Vorbericht, S. 112, Fig. 3*c* und *d*), die ganze Plattenbreite in die Rechnung einzuführen.

Eine wirksame elastische Einspannung an den Rändern ist nur vorhanden, wenn die einspannenden Konstruktionsteile nicht gleichzeitig mit der Platte ausbeulen können. Im Normalfall sind gelenkig gelagerte Ränder anzunehmen und in die Rechnung ist die ganze Plattenbreite ohne Abzüge einzuführen.

II. — Die Beulenlänge bei Knickung im unelastischen Bereich.

Für eine an allen Rändern frei aufliegende Rechteckplatte mit gleichmässigen Druckspannungen erhält man nach Bleich die Knickspannung σ_K^{pl} im unelastischen Bereich zu

1) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \frac{\sqrt{\tau}}{4} \left\{ \frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} + \frac{n\sqrt[4]{\tau}}{\alpha} \right\}^2 .$$

Darin bedeutet

2) $$\sigma_{K1}^{el} = \frac{\pi^2 E}{2{,}73} \left(\frac{h}{b}\right)^2, \text{ mit } m = 10/3,$$

die Knickspannung einer Platte aus Material von unbegrenzt hoher Proportionalitätsgrenze bei quadratischen Beulen ($n = \alpha$). Sie ist ebenso gross, wie die Euler-Knickspannung eines Stabes aus dem gleichen Material mit der Schlankheit

3) $$\lambda = 1{,}652\ (b/h).$$

Die Knickzahl

$$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{\sigma^{Euler}}$$

ist von Knickversuchen mit geraden Stäben zu entnehmen. Sieht man in erster Annäherung davon ab, dass τ nach der Theorie von Engesser-Kármán von der Querschnittsform abhängt, so ergibt sich τ als eindeutige Funktion der Knickspannung σ_K^{pl}, bzw. der zugeordneten Euler-Knickspannung σ_{Euler}.

Das Minimum der Knickspannung im unelastischen Bereich

4) $$\min \sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \cdot \sqrt{\tau}.$$

tritt ein, wenn die Beulenzahl n gleich

5) $$n = \alpha / \sqrt[4]{\tau}$$

ist [1]. Die Beulenlänge $l = a/n$ der ausgeknickten Platten ist also mit der Höhe der Knickspannungen veränderlich, und zwar nimmt sie mit wachsender Plattendicke ab.

---

1. Die Beulenzahl ist hier als stetig veränderlich vorausgesetzt, während sie in Wirklichkeit nur ganzzahlige Werte annehmen kann. Das absolute Minimum nach Gl. 4 tritt nur ein, wenn α ein ganzzahliges Vielfaches der vierten Wurzel aus τ ist. Ist das nicht der Fall, dann sind die beiden benachbarten Werte n zu untersuchen und σ_K^{pl} ist etwas grösser als $\min \sigma_K^{pl}$. Der Unterschied ist jedoch bei mehr als zwei Beulen praktisch ohne Bedeutung.

Der Zusammenhang zwischen Beulenlänge und Plattendicke soll nachstehend näher verfolgt werden.

a) Legt man für weichen Flusstahl zur Berechnung von τ die Tetmajer-Formel

6) $$\sigma_K^{pl} = 3{,}1 - 0{,}0114\,\lambda, \text{ in t/cm}^2,$$

zugrunde, dann ist nach Engesser

7) $$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E}\left(\frac{3{,}1 - \sigma_K^{pl}}{\pi.\ 0{,}0114}\right)^2.$$

Beschränkt man sich auf den Kleinstwert der Knickspannung, dann ist für Plattendicken $h > b/64$

8) $$_{\min}\sigma_K^{pl} = 3{,}1 + 2{,}282.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4 - \sqrt{\left\{3{,}1 + 2{,}282.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4\right\}^2 - 9{,}61}, \text{ in t/cm}^2$$

9) $$\tau = 1{,}655.10^{-8}\left(_{\min}\sigma_K^{pl}\right)^2.\left(\frac{b}{h}\right)^4, \text{ in t/cm}^2,$$

In diesen Gleichungen ist nach dem Vorgang von Tetmajer und Bleich $E = 2150$ t/cm² gesetzt[1]. Die Anzahl n der Beulen ergibt sich damit zu

10) $$n = \frac{88{,}1}{\sqrt{_{\min}\sigma_K^{pl}}}\left(\frac{h}{b}\right).\ \alpha, \quad \sigma_K \text{ in t/cm}^2,$$

gegenüber $n = \alpha$ im elastischen Bereich ($h < b/64$). Für verschiedene Plattendicken ergeben sich nach Obigem die in Tabelle 1 zusammengestellten Werte.

Tabelle 1.

b/h	=	50	40	30	25	20	15	10	—
$_{\min}\sigma_K^{pl}$	=	2,292	2,554	2,779	2,874	2,953	3,017	3,063	t/cm²
τ	=	0,544	0,276	0,1041	0,0533	0,0232	0,00755	0,00152	—
n/α	=	1,16	1,38	1,76	2,08	2,56	3,39	5,06	—

b) Für Material mit ausgeprägter Quetschgrenze σ_S, für das die Knickspannung bei Stäben in einem grösseren Bereich der Schlankheit λ mit σ_S zusammenfällt, erhält man folgende Zusammenhänge.

Ist die Knickspannung als Funktion der Stabschlankheit gegeben (Abb. 2),

11) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl}(\lambda),$$

so kann man die Knickzahl τ aus

12) $$\sigma_K^{pl} = \tau.\ \sigma_{Euler}$$

berechnen. Man erhält

13) $$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E}.\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2$$

1. Vergl. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1924, S. 131.

oder wenn man λ durch Umkehrung der Gl. 11 ermittelt und in Gl. 13 einsetzt

$$\tau = \tau\,(\sigma_K^{pl}).$$

Für die in Abb. 2 dargestellte σ_K^{pl}-Kurve sind einige Ergänzungen notwendig. Wenn $\lambda \geqslant \lambda_P$ ist, gilt $\sigma_K^{el} = \sigma_{Euler}$ und $\tau = 1$. In dem Bereich $\lambda_2 < \lambda < \lambda_P$, $\tau < 1$, in dem sich die Knickspannungen $\sigma_K^{pl} < \sigma_S$ mit λ ändern, kann man Gl. 11 umkehren und τ als einwertige Funktion von σ_K^{pl} berechnen. Gleiches gilt für das Gebiet $\lambda < \lambda_1$, bei Knickspannungen, die über der Quetschgrenze liegen,

$$\sigma_K^{pl} > \sigma_S.$$

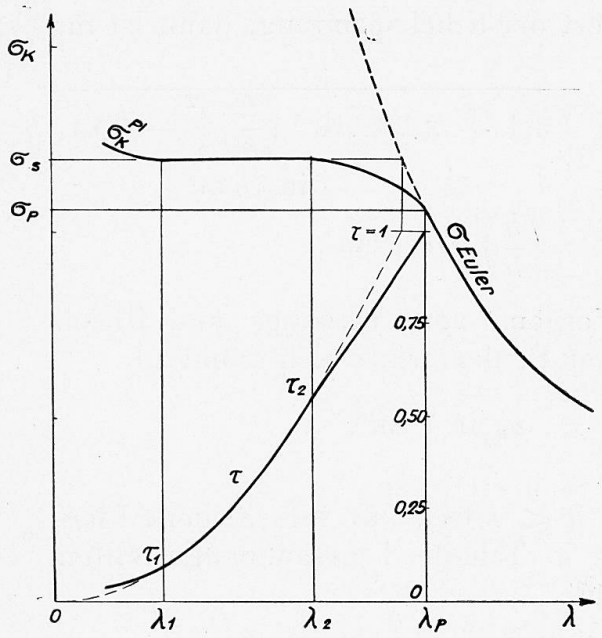

Fig. 2. — Représentation schématique de la relation entre la contrainte de flambage et le coefficient de flambage = Schematische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Knickspannung und Knickzahl = Diagrammatic representation of connection between buckling stress and buckling coefficient.

An den Grenzen λ_1 und λ_2 des mittleren Bereichs stimmt die Knickspannung mit der Quetschgrenze überein, $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$. Die zugehörigen Knickzahlen τ_1 und τ_2 ergeben sich zu

$$14)\qquad \tau_{1,2} = \frac{\sigma_S}{E}\left(\frac{\lambda_{1,2}}{\pi}\right)^2.$$

Die entsprechenden Plattendicken sind

$$(15\qquad \left(\frac{h}{b}\right)_{1,2} = \frac{0{,}527}{\sqrt[4]{\tau_{1,2}}}\sqrt{\frac{\sigma_S}{E}}\,.$$

Für alle Werte $\tau_1 < \tau < \tau_2$ ist $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$.

