

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Artikel: Discussion

Autor: Hoost, K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-491>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Setze ich die Werte für D , $\alpha = \frac{\sigma}{D} \cdot \frac{dD}{d\sigma}$ und λ in die Gleichung ein, so ergeben sich die Werte β der Knickspannungsgleichung.

Trage ich diese Werte als Ordinaten der zugehörigen λ Werte auf s. Fig., so erhalte ich zwischen $\lambda = 35,5$ und $\lambda = 92,6$ d. h. bis zum Anschluss an die Eulerhyperbel angenähert eine gerade Linie, ebenso zwischen $\lambda = 3,7$ und $\lambda = 16,5$. Dazwischen d. h. zwischen $\lambda = 16,5$ und $\lambda = 35,5$ ist die β Linie eine Kurve vom n^{ten} Grad, wobei n ermittelt werden muss.

Als Knickspannungsgleichungen habe ich nunmehr für den elastischen und unelastischen Bereich folgende Werte errechnet :

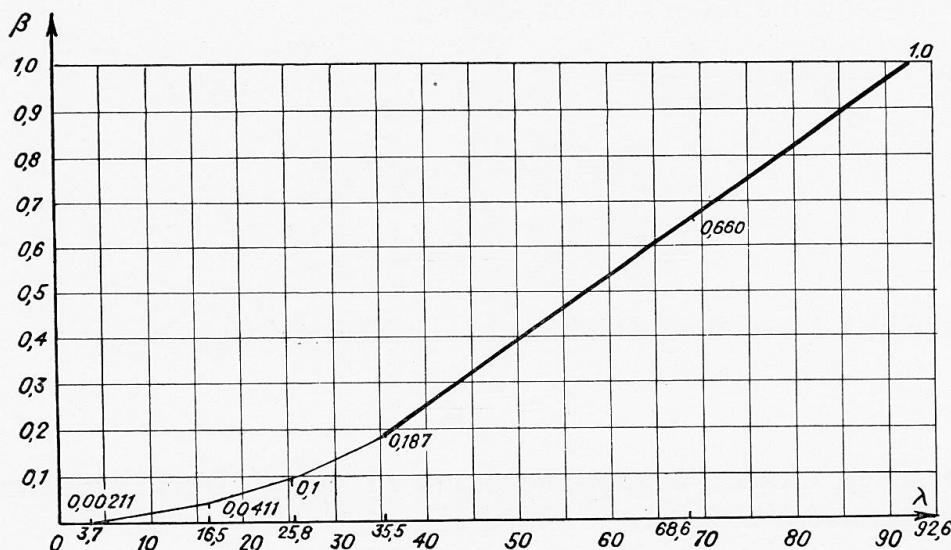


Fig. 1.

$$\sigma = \sigma_E = \frac{E \pi^2}{\lambda^2} \text{ für } \lambda > 92,6$$

$$\sigma = \sigma_E [0,0142 \lambda - 0,318] \text{ für } \lambda = 92,6 \text{ bis } 35,5$$

$$\sigma = \sigma_E [0,00393 (\lambda - 16,5) \cdot 1,22 - 0,0441] \text{ für } \lambda = 35,5 \text{ bis } 16,5$$

$$\sigma = \sigma_E [0,00305 \lambda - 0,00918] \text{ für } \lambda = 16,5 \text{ bis } 3,7$$

Da in der Stahlbautechnik Stabglieder unter einem Schlankheitsgrad von $\lambda = 35,5$ nur sehr selten oder garnicht vorkommen, kann ich folgenden Wert als die genaueste und einfachste Knickgleichung im unelastischen Bereich bezeichnen :

$$\sigma = \sigma_E [0,0142 \lambda - 0,318]$$

Diese Funktion vom ersten Grade ist für die Anwendung in der Praxis unbedingt zu empfehlen.

Traduction.

Dans son Rapport d'Introduction sur la stabilité et la résistance des pièces travaillant à la compression et à la flexion, M. le Professeur Dr. L. Karner a étudié le processus du flambage en s'efforçant de pénétrer plus avant dans le

domaine, très difficilement accessible, de la plasticité. Ainsi qu'il l'indique très judicieusement, cette partie du problème du flambage ne peut être explorée avec succès qu'en se basant sur des résultats d'essais de compression effectués sur des matériaux divers. Le fait qu'il assimile à une droite, pour l'acier, le diagramme incurvé de la compression, permet, avec les valeurs modifiées de F^r et de J_s^r pour la section, d'arriver à des relations très simples en ce qui concerne la détermination des efforts. Les valeurs de la section peuvent être déduites sans difficulté de la relation entre le diagramme rectiligne et le diagramme incurvé effectif. On obtient ainsi, pour la section F^r modifiée, une position du centre de gravité qui présente par rapport à la position normale un écart d'excentricité e^r . L'axe statique de la barre s'écarte de cette valeur e^r de son axe géométrique. On retrouve déjà une même excentricité dans les travaux de Krohn à partir de l'équation exacte du flambage, dans son traité sur la « Résistance au Flambage ». Il arrive à la valeur suivante :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{P \cdot k + M}{J \cdot K}$$

dans laquelle il désigne par :

ρ le rayon de courbure,

P et M les charges extérieures,

k l'excentricité, qui présente d'ailleurs des valeurs variables, par suite des variations du coefficient de compression d'une section à l'autre,

J le moment d'inertie de la section rapporté à son axe de gravité,

K un coefficient de compression moyen.

