

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 1 (1932)

**Artikel:** Stabilität und Festigkeit von auf Druck und Biegung beanspruchten  
Bauteilen: einleitendes Referat

**Autor:** Karner, L.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-438>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## I 1

# STABILITÄT UND FESTIGKEIT VON AUF DRUCK UND BIEGUNG BEANSPRUCHTEN BAUTEILEN

STABILITÉ ET RÉSISTANCE DES PIÈCES TRAVAILLANT SIMULTANÉMENT  
A LA COMPRESSION ET A LA FLEXION

STABILITY AND STRENGTH OF STRUCTURAL MEMBERS SUBJECTED  
TO COMPRESSION AND BENDING

EINLEITENDES REFERAT  
RAPPORT D'INTRODUCTION  
INTRODUCTORY REPORT

Dr.-Ing. L. KARNER,  
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich.

### I. Einleitung.

Die Berechnung und Dimensionierung von Bauteilen, die auf Druck und Biegung beansprucht werden, gehört zu den schwierigsten Aufgaben der Statik. Wenn äussere Belastungen im Bauteil Druckkräfte allein, oder solche im Zusammenwirken mit äusseren Biegemomenten und Querkraften hervorrufen, treten senkrecht zu den Axialkräften Deformationen auf, die Zusatzmomente und erhebliche Spannungen hervorrufen. Je nach dem Ueberwiegen des Einflusses der Momente oder des Einflusses der Druckkräfte, haben wir es mit einer Spannungs- oder mit einer Stabilitätsaufgabe, bzw. mit einem gemischten Problem zu tun. Im ersteren Falle wird für die Dimensionierung das Einhalten bestimmter zulässiger Spannungen massgebend, während im zweiten Falle die Untersuchung der Sicherheit gegen Erreichen eines labilen Gleichgewichtszustandes erforderlich ist.

Zu den bekanntesten und am meisten entwickelten Aufgaben gehört die Berechnung zentrisch belasteter Säulen und Stäbe. Die hierbei auftretenden Untersuchungen werden bereits erschwert, wenn die Querschnitte dieser Bauglieder nicht voll, sondern gegliedert sind, da dann die Stabilität der Teilglieder geprüft, sowie deren Einfluss auf die Gesamtstabilität berechnet werden muss. Aber auch bei vollen Querschnitten spielt die Frage des Ausbeulens (Ausknickens) der einzelnen auf kürzeren Strecken frei abstehenden Flansche, sowie der dünnen Stege, eine bedeutende Rolle.

Im Stahlbrückenbau hat in den letzten Jahren die Anwendung weitge-



spannter vollwandiger Balkenbrücken ausserordentliche Fortschritte gemacht. Bei diesen Bauformen muss ganz besonders auf die Knicksicherheit der Stegbleche und auf eine zweckmässige Art der Versteifungen geachtet werden.

Die rechnerischen Untersuchungen werden schwieriger, wenn zu den axialen Beanspruchungen bei Säulen und Stäben oder zu den in der Ebene der Platten wirkenden Momenten, Normal- und Querkraften noch äussere Momente hinzutreten, die Verformungen in einer Stabebene oder senkrecht zur Plattenebene hervorrufen.

Solange sich alle auftretenden Dehnungen elastisch verhalten, sind auch bei kombinierten Beanspruchungen sowohl Knick- als Festigkeitsuntersuchungen relativ einfach. Ungleich schwieriger und noch keineswegs abgeklärt ist dagegen das Verhalten der auf Druck und Biegung beanspruchten Konstruktionen im unelastischen, bezw. plastischen Bereich unserer Baustoffe. Da es praktisch als ausgeschlossen betrachtet werden kann, das unelastische Verhalten der Materialien (nach Ueberschreiten der Proportionalitätsgrenze) rechnerisch zu erfassen oder in Gleichungen zu kleiden, bleibt es meist bei der Notwendigkeit der Durchführung von Versuchsrechnungen oder des Ausprobierens auf Grund meist etwas willkürlicher Annahmen (Ebenbleibens der Querschnitte u. s. w.), um für schwierigere Belastungsfälle das Gleichgewicht zwischen den äusseren Lasten und den inneren Beanspruchungen berechnen zu können. Beispielsweise müssen wir schon bei Baustahl konstatieren, dass gerade Stabilitätsfragen nicht ohne Berücksichtigung des plastischen Verhaltens gelöst werden können. Um nur ein Beispiel zu nennen, verweisen wir auf den exzentrisch beanspruchten Druckstab, der auch bei grösseren Schlankheitsgraden zum Teil unelastisch wird, wenn er in das labile Gleichgewicht übergeht.

Schliesslich deuten wir noch an, dass die meisten Probleme dieser Art bei genauerer Untersuchung eine weitere Erschwernis dadurch erfahren können, dass sich Stabilitäts- und Festigkeitsuntersuchungen auf räumliche Spannungszustände erstrecken und sodann die Veränderlichkeit der Elastizitätsmoduli nach allen Seiten ihren Einfluss geltend macht.

## II. Entwicklung und Stand der wissenschaftlichen Forschung und Versuchspraxis <sup>1</sup>.

Die älteste Untersuchung eines durch eine Druckkraft beanspruchten geraden Stabes stammt von EULER aus dem Jahre 1744. Die Euler-Formel kam jedoch später wegen ihres Versagens bei gedrunghenen Stäben in Misskredit, obwohl schon LAMARLE im Jahre 1845 darauf hingewiesen hat, dass für Holz die Gültigkeit der Euler-Formel an die Elastizitätsgrenze gebunden sei. In der Folge behalf man sich mit empirisch abgeleiteten Formeln von TETMAYER, SCHWARZ-RANKINE u. a.. TETMAYER hatte allerdings bereits die Euler-Formel für den elastischen Bereich wieder zu Ehren gebracht. Die erste Arbeit ENGESSERS, in der er auf das plastische Verhalten hinwies, stammt aus dem Jahre 1889, doch fand sie erst ihre volle Anerkennung durch die Arbeiten KÁRMÁN's aus

1. Siehe Literaturverzeichnis.

dem Jahre 1910, durch welche die Grundlage für die Theorie von ENGESSER-KÁRMÁN geschaffen wurde. Nach dieser ist es zunächst wenigstens für das zentrische Knicken möglich geworden, im unelastischen Bereiche die Verhältnisse richtiger zu erfassen und Säulen und Stäbe verschiedener Materialien auf Grund der Kenntnis ihres Druck-Stauchung-Diagrammes zu berechnen.

Das nächste Problem, dem sich nun Versuchspraxis und Theorie zuwenden, mussten, ist das Studium des exzentrisch gedrückten Stabes; hier sind die Arbeiten von KROHN und ganz besonders die von ROŠ und BRUNNER zu erwähnen. Von besonderer Bedeutung für die internationale Verbreitung der Erkenntnisse und für die kritische Behandlung der einzelnen Auffassungen sind die Berichte und Diskussionen der Internationalen Tagung für Brückenbau und Hochbau im Jahre 1928 in Wien geworden, und wir verweisen ganz besonders auf diesen Bericht (siehe Literaturverzeichnis).

Ausser der Behandlung der grundlegenden Fragen, die den vollwandigen Stabquerschnitt bei zentrischer und exzentrischer Beanspruchung betreffen, sind gleichzeitig von einer grösseren Zahl von Forschern, — wir nennen BLEICH, CHWALLA, DONDORFF, ELWITZ, A. FÖPPL, HUBER, KAYSER, KRIEMLER, KROHN, KÜBLER, LOVE, MAYER, MELAN, VON MIESES, MÜLLER-BRESLAU, OSTENFELD, REISSNER, TIMOSHENKO, WADDEL, ZIMMERMANN, u. a. — theoretische Untersuchungen vorgelegt worden, bei welchen kombinierte Lastfälle, verschiedenartige Lagerungen, veränderliche Querschnitte der Stäbe u. s. w. behandelt wurden. Auf dem Gebiete der Theorie des Knickens von Platten ist besonders TIMOSHENKO zu nennen, nachdem als erster BRYAN 1891 sich mit dem Problem des Ausbeulens rechteckiger Platten beschäftigte. Ausser anderen Forschern wie REISSNER, WAGNER, SCHLEICHER, u. s. w. hat besonders BLEICH die Theorie der Stege und Flansche gedrückter Stäbe, sowie die Knicksicherheit der Stegbleche von vollwandigen Stahlträgern der praktischen Verwendung durch Ausarbeitung von geeigneten Formeln zugänglich gemacht.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass die Berechnung von Stäben, Platten und zusammengesetzten Konstruktionsformen bei Auftreten von Druck und Biegung sowohl in Bezug auf Knick- als auch Festigkeitsberechnungen keine unüberwindlichen Schwierigkeiten bietet, solange die Verformungen sich im elastischen Bereich abspielen. Treten in einzelnen Teilen jedoch plastische Deformationen auf, so werden die Untersuchungen bedeutend schwieriger, weil das unelastische Verhalten, durch besondere Werkstoffeigenschaften bedingt, keine einwandfreie Gleichgewichtsuntersuchung mehr ermöglicht. Dem technisch-wissenschaftlichen und dem praktischen Versuchswesen bleiben hier noch ein sehr weites Arbeitsfeld offen.

Das Versuchswesen hat dabei eine doppelte Aufgabe. Die Praxis erfordert praktische Dimensionierungs- und Bemessungsformeln für mannigfache Belastungsarten. Die Wissenschaft wünscht die Vorgänge auch nach Ueberschreiten der in der Praxis zulässigen Beanspruchungen und Deformationen kennen zu lernen und wünscht vor allem im Zusammenhang mit Materialprüfungsfragen die Vorgänge beim Auftreten der Instabilität genauer zu prüfen.

Für die Abklärung der Grundlagen ist es erforderlich, die Verhältnisse beim Gleichgewichtswechsel im Zusammenhang mit den auftretenden Spannungen zu betrachten.

Wir wollen nun verschiedene Belastungsfälle am einfachen, in seinen Endpunkten gelenkig gelagerten Stab, von diesem Gesichtspunkt aus ganz allgemein untersuchen, da sich bei anderen Formen sinngemässe Verhältnisse ergeben.

### 1. Der zentrisch belastete gerade Stab im elastischen Bereich.

Wird ein an den Enden gelenkig gelagerter Stab durch eine Druckkraft zentrisch belastet, so bleibt er infolge Belastungen unterhalb der kritischen Knicklast (Euler'sche Knicklast) gerade. Wird die Stabachse durch Hinzutreten von äusseren Momenten gebogen (und treten keine Randspannungen über der Proportionalitätsgrenze auf) so kehrt der Stab nach Wegfallen der Ausbiegungsursachen wieder in die gerade Lage zurück.

Der Stab bleibt auch bei weiterer Steigerung der Last gerade, er ist im stabilen Gleichgewicht bis die kritische Last, die Knicklast, erreicht ist. Der Stab ist bisher nur durch eine Normalkraft beansprucht. Wird nunmehr die Last um einen noch so kleinen Teil gesteigert, so tritt eine Ausbiegung auf, es wird ein Zusatzmoment wirksam. Nur diesen Vorgang sprechen wir als Knickerscheinung an. Die Lage der Stabachse entspricht nun neuerdings einer Gleichgewichtslage. Bei weiterer langsamster Laststeigerung nimmt die Ausbiegung rasch zu, die Randspannungen überschreiten in Stabmitte bald die Proportionalitätsgrenze und der Stab wird teilweise unelastisch.

Die weiteren Formänderungen und das schliessliche Unbrauchbarwerden des Stabes spielt sich für praktische Schlankheitsverhältnisse im unelastischen Bereich ab.

### 2. Der exzentrisch belastete Stab im elastischen Bereich.

Wirkt die Druckkraft exzentrisch, dann ist bereits ein Anfangsmoment vorhanden, das eine Ausbiegung der Stabachse bedingt. Bei unbegrenzt elastischem Material entspricht jeder Belastung ein Gleichgewichtsfall. Instabilität kommt nicht in Frage. Aber auch hier können wir durch die Berechnung feststellen, bei welcher Belastung die Randspannungen die Proportionalitätsgrenze überschreiten, und von dieser Belastung an ist wieder plastisches Verhalten massgebend.