Da $\tau = \tau\,(\sigma_K^{pl})$ für $\tau < \tau_1$ und $\tau > \tau_2$ bekannt ist, kann die Knickspannung einer Platte unmittelbar aus

$$16)\qquad {}_{\min}\,\sigma_K^{pl} = \sqrt{\tau}\,\frac{\pi^2\,E}{2{,}73}\left(\frac{h}{b}\right)^2$$

berechnet werden. Für den Bereich $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ kann man somit schliessen: Wenn $h_1 \geqslant h \geqslant h_2$ ist, liegt die Knickspannung wegen $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ an der Quetschgrenze, $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$, und es gilt

$$17)\qquad \tau = \left(\frac{2{,}73\ \sigma_S}{\pi^2\ E}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{h}\right)^4.$$

Insbesondere für St 37 ergibt sich mit $\sigma_S = 2{,}4$ t/cm² und[1] $E = 2150$ t/cm²

$$18)\qquad \tau = 9{,}53.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4 \text{ und}$$

$$19)\qquad n = 56{,}9\left(\frac{h}{b}\right)\alpha.$$

$b/h = 56{,}9$ würde dem Grenzfall $\tau = 1$ der elastischen Beulung entspre-

1. Dieser hohe Wert wird eingesetzt, damit ein Vergleich mit a) möglich ist.

chen, wenn σ_P mit σ_S zusammenfallen könnte. Für $b/h = 28{,}4$ wäre im Vergleich zu der elastischen Knickung bereits die doppelte Beulenzahl zu erwarten. Für dieselben Plattendicken wie in Tabelle 1 ergeben sich die nachstehenden Zahlen.

Tabelle 2.

b/h	=	50	40	30	25	20	15	10	—
$\min \sigma_K^{pl}$	=	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	t/cm²
τ	=	0,597	0,244	0,0773	0,0373	0,01526	0,00483	0,000953	—
n/α	=	1,14	1,42	1,90	2,28	2,85	3,80	5,70	—

Vergleicht man Tabelle 1 und 2, so erkennt man, dass sich die Werte n/α nur wenig unterscheiden. Die Annahmen über die Knickspannungen beim Stab sind also in weiten Grenzen von geringem Einfluss auf die Beulenzahl. Diese Zunahme der Beulenzahl mit steigender Plattendicke müsste aber bei Versuchen mit dicken Platten deutlich festzustellen sein. Die bisherigen Versuche (mit $b/h = 23{,}5$) lassen eine solche Abhängigkeit nicht erkennen [1].

Bei der Beulung von ebenen Platten durch Schubspannungen liegen für $\tau_K \geqslant \tau_P = 0{,}58\,\sigma_P$ ähnliche Verhältnisse vor, wie bei der Knickung durch gleichmässige Druckspannungen. Versuche von Bollenrath zur Bestimmung der kritischen Schubspannungen zeigten ebenfalls keinen Unterschied in der Beulenlänge für elastische und unelastische Knickung. Bollenrath [2] sagt darüber: « Ein Unterschied in der Wellenlänge für elastische und unelastische Ausbeulung war nicht festzustellen » und « Die Wellenlänge der Ausbeulung steht in einem konstanten Verhältnis zur Plattenbreite und erweist sich als unabhängig von der Plattendicke und dem Werkstoffe ».

Der nach der Theorie von Bleich bestehende Zusammenhang zwischen Knickspannungen und Beulenlänge im unelastischen Bereich wird durch die Versuche nicht bestätigt.

Die hier angeschnittene Frage ist von grundlegender Bedeutung für die richtige Anordnung der Aussteifungen. Eine Klärung der Verhältnisse ist deshalb dringend notwendig.

III. — Beulung von Platten im unelastischen Bereich.

Die Nachrechnung auf S. 118 des Vorberichts ist mit E = 2150 t/cm² durchgeführt, während für das betr. Material im Mittel nur E = 2000 t/cm² ange-

1. Für den Grenzfall der sehr breiten Platte ($\alpha \to 0$) geht die Knickspannung in

$$\sigma_{K0}^{pl} = \sigma_{K0}^{el} \cdot \tau$$

über, worin σ_{K0}^{el} bis auf einen von der Querkontraktion abhängenden Faktor die bekannte Euler-Knickspannung eines Stabes von der Knicklänge a bedeutet. Diese Uebereinstimmung ist jedoch kein Beweis dafür, dass die Reduktion im unelastischen Bereich auch im allgemeinen Fall zutrifft.

2. F. Bollenrath, Ausbeulerscheinungen an ebenen auf Schub beanspruchten Platten, Dissertation Technische Hochschule Aachen, 1928, Seite 11 bezw. 16.

geben wird. Die Zerreissfestigkeit betrug [1] 4,79 t/cm². Da die Gültigkeit der Tetmajer-Formel auf Material mit weniger als 4,5 t/cm² Zugfestigkeit beschränkt ist [2], wäre mit der « Tetmajer-Formel für Flusseisen von Stahlcharakter » [3] zu rechnen. Berücksichtigt man diese Umstände, dann erhält man eine weniger gute Uebereinstimmung. Die von Bleich für den unelastischen Bereich zugrunde gelegte Differentialgleichung entspricht orthotropen Platten. Diese Voraussetzung « steht jedoch mit der Erfahrung in Widerspruch und führt zu fehlerhaften, auf der Seite der Unsicherheit liegenden Ergebnissen » [4].

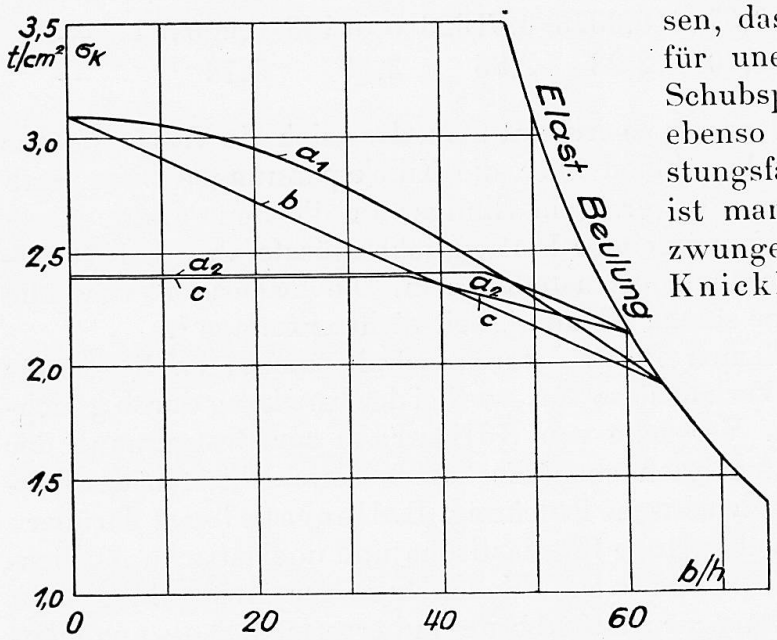

Fig. 3. — Contraintes de flambage sur des plaques rectangulaires soumises à une compression uniformément répartie, dans le domaine inélastique = Knickspannungen gleichmässig gedrückter Rechteckplatten im unelastischen Bereich = Rectangular slabs under uniform pressure; buckling stresses in the non-elastic zone.
Voile élastique = Elast. Beulung = Elast. buckling.

Schliesslich ist darauf hinzuweisen, dass eine Verallgemeinerung für unelastische Beulung durch Schubspannungen bisher fehlt, ebenso für alle anderen Belastungsfälle. Für praktische Zwecke ist man jedoch bereits heute gezwungen, die Abminderung der Knicklasten im unelastischen Bereich in Rechnung zu stellen. Bis Theorie und Versuchswesen weitere Fortschritte gemacht haben, ist ein Weg zu suchen, um diese Wirkung, möglichst für alle Fälle von Instabilität, auf die gleiche einfache Weise zu berücksichtigen. Es stehen dafür folgende Möglichkeiten offen :

a) Entsprechend Gl. 6 auf S. 110 des Vorberichts

1) $\min \sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{pl} \sqrt{\tau}.$

könnte man die unter Annahme unbegrenzt elastischen Materials berechneten Knickspannungen allgemein mit $\sqrt{\tau}$ reduzieren [5]. Die Abb 3 zeigt den Verlauf der Knickspannungen nach Gl. 1, für eine gleichmässig gedrückte

1. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, Tabelle 39. S. 423.
2. L. v. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe, 3. Aufl. Leipzig und Wien, 1903.
3. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, S. 61, Formel für Flusseisen von mehr als 4, 5 t/cm² Zugfestigkeit.
4. E. Chwalla, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturw. Klasse, Abt. IIa, 137. Band, 8. Heft, Wien, 1928.
5. Die Bezeichnung τ für die « Knickzahl » kann zu Verwechslungen Anlass geben, wenn sich die Stabilitätsuntersuchung auf Belastungen durch Schubspannungen τ bezieht. Es empfiehlt sich, die Bezeichnung τ für die Knickzahl zu vermeiden und nur mit $T = \tau E$ bzw T/E zu rechnen.