Après intégration de l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{P(k+y)}{J \cdot K}$$

en admettant que k et K soient invariables et en introduisant différentes simplifications, Krohn arrive au résultat suivant :

$$\frac{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma_k}{D_k}}}{1 - \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma_k}{D_k}}} = \frac{\sigma_k}{D_k} \left(\frac{d D}{d \sigma} \right)_k$$

Cette solution représente l'équation du flambage dans le cas général, en tenant compte de ce fait que le coefficient de compression D est variable avec la contrainte.

Comme ce sont toujours les conditions de déformation et de contrainte dans la section du milieu, la plus exposée, qui jouent le rôle capital, j'estime qu'il convient, dans l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{P(k+y)}{J \cdot K}$$

d'introduire pour k et K les deux valeurs qui correspondent précisément à cette section du milieu de la barre et d'admettre que ces valeurs sont invariables pour toute la barre. En partant de cette hypothèse, j'ai déterminé d'une autre manière l'équation générale du flambage.

Une barre qui est soumise à une charge appliquée avec une excentricité k , fléchit de la quantité δ . Par résolution d'une équation différentielle et au prix de différentes simplifications, j'obtiens le résultat suivant :

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma}{D}}} \operatorname{arc} \cos \frac{k}{\delta + k} = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma}{D}}} \operatorname{arc} \cos \frac{\frac{k}{\delta}}{1 + \frac{k}{\delta}}$$

La résolution exacte suivant Krohn aboutit au résultat suivant :

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma_k}{D_k}}} \operatorname{arc} \cos \frac{\frac{\sigma_k}{D_k} \left(\frac{dD}{d\sigma} \right)_k}{1 + \frac{\sigma_k}{D_k} \left(\frac{dD}{d\sigma} \right)_k}$$

De ces deux équations, on peut déduire :

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{\sigma_k}{D_k} \left(\frac{dD}{d\sigma} \right)_k$$

Si je pose $D = E$ module d'élasticité, j'obtiens :

$$\left(\frac{dD}{d\sigma} \right)_k = 0 \text{ et } k = 0$$

on en déduit : ($\operatorname{arc} \cos 0 = \frac{\pi}{2}$)

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \text{ ou } \sigma = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Pour un coefficient de compression constant $D = E$, ou un degré d'excentricité $k = 0$ on obtient l'équation d'Euler.

Si l'on pose $\sigma = \frac{P}{F}$ et $\frac{k}{\delta + k} = \gamma$

on obtient :

$$\begin{aligned} P &= \frac{4 D J}{l^2} (\operatorname{arc} \cos \gamma)^2 \\ &= \frac{4 D J}{l^2} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma - \frac{1}{6} \gamma^3 \dots \right)^2 \end{aligned}$$

Le premier terme de ce développement en série donne la formule de Kármán :

$$P = \frac{\pi^2 D J}{l^2}$$

Par suite cette valeur approchée donne donc des chiffres trop forts, ainsi que l'on peut d'ailleurs s'en rendre compte par comparaison avec les résultats fournis par les essais.

Si dans l'équation :

$$\sigma = \frac{4 D}{l^2} \left(\operatorname{arc} \cos \frac{k}{\delta + k} \right)^2$$

on désigne par α la valeur $\arccos \frac{k}{\delta + k}$

on obtient d'une manière générale pour la contrainte de flambage l'expression :

$$\sigma = \frac{4D}{\lambda^2} \cdot \alpha^2$$

Dans la zone élastique, avec

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{k}{\delta + k}$$

pour $k = 0$, on obtient $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Le coefficient de compression étant égal à E module d'élasticité, on retombe sur l'équation d'Euler :

$$\sigma_{\text{Euler}} = \frac{4E}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{E\pi^2}{\lambda^2} = \sigma_E$$

Si j'adopte cette équation comme équation de base de la valeur de la contrainte de flambage, je puis écrire :

$$\sigma = \sigma_E \cdot \frac{D}{E} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot 4}{\pi^2} = \sigma_E \cdot 0,4053 \frac{E}{D} \cdot \alpha^2 = \sigma_E \cdot \beta$$

Si j'introduis les valeurs de D , $\alpha = \frac{\sigma}{D} \cdot \frac{dD}{d\sigma}$ et λ dans l'équation, j'obtiendrai

la valeur de β de l'équation de la contrainte de flambage.