### 3. Der zentrisch belastete gerade Stab im unelastischen Bereich.

Ist die Belastung unterhalb der kritischen Last (Knicklast), so bleibt der Stab gerade. Bleiben die Spannungen dabei unterhalb der Proportionalitätsgrenze, so kehrt der Stab in die gerade Lage zurück, wenn die Ausbiegungsursache entfernt wird. Ueberschreitet jedoch die Axialkraft (die jedoch unter der kritischen Last bleibt) die Grenze, für die die Spannungen die Proportionalitätsgrenze überschreiten, dann dürfen wir einen solchen Stab nicht mehr ausbiegen, da er sonst in eine zweite ausgebogene Gleichgewichtslage übergeht, die bereits eine plastische Deformation eines Teiles des Stabes bedingt. Unterhalb der Knicklast, aber über der Proportionalitätsgrenze, gibt es somit eine Gleichgewichtslage mit gerade bleibender Achse und eine solche mit ausgebogener Stabachse. (Letzterer Fall entspricht bei weiterer Steigerung der

Last wegen der bereits vorhandenen Exzentrizität den im folgenden behandelten Fall 4). Setzen wir nun den Stab noch gerade voraus und steigern wir die Belastung bis zur kritischen Knicklast, so weicht der Stab ähnlich aus, wie im Knickstadium des elastischen Gebietes. Die Ausbiegung nimmt rasch zu, die Zusatzmomente wachsen und der Stab erliegt den Verformungen im plastischen Gebiet.

#### 4. Der exzentrisch belastete gerade Stab im unelastischen Bereich.

Der Stab verhält sich zuerst wie unter 2. Wird die Last gesteigert, so deformiert sich der Stab nach den Gesetzen des Baustoffes, bis er schliesslich ins labile Gleichgewicht kommt, d. h. bei geringster Lastzunahme ausweicht. Dieser Vorgang des Eintretens des labilen Gleichgewichtes ist nicht zu verwechseln mit den früher geschilderten Vorgängen des Knickens. Beim Knicken haben wir es mit dem Wechsel aus einer Gleichgewichtslage (gerade Stabachse unter Normalkraft) in eine andere Gleichgewichtslage (gekrümmte Achse unter Normalkraft und Biegemoment) zu tun. Im Falle des Eintretens des labilen Gleichgewichtes jedoch, wenn ein Teil des Stabes unelastisch wird, ist das Material des Stabes nicht mehr im Stande, den äusseren Kräften genügend Widerstand entgegen zu setzen. Für praktische Verhältnisse ist dieser Zustand des Eintretens der Instabilität im plastischen Bereich auch wirksam für die Belastungsfälle unter 1) 2) und 3), wenn nach dem Ueberschreiten der Proportionalitätsgrenze plastische Verformungen eintreten. Dieser Vorgang lässt sich auch versuchstechnisch deutlich verfolgen, wenn Vorsorge getroffen wird, dass die Last auch im Momente des Ausweichens des Stabes wirksam bleibt und wenn unbegrenzte Deformationsmöglichkeit besteht. Die Stabachse ist zunächst, auch wenn teilweise bereits die Streckgrenze überschritten ist, in allen Teilen gekrümmt; es ist dies der Fall des in allen Teilen noch biegungssteifen Stabes. Wenn jedoch in Stabmitte, als der Stelle des grössten Momentes, infolge mangelnden inneren Widerstandes das Stabmaterial nicht mehr im Stande ist, das äussere Moment aufzunehmen, so tritt an dieser Stelle eine gewisse Gelenkwirkung auf. Ein Gleichgewicht wird für ein solches Tragwerk sofort unmöglich, da der Stab in der Mitte nurmehr begrenzt oder garnicht mehr biegesteif ist. Diesem Gebilde entspricht eine starke Verringerung der Momentenwirkung in beiden Stabhälften, und daher strecken sich die Stabenden, soweit sie nicht bereits dauernd deformiert sind.

#### 5. Schlussfolgerungen.

Die geschilderten Erscheinungen des Knickens und der Instabilität treten bei Stäben mit nicht gelenkiger Lagerung, bei Platten und anderen Körperformen sinngemäss auf. Wir fügen noch hinzu, dass im elastischen Bereich die einzelnen Belastungen hintereinander und in verschiedener Reihenfolge aufgebracht werden können, um immer den gleichen Endzustand an Verformung und an Spannungen zu erhalten. Dies trifft nicht mehr zu, wenn Teile der Konstruktion plastisch verformt werden.

Es ist selbstverständlich, dass die geschilderten verschiedenen Vorgänge für verschiedene Baustoffe, je nach deren Materialeigenschaften, verschieden sind. Wir haben im grossen und ganzen bei unseren Betrachtungen normalen Baustahl im Auge gehabt.

Wir kommen zum Schluss, dass für das genaue versuchstechnische Studium und zur theoretischen Abklärung der Fragen des Knickens, ganz besonders aber für die Frage des Auftretens labiler Gleichgewichtsfälle im plastischen Bereich die Kenntnis der auftretenden Spannungen erforderlich wird. Ganz besonders ist es erwünscht, diejenigen Belastungsfälle zu kennen, unter welchen die Proportionalitätsgrenze an irgend einer Stelle überschritten wird, um den Augenblick des Beginnes der plastischen Verformung zu erfahren.

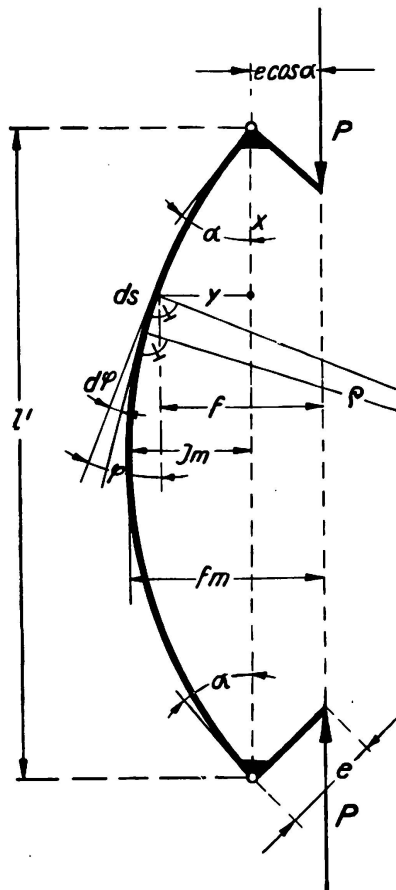


Fig. 1.

Gelenkig gelagerter Stab mit exzentrischer Belastung im elastischen Bereich.

Barre articulée aux appuis avec charge excentrée, dans les limites de l'élasticité.

Member with Hinged Bearings and Eccentric Loading in the Elastic Zone.

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{K^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \cdot \frac{1}{2k}$$

### III. Gleichgewichtsberechnungen für elastische Baustoffe.

Wir setzen unbegrenzt elastisches Material mit dem Elastizitätsmodul E voraus und nehmen, um die Ableitung ganz allgemein zu gestalten, den Fall exzentrischer Belastung an. Für den an beiden Stabenden gelenkig gelagerten Stab gilt

Abb. 1. Sollen unsere Entwicklungen für kleine Exzentrizitäten, und im Grenzübergang für die zentrische Belastung gelten, so müssen wir die genaue Biegelinie berücksichtigen und wir setzen

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{P(e \cos \alpha + y)}{EJ}$$

J ist das Trägheitsmoment des Querschnittes. Die Beziehung zwischen y, ds und phi ist durch

$$y = \int_0^s ds \sin \varphi \text{ gegeben. Setzen wir } k = \sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

$$\text{so ergibt sich: } \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2k^2 \cos \varphi + C.$$

Die Konstante bestimmt sich aus den Beziehungen am Stabende, wenn phi = alpha wird aus

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{M_\alpha}{EJ} = -k^2 e \cos \alpha. \text{ Damit erhalten wir die Beziehung}$$

$$\text{in der } K^2 = \left(\frac{1}{4} k^2 e^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \text{ bedeutet.}$$

Führt man die Integration über die ganze gebogene Stabachse l (unter Ver-

nachlässigung ihrer Verkürzung durch die reine Druckbelastung  $P \cos \varphi$  durch, so erhält man in allgemeinsten Form :

$$l = \frac{1}{k} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{K^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \dots \dots \dots \text{Gl (1)}$$

Das Integral ist nur mit Reihenentwicklung zu lösen und ergibt :

$$\begin{aligned} l = \frac{2}{k} & \left[ \arcsin \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{K} \left\{ 1 + 0,25 K^2 + 0,1406 K^4 + 0,0977 K^6 + \dots \right\} \right. \\ & - \frac{k}{2} e \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \left\{ 0,25 + 0,1406 K^2 + 0,0977 K^4 + \dots \right\} \\ & - \frac{k}{2} e \cos \alpha \sin^3 \frac{\alpha}{2} \left\{ 0,0937 + 0,0651 K^2 + 0,0050 K^4 + \dots \right\} \\ & \left. - \frac{k}{2} e \cos \alpha \sin^5 \frac{\alpha}{2} \left\{ 0,0391 + 0,0299 K^2 + \dots \right\} - \dots \right] \text{Gl (2)} \end{aligned}$$

Wird  $e = 0$ , dann bekommen wir für zentrische Belastung (aber bei vorhandener Ausbiegung), da  $K = \sin \frac{\alpha}{2}$  wird und da  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$  ist :

$$l = - \frac{\pi}{k} \left\{ 1 + 0,25 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 0,1406 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 0,0977 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\} \text{Gl (3)}$$

Geht schliesslich auch  $\alpha$  in 0 über (nur bei  $e = 0$  möglich), dann wird

$$l = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{EJ}{P}} \dots \dots \dots \text{Gl (4)}$$

was der Euler'schen Knickkraft bei zentrischer Belastung entspricht.

Die Gleichung (2) ist nicht in geschlossener Form nach  $P$  auflösbar. Bei gegebenen Stababmessungen und Belastung kann die Gleichgewichtslage nur durch Probieren ermittelt werden. Dagegen eignet sich die Form der Gleichung (2) sehr gut zur Aufstellung von Tabellen und graphischen Darstellungen. Für praktische Fälle und mit Rücksicht auf die Unzulässigkeit grösserer Deformationen, bezw. mit Rücksicht auf das Ueberschreiten der Proportionalitätsgrenze in den Randfasern kommen für die Auswertung nur ganz wenige Glieder in Frage. Es ergeben sich weiter die Deformationen zu :

$$y = \frac{2}{k} \sqrt{K^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} - e \cos \alpha \quad \text{Gl (5)}$$

$$y_m = \frac{2}{k} K - e \cos \alpha \quad \text{Gl (7)}$$

$$f = \frac{2}{k} \sqrt{K^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \dots \dots \dots \text{Gl (6)}$$

$$f_m = \frac{2}{k} K \dots \dots \dots \text{Gl (8)}$$

Eliminiert man aus der Gleichung (2) den Wert  $K$  durch Einführen des Hebelarmes  $f_m$ , so geht sie in die Form über :

$$l = \frac{2}{k} \left[ \arcsin \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{k \cdot f_m}{2}} \left\{ 1 + 0,25 \frac{k^2}{4} \cdot f_m^2 + 0,1406 \frac{k^4}{16} \cdot f_m^4 + \dots \right\} - \frac{k}{2} e \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \left\{ 0,25 + 0,1406 \frac{k^2}{4} \cdot f_m^2 + \dots \right\} - \dots \right] \text{ Gl (9)}$$

Für  $e = 0$  wird der  $\arcsin = \frac{\pi}{2}$  und Gleichung 9 nimmt die Form an, die schon bei Grashof durch Integration der genauen Differentialgleichung der Biegelinie erscheint :

$$l = \frac{\pi}{k} \left\{ 1 + 0,25 \frac{k^2}{4} \cdot f_m^2 + 0,1406 \frac{k^4}{16} \cdot f_m^4 + \dots \right\} \text{ Gl (10)}$$

In den vorangehenden Berechnungen sind die Einflüsse der Querkkräfte, der Stabverkürzung und der Querschnittsveränderung vernachlässigt. Da wir nur vergleichende Betrachtungen anstellen werden, führen wir für die Auswertung der Gleichung (2) die Schwerpunktspannung  $\sigma_n = \frac{P}{F}$  und den Schlankheitsgrad  $\lambda = \frac{l}{i}$  ein. Wir nehmen ferner einen rechteckigen Querschnitt mit der Höhe  $h$  und der Breite  $b$  an und beziehen die Grösse der Exzentrizität auf die Kernweite, sodass  $e = m \frac{h}{6}$  wird. Es ergibt sich nun

$$k = \frac{\lambda}{i} \sqrt{\frac{\sigma_n}{E}} \text{ und e. } k = 0,577. m. \sqrt{\frac{\sigma_n}{E}}$$

Schliesslich berechnen wir noch den grössten Hebelarm für die Last  $P$  in Stabmitte aus der Gleichung (8) durch Einsetzen der obigen Werte zu :

$$\frac{f_m}{h} = \frac{1}{6} \sqrt{m^2 \cos^2 \alpha + 12 \frac{E}{\sigma_n} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \dots \text{ Gl. (11)}$$

Als Elastizitätsmodul führen wir  $E = 2210 \text{ t/cm}^2$  ein, welcher Wert normalem Baustahl entspricht und den wir zunächst unbegrenzt konstant wählen.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich für die Gleichung (2) und für die Beziehung  $\frac{f_m}{h}$  Kurvenscharen zeichnen, die in Fig. 2 dargestellt sind und für verschiedene Werte  $m$  gelten. Jeder Punkt dieser graphischen Darstellungen gibt für die betreffende Exzentrizität die zusammengehörigen Werte  $\sigma_n$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$  und  $\frac{f_m}{h}$ , für die Gleichgewicht herrscht.