Rechteckplatte aus Flusstahl (St 37), als Funktion der Plattendicke. Die Kurve a_1 gilt, wenn $\sqrt{\tau}$ aus der Tetmajer-Formel berechnet wird (Gl. 8 von II, a), Kurve a_2 für eine den Reichsbahnvorschriften für St 37 entsprechende Knickspannungslinie, mit $(b/h)_2 = 45{,}3$ (vgl. II, b).

b) Man könnte analog dem Vorschlag von Timoshenko für den unelastischen Bereich der Kippspannungen von Balken (vgl. S. 134 des Vorberichts, bzw. Abb. 3 auf S. 133) auch bei Platten einen geradlinigen Zusammenhang zwischen « Schlankheit » b/h und Knickspannungen σ_K^{pl} annehmen. Die Gerade ist bestimmt durch die Elastizitätsgrenze σ_E (besser Proportionalitätsgrenze σ_P) und die Druckfestigkeit σ_B, letztere vielleicht mit einem etwas ermässigten fiktiven Betrag. Die Kurve *b* in Abb. 3 zeigt diese Gerade mit den Tetmajer'schen Grenzwerten der Spannungen.

c) Wenn die σ_K-Linie für Stäbe [1] bekannt ist, kann man die unter Voraussetzung unbegrenzt elastischen Materials berechneten Spannungen σ_K^{el} bei Platten und Schalen im gleichen Verhältnis wie die Euler-Knickspannung bei Stäben reduzieren.

2) $$\sigma_K^{pl} = \tau . \sigma_K^{el}.$$

Für diesen Zweck braucht man nur die der gleichgrossen Euler-Spannung entsprechende Vergleichsschlankheit

3) $$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_K^{el}}}$$

zu berechnen und in die als bekannt vorausgesetzte Gl. 4 einzusetzen.

4) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{p} (\lambda).$$

Z. B. bei der gleichmässig gedrückten Rechteckplatte ist die Ersatzschlankheit [2] gleich

4') $$\lambda = 1{,}652\ (b/h).$$

Die Kurve c in Abb. 3 zeigt die Knickspannungen, wenn die Knickspannungslinie für St 37 der Reichsbahnvorschriften zugrunde gelegt wird.

Für andere Spannungszustände ist die Höhe der Beanspruchung nach der Plastizitätsbedingung [3] zu messen. Z. B. für Plattenknickung durch Schubspannungen oder Instabilität von Zylinderschalen unter Torsionsbeanspruchung gilt bei dehnbaren Metallen

5) $$\tau_S = 0{,}58\ \sigma_S \text{ bzw. } \tau_P = 0{,}58\ \sigma_P.$$

---

1. Für den vorliegenden Zweck ist σ_K und τ für Stäbe von Rechteckquerschnitt zu benutzen. Ueber den Einfluss der Querschnittsform vergl. man F. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1929, N° 35.

2. Man vergl. den Vorschlag von E. Chwalla (S. 322 des Berichts über die II. internat. Tagung für Brückenbau und Hochbau, Wien, 1928), für gleichmässig gedrückte Platten den Knickmodul allen drei Gliedern der Differentialgleichung zuzuordnen, bei Vernachlässigung der Aenderungen der Poisson'schen Zahl m. Man erkennt, dass dieser Vorschlag mit der Reduktion nach c) übereinstimmt.

3. Man vgl. F. Schleicher, Ueber die Sicherheit gegen Ueberschreiten der Fliessgrenze bei statischer Beanspruchung. Der Bauingenieur (9), 1928, Heft 15.

Bei allgemeinen kritischen Spannungszuständen ist anstatt Gl. 5 die Plastizitätsbedingung zu benutzen. Die Vergleichsspannung σ_{gK}, welche die Platte als einfache Druckspannung ebenso hoch beansprucht, wie der gegebene allgemeine Spannungszustand, tritt an die Stelle der Euler-Knickspannung σ_K^{el}, sodass die reduzierte Knickspannung wird

$$\sigma_{gK}^{pl} = \sigma_{gk}^{pl}\,(\sigma_{gk}^{el}) = \sigma_K^{pl}\,(\lambda_g). \tag{6}$$

Diese Art der Reduktion entspricht der Tatsache, dass die Quasi-Isotropie des Stahls auch im unelastischen Bereich der Spannungen erhalten bleibt [1]. Aus diesem Grunde tritt nur eine Abminderung in der Höhe der Knickspannungen ein, während die Beulenform wie bei der elastischen Knickung bleibt.

Die Abminderung nach c) lässt sich ohne Weiteres bei beliebiger Knickspannungslinie anwenden. Sie wurde in neuerer Zeit z. B. für die Stabilitätsuntersuchungen bei der « Dreirosenbrücke » über den Rhein in Basel (kontinuierlicher Blechbalken mit 75 + 105 + 75 m Stützweite) angewendet, die von der M.A.N., Werk Gustavsburg, und der Buss A.G., Basel, erbaut wird.

Wenn die Plattensteifigkeit gleichmässig abgemindert wird (sog. homogene Spannungszustände), so sind die Gleichungen genau zutreffend. Ist dagegen der Spannungszustand veränderlich, dann variiert τ D mit der Stelle und die nach c) reduzierten Spannungen sind zu klein, wenn die Reduktion für die grösste Beanspruchung durchgeführt wird.

Bei nicht homogenen Spannungszuständen ist nach Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze in der Regel mit einem Spannungsausgleich zu rechnen. Um in solchen Fällen eine genauere Berechnung durchführen zu können, müsste man, bekannte Spannungsverteilung vorausgesetzt, die Plattensteifigkeit in der Plattenbiegungsgleichung als Funktion der Höhe der Beanspruchung einführen.

$$\nabla^4 w + \frac{h.\,\sigma_x\,(y)}{D.\,\tau\,(y)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{7}$$

Schliesslich wäre noch zu untersuchen, wie sich der Umstand auswirkt, dass die bleibenden Formänderungen ohne Volumdehnung erfolgen [2]. Den Werten m = 10/3 im elastischen, bzw. m = 2 im plastischen Bereich würde ein Unterschied von 21 % in den Plattensteifigkeiten D entsprechen.

Wir fassen unsere Meinung über die Reduktion der kritischen Spannungszustände für allgemeine Stabilitätsgrenzen zusammen :

---

1. Man vergl. : M. Roš und A. Eichinger, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. 1) Verhandlungen des zweiten internat. Kongresses für technische Mechanik, Zürich 1926. 2) Mitteilungen des schweizer. Verbandes für die Materialprüfungen der Technik, Zürich, September 1926. 3) Diskussionsbericht N° 34 der eidgen. Materialprüfungsanstalt in Zürich, Februar 1929.

W. Lode, Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle. Dissertation Göttingen, 1926 (Heft 303 der Forsch. Arbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Berlin, 1928).

Neue Versuche weisen allerdings darauf hin, dass unter gewissen Umständen auch ein von der Isotropie abweichendes Verhalten eintreten kann. Man vgl. K. Hohenemser und W. Prager, Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flusstahl. Z. A. M. M. (12), 1932.

2. Man vergl. die in 1) genannten Arbeiten von Roš und Eichinger, und zwar Abb. 12 von N°. 2 und Abb. 44, 65, 66 von N°. 3.

Die Reduktion nach *a*) ist nicht zu empfehlen, da sie durch die Beobachtungen nicht bestätigt wird und zu hoch liegende Knickspannungen gibt.

Nach *b*) erhält man für den Bereich $\sigma_P < \sigma < \sigma_S$ i. a. genügend genau zutreffende Werte, sodass diese Art der Reduktion z. B. dann brauchbar sein dürfte, wenn die Knickspannungslinie nicht bekannt ist. Für dicke Platten wird die Stabilität danach jedoch überschätzt, sodass es sich empfiehlt, Werte $\sigma_K > \sigma_S$ (bzw. die der Plastizitätsbedingung entsprechende Beanspruchung) durch σ_S zu ersetzen.

Die Abminderung nach *c*) entspricht dem heutigen Stande unserer Kenntnisse am besten. Sie kann allgemein empfohlen werden; sowohl für homogene, als für nicht homogene Spannungszustände. Für die letzteren bleibt man auf der sicheren Seite, wenn man die Reduktion für die am stärksten beanspruchte Stelle durchführt.

Traduction.

I. — Autres essais sur le flambage des plaques d'acier uniformément comprimées.

Une série d'essais très intéressants a été effectuée à l'occasion de la construction du pont suspendu reliant Philadelphie à Camden [1, 2].

Il s'agit ici de plaques rectangulaires, bordées avec des cornières et accusant les dimensions suivantes : largeur totale $b = 88{,}9$ cm. ; largeur entre les cornières $b' = 58{,}5$ cm. ; longueur $a = 305$ cm. ; épaisseurs $h = 0{,}95$ cm. à 3,80 cm.

Les plaques ne comportaient aucun encastrement sur les bords longitudinaux et étaient constituées en acier au silicium-manganèse, accusant les caractéristiques suivantes : limite de compression $\sigma_S = 3{,}165$ t/cm² ; charge de rupture $\sigma_B = 5{,}6$ à 6,7 t/cm².

Pour $E = 2100$ t/cm², $m = 10/3$, on obtient la charge de flambage σ_K, pour un rapport entre les côtés égal à $\alpha = 3{,}43$ et en tenant compte d'un nombre de demi-ondulations $n = 3$: par la relation suivante :

$$\sigma_K = 7750 \left(\frac{h}{b}\right)^2 \text{ en t/cm}^2. \tag{1}$$

Pour $b = 88{,}9$ cm., on obtient les valeurs de σ_K indiquées dans le tableau suivant. Les valeurs indiquées entre parenthèses se trouvent au-dessus de la limite de proportionnalité et doivent donc subir une diminution. Les « σ_K observés » ont été tirées du Rapport.

Au cours de 14 essais, la déformation $w = w(\sigma)$ a eté déterminée en fonction de la contrainte longitudinale. Dans les essais marqués « x », on n'a pu observer aucune limite de stabilité nettement accusée, car les plaques étaient mises en place d'une manière défectueuse. Les charges les plus élevées corres-

1. W. Schachenmeier, Die Delaware River Brücke zwischen Philadelphia und Camden. Die Bautechnik, 1927, p. 513.

2. Clement E. Chase, Research and experimental tests in connection with the design of the bridge over the Delaware River between Philadelphia and Camdem, Journal of the Franklin Institute, vol. 200, oct. 1925, p. 417.

pondaient, pour $h = 0{,}95$ à $1{,}59$ cm., à des contraintes d'environ 2,8 t/cm², les déformations correspondantes atteignant déjà une valeur multiple de l'épaisseur de la plaque. La figure 1 se rapporte à deux de ces essais. Pour la plaque mince G 1 la déformation augmenta régulièrement avec l'effort de compression et il ne peut pas dans ce cas être question d'une limite de stabilité. Par contre, pour les plaques dont l'épaisseur était supérieure à 1,9 cm., la déformation est restée faible, car ces plaques étaient fixées dans de meilleures conditions ; elle n'a atteint des valeurs élevées que sous l'influence d'une charge de flambage nettement accusée. On trouvera sur la figure 1, à titre d'exemple, l'essai G7A, effectué avec une plaque constituée par deux tôles fortes de 3/4″ (19,05 mm.) rivées ensemble. Les plaques ayant une épaisseur de $h = 1{,}9$ à 3,8 cm. ont flambé à la limite de compression sans que l'épaisseur elle-même de la plaque intervienne. Sur les pièces constituées par deux plaques rivées, on a atteint la même contrainte de flambage que sur des tôles simples d'épaisseur double.

Les déformations initiales ont exercé, au cours de ces essais, une influence très marquée. Pour cette raison principalement, il ne fut pas possible de déterminer les contraintes de flambage des plaques dont l'épaisseur était inférieure à 1,90 cm. On ignore également dans quelle mesure les tôles constituant en quelque sorte l'âme ont pu être soulagées par la présence des quatre cornières de bordure ; ceci d'ailleurs particulièrement en ce qui concerne les tôles minces. Chase a remarqué ultérieurement que les chiffres de résistance des tôles minces étaient relativement plus élevés que ceux des tôles de plus forte épaisseur.

h cm	b/h	σ_K théorique t/cm²	σ_K observé t/cm²	Observations
0,95	93,7	0,88	x	flambage anticipé
1,27	70,1	1,58	x	flambage anticipé
1,59	56	2,47	x	comportement meilleur
1,90	46,8	(3,53)	3,23 3,17	la section flambe dans son ensemble
2,54	35,1	(6,3)	(3,28 3,17) (3,09 3,13)	»
3,80	23,5	(14,1)	3,23 3,27	»

Aucune conclusion n'a pu non plus être tirée des observations effectuées sur les tôles minces. Les courbes pour $w = w(\sigma)$ montrent toutefois que les essais effectués sur les tôles épaisses sont remarquablement bons. Ils permettent une comparaison avec la théorie établie par M. Bleich pour le flambage dans le domaine inélastique. Pour les tôles minces les déformations ne constituent, en somme, que les accentuations des gauchissements initiaux dont il a déjà été fait mention. Les tôles épaisses ont accusé une limite de

flambage très nette, et, après apparition du voile, 4 ou 5 demi-ondulations se sont manifestées. On n'a pas pu constater de modifications dans le nombre des ondulations en fonction de l'épaisseur des plaques.

D'après la théorie des dalles isotropes, pour $\alpha = \sqrt{12} = 3{,}46$, il pourrait se produire aussi bien 3 que 4 demi-ondulations ; cela pour la même contrainte de flambage. Les plaques étudiées se trouvaient donc à la limite, puisque $\alpha = 3{,}43$. S'il est légitime de généraliser l'équation différentielle de déformation des plaques minces dans le domaine inélastique (voir Publication Préliminaire, page 120) :

$$2) \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial_x{}^4}\tau + 2\frac{\partial^4 w}{\partial_x{}^2\,\partial_y{}^2}\sqrt{\tau} + \frac{\partial^4 w}{\partial_y{}^4} + \frac{\sigma\, h}{D}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial_x{}^2} = 0$$

le nombre n des demi-ondulations devrait [1] augmenter avec σ_K et la longueur intéressée par le voile devrait dans tous les cas être beaucoup plus faible que la largeur des plaques. D'après ce qui précède, ce n'est toutefois pas le cas. La diminution que l'on pouvait escompter sur la longueur intéressée par le voile n'a pas été observée non plus au cours des essais sur le pont de Québec [2], la longueur d'onde coïncidant sensiblement avec la largeur des plaques.

Si l'on fait appel, pour le calcul du coefficient de flambage τ, à l'équation de Tetmajer :

$$3) \qquad \sigma_K = 3{,}1 - 0{,}0114\left(\frac{l}{i}\right)^2 \text{ en t/cm}^2$$

qui est également à la base de l'étude de Bleich concernant le calcul des dimensions des plaques, on obtient alors des contraintes de flambage qui s'élèvent lorsque le rapport b/h diminue. Pour des plaques en acier normal, on arrive par exemple, pour des valeurs de b/h égales à 46,8 et 23,5, à des écarts de 20 % environ sur les contraintes de flambage, par rapport aux valeurs escomptées.

Les essais de Chase ont donné comme contrainte de flambage, pour toutes les plaques dont l'épaisseur est supérieure au 1/50 de la largeur totale, la limite de compression elle-même ; pour $h > b/50$, on n'a pas pu observer de valeurs supérieures pour une augmentation de l'épaisseur de la plaque. Les essais qui précèdent permettent donc de conclure que la formule de Tetmajer, ou toute autre relation correspondante, en liaison avec la théorie généralisée de Bleich, ne permettent pas de déterminer d'une manière suffisamment précise la contrainte de flambage.

Faisons encore une remarque, pour conclure, au sujet des conditions régnant aux bords de la plaque, sur les grands côtés. Il n'est pas admissible de mesurer, pour l'interprétation des essais de Chase, la largeur libre b de la plaque entre les rangées de rivets ou entre les arêtes des cornières seulement. Dans le troisième essai, avec $b' = 58{,}5$ on obtient :

$$\sigma_K^{el} = 5{,}75 \text{ t/cm}^2$$

---

1. Voir : Die Beulenlänge bei Knickung im elastischen Bereich.
2. Voir : Fig. 8, p. 117 de la Publication Préliminaire, ou R. Mayer, Die Knickfestigkeit, fig. 212, p. 425 et fig. 215, p. 427.

tandis que l'essai donne une valeur qui se trouve très nettement au-dessous de la limite de compression.

La photographie d'une des tôles ayant subi le flambage montre (Chase, p. 420, ou Schachenmeier, p. 514) que le voile n'est pas limité par les cornières de bordure. On ne peut donc pas dire qu'il y ait eu effectivement un encastrement de la tôle par la cornière de bordure. Cette observation correspond au projet de Bleich (Publication Préliminaire, p. 112, fig. 3 *c* et *d*) d'introduire la largeur entière de la plaque dans le calcul.

Il n'y a effectivement un encastrement élastique sur les bords de la plaque que lorsque les pièces qui sont susceptibles de constituer cet encastrement ne peuvent pas simultanément participer au voile de la plaque elle-même. Dans le cas général, il faut admettre que les bords de la plaque comportent un appui articulé et la largeur totale de la plaque doit être introduite dans les calculs sans aucune réduction.

II. — Importance du voile par flambage dans le domaine plastique.

Pour une plaque rectangulaire reposant librement sur ses quatre bords, et soumise à des contraintes uniformément réparties, on obtient la contrainte de flambage, suivant Bleich, dans le domaine inélastique, par la relation :

1) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \frac{\sqrt{\tau}}{4} \left(\frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} + \frac{n\sqrt[4]{\tau}}{\alpha} \right)^2.$$

relation dans laquelle :

2) $$\sigma_{K1}^{el} = \frac{\pi^2 E}{2{,}73} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \text{ avec } m = 10/3$$

représente la charge de flambage d'une plaque constituée par un matériau présentant une limite de proportionnalité infiniment élevée pour le voile rectangulaire ($n = \alpha$). Cette contrainte de flambage a la même valeur que la contrainte de flambage d'Euler pour une barre constituée avec le même matériau et ayant un degré de finesse :

3) $$\lambda = 1{,}652 . \frac{b}{h}$$

Le coefficient de flambage

$$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{\sigma_{Euler}}$$

est fourni par les essais de flambage sur barre rectilignes.

Si, à titre de première approximation, on fait abstraction du fait que τ dépend de la forme de la section, suivant la théorie d'Engesser-Kármán, on obtient τ en le considérant comme fonction définie de la contrainte de flambage σ_K^{pl} ou de la contrainte de flambage d'Euler correspondante σ_{Euler}.

On atteint le minimum de la contrainte de flambage dans le domaine plastique :

4) $$\min \sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \sqrt{\tau}.$$

lorsque le nombre de demi-ondulations n est égal à [1] :

5) $$n = \frac{\alpha}{\sqrt[4]{\tau}}$$

La longueur du voile $l = \frac{a}{n}$ de la plaque ayant subi le flambage est donc variable suivant le niveau des contraintes de flambage ; en pratique, elle diminue d'ailleurs lorsque l'épaisseur de la plaque augmente.