Die Fig. 2a für  $m = 0$  entspricht zentrischer Belastung. In dieser Darstellung ist der Masstab für  $\lambda$  nur bis zum Erreichen der Knickspannung derselbe wie in den übrigen Teilabbildungen. Von dieser Stelle ab entspricht bei gleichbleibender Belastung (konstantes  $\sigma_n$ ) einem grösser werdenden Winkel  $\alpha$



ein grösser werdender Schlankheitsgrad. Die Zunahme  $\Delta\lambda$  ist jedoch in hundertfachem  $\lambda$  Masstab aufgetragen.

Aus der Gleichung (3) für zentrische Belastung können die zusammengehö-

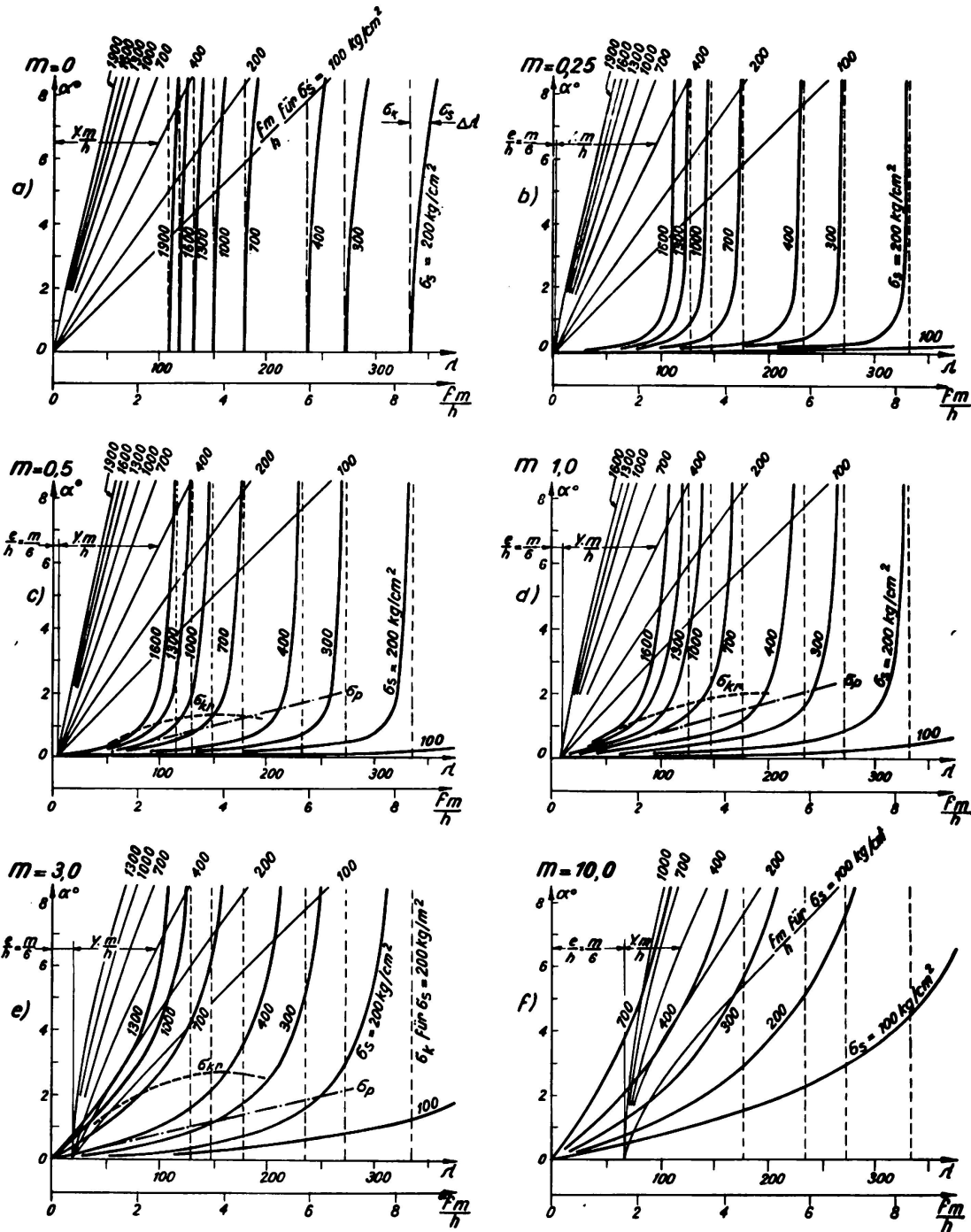


Fig. 2.

Gelenkig gelagerter Stab im elastischen Bereich. Beziehungen zwischen Schwerpunktsspannungen, Schlankheitsgraden und Deformationen, für verschiedene Exzentrizitäten.

Barre articulée aux appuis, travaillant dans la zone élastique. Relations entre les efforts au centre de gravité, les degrés de finesse et les déformations pour différentes exzentrizités.

Member with Hinged Bearings, in the Elastic Zone. Relations between stresses at centre of gravity, slenderness ratios and deformations for various eccentricities.



rigen Werte der Stablast  $P$  nach Ueberschreitung der Knicklast  $P_k$  und des Winkels  $\alpha$  leicht bestimmt werden :

$$P = P_k \left\{ 1 + 0,25 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 0,1406 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\}$$

Die folgende Tabelle gibt einen Einblick in diese Zusammenhänge.

$P/P_k$	1,00015	1,00095	1,0038	1,0350	1,0810
$\alpha$	2°	5°	10°	30°	45°
$\frac{y_m}{l}$	0,011	0,028	0,055	0,162	0,234

Die Fig. 2b-2f zeigen, dass für ein gegebenes  $m$  jede  $\sigma_n$ -Kurve sich asymptotisch der Vertikalen durch jenen Schlankheitsgrad  $\lambda_k$  nähert, für den  $\sigma_n$  bei zentrischer Belastung Knickspannung wird. Für Stabquerschnitte mit der Schwerpunktsspannung  $\sigma_n$  bleiben bei kleineren Exzentrizitäten mit zunehmenden  $\lambda$  die Deformationen zunächst gering, um dann gegen den Schlankheitsgrad für zentrisches Knicken zu plötzlich rasch anzuwachsen.

Bei grösseren Exzentrizitäten bewirkt das Ueberwiegen des Momentes bei wachsendem  $\lambda$  eine raschere Zunahme der Werte  $\alpha$  und  $f_m$ ; jedoch sind die Uebergänge gegen den kritischen Schlankheitsgrad zu weniger unvermittelt.

Für den gewählten Elastizitätsmodul  $E$  und für eine entsprechende Proportionalitätsgrenze  $\sigma_p = 1,9 \text{ t/cm}^2$  ist sehr bald für die einzelnen Linien diejenige Grenze erreicht, für die in der Randfaser der Druckseite  $\sigma_p$  überschritten und der Stab teilweise unelastisch wird.

Für die Exzentrizitäten  $m = 0,50, 1,0$  und  $3,0$  sind  $\sigma_p$ -Linien eingetragen. Diese geben im Schnitt mit einer  $\sigma_n$ -Kurve den Schlankheitsgrad, für den gleichzeitig in der Randfaser der Druckseite  $\sigma_p$  erreicht wird. Nur zusammengehörige Werte von  $\alpha$ ,  $\lambda$  und  $\sigma_n$ , die unter der  $\sigma_p$ -Kurve liegen, entsprechen Belastungsfällen, für welche der ganze Stab elastisch ist. Ueber der  $\sigma_p$ -Kurve haben wir es mit Belastungsfällen zu tun, für die der ganze Stab oder Teile desselben unelastisch werden. Unsere Kurvenscharen gelten somit praktisch nur bis zur  $\sigma_p$ -Kurve.

Für die gleichen Werte  $m$  sind auch  $\sigma_{kr}$  Kurven eingezeichnet. Das sind diejenigen kritischen Schwerpunktsspannungen, für die nach den Versuchen von Roß Knicken des exzentrisch beanspruchten Stabes oder, nach unseren eingangs gebrachten Erläuterungen, Instabilität eintritt.

Für die drei dargestellten  $m$ -Fälle liegen für die in der Praxis zulässigen Schlankheitswerte die Instabilitäten in dem Bereich, für welchen der Stab teilweise oder ganz unelastisch wird. Ein Unterschreiten der  $\sigma_p$ -Kurve durch die Linie  $\sigma_{kr}$ , auch bei sehr kleinen Werten  $m$ , ist nach dem Gesagten nicht möglich.

Um die Spannungsverhältnisse bei den exzentrischen Druckbeanspruchungen besser überblicken zu können, werden wir noch die auftretenden Span-

nungen ermitteln. Wir beschränken uns darauf, die grössten Randspannungen für den Rechteck-Querschnitt im Stabmitte zu berechnen.

$$\sigma_{m \min}^{\max} = \frac{P}{F} \pm \frac{P \cdot f_m}{J} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_n \left( 1 \pm 6 \frac{f_m}{h} \right) \dots \dots \dots \text{Gl (12)}$$

F ist die Querschnittsfläche und J ist das Trägheitsmoment.

Die grössten und kleinsten Spannungen in Stabmitte können ferner auch wie folgt angeschrieben werden :

$$\sigma_{m \min}^{\max} = \sigma_n \left( 1 \pm \lambda \frac{h}{l} \sqrt{\frac{E}{\sigma_n}} \cdot K \right) \dots \dots \dots \text{Gl (13)}$$

Uebersteigt beim zentrisch belasteten Stab die Druckkraft die Knicklast, dann lassen sich die Randspannungen für den Querschnitt in der Stabmitte sinngemäss bestimmen.

$$\sigma_{m \min}^{\max} = \sigma_n \left( 1 \pm \lambda \frac{h}{l} \sqrt{\frac{E}{\sigma_n}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right) \dots \dots \dots \text{Gl (14)}$$

Wenn wir für  $\sigma_n$  bei kleinen Winkeln  $\alpha$  wegen der Geringfügigkeit des Zuwachses von P gegenüber  $P_k$  den Wert  $\sigma_k$  einsetzen, wird für zentrische Last :

$$\sin \frac{\alpha_p}{2} = (\sigma_p - \sigma_k) \frac{l}{h} \cdot \frac{1}{\lambda \cdot E} \dots \dots \dots \text{Gl (15)}$$

worin  $\alpha_p$  den Ablenkungswinkel bedeutet, für den am Rande  $\sigma_p$  erreicht wird.