Il est intéressant d'étudier d'une manière plus approfondie la relation qui existe entre la longueur du voile et l'épaisseur de la plaque.

a) Si l'on se base sur la formule de Tetmajer pour le calcul de τ dans le cas de l'acier doux :

6) $$\sigma_K^{pl} = 3{,}1 - 0{,}0114\ \lambda \text{ en t/cm}^2$$

on obtient, d'après Engesser :

7) $$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E}\left(\frac{3{,}1 - \sigma_K^{pl}}{\pi\, 0{,}0114}\right)^2.$$

Si l'on se limite à la plus faible valeur de la contrainte de flambage, on obtient alors, pour une épaisseur de plaque $h > b/64$:

8) $${}_{\min}\sigma_K^{pl} = 3{,}1 + 2{,}282.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4 - \sqrt{\left(3{,}1 + 2{,}282.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4\right)^2 - 9{,}61}$$

en t/cm², et :

9) $$\tau = 1{,}655.10^{-8}\left({}_{\min}\sigma_K^{pl}\right)^2 . \left(\frac{b}{h}\right)^4 \text{ en t/cm}^2.$$

Dans les équations, suivant la méthode de Tetmajer et de Bleich, on pose $E = 2150$ t/cm² [2]. Le nombre n des voiles est défini par la relation :

10) $$n = \frac{88{,}1}{\sqrt{{}_{\min}\sigma_K^{pl}}} . \frac{h}{b} . \alpha \ (\sigma_K^{pl} \text{ en t/cm}^2)$$

alors que $n = \alpha$ dans le domaine plastique ($h < b/64$). On trouvera dans le tableau 2 ci-contre les valeurs obtenues pour différentes valeurs de l'épaisseur des plaques.

$\frac{b}{h}$	50	40	30	25	20	15	10
${}_{\min}\sigma_K^{pl}$	2,292	2,554	2,779	2,874	2,953	3,017	3,063
τ	0,544	0,276	0,104	0,0533	0,0232	0,00755	0,00152
n/α	1,16	1,38	1,76	2,08	2,56	3,39	5,06

1. Le nombre d'ondulations est ici supposé variable d'une manière continue, tandis qu'en réalité il ne peut prendre que des valeurs entières. Le minimum absolu suivant la relation (4) ne se produit que lorsque α est un multiple entier de la racine quatrième de τ. Si ce n'est pas le cas, il faut rechercher les deux valeurs voisines de n et σ_K^{pl} est un peu plus élevé que ${}_{\min}\sigma_K^{pl}$. La différence est toutefois sans importance lorsqu'il s'agit de plus de deux ondulations.

2. Voir Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1924, page 131.

b) Pour un matériau admettant une limite de compression très nette σ_{-S} pour lequel la contrainte de flambage à l'état de barre concorde avec σ_{-S} pour une large marge de variation du degré de finesse λ, on obtient les relations qui suivent :

Si la contrainte de flambage est donnée en fonction du degré de finesse à l'état de barre (figure 2) :

11) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl}(\lambda)$$

on peut alors calculer le coefficient de flambage τ en partant de la relation :

12) $$\sigma_K^{pl} = \tau . \sigma_{(Euler)}$$

et on obtient :

13) $$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E} \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2$$

ou, en déterminant λ par inversion de l'équation (11) et en la remplaçant par sa valeur dans l'équation (13) :

$$\tau = \tau\,(\sigma_K^{pl}).$$

Quelques commentaires sont nécessaires au sujet de la courbe de σ_K^{pl} représentée sur la figure 2.

Si $\lambda \geqslant \lambda_P$ alors $\sigma_K^{el} = \sigma_{Euler}$ et $\tau = 1$. Dans la zone définie par : $\lambda_2 < \lambda < \lambda_P$, $\tau < 1$, dans laquelle les contraintes de flambage $\sigma_K^{pl} < \sigma_{-S}$ varient avec λ, on peut inverser l'équation (11) et calculer τ comme une fonction définie de σ_K^{pl}. Il en est de même pour la zone $\lambda < \lambda_1$ pour des contraintes de flambage qui se trouvent au-dessus de la limite de compression.

Pour les limites λ_1 et λ_2 de la zone moyenne, la contrainte de flambage coïncide avec la limite de compression :

$$\sigma_K^{pl} > \sigma_{-S}.$$

Les coefficients de flambage correspondants τ_1 et τ_2 peuvent être déduits de la relation suivante :

14) $$\tau_{1,2} = \frac{\sigma_{-S}}{E} \cdot \left(\frac{\lambda_{1,2}}{\pi}\right)^2.$$

Les épaisseurs correspondantes des plaques sont données par la relation :

15) $$\left(\frac{h}{b}\right)_{1,2} = \frac{0{,}527}{\sqrt[4]{\tau_{1,2}}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{-S}}{E}}.$$

Pour toutes les valeurs de τ telles que : $\tau_1 < \tau < \tau_2$ on a :

$$\sigma_K^{pl} = \sigma_{-S}.$$

Comme $\tau = \tau\,(\sigma_K^{pl})$ est connu pour $\tau < \tau_1$ et $\tau > \tau_2$ la charge de flambage d'une plaque peut être calculée directement à partir de la relation :

16) $$\min \sigma_K^{pl} = \sqrt{\tau} \cdot \frac{\pi^2 E}{2,73} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2 .$$

Pour la zone $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ on peut donc conclure :

Si $h_1 \geqslant h \geqslant h_2$ la contrainte de flambage coïncide avec la limite de résistance à la compression : $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$ car $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ et l'on a :

17) $$\tau = \left(\frac{2,73\ \sigma_S}{\pi^2 E}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{h}\right)^4 .$$

En particulier, pour l'acier St. 37, on obtient avec $\sigma_S = 2,4$ t/cm² et [1] $E = 2150$ t/cm²

18) $$\tau = 9,53.10^{-8} \left(\frac{b}{h}\right)^4 \text{ et}$$

19) $$n = 56,9 . \frac{h}{b} \alpha .$$

$b/h = 56,9$ correspondrait à la limite $\tau = 1$ du voile dans le domaine élastique, si σ_P pouvait coïncider avec σ_S. Pour $b/h = 28,4$ on pourrait déjà escompter un nombre d'ondulations double, par rapport au flambage dans le domaine élastique. Pour les mêmes épaisseurs de plaque que dans le tableau 2 précédent, on arrive aux chiffres du tableau 3 ci-contre.

$\frac{b}{h}$	50	40	30	25	20	15	10
$\min \sigma_K^{pl}$	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40
τ	0,597	0,244	0,0773	0,0373	0,01526	0,00483	0,000953
n/α	1,14	1,42	1,90	2,28	2,85	3,80	5,70

Si l'on compare les tableaux 2 et 3, on constate que les valeurs de n/α diffèrent très peu. Les hypothèses concernant les contraintes de flambage de la barre sont donc, dans de larges limites, sans influence sensible sur le coefficient n. Cette augmentation du nombre de voiles lorsque l'épaisseur de la plaque augmente demande toutefois à être établie en toute certitude, par des essais, pour les plaques épaisses. Les essais qui ont été effectués jusqu'à maintenant, avec $b/h = 23,5$ ne permettent pas de mettre en évidence une telle relation [2].

---

1. Cette valeur élevée est adoptée ici afin de permettre la comparaison avec le cas *a* précédent.

2. Dans le cas limite d'une plaque très large ($\alpha \rightarrow 0$), la contrainte de flambage devient :

$$\sigma_{K0}^{pl} = \sigma_{K0}^{el}$$

relation dans laquelle σ_{K0}^{el} désigne la contrainte de flambage connue d'Euler pour une barre ayant une longueur de flambage *a* et sous réserve de l'introduction d'un facteur dépendant de la contraction transversale. Cette concordance ne prouve toutefois nullement que la réduction se présente également, dans le domaine plastique, dans le cas général.

Dans le cas du voile de plaques planes par suite de contraintes de cisaillement et pour :

$$\tau_K \geqslant \tau_P = 0{,}58\ \sigma_P$$

on se trouve en présence de conditions semblables à celles que présente le flambage sous l'action de contraintes de compression uniformément réparties. Les essais effectués par Bollenrath en vue de la détermination des contraintes critiques de cisaillement n'ont également mis en évidence aucune différence pour les longueurs de voile, entre les flambages élastique et plastique. Bollenrath [1] dit, à ce sujet : « Il n'y a pas à mettre en évidence une différence entre les flambages élastique et plastique » et « Les longueurs d'onde au voile sont dans un rapport constant avec la largeur des plaques et se montrent indépendantes de l'épaisseur des plaques et du matériau utilisé ».

La relation qui, suivant la théorie de Bleich, existe entre : la contrainte de flambage et la longueur du voile, dans le domaine plastique, n'est pas confirmée par les essais.

La question étudiée ici est d'une importance capitale pour la disposition judicieuse des éléments de renforcement. Il est absolument nécessaire, par conséquent, d'aboutir à une notion très nette des conditions effectives.