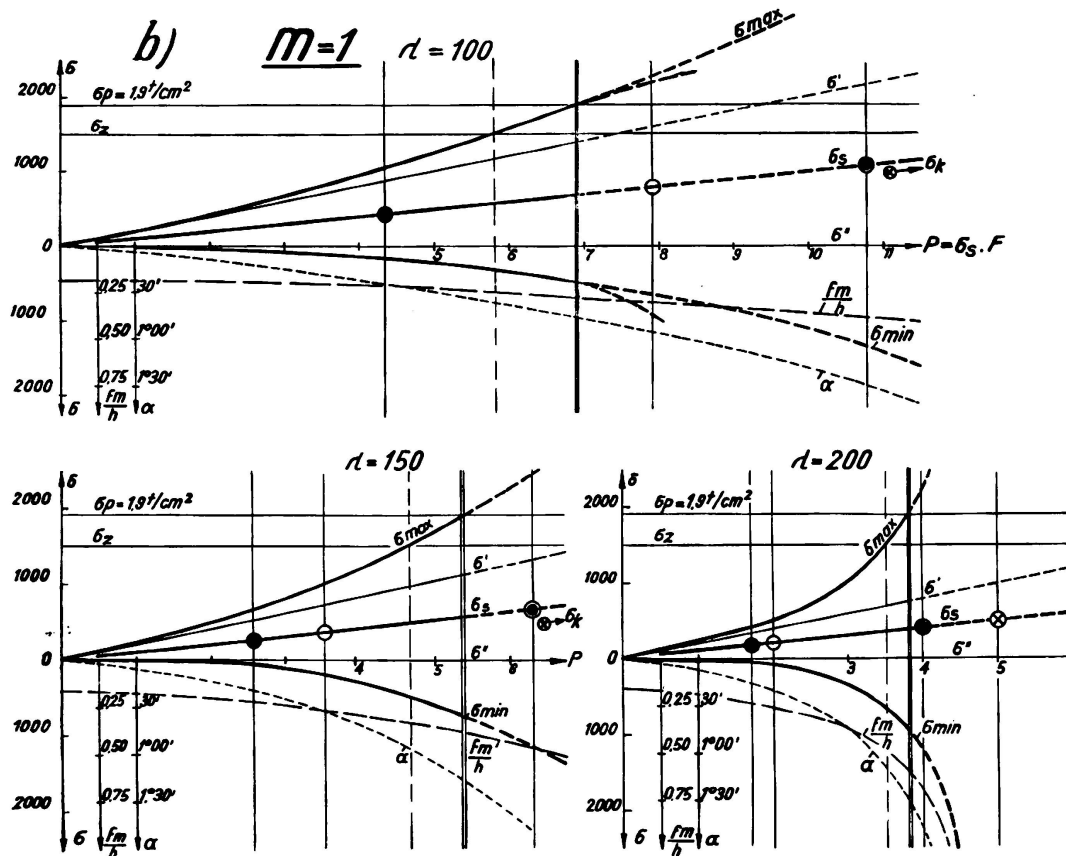
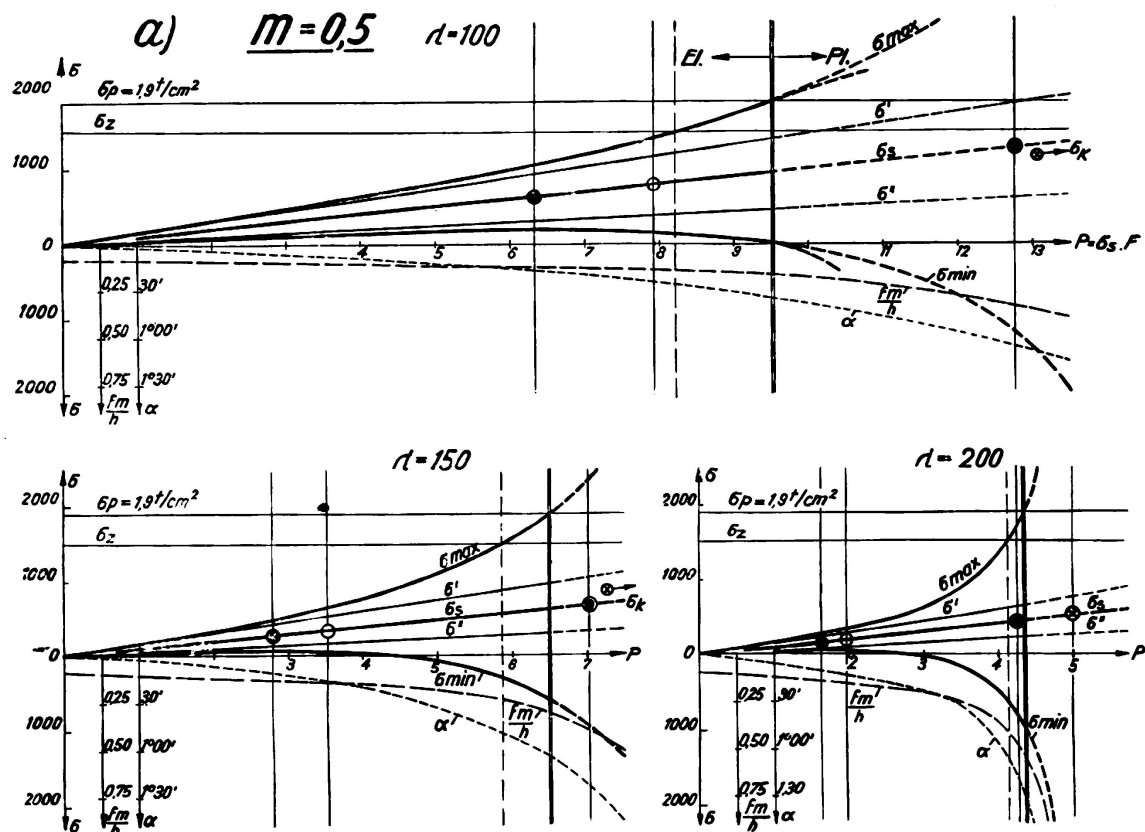
Die folgende Tabelle zeigt solche zusammengehörige Werte.

$\lambda$	$\alpha$	$\frac{y_m}{l}$	$y_m$ für $l = 500 \text{ cm}$
ca. 107	0°	0	0
150	0°40'	0,0037	1,85 cm
200	1°18'	0,0072	3,60 cm
250	1°53'	0,0103	5,15 cm

Nach der Gleichung (13) sind für  $m = 0,5$ ,  $m = 1,0$  und  $m = 3,0$  je für die Schlankheitsgrade 100, 150 und 200 für eine wachsende Kraft  $P = \sigma_s$ . F verschiedene Spannungswerte ermittelt und in den Fig. 3a, 3b, und 3c dargestellt.

Auf den Abszissen sind über den Lastordinaten die zugehörigen Spannungswerte, die Ablenkungswinkel  $\alpha$  und die Ausbiegungsgrössen  $\frac{f_m}{h}$  aufgetragen.

$\sigma_s$  ist die jeweilige Schwerpunktsspannung,  $\sigma'$  (Druckseite) und  $\sigma''$  (Zugseite) sind diejenigen Randspannungen in Stabmitte, die sich ohne Berücksichtigung der Verformung der Stabachse ergeben.  $\sigma_{\max}$  (Druckseite) und  $\sigma_{\min}$  (Zugseite) sind die wirklichen Randspannungen unter genauer Berücksichtigung der Verformung. Der Unterschied  $(\sigma_{\max} - \sigma')$  bzw.  $(\sigma_{\min} - \sigma'')$  ergibt den Einfluss der Stabausbiegung, der sehr von  $m$  und  $\lambda$  abhängig erscheint.



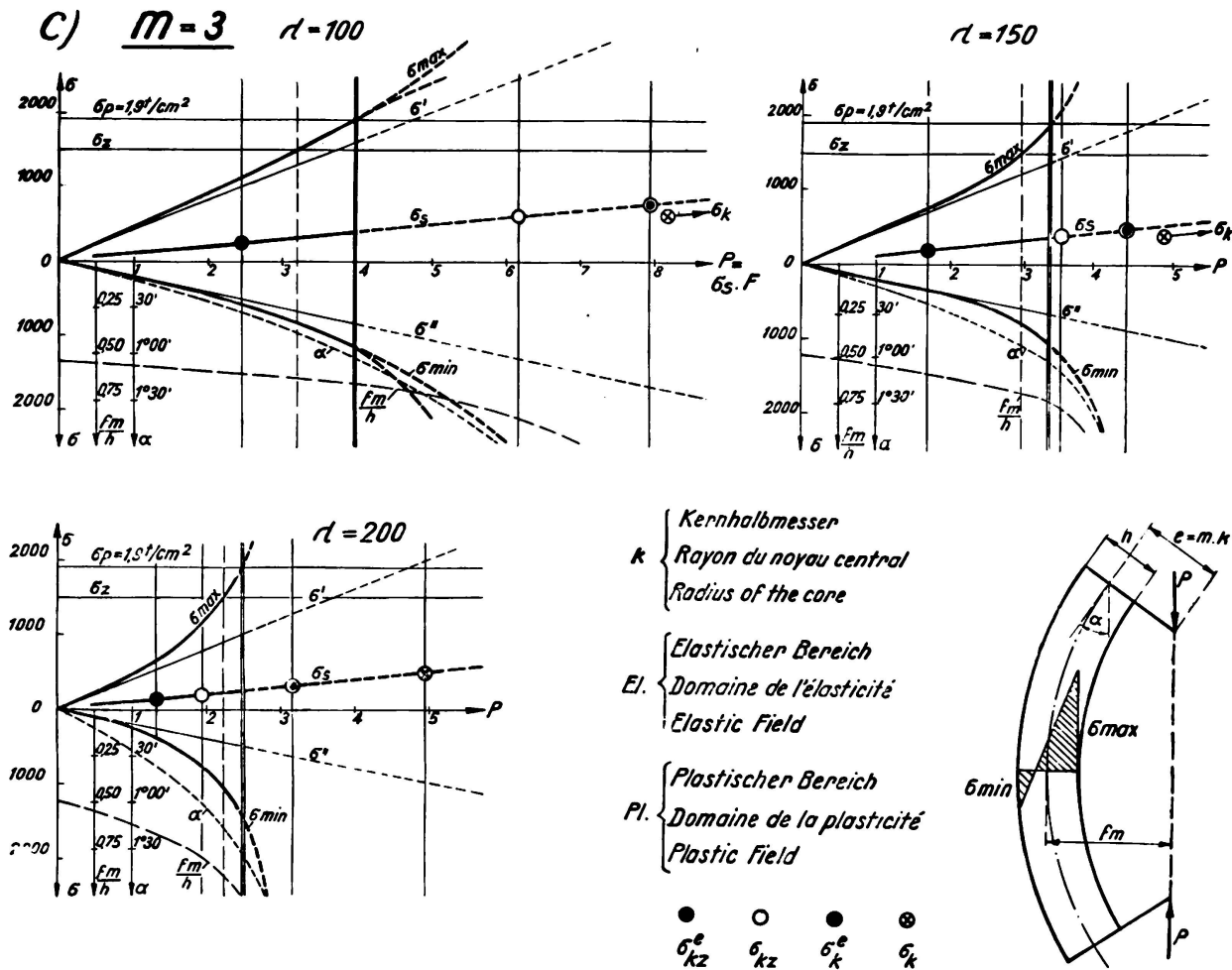


Fig. 3.

Spannungen in gelenkig gelagerten exzentrisch belasteten Stäben im elastischen Bereich.

Efforts dans les barres articulées aux appuis, chargées excentriquement et travaillant dans la zone élastique.

Stresses in Members with Hinged Bearings, eccentrically loaded in the Elastic Zone.

Erläuterung. — Signes employés. — Symbols used.

$P$  Druckkraft des Stabes. — Charge de la barre. — Pressure on the member.

$\sigma_p$  Spannung an der Proportionalitätsgrenze. — Effort à la limite de proportionnalité. — Stress at the limit of proportionality.

$\sigma_z$  Zulässige Spannung. — Effort admissible. — Permissible stress.

$\sigma_s = \frac{P}{F}$  Schwerpunktsspannung. — Effort au centre de gravité. — Stress at centre of gravity.

$\sigma'$   $\sigma''$  Randspannung in Stabmitte ohne Berücksichtigung der Verformung. — Efforts périphériques au milieu de la barre sans tenir compte de la déformation. — Stresses at the edge in middle of member, without considering deformation.

$\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  Randspannung mit Berücksichtigung der Verformung. — Efforts périphériques au milieu de la barre en tenant compte de la déformation. — Stresses at the edge, taking deformation into account.

$\sigma_k$  Knickspannung für den zentrisch belasteten Stab. — Effort de flambage pour la barre chargée axialement. — Buckling stress for centrally loaded member.

$\sigma_{kz}$  Zulässige Knickspannung für den zentrisch belasteten Stab bei 2,5 facher Sicherheit. — Effort admissible de flambage pour la barre chargée axialement, avec coefficient de sécurité de 2,5. — Permissible buckling stress for centrally loaded member, with factor of safety of 2,5.

$\sigma_k^e$  Knickspannung des exzentrisch belasteten Stabes nach Roß. — Effort de flambage dans la barre chargée excentriquement; d'après Roß. — Buckling stress for eccentrically loaded member, according to Roß.

$\sigma_{kz}^e$  Zulässige Knickspannung des exzentrisch belasteten Stabes nach Roß bei 2,5 facher Sicherheit. — Effort admissible de flambage pour la barre chargée excentriquement, d'après Roß, avec coefficient de sécurité de 2,5. — Permissible buckling stress in eccentrically loaded member according to Roß, with factor of safety of 2,5.

Der Schnittpunkt der Horizontalen  $\sigma_p$  mit der  $\sigma_{\max}$  Kurve zeigt diejenige Last  $P$  an, für die die Stabmitte mit der äussersten Druckfaser die Proportionalitätsgrenze überschreitet. Diese Stelle ist in den Figuren durch eine vertikale Doppellinie gekennzeichnet. Links davon ist das Verhalten des Stabes elastisch, rechts davon teilweise unelastisch.

Der Schnitt der für eine zulässige Spannung  $\sigma_z = 1,5^t/\text{cm}^2$  gezeichneten Horizontalen mit der  $\sigma_{\max}$  Linie gibt die Last, für welche die ungünstigste Randfaser  $\sigma_z$  erreicht. In Fig. 3 sind noch weitere Spannungswerte eingetragen :

- 1) die Knickspannung  $\sigma_k$  des Stabes für zentrische Belastung ;
- 2) die zulässige Knickspannung  $\sigma_{kz}$  mit 2,5 facher Sicherheit ;
- 3) die kritische Spannung  $\sigma^e_k$  für den exzentrisch belasteten Stab nach Roß ;
- 4) Die zulässige Spannung  $\sigma^e_{kz}$  mit ebenfalls 2,5 facher Sicherheit.

Die Darstellungen der Fig. 3 verdeutlichen uns den Einfluss von  $m$  und  $\lambda$  auf die Spannungs- und Ausbiegungsverhältnisse im Querschnitt der Stabmitte. Wir sehen auch hier (wie schon aus Fig. 2 geschlossen wurde), dass die Instabilität auch bei schlanken Stäben durch das unelastische Verhalten des Baustoffes bedingt wird.

Schliesslich weisen wir noch darauf hin, dass bei statischer Belastung (von Null aus stetig anwachsend) nur bei ganz kleinen Exzentrizitäten (für Werte  $m < 1$ ) auf der Zugseite des Stabes Spannungswechsel eintreten kann, indem  $\sigma_{\min}$  zunächst noch Druck ist und erst infolge Zunahme der Verformung zur Zugspannung wird. Für Werte  $m$  ganz nahe an Null kann dieser Spannungswechsel auch erst über  $\sigma_p$  eintreten.

#### IV. Gleichgewichtsberechnung für ganz oder teilweise unelastische Baustoffe.

Wir haben schon eingangs erwähnt, dass eine rechnerische Erfassung des Verhaltens von Bauteilen, deren Verformungen ganz oder teilweise unelastisch werden, ausserordentlich schwierig ist, weil die Plastizitätsmechanik noch keine sicheren, durch Versuche erhärteten Zusammenhänge zwischen Spannungen und Formänderungen zu geben vermag.

Um trotzdem an Hand des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes (von dem wir die Druck- und Zugseite benötigen, weil schon bei kleinen Exzentrizitäten der Momenteneinfluss bei der Spannungsermittlung gegenüber dem Einfluss der Normalkraft überwiegt) Berechnungen anstellen zu können, setzen wir bekanntlich das Ebenbleiben der Querschnitte auch nach Ueberschreiten der  $\sigma_p$ -Grenze voraus. Unter dieser Annahme, d. h. bei linearem Verlauf der Dehnungsänderungen, lässt sich der Spannungsverlauf über den Querschnitt als ein Teil des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes darstellen. Im Masstab  $i$   $s$  die Höhe des Querschnittes (in der Richtung der Ausbiegung) sinngemäss der Differenz der Randfaserdehnungen zuzuordnen. Diese rechnerischen Voraussetzungen treffen innerhalb gewisser Grenzen für Baustahl einigermaßen zu.

Zwecks praktischer Durchführung der Rechnung nehmen wir für den ganzen Stab, einen konstanten Elastizitätsmodul  $E$  an, dem ein linearer

Verlauf der entsprechend reduzierten Spannungen entspricht. Um der wirklichen Veränderlichkeit des Moduls von Faser zu Faser Rechnung zu tragen, reduzieren wir die Querschnittsflächen so, dass die wirklichen inneren Kräfte den aus den reduzierten Werten ermittelten gleichwertig sind. Beträgt an irgend einer Stelle die Breite einer Faser  $b_\eta$  und die zugehörige tatsächliche Spannung  $\sigma_\eta$ , so entsprechen sich (siehe auch Fig. 5) nach der Reduktion die reduzierte

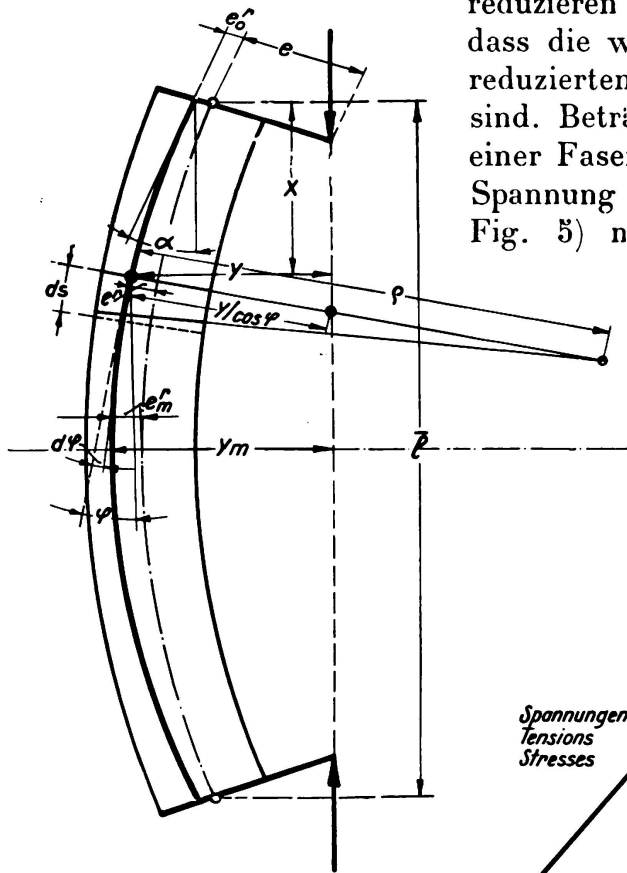


Fig. 4.

Gelenkig gelagerter Stab mit exzentrischer Belastung im unelastischen Bereich.

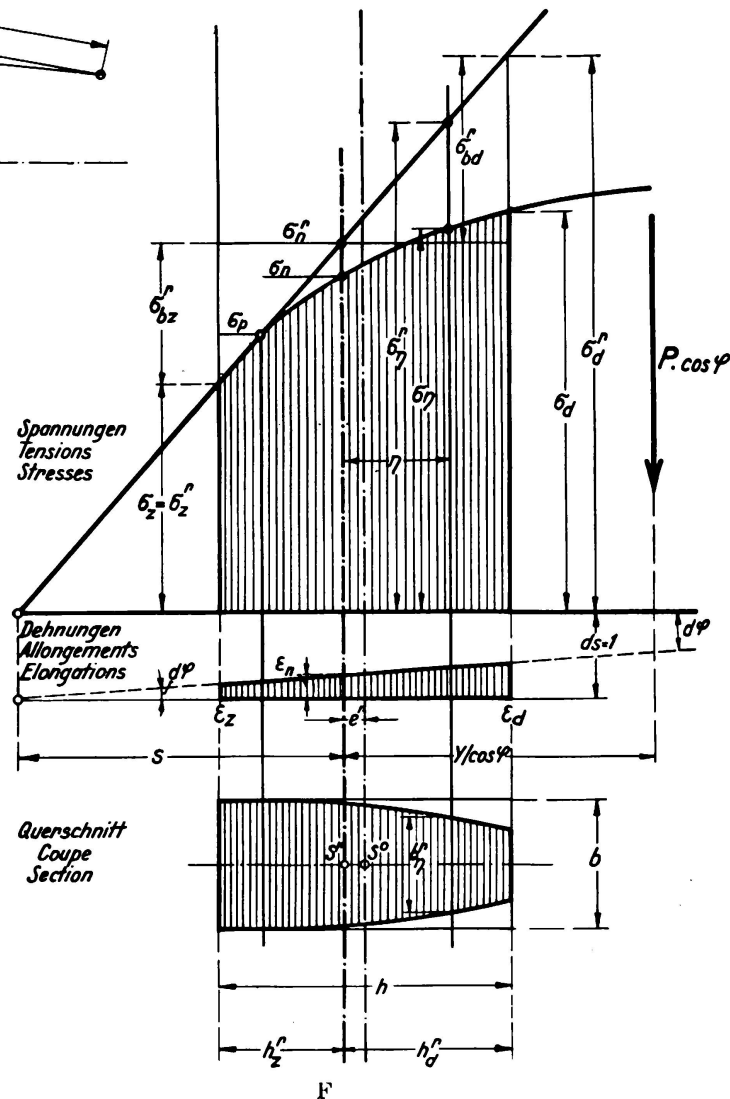
Barre articulée aux appuis avec charge excentrique, travaillant en dehors de la zone élastique.

Member with Hinged Bearings with Eccentric Loading in the Inelastic Zone.

Breite  $b_\eta$  und die reduzierte Spannung  $\sigma_\eta^r$ . Es muss nun  $b_\eta \cdot \sigma_\eta = b_\eta^r \cdot \sigma_\eta^r$  sein, woraus sich die jeweilige reduzierte Breite einer Querschnittsfaser  $b_\eta^r = b_\eta \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\eta^r}$  ergibt.

An Stelle der ursprünglichen Fläche  $F$  tritt eine reduzierte Fläche  $F^r$ .

Die Fig. 4 zeigt die Verhältnisse am exzentrisch belasteten und an beiden Enden gelenkig gelagerten Stab, wenn dieser teilweise oder ganz unelastisch



Spannungen und Formänderungen eines Stabquerschnittes im unelastischen Bereich.

Tensions et déformations dans un élément travaillant en dehors de la zone élastique.

Stresses and Deformations of the Cross-Section of a Member in the Inelastic Zone.

wird. Die für die rechnerische Untersuchung in Fragekommende statische Stabachse geht durch die Schwerpunkte der reduzierten Querschnittsflächen. Diese statische Stabachse weicht um den Betrag  $e^r$  von der geometrischen ab.

Unseren Betrachtungen legen wir wiederum den rechteckigen Querschnitt zugrunde und für den Krümmungsradius führen wir abermals als Variable das Bogenelement der statischen Stabachse  $ds$  und den zugehörigen Neigungswinkel  $\varphi$  ein. In der Fig. 5 sind über einen rechteckigen Querschnitt die zusammengehörigen Dehnungs- und Spannungsdiagramme, sowie die reduzierte Querschnittsfläche aufgetragen.