III. — Le voile des plaques dans le domaine plastique.

Le calcul de la page 126 de la Publication Préliminaire est exécuté avec $E = 2150$ t/cm², tandis que pour le métal considéré, on n'a environ, en moyenne, que $E = 2000$ t/cm². La résistance à la traction a atteint 4,79 t/cm² [2]. Comme la validité de la formule de Tetmajer est limitée à un métal accusant une résistance à la traction inférieure à 4,5 t/cm² [3], le calcul devrait être effectué avec la « formule de Tetmajer pour fontes présentant les caractéristiques de l'acier » [4].

Si l'on tient compte de cette remarque, on obtient alors une concordance moins bonne. L'équation différentielle sur laquelle se base Bleich pour le domaine plastique correspond aux plaques orthotropes. Cette hypothèse « est toutefois en contradiction avec les faits expérimentaux et conduit à des résultats erronés, tendant à provoquer une certaine insécurité » [5].

Enfin, il faut attirer l'attention sur le fait que jusqu'à maintenant, il n'existe pas de généralisation pour l'étude du flambage dans le domaine plastique, sous l'influence de contraintes de cisaillement, pas plus d'ailleurs que pour tous

---

1. F. Bollenrath, Ausbeulerscheinungen an ebenen auf Schub beanspruchten Platten. Dissertation, Ecole Polytechnique d'Aix-la-Chapelle, 1928, p. 11 et 16.
2. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, tableau 39, p. 423.
3. L. v. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technich wichtigsten Baustoffe, 3e édition, Leipzig et Vienne, 1903.
4. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, page 61, Formule pour aciers accusant une résistance à la traction de plus de 4,5 t/cm².
5. E. Chwalla, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Rapport de Séance de l'Académie des Sciences de Vienne, Mathématiques-Sc. Naturelles, Sec. IIa, Vol. 137, fasc. 8, Vienne, 1928.

autres cas de charges ; en pratique, on est toutefois obligé de faire entrer en ligne de compte une réduction de la charge de flambage dans le domaine plastique. Tant que la théorie et la recherche expérimentale n'auront pas accompli de nouveaux progrès, il importe de chercher un moyen permettant de tenir compte de cette influence, s'appliquant, dans toute la mesure du possible, à tous les cas d'instabilité d'une manière également simple. On se trouve, à ce sujet, en présence des possibilités suivantes :

a) Suivant l'équation (6) de la page 121 de la Publication Préliminaire,

1) $$_{\min}\,\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl} \cdot \sqrt{\tau}$$

on pourrait réduire dans le rapport $\sqrt{\tau}$, d'une manière générale, les contraintes de flambage calculées dans l'hypothèse d'un matériau possédant une élasticité illimitée [1]. La figure 3 représente la variation des contraintes de flambage suivant l'équation (1) pour une plaque rectangulaire soumise à une compression uniformément répartie en acier St. 37, en fonction de l'épaisseur de cette plaque. La courbe a_1 s'applique au cas où $\sqrt{\tau}$ est calculé à partir de la formule de Tetmajer (équation (8) de la partie II, *a*) ; la courbe a_2 s'applique à une courbe de flambage correspondant aux prescriptions des Chemins de Fer Allemands pour l'acier St. 37, avec $(b/h)_2 = 45{,}3$ (voir II, *b*).

b) On pourrait également, suivant le projet de Timoshenko concernant les tensions critiques des poutres dans le domaine plastique (voir figure 3, page 133 et page 152 de la Publication Préliminaire), admettre une relation linéaire, même en ce qui concerne les plaques, entre le degré de finesse b/h et les contraintes de flambage σ_K^{pl}. Cette droite est déterminée par la limite d'élasticité (ou mieux par la limite de proportionnalité) et par la résistance à la compression, cette dernière étant représentée ici d'une manière fictive avec une certaine réduction. Cette droite est représentée par la courbe *b* de la figure 3, avec les valeurs limites des contraintes suivant Tetmajer.

c) Si l'on connaît la courbe σ_K pour les barres [2] on peut réduire les contraintes calculées dans l'hypothèse d'un matériau infiniment élastique σ_K^{el} pour les plaques et les parois minces, dans le même rapport que l'on réduit la contrainte d'Euler pour les barres.

2) $$\sigma_K^{pl} = \tau . \sigma_K^{el}.$$

Il suffit pour cela de calculer le degré de finesse relatif correspondant à la contrainte d'Euler équivalente :

3) $$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_K^{el}}}$$

---

1. L'appellation τ adoptée pour le coefficient de flambage peut donner lieu à des confusions, si le problème de stabilité envisagé se rapporte à des charges de cisaillement τ. Il est donc à recommander d'éviter l'emploi de la désignation τ pour le coefficient de flambage et de ne faire intervenir que $T = \tau E$ ou T/E.

2. Dans le cas présent, il faut faire intervenir σ_K et τ pour des barres de section rectangulaire. En ce qui concerne l'influence de la forme de la section, voir F. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1929, nº 35.

et de le reporter dans l'équation (4) supposée connue :

4) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl}(\lambda).$$

Par exemple, pour la plaque rectangulaire soumise à une compression uniformément répartie, le degré de finesse équivalent est égal à [1] :

4') $$\lambda = 1{,}652\,(b/h).$$

La courbe *c* de la figure 3 représente les contraintes de flambage obtenues lorsque l'on adopte la courbe de flambage prévue dans les prescriptions des Chemins de Fer Allemands pour l'acier St. 37.

Pour d'autres régimes de charge, la valeur de la contrainte doit être calculée d'après les considérations de plasticité [2]. Par exemple, pour le flambage des plaques par contraintes de cisaillement ou l'instabilité des parois cylindriques minces sous l'influence de contraintes de torsion, on a, pour des métaux susceptibles d'accuser un allongement :

5) $$\tau_S = 0{,}58\,\sigma_S \text{ et } \tau_P = 0{,}58\,\sigma_P.$$

Pour tous les régimes critiques en général, on utilisera la condition de plasticité au lieu de l'équation 5. La contrainte de comparaison σ_{gK} qui correspond pour la plaque, à titre de compression simple, à la même contrainte que le régime de charge général indiqué, intervient à la place de la contrainte de flambage d'Euler, de telle sorte que la contrainte de flambage devient, après réduction :

6) $$\sigma_{gK}^{pl} = \sigma_{gK}^{pl}(\sigma_{gK}^{el}) = \sigma_K^{pl}(\lambda_g).$$

Ce mode de réduction correspond au fait que la quasi-isotropie de l'acier se conserve même dans le domaine inélastique des charges [3].

Par suite, il ne se manifeste qu'une diminution dans la valeur des contraintes de flambage, la forme que prend le voile restant la même que dans le cas du flambage élastique.

La méthode de réduction suivant *c* peut être utilisée sans dispositions spé-

---

1. Voir la proposition de E. Chwalla (p. 322 du Rapport sur la 2e Conférence Internationale des Ponts et Charpentes, Vienne, 1929) tendant à rapporter le module de flambage, pour les plaques soumises à une compression uniformément répartie, aux trois termes de l'équation différentielle, en négligeant les variations du coefficient de Poisson m. On voit que cette proposition concorde avec la réduction indiquée en *c*.

2. Voir Schleicher, Ueber die Sicherheit gegen Ueberschreiten der Fliessgrenze bei statischer Beanspruchuug. Bauingenieur, 9, 1928, n° 15.

3. Voir : M. Roš et A. Eichinger, Versuche zur Erklärung der Frage der Bruchgefahr. 1. Communications au 2e Congrès International de Mécanique Industrielle, Zurich, 1926. 2. Communications de l'Association Suisse pour l'Essai des Matériaux, Zurich, septembre 1926. 3. Discussion, n° 34, Laboratoire Fédéral pour l'Essai des Matériaux, Zurich, février 1929.

W. Lode, Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle. Dissertation, Göttingen, 1926, Fasc. 303 der Forsch. Arbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Berlin, 1928.

De récents essais montrent d'ailleurs que dans certains cas on peut constater un comportement s'écartant de l'isotropie (voir Hohenemser et Prager : Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flussstahl. Z.A.M.M., 12, 1932.

ciales pour une courbe de contraintes de flambage arbitraire. Elle a été d'ailleurs employée récemment par exemple, pour les recherches de stabilité concernant le Pont des Trois Roses, sur le Rhin, à Bâle (poutres continues en tôles avec portées de 75 + 105 + 75 mètres), pont qui a été construit par la M.A.N., les Ateliers de Gustavsburg et la Buss A.G., de Bâle.

Lorsque la rigidité de la plaque se trouve uniformement réduite (état de contrainte dit homogène), les équations s'appliquent exactement. Si, par contre, l'état de contrainte n'est pas uniforme, τ_D varie alors avec le point considéré et les contraintes réduites suivant *c* sont alors trop faibles lorsque la réduction porte sur la contrainte maximum.

Dans le cas d'un régime de charge non homogène, et après le dépassement de la limite de proportionnalité, il faut en règle générale, compter sur une certaine compensation des contraintes. Pour pouvoir, en pareil cas, effectuer un calcul plus précis, il faudrait, en supposant connue la répartition des contraintes, introduire la rigidité de la plaque dans l'équation de déformation de cette plaque, à titre de fonction de la valeur de la contrainte.

$$\nabla^4 w + \frac{h.\,\sigma_x(y)}{D.\,\tau(y)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{7}$$

Il conviendrait enfin de rechercher également comment il se fait que les déformations permanentes s'accomplissent sans augmentation de volume [1]. Aux valeurs $m = 10/3$ dans le domaine élastique et $m = 2$ dans le domaine plastique, il devrait correspondre une différence de 21 °/₀ dans la rigidité des plaques.

Résumons maintenant notre manière de voir au sujet de la réduction du régime critique de charge dans le cas des limites générales de stabilité :

La réduction suivant *a* n'est pas à préconiser, car elle ne se trouve pas confirmée par les observations effectives et elle conduit à des contraintes de flambage trop élevées ;

Suivant *b*, et pour la zone $\sigma_P < \sigma < \sigma_S$ on obtient en général des valeurs suffisamment précises, de sorte que ce mode de réduction pourrait par exemple être appliqué lorsque les courbes des contraintes de flambage ne sont pas connues. Pour les plaques épaisses, la stabilité est toutefois ainsi surestimée, de sorte qu'il est à recommander de remplacer les valeurs de σ_K supérieures à σ_S par σ_S (ou la contrainte correspondant aux conditions de plasticité).

La réduction suivant *c* correspond au mieux à l'état actuel de nos connaissances. Elle est à recommander d'une manière générale, tant pour les régimes de charge homogènes que pour les régimes non homogènes. Pour ces derniers, on conservera une marge de sécurité, en effectuant la réduction pour les points qui sont soumis aux contraintes les plus élevées.

---

1. Voir les travaux de Roš et Eichinger mentionnés en (3) et, en particulier, la figure 12 du nº 2 et les figures 44, 65 et 66 du nº 3.

Dr. Ing. h. c. M. ROŠ,
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule
und Direktor der Eidg. Materialprüfungsanstalt, Zürich,

und

A. EICHINGER,
Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Eidg. Materialprüfungsanstalt, Zürich.

Allgemeine Betrachtungen :

Durch die Versuche, welche in der Eidg. Materialprüfungsanstalt in den Jahren 1926-1929 durchgeführt worden sind[1] ist erbracht, dass das Mass der plastischen Gestaltänderung : δ_g in ebenso einfacher Weise von der Vergleichspannung : σ_g abhängig ist, wie bekannterweise das Mass der elastischen Gestaltänderung : e_g durch dieselbe bedingt ist, nämlich :

$$\text{elastisch}: e_g = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 - e_x e_y - e_y e_z - e_z e_x + \frac{3}{4}(g_{xy}^2 + g_{yz}^2 + g_{zx}^2)}$$

$$= \frac{\sigma_g}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$\text{worin}: \sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\text{und plastisch}: \delta_g = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2 - \delta_x \delta_y - \delta_y \delta_z - \delta_z \delta_x + \frac{3}{4}(V_{xy}^2 + V_{yz}^2 + V_{zx}^2)}$$

$$= \frac{\sigma_g}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{sowie gesamt}: \varepsilon_g = e_g + \delta_g = \sigma_g \left\{ \frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \right\}$$

Es sind :	elastisch :	plastisch :	total :
e_x	$= \frac{1}{E}\left\{\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)\right\}$	$\delta_x = \frac{1}{D}\left\{\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right\}$	$\varepsilon_x = e_x + \delta_x$
e_y	$= \frac{1}{E}\left\{\sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_x)\right\}$	$\delta_y = \frac{1}{D}\left\{\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right\}$	$\varepsilon_y = e_y + \delta_y$
e_z	$= \frac{1}{E}\left\{\sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)\right\}$	$\delta_z = \frac{1}{D}\left\{\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right\}$	$\varepsilon_z = e_z + \delta_z$
g_{xy}	$= \frac{2\,\tau_{xy}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$V_{xy} = \frac{2\,\tau_{xy}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$\gamma_{xy} = g_{xy} + V_{xy}$

1. M. Roš u. A. Eichinger, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr : I Flussstahl, 1926, III Metalle, 1929 E.M.P.A.
M. Roš u. A. Eichinger, Kongress f. techn. Mechanik. Stockholm, 1930. « Weitere Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. »

$$g_{yz} = \frac{2\,\tau_{yz}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) \qquad V_{yz} = \frac{2\,\tau_{yz}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \qquad \gamma_{yz} = g_{yz} + V_{yz}$$

$$g_{zx} = \frac{2\,\tau_{zx}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) \qquad V_{zx} = \frac{2\,\tau_{zx}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \qquad \gamma_{zx} = g_{zx} + V_{zx}$$

Ebenso wurde damit erbracht, dass die plastische Volumenänderung ziemlich genau gleich Null ist : $\delta_x + \delta_y + \delta_z = 0$, weil $m = 2$; die mittlere Normalspannung $\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ ohne Einfluss auf die plastische Formänderung ;

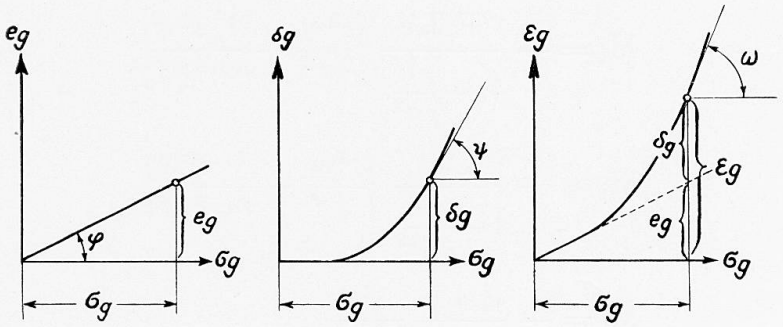

Fig. 1.

sowie dass die Quasiisotropie auch nach dem Ueberschreiten der E-Grenze bewahrt bleibt, da der Plastizitätsmodul D in allen Richtungen derselbe ist.

In bestimmten Fällen ist es günstiger, mit der Tangente an das σ_g — δ_g — Diagramm Fig. 1. zu operieren, statt mit dem D-Modul bezw. mit der plastischen Dehnungszahl $\frac{1}{D} = \frac{2}{3}\frac{\delta_g}{\sigma_g}$.

Das Letztere ist namentlich der Fall bei den Knickproblemen der Platten, von welchen wir beispielsweise die rechteckige Platte behandeln wollen :

Knicken rechteckiger Platten :

Wird die Platte in ebenem Zustand zentrisch durch σ_x^k und σ_y^k bis zur Knicklast gebracht, wobei die Elastizitätsgrenze überschritten ist, so treten bei einer virtuellen Verbiegung der Platte folgende Kräfteänderungen unter der Voraussetzung des Ebenbleibens der Querschnitte auf.

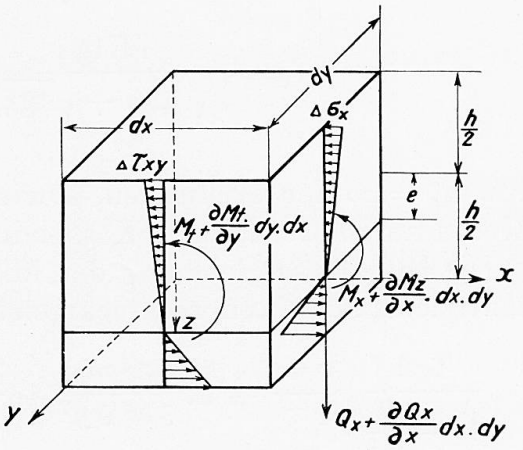

Fig. 2.

$$\text{Weil}: \Delta\varepsilon_x = \Delta e_x + \Delta\delta_x = \frac{1}{E}\left(\Delta\sigma_x - \frac{\Delta\sigma_y}{m}\right) + \operatorname{tg}\psi.\,\frac{2}{3}\left(\Delta\sigma_x - \frac{\Delta\sigma_y}{2}\right)$$

$$\Delta\varepsilon_y = \Delta e_y + \Delta\delta_y = \frac{1}{E}\left(\Delta\sigma_y - \frac{\Delta\sigma_x}{m}\right) + \operatorname{tg}\psi.\,\frac{2}{3}\left(\Delta\sigma_y - \frac{\Delta\sigma_x}{2}\right)$$

$$\Delta\gamma_{xy} = \Delta g_{xy} + \Delta V_{xy} = 2\,\tau_{xy}\left\{\frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \operatorname{tg}\psi\right\}$$

ist, können $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$, $\Delta\tau_{xy}$ daraus ermittelt werden.