Nehmen wir nun zwei Randfaserdehnungen  $\epsilon_d$  und  $\epsilon_z$  an, so sind aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm die zugehörigen Randspannungen  $\sigma_d$  und  $\sigma_z$  ebenso wie die reduzierten Spannungswerte  $\sigma_d^r$  und  $\sigma_z^r$  gegeben. Wir bestimmen die reduzierte Breite der einzelnen Querschnittsfasern und ermitteln für die ganze reduzierte Querschnittsfläche deren Grösse  $F^r$ , die Lage des Schwerpunktes  $S^r$  und das Trägheitsmoment  $J_s^r$  der Fläche  $F^r$  in Bezug auf den Schwerpunkt  $S^r$ . Ueber dem Schwerpunkt der reduzierten Fläche ergibt sich die Dehnung  $\epsilon_n$  in der statischen Stabachse und die zugehörigen Schwerpunktsspannungen  $\sigma_n$  bzw.  $\sigma_n^r$ . Aus der Fig. 5 folgt weiters die Beziehung für den Krümmungsradius

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_d - \epsilon_z}{h} \dots \dots \dots \text{Gl (16)}$$

sodass wir auch die Nulllinie des Querschnittes durch  $s = \rho \cdot \epsilon_n$  festlegen können. Irgend eine Dehnung im Abstände  $\eta$  vom Schwerpunkt rechnet sich zu

$$\epsilon_\eta = \epsilon_n + \frac{\eta}{s}$$

Mit dem konstanten Modul  $E$ , den reduzierten Spannungen und der reduzierten Fläche rechnen wir nun in üblicher Weise nach NAVIER und erhalten die Beziehungen zu den auftretenden äusseren Kräften :

$$P = \sigma_n^r F^r \dots \dots \text{Gl (17)} \quad \text{und} \quad M = \frac{E J_s^r}{\rho} \dots \dots \text{Gl (18)}$$

Der Lasthebelarm in Bezug auf die statische Stabachse ist schliesslich mit  $y = M : P$  gegeben. Ist für einen bestimmten Querschnitt der Lastangriffspunkt bekannt, so herrscht zwischen den inneren und äusseren Kräften Gleichgewicht, wenn die aus den angenommenen Randfaserdehnungen sich ergebende Kraft  $P$  mit der wirklichen Last, und  $y = (e^r + \frac{y}{\cos \varphi})$  mit dem Abstand des Lastangriffpunktes von der statischen Stabachse übereinstimmt. (Siehe Fig. 5.)

Für die genaue Ermittlung der Stabachsen müssen wir nunmehr analog wie bei der Untersuchung mit elastischem Baustoff vorgehen, d. h. es ist die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d \varphi}{d s} = - \frac{P \cos \varphi y}{E J_s^r}$$

in der  $y = \int_0^s ds \sin \varphi$  bedeutet, zu integrieren. Dadurch dass auch das Trägheitsmoment  $J_s^r$  mit dem Winkel  $\varphi$  veränderlich ist, können wir die Integration nur graphisch ausführen.

Wir sind jetzt in der Lage, für ein gegebenes Spannungs-Dehnungs-Dia-

gramm Gleichgewichtsdiagramme zu entwickeln. Für eine bestimmte Last  $P$  (oder für eine entsprechende Schwerpunktsspannung  $\sigma_n = \frac{P}{F}$ ) nehmen wir zunächst verschiedene Werte von  $\varepsilon_d$  und  $\varepsilon_z$  an. Diese müssen jedoch so gewählt werden, dass  $P = \sigma_n \cdot F$  ist. Für jeden solchen Fall bestimmen wir  $e_s^r$  und das Moment der inneren Kräfte  $M = \frac{E J_s^r}{h} (\varepsilon_d - \varepsilon_z)$ .

Schliesslich erhalten wir den Hebelarm für die äussere Last  $P$  in Bezug auf die statische Stabachse mit  $y = \frac{M}{P} = \frac{E}{P \cdot h} \cdot J_s^r (\varepsilon_d - \varepsilon_z)$ .

Bei Annahme von endlichen Bogenelementen  $\Delta s$  ist die Änderung des Winkels  $\Delta \varphi = \Delta s \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_z}{h}$ , wodurch die stufenweise Bestimmung der Stabachse und die damit verbundene Änderung von  $y$  ebenfalls gegeben ist.

Es ist für die praktische Rechnung am zweckmässigsten, für bestimmte Werte  $P$  (bzw.  $\sigma_n$ ) graphisch die einzelnen Grössen aufzutragen, um aus den entstehenden Kurven für die weiteren Untersuchungen alle zusammengehörigen Zwischenwerte zu bekommen.

Für die gegebene Belastung eines gegebenen Stabes sei nun die Gleichgewichtslage zu bestimmen. Wir stellen zunächst fest, ob die Stabmitte unelastisch wird. Da wir bei unseren Voraussetzungen nur den Neigungswinkel der Stabachse in Stabmitte mit  $\varphi_m = 0$  kennen, müssen wir mit der Aufzeichnung der Biegelinie hier beginnen. Wir schätzen zuerst einen Lasthebelarm  $y_m$  (wobei wir nicht übersehen dürfen, dass dieser Wert nicht nur die Ausbiegung der Stabachse, sondern auch die Anfangsexzentrizität enthält) und bestimmen für ein endliches  $\Delta s$  aus der vorher ermittelten graphischen Zusammenstellung die dazugehörigen Werte der Änderung der Stabachsenneigung  $\Delta \varphi$ . Dadurch bekommen wir im Abstände  $\Delta s$  von der Stabmitte einen Punkt der Stabachse und die entsprechende Grösse  $y'$  des Hebelarmes. Zu diesem neuen Hebelarm bestimmen wir wiederum die zugehörige Änderung  $\Delta \varphi$  für ein weiteres Stück  $\Delta s$ , erhalten den Hebelarm  $y''$  im Abstände  $2 \Delta s$ , usw. Kommen wir am Endquerschnitt des Stabes an, so müssen wir dort den Wert  $y_0$  erhalten, der bei bekanntem  $e_0^r$  zu dem gegebenen Lastangriffspunkt des Endquerschnittes führen muss. Ist dies nicht der Fall, so muss die erste Annahme von  $y_m$  erneuert werden, bis das Resultat richtig ist. In den praktischen Fällen wird sich das unelastische Verhalten meist auf Querschnitte in der Stabmitte beschränken und dann ist der Rest rein elastisch zu berechnen.

Sollen wir schliesslich die kritische Belastung für Instabilität untersuchen, dann haben wir von den Grenzwerten für das Moment in Stabmitte, bzw. von dem grösstmöglichen Hebelarm, auszugehen und die Biegelinie ebenso zu zeichnen wie vor. Diese Stabbiegelinie ist dann massgebend für *alle* möglichen Exzentrizitäten des Lastangriffes am Stabende. Wir sind somit auch in der Lage, die zu einer gegebenen Belastung und beliebigen Anfangsexzentrizität gehörige kritische Stablänge aus der nur einmal zu zeichnenden Biegelinie abzulesen und vermögen so die genauen Grenzwerte für Instabilität zu bestimmen.

Das im vorstehenden entwickelte Rechnungsverfahren schliesst ausser exzentrischer Belastung alle Fälle mit zentrischer Last ein, bei denen aus irgend-



welchen Ursachen Ausbiegungen vorhanden sind, die zur Überschreitung von  $\sigma_p$  geführt haben. Ist schliesslich in Stabmitte die Biegesteifigkeit erschöpft, dann ist der Fall der Instabilität des zentrisch beanspruchten Stabes gegeben (nicht mit Knicken zu verwechseln!). Unsere Rechnungsmethode berücksichtigt auch den Fall des Knickens gedrungener Stäbe, wenn im Sinne unserer Definition der Augenblick des Überganges von der geraden zur gebogenen Stabachse, bei Berücksichtigung der Entlastung auf der Zugseite, der Rechnung zugrunde gelegt wird.

Das Rechnungsverfahren im teilweise unelastischen Bereich schliesst sich eng an die genaue Rechnung im elastischen Bereich an, bzw. enthält natürlich letztere. Es gestattet ein genaues Verfolgen der auftretenden Deformationen und Spannungen von Querschnitt zu Querschnitt auch in komplizierten Lastfällen.

## V. Das Versuchswesen.

Wir sind bei unseren Betrachtungen dort angekommen, wo wir der Überprüfung unserer Annahmen und Resultate bedürfen. Das Versuchswesen hat zwei getrennte Aufgaben zu erfüllen, eine mehr theoretische und eine mehr praktische. Letztere Aufgabe besteht darin, dass an Bauteilen, wie sie praktisch vorkommen, die kritischen Belastungen festgestellt werden, um Bemessungsformeln und Diagramme ableiten zu können.

Für den zentrisch belasteten Stab liegen weitaus am meisten Versuchsergebnisse vor. Sie haben zur Bestimmung von Knickspannungskurven geführt, die diejenige kritische Schwerpunktsspannung angeben, für welche Knicken eintritt.

Praktische Versuche zur Untersuchung der Knickfestigkeit von Stegblechen von Trägern, von abstehenden Flanschen usw., sind nicht in so grossem Umfang vorliegend, um sie als brauchbare Stütze von theoretischen Untersuchungen betrachten zu können.

Die Frage der Instabilität von exzentrisch gedrückten Stäben ist besonders durch Roß an der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt in Zürich gefördert worden. Aus zahlreichen Versuchen für verschiedene Exzentrizitätsmasse sind, den Knickspannungskurven ähnliche, kritische Schwerpunktsspannungen ermittelt worden. Die Sicherheit gegen Erreichen dieser kritischen Spannungen werden gleich gross wie bei Knickuntersuchungen gewählt. Dieses Verfahren ist praktisch, befriedigt aber insofern nicht ganz, als in demselben der Momenteneinfluss, der für das Eintreten von Instabilität massgebend ist, nicht zum Ausdruck kommt. Es ist nicht möglich festzustellen, wann eine Instabilitätsrechnung erforderlich ist, und von welchem Verhältnis des Momentes zur Kraft (Exzentrizität) an eine einfache Spannungsuntersuchung genügt. Nicht zu übersehen ist ferner, dass die Fragen der Grösse der Sicherheit in beiden Fällen praktisch aufeinander abgestimmt sein müssen.

Versuchsergebnisse über exzentrische Beanspruchung von Platten, Stegen von Trägern, abstehenden Flanschen usw. liegen, (von zusammengesetzten Lastfällen sehen wir ganz ab) für das praktische Bauwesen in nennenswertem Umfang überhaupt nicht vor.

Wir konstatieren somit, dass auf dem wichtigen Gebiet der Stabilität und Festigkeit von gedrückten und gebogenen Stäben und Platten dem praktischen Versuchswesen noch ausserordentliche Aufgaben bevorstehen. Die Schwierig-

keiten liegen einmal in den grossen Kosten, zum anderen mal darin, dass für die Versuche selbst noch nicht die richtige Basis geschaffen ist, um einen einheitlichen Weg zu einem einheitlichen Ziel beschreiten zu können.

Es besteht somit die Forderung, das mehr theoretisch-wissenschaftliche Versuchswesen zunächst in den Vordergrund zu stellen, um die Grundlagen abzuklären. Erst Versuche an Stäben, Platten usw. werden die Möglichkeit bieten, einen besseren Einblick in das Verhalten im plastischen Bereich zu geben. Im Zusammenhang damit dienen solche Versuche auch der Behandlung aller derjenigen Fragen der Statik und Dynamik, bei welchen das Eintreten einzelner Bauteile in ein plastisches Verhalten (Das Problem nicht vom Standpunkte der Sicherheit gegen Erreichen eines solchen Zustandes gesehen) tatsächlich erfolgt, um durch Umlagerung des statischen Systems wirtschaftlichere Bauformen zu erzielen.

Für die Durchführung von solchen grundlegenden Versuchen mit Bauteilen im plastischen Bereich bedarf es besonderer Einrichtungen. Je nach der Grösse der Verformungsgeschwindigkeit, der Grösse der inneren Reibung, der Charakteristik des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes usw. treten im kritischen Bereiche mehr oder weniger rasch erhebliche Deformationen auf, denen die Last (bezw. die Prüfmaschine) ohne geringste Änderung ihrer Grösse, unbeeinflusst durch die Ablenkungswinkel der Stabachsen und Schwerebenen der Platten, folgen muss, um die gewünschten Verhältnisse genau prüfen zu können.