Die konkave Seite folgt, was die Spannungsverteilung im Schnitt betrifft, der Tangente an das $\sigma_g - \varepsilon_g$ — Diagramm ($\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi$), die konvexe Seite dem $\operatorname{tg}\varphi$ des σ_g — e_g — Diagrammes d. h. E-Gesetz. Daraus erhält man den Abstand der neutralen Fläche von der Mittelfläche :

$$e = \frac{h}{2}\,\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\omega} - \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}{\sqrt{\operatorname{tg}\omega} + \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}} \text{ worin } \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi$$

Nun ist leicht, M_x, M_y, und M_t zu ermitteln, nämlich :

$$M_x = -\frac{E.J.c}{1 - \frac{1}{m^2}}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}$$

$$M_y = -\frac{E.J.c}{1 - \frac{1}{m^2}}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}$$

$$M_t = -\frac{E.J.c}{1 + \frac{1}{m}}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

$$\text{worin } J = \frac{h^3}{12} \text{ und } c = \frac{4\operatorname{tg}\varphi}{E\left\{\sqrt{\operatorname{tg}\omega} + \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\right\}^2}$$

Bezeichnet man ähnlich wie beim Knicken zentrisch gedrückter Stäbe das Produkt $E.c = T_k$ = Knickmodul, so kommt man zu :

$$T_k = \frac{4\,E\operatorname{tg}\varphi}{\left\{\sqrt{\operatorname{tg}\omega} + \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\right\}^2} = \frac{4\,E\,\frac{1}{\operatorname{tg}\omega}}{\left\{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}} + \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}\omega}}\right\}}$$

Für $m = \infty$ der elastischen, sowie plastischen Deformationen geht der T_k — Modul für plattenförmige Körper in denjenigen für Stäbe über.

Die Differentialgleichung der in beiden Axenrichtungen über die E-Grenze zentrisch gedrückten, rechteckigen Platte lautet bei einer virtuellen Verbiegung :

$$\frac{T_k\,J}{1 - \frac{1}{m^2}}\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2.\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\} + h.\left\{\sigma_x^k.\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y^k.\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\} = 0$$

Es ergibt sich daraus, dass die Durchbiegungsfläche ihre Form auch im Gebiet ausserhalb der E-Grenze nicht ändert, z. B. bei allseitig geführter Platte :

$$\omega = f.\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

womit alles gegeben ist, um Knickprobleme rechteckiger Platten auch ausserhalb der E-Grenze bei verschiedenen Randbedingungen lösen zu können.

Traduction.

Considérations générales.

Au cours des essais qui ont été effectués entre les années 1926 et 1929 au Laboratoire Fédéral pour l'Essai des Matériaux on a pu établir que le degré de déformation plastique δ_g est relié à la contrainte σ_g envisagée par une relation aussi simple que celle qui conditionne le degré de déformation élastique e_g par rapport à la contrainte considérée [1]. On a en effet :

Cas de l'élasticité :

$$e_g = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 - e_x e_y - e_y e_z - e_z e_x + \frac{3}{4}\left(g_{xy}^2 + g_{yz}^2 + g_{xz}^2\right)} = \frac{\sigma_g}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

où : $\sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3\left(\tau_{yz}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}$

Cas de la plasticité :

$$\delta_g = \sqrt{\delta_x^2 + {}_y^2 + \delta_z^2 - \delta_x \delta_y - \delta_y \delta_z - \delta_z \delta_x + \frac{3}{4}\left(V_{xy}^2 + V_{yz}^2 + V_{zx}^2\right)} = \frac{\sigma_g}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

et : $\varepsilon_g = e_g + \delta_g = \sigma_g\left[\frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right]$

On a

Elasticité	Plasticité	Au total
$e_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)\right]$	$\delta_x = \frac{1}{D}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right]$	$\varepsilon_x = e_x + \delta_x$
$e_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_x)\right]$	$\delta_y = \frac{1}{D}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right]$	$\varepsilon_y = e_y + \delta_y$
$e_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)\right]$	$\delta_z = \frac{1}{D}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]$	$\varepsilon_z = e_z + \delta_z$
$g_{xy} = \frac{2\tau_{xy}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$V_{xy} = \frac{2\tau_{xy}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$\gamma_{xy} = g_{xy} + V_{xy}$
$g_{yz} = \frac{2\tau_{yz}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$V_{yz} = \frac{2\tau_{yz}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$\gamma_{yz} = g_{yz} + V_{yz}$
$g_{zx} = \frac{2\tau_{zx}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$V_{zx} = \frac{2\tau_{zx}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$\gamma_{zx} = g_{zx} + V_{zx}$

On a pu établir également que la variation plastique de volume est assez sensiblement nulle :

$$\delta_x + \delta_y + \delta_z = 0$$

car $m = 2$; la contrainte normale moyenne

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

1. M. Roš et A. Eichinger, Contribution à l'étude des possibilités de rupture. — I. Acier (1926). — II. Métaux divers (1929). — L.F.E.M.

M. Roš et A. Eichinger, Congrès de Mécanique Industrielle, Stockholm, 1930. — Nouvelles contributions à l'étude des possibilités de rupture.

est sans influence sur la déformation plastique. De même, la quasi-isotropie reste assurée, même après le dépassement de la limite élastique, car le module de plasticité D est le même dans toutes les directions.

Dans certains cas déterminés, il est plus indiqué plutôt que de faire intervenir le module D ou le coefficient d'allongement plastique

$$\frac{1}{D} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta_g}{\sigma_g}$$

de travailler avec la tangente au diagramme $\sigma_g - \delta_g$ ci-contre.

C'est précisément le cas pour les problèmes de flambage des plaques, parmi lesquels nous traiterons à titre d'exemple le cas de la plaque rectangulaire.

Flambage des plaques rectangulaires.

Si une plaque plane est soumise axialement à des contraintes $\sigma_x{}^k$ et $\sigma_y{}^k$ jusqu'à la charge de flambage, la limite d'élasticité se trouvant dépassée, on obtient, pour une déformation virtuelle de cette plaque, les variations suivantes des efforts, en se basant sur l'hypothèse de la conservation de la section :

comme : $$\Delta \varepsilon_x = \Delta e_x + \Delta \delta_x = \frac{1}{E}\left(\Delta \sigma_x - \frac{\Delta \sigma_y}{m}\right) + tg\,\psi \cdot \frac{2}{3}\left(\Delta \sigma_x - \frac{\Delta \sigma_y}{2}\right)$$

$$\Delta \varepsilon_y = \Delta e_y + \Delta \delta_y = \frac{1}{E}\left(\Delta \sigma_y - \frac{\Delta \sigma_x}{m}\right) + tg\,\psi \cdot \frac{2}{3}\left(\Delta \sigma_y - \frac{\Delta \sigma_x}{2}\right)$$

$$\Delta \gamma_{xy} = \Delta g_{xy} + \Delta V_{xy} = 2\,\tau_{xy}\left[\frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) + tg\,\psi\right]$$

on peut en déduire $\Delta \sigma_x$, $\Delta \sigma_y$, $\Delta \tau_{xy}$.

La répartition des contraintes sur le côté concave est déterminée par la tangente au diagramme $\sigma_g - \varepsilon_g$, $(tg\,\varphi + tg\,\psi)$; sur le côté convexe, par $tg\,\varphi$ du diagramme $\sigma_g - e_g$ c'est-à-dire par la loi de l'élasticité. On en déduit l'intervalle entre la surface neutre et la surface médiane :

$$e = \frac{h}{2} \cdot \frac{\sqrt{tg\,\omega} - \sqrt{tg\,\varphi}}{\sqrt{tg\,\omega} + \sqrt{tg\,\varphi}} \text{ . où : } tg\,\omega = tg\,\varphi + tg\,\psi$$

Il est maintenant facile de déterminer M_x M_y et M_t :

$$M_x = -\frac{EJc}{1 - \frac{1}{m^2}}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

$$M_y = -\frac{EJc}{1 - \frac{1}{m^2}}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]$$

$$M_t = -\frac{EJc}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

où : $$J = \frac{h^3}{12}$$

et :
$$c = \frac{4\,\mathrm{tg}\,\varphi}{E\left(\sqrt{tg\,\omega}+\sqrt{tg\,\varphi}\right)^2}.$$

De même que dans le cas du flambage d'une barre soumise à une compression axiale, si l'on adopte la désignation :

$E.c = T_k$ = module de flambage, on obtient :

$$T_k = \frac{4\,E\,tg\,\varphi}{\left(\sqrt{tg\,\omega}+\sqrt{tg\,\varphi}\right)^2} = \frac{4E.\dfrac{1}{tg\,\omega}}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{tg\,\varphi}}+\sqrt{\dfrac{1}{tg\,\omega}}\right)^2}.$$

Pour $m = \infty$ (déformations élastiques aussi bien que déformations plastiques), le module T_k des éléments plans vient se confondre avec celui des barres.

Pour une déformation virtuelle, l'équation différentielle de la plaque rectangulaire soumise à une compression axiale suivant les deux directions de ses axes, au-dessus de la limite d'élasticité, devient :

$$\frac{T_k\,J.}{1-\dfrac{1}{m^2}}\left\{\frac{\partial^4\omega}{\partial_x^4}+2.\frac{\partial^4\omega}{\partial_x^2\,\partial_y^2}+\frac{\partial^4\omega}{\partial_y^4}\right\}+h.\left\{\sigma_y^k.\frac{\partial^2 w}{\partial_x^2}+\sigma_y^k.\frac{\partial^2 w}{\partial_y^2}\right\}=0$$

Il en résulte que la surface de flexion n'est modifiée ni dans sa position, ni dans sa forme, même dans la zone située au-dessus de la limite d'élasticité ; on a par exemple, pour une plaque maintenue sur tous ses côtés :

$$\omega = f.\ \sin\frac{\pi x}{a}.\ \sin\frac{\pi y}{b}.$$

On est donc en possession de tous les éléments pour pouvoir résoudre le problème du flambage des plaques rectangulaires même au-dessus de la limite d'élasticité, et pour différentes conditions aux bords.