Bei solchen Versuchen spielt ferner die Möglichkeit geringster Lastabstufungen sowie die Zeit eine Rolle; es ist beispielsweise wünschenswert prüfen zu können, wie weit bei entsprechendem Spannungs-Dehnungsdiagramm nach Überschreitung einer Zone der Instabilität neue Gleichgewichtslagen möglich werden.

Es bedarf weiters der Prüfung des Einflusses wiederholter statischer Belastung (bei jeweiligem Überschreiten der Proportionalitätsgrenze) und des Einflusses dynamischer Belastungen auf Fragen der Instabilität.

Für die versuchstechnische Behandlung der nur andeutungsweise gegebenen Aufgaben eignen sich zweckmässig Stäbe und Platten in Modellform aus Baustoffen der Praxis oder aus anderen geeigneten Materialien mit charakteristischen Spannungs-Dehnungs-Kurven.

Im Institut für Baustatik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich sind vom Referenten besondere Maschinen und Einrichtungen geschaffen worden, um systematisch an die Behandlung der oben angedeuteten wichtigen Fragen der Baustatik herangehen zu können.

Schliesslich sollen einige Belastungsbeispiele ohne Zahlenangaben zu dem bisher gesagten eine kurze Erläuterung bilden. In der Bilderreihe der Abbildung 6 oben ist ein exzentrisch belasteter Stab für  $m = 3$  (aus einem besonderen Versuchsmaterial), der sich bei steigender Belastung deformiert, dargestellt. Das vierte Bild von links zeigt noch eine typische Gleichgewichtslage bei vollkommen elastischem Verhalten. Bei geringfügiger Laststeigerung (5. Bild) tritt in Stabmitte eine stärkere Biegung ein, während sich die Stabenden zu strecken beginnen. Es ist dies eine Gleichgewichtslage mit teilweise unelastischem Verhalten in Stabmitte. Wird der Stab nach dieser Belastung entlastet, so bleibt in der Mitte eine Krümmung zurück (6. Bild).

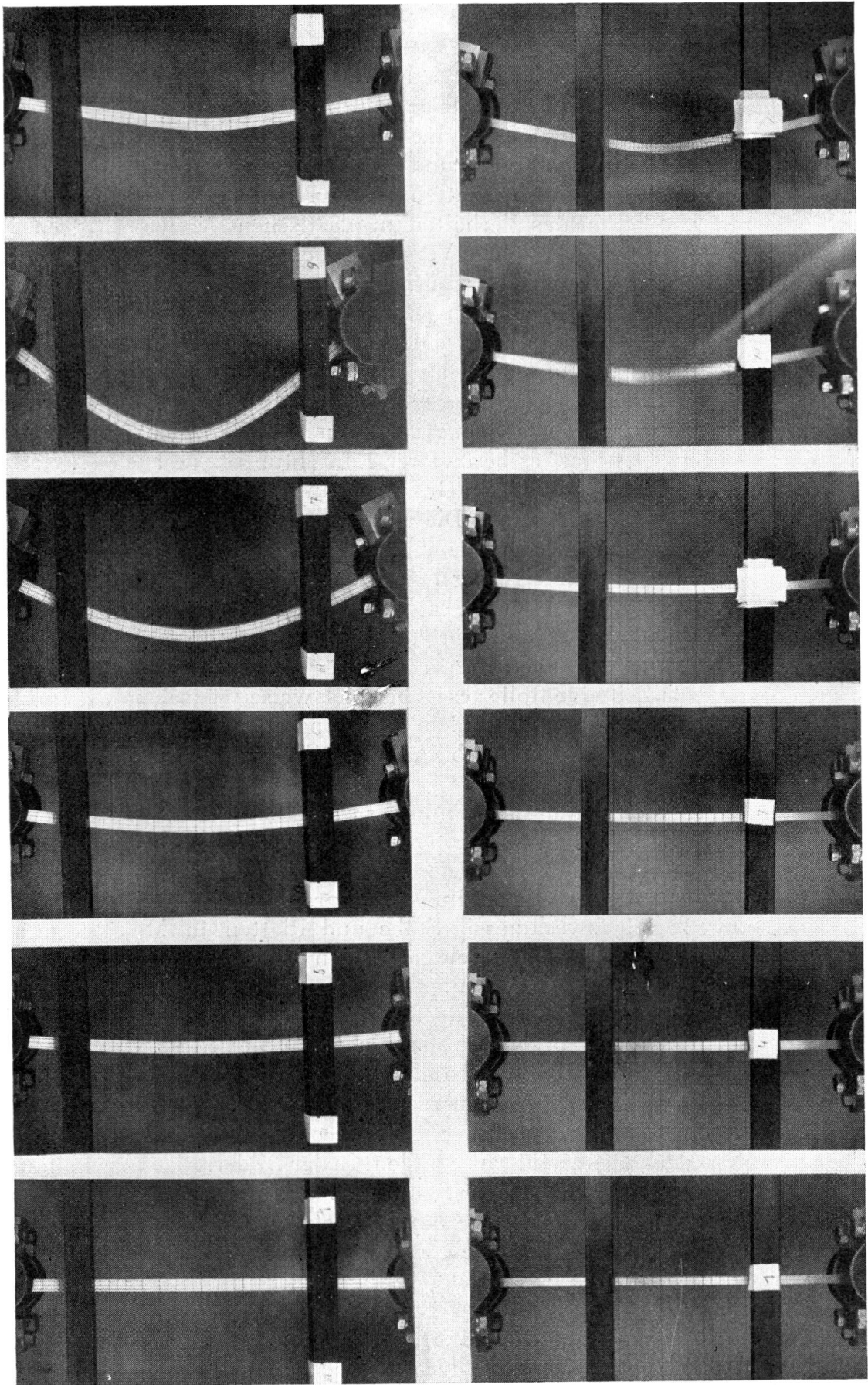


Fig. 6. — Stabdeformationen für schlanke Stäbe.  
 Déformations des barres élancées. — Deformations in the case of Slender Members.

Die untere Reihe der Abbildung 6 zeigt einen entsprechenden Stab aus Baustahl, ebenfalls für  $m = 3$ . Das 4. Bild von links zeigt noch vollkommen elastisches Verhalten. Im 5. Bild ist bei geringer Lastvermehrung der Augenblick des Eintretens der Instabilität dargestellt. Wir sehen deutlich, dass,

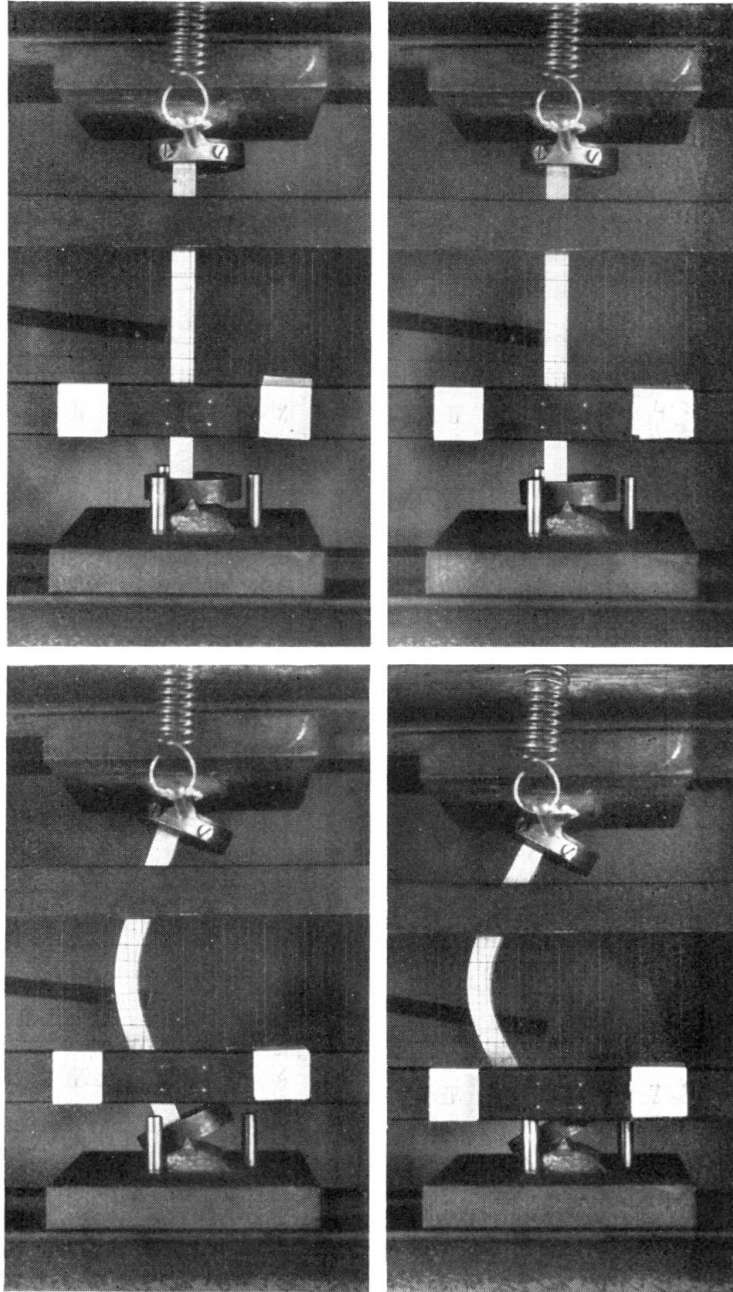


Fig. 7. — Stabdeformationen für gedrungene Stäbe.  
Déformations des barres trapues.  
Deformations in the case of Squat Members.

immer unter ein und derselben Last, die fortschreitende Verformung sich auf die Stabmitte konzentriert, während die Stabenden sich strecken. (Da sich für den Stab keine weitere Gleichgewichtslage mehr ergab, wurde er abgefangen.) Im entlasteten Zustand bleibt die Formänderung in der Mitte zurück, während die Stabenden wieder gerade geworden sind (6. Bild).



In Abbildung 7 haben wir einen gedrungenen Stab aus Baustahl, ebenfalls für  $m = 3$ . Hier lassen sich die zuerst rein elastischen und dann teilweise plastischen Gleichgewichtsformen wegen des Masstabes der Wiedergabe nicht gut verfolgen. Das 2. Bild oben rechts ist die äusserste Gleichgewichtslage, für die nach geringer Mehrbelastung der Stab ausweicht. Das folgende Bild links unten zeigt, dass an der weiteren Verformung nur die Stabmitte Anteil hat, während die Stabenden sich wiederum strecken. Das letzte Bild gilt schliesslich dem Stab nach der Entlastung.

Einen schlanken und einen gedrungenen Stab nach erfolgter Entlastung sehen wir schliesslich noch in der Figur 8, um die Art der Verformung nach erfolgtem Überschreiten der Instabilitätsgrenze deutlicher zu veranschaulichen.

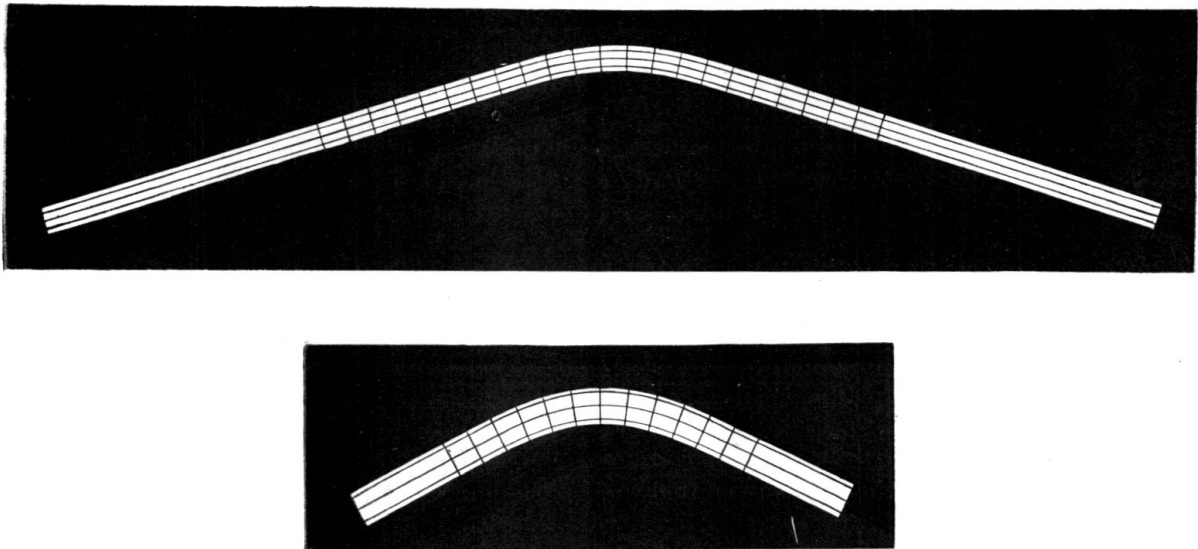


Fig. 8.

Stabformen nach Überschreiten der kritischen Belastung.  
 État des barres après dépassement de la charge critique.  
 Shape of Members after exceeding Critical Loading.

Die vorliegenden Ausführungen haben den Zweck zu zeigen, dass die hier behandelten Fälle der Instabilität sich für Stäbe, Platten und kombinierte Bauformen und Belastungen immer und ausschliesslich im teilweise unelastischen Gebiet abspielen. Es ist dringend erforderlich, das Verhalten der Ingenieurkonstruktionen in diesem Bereich genauer zu studieren, schon mit Rücksicht auf jene, noch als tragfähig zu bezeichnende Konstruktionen, bei welchen teilweise unelastisches Verhalten absichtlich herbeigeführt wird, und nicht mit Instabilität verbunden ist.

### Literaturverzeichnis.

« Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau ». Wien, 1929. Verlag Julius Springer, Wien. (BROSZKO, CHAUDY, CHWALLA, FILLUNGER, GRÜNING, v. d. HAEGHEN, HUBER, KAYSER, KEELHOFF, MEMMLER, PIGEAUD, RATZERSDORFER und ROŠ.)

M. Broszko. « Über die Engesser-v. Kármán'sche Knickungstheorie und über die allgemeine Lösung des grundlegenden Knickproblems ». 1. Band der Wissenschaftlichen Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau.

Doz. Dr.-Ing. Ernst CHWALLA, Wien. « Die Stabilität exzentrisch und zentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl ». Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien, 137. Band, 8. Heft, 1928. Hölder-Pichler-Tempsky A. G., Wien und Leipzig.

E. ELWITZ. « Die Lehre von der Knickfestigkeit » 1. Teil. Gebr. Jänecke, Hannover. \*

P. M. FRANDSEN. « Die Berechnung der Säulen ». 1. Band der Wissenschaftlichen Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau.

Prof. Dr. L. KARNER. « Betrachtungen über das Knickproblem unter Berücksichtigung des Spannungsverlaufes im unelastischen Bereich ». « Die Bautechnik », Heft 48, 7. Nov. 1930. Verlag W. Ernst und Sohn, Berlin.

KRIEMLER. « Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge. » Druck der G. Braun'schen Hofbuchdruckerei, Karlsruhe.

Dr.-Ing. Rudolf MAYER. « Die Knickfestigkeit », Verlag von Julius Springer, Berlin, 1921.

Dr.-Ing. h. c. H. MÜLLER — Breslau. « Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen ». Alfred Kröner, Verlag in Leipzig, 1913.

A. OSTENFELD. « Exzentrisch beanspruchte Säulen. Versuche mit Stahlsäulen. Querschnittsbemessung. » Laboratorium für Baustatik der Technischen Hochschule, Kopenhagen, Mitteilung Nr. 3.

K. A. POUKKA. « Zur Theorie der Knickfestigkeit », Helsinki, 1924.

W. REIN. « Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle, Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau, Ausgabe B. Heft 4. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1930.

Prof. Dr. M. Roš und Dr. J. BRUNNER. « Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl. » Bericht No. 13 der Eidg. Materialprüfungsanstalt an der E. T. H. und der Gruppe VI der T. K. V. S. B., Zürich, August 1926.

Prof. Dr. M. Roš. « Die Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe auf Knickung ». II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau, Wien, 1928.

TIMOSHENKO-LESSELLS. « Festigkeitslehre ». Verlag von Julius Springer, Berlin, 1928.

D. H. YOUNG. « Stresses in eccentrically loaded Steel Columns. » 1. Band der Wissenschaftlichen Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau.

## TRADUCTION

### I. Introduction

Le calcul des éléments de construction travaillant simultanément à la compression et à la flexion est l'un des problèmes les plus difficiles de la statique. Lorsque des charges extérieures créent, dans une membrure, des efforts de compression soit seuls, soit combinés à des efforts tranchants et à des moments fléchissants extérieurs, il se produit des déformations perpendiculaires aux efforts axiaux, qui, à leur tour, déterminent des moments additionnels et des efforts non négligeables.

Parmi les problèmes les plus connus et les mieux étudiés se trouve d'abord le calcul des poteaux et des barres chargés axialement. Les calculs deviennent déjà compliqués si la section d'un poteau ou d'une barre, au lieu d'être pleine, se compose de parties assemblées ; car, dans ce dernier cas, on doit calculer la stabilité de chaque élément de la barre ainsi que son influence sur la stabilité générale. Même dans le cas de sections pleines, la question du flambage joue un rôle important pour les ailes non supportées sur de courtes longueurs, ainsi que pour les âmes minces.

Dans la construction des ponts en acier, l'emploi des poutres à âme pleine et de grande portée a fait, au cours de ces dernières années, des progrès

### **Zusammenfassung.**

Werden Stäbe mit gerader Achse durch Druckkräfte, oder werden ebene Platten durch Momente und Querkräfte in ihrer Schwerebene beansprucht (Zentrische Belastung), dann bleiben die Stabachsen gerade und die Platten eben, bis bei allmählichem, statischem Anwachsen die kritische Belastung, die Knicklast, erreicht wird. Stäbe und Platten nehmen gebogene Formen an, die neuen Gleichgewichtslagen entsprechen. Zu den ursprünglichen äusseren Lasten treten noch Biegemomente und Querkräfte hinzu, die senkrecht zur Stabachse oder senkrecht zur Plattenebene wirken. Aus der reinen Druckbelastung des Stabes wird eine kombinierte Druck-Biegebeanspruchung, und aus dem ebenen Spannungsproblem der Platte ein räumliches. Nach dem Wechsel der Gleichgewichtslage verhalten sich ausgeknickte Bauglieder bei weiterer Belastung wie solche mit anfänglichen Biegemomenten. Knicken ist somit nur dann möglich, wenn die ursprüngliche Belastung bei gerader Stabachse oder ebenen Platten zentrisch wirkt.

Sind Stabachsen oder Schwerebenen von Platten von Anfang an gekrümmt, oder wirken ausser anderen Lasten Kräfte, die infolge von Deformationen Biegemomente hervorrufen, so haben wir es mit kombinierter Druck-Biegebeanspruchung zu tun. Hieher gehören: exzentrischer Druck, Druck mit Querbelaustung, zentrischer Druck nach Überschreiten der Knicklast usw.

Die Ausbiegungen, und Spannungen nehmen infolge der von den Deformationen abhängigen Biegemomente schneller zu als die Last; jedoch entspricht jeder Last eine Gleichgewichtslage, solange wir unbegrenzt elastisches Material voraussetzen. Die Materialeigenschaften der Baustoffe bedingen, dass bei Eintreten grösserer örtlicher Verformungen die Biegesteifigkeit erschöpft wird und zunächst an der Stelle des ungünstigsten äusseren Momentes die inneren Kräfte nicht mehr im Stande sind, Gleichgewicht mit der äusseren Belastung herzustellen. Wir erhalten eine Änderung in der statischen Gliederung des Bauteiles und damit eine Umlagerung des Spannungsverlaufes. Ist nach der teilweisen oder gänzlichen Ausschaltung von Teilen des Tragsystems eine neue Gleichgewichtsform möglich (kontinuierlicher Träger bei Überschreitung der Fliessgrenze über einer Stütze, ausgesteifte Stegbleche von Biegeträgern nach teilweisem Ausbeulen der Stege usw.), so ist diese bei der Prüfung der Tragfähigkeit nach weiterer Laststeigerung den Untersuchungen zu Grunde zu legen. Treten die Einschränkungen der Biegesteifigkeit jedoch an Stellen auf, die nicht gestützt sind, beispielsweise die Mitte eines exzentrisch gedrückten Stabes, und daher ausweichen können, so ist keine neue stabile Gleichgewichtslage mehr möglich. Wir sprechen in diesem Falle von Instabilität; der Bauteil ist gänzlich unbrauchbar geworden.

Instabilität von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen kann demnach nur eintreten, wenn nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze in einzelnen Teilen unelastisches Verhalten auftritt. Die Form des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes ist von grundlegendem Einfluss. Das Problem selbst kann als Gleichgewichtsaufgabe oder als Spannungsuntersuchung behandelt werden.

Die genaue rechnerische Behandlung der geschilderten Belastungsfälle ist im elastischen Gebiet ohne weiteres, im unelastischen nur nach gewissen Annahmen möglich. Um der Praxis wirtschaftliches Dimensionieren von Baugliedern, die auf Druck und Biegung beansprucht werden, zu ermöglichen und um genügende Sicherheit gegen das Erreichen von Instabilität im unelastischen Bereich zu gewährleisten, ist das Verhalten der Baustoffe im plastischen Gebiet zunächst auf wissenschaftlich-versuchstechnischer Basis eingehend zu erforschen. Über die speziellen Aufgaben der « Stabilität und Festigkeit von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen » hinaus müssen die Grundlagen geschaffen werden, die eine praktische Berechnung der Bauglieder im unelastischen Gebiet ermöglichen, um eine Reihe von wichtigen Fragen der Statik und Dynamik ihrer Lösung entgegenführen zu können.

### Résumé.

Si l'on soumet des barres à axe rectiligne à des efforts de compression, ou des dalles planes à des moments et à des efforts tranchants s'exerçant dans le plan du centre de gravité, les axes des barres restent rectilignes et les dalles restent planes, jusqu'à ce que la charge, augmentée progressivement, atteigne la valeur critique, c'est-à-dire la charge de flambage. Les barres et les dalles accusent ensuite des fléchissements qui correspondent à de nouvelles positions d'équilibre. Aux charges extérieures initiales s'ajoutent encore des moments fléchissants et des efforts tranchants, qui s'exercent perpendiculairement à l'axe de la barre ou au plan de la dalle. A partir de la charge de compression simple de la barre, prennent naissance des systèmes combinés d'efforts de compression et de flexion. L'étude de la dalle devient un problème intéressant les trois dimensions. Après modification du système d'équilibre, les éléments fléchis se comportent, pour les nouvelles augmentations de la charge, comme des éléments soumis à des moments fléchissants initiaux. Le flambage n'est ainsi possible que lorsque la charge initiale s'exerce axialement, tant dans les barres rectilignes que dans les dalles planes.

Si les axes des barres ou les plans des dalles ont subi un fléchissement initial, ou si ces éléments se trouvent, en outre, soumis à des charges qui se traduisent, par suite des déformations initiales ci-dessus, par des moments fléchissants, nous aurons alors affaire à un système combiné d'efforts de compression et de flexion. A ce cas appartiennent : les charges appliquées excentriquement, les compressions avec efforts tranchants, les compressions axiales après dépassement de la charge de flambage, etc...

Par suite de l'intervention des moments fléchissants résultant des déformations, les fléchissements augmentent plus rapidement que les charges. Toutefois, à chaque charge correspond une position d'équilibre, tant qu'il s'agit de matériaux ayant une élasticité illimitée. Les caractéristiques propres des matériaux employés conditionnent le dépassement de la résistance à la flexion, lorsque de plus grandes déformations locales entrent en jeu ; c'est d'elle que dépend la possibilité d'un équilibre entre les efforts internes et la charge extérieure, à l'endroit où le moment s'exerce de la manière la plus défavorable. Il en résulte