Si l'on considère ces valeurs comme ordonnées en fonction des valeurs correspondantes de λ (voir figure), on obtient entre $\lambda = 35,5$ et $\lambda = 92,6$, c'est-à-dire jusqu'au raccordement avec l'hyperbole d'Euler, approximativement une ligne droite; il en est de même entre $\lambda = 3,7$ et $\lambda = 16,5$. Dans l'intervalle, c'est-à-dire entre $\lambda = 16,5$ et $\lambda = 35,5$ la courbe de β est une courbe de degré n , n devant être à déterminer.

Comme équations de la contrainte de flambage, j'ai ensuite établi les relations suivantes, pour les domaines élastique et plastique :

$$\sigma = \sigma_E = \frac{E\pi^2}{\lambda^2} \text{ pour } \lambda > 92,6$$

$$\sigma = \sigma_E (0,0142\lambda - 0,318) \text{ pour } \lambda \text{ compris entre } 92,6 \text{ et } 35,5$$

$$\sigma = \sigma_E [0,00393(\lambda - 16,5) \cdot 1,22 - 0,0411] \text{ pour } \lambda \text{ compris entre } 35,5 \text{ et } 16,5$$

$$\sigma = \sigma_E (0,00305\lambda - 0,00918) \text{ pour } \lambda \text{ compris entre } 16,5 \text{ et } 3,7$$

En construction métallique, les barres ne présentent que très rarement, ou même jamais, un degré de finesse inférieur à $\lambda = 35,5$; on peut donc considérer que dans le domaine plastique, la forme la plus simple et la plus exacte de l'équation du flambage est la suivante :

$$\sigma = \sigma_E (0,0142\lambda - 0,318)$$

Cette relation du premier degré est à recommander le plus largement pour les besoins de la pratique.

Zusammenfassung.

Der variable Druck-Elastizitätsmodul wird durch eine variable Exzentrizität der äusseren Kraft ersetzt (angenähert die Exzentrizität in bezug auf den Schwerpunkt der reduzierten Fläche F_r im Bericht von Herrn Prof. Dr. Karner). Dank der Einführung dieser Exzentrizität erhalte ich durch einfache Rechnung die allgemeine Gleichung des Knickzustandes, und als Spezialfall den Wert von Euler und Kármán. Schliesslich stelle ich eine Knickgleichung auf, die sich auf die genaue Gleichung stützt und die eine einfache, aber in den praktischen Grenzen des Schlankheitsgrades genaue Form annimmt.

Summary.

The variable coefficient of compression is replaced by a variable eccentricity of the external force (approximately the eccentricity of the centre of gravity of the modified section F_r in Prof. Karner's report). Owing to the introduction of this eccentricity, the general equation of buckling is obtained by a simple calculation and, as a particular case, the value of Euler and Kármán. Finally an equation of buckling is established, based on the exact equation and presuming a shape which is simple but accurate within the practical limits of slenderness λ .

Dr. Ing. F. SCHLEICHER,
Professor an der Technischen Hochschule Hannover.

Bei exzentrisch gedrückten Stäben entspricht im allgemeinen jeder Belastung ein bestimmter Gleichgewichtsfall und Instabilität kommt nicht in Frage. Auf den Ausnahmefall haben Zimmermann¹ und Chwalla² unabhängig voneinander hingewiesen.

Ein im spannungslosen Zustand prismatischer Stab werde in der Ebene der kleinsten Steifigkeit mit $P = \psi P_E$ exzentrisch gedrückt (P_E = Eulerknicklast). Die Exzentrizitäten an den beiden Stabenden seien gleich gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Der Mittelpunkt des Stabes liegt auf der Kraftangriffsgeraden und erleidet keine Ausbiegung. Die Biegungslinien sind für $\psi < 1$ bezüglich dieses Punktes spiegelsymmetrisch und stabil. Wird $\psi = 1$, dann ist das Gleichgewicht labil und $w(\zeta) = w_1 \cos \pi\zeta + C \sin \pi\zeta$, wo C beliebige Werte besitzen kann. Vgl. Fig. 1.

Für ungleiche Exzentrizitäten w_1 bzw. w_2 ist die Durchbiegung in Stabmitte

$$w_M = \frac{w_1 + w_2}{2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\psi} \right)}$$

1. H. ZIMMERMANN, Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage. Berlin, 1930, S. 41.

2. E. CHWALLA, Eine Grenze elastischer Stabilität unter exzentrischem Druck. Z. angew., Math. Mech. 10 (1930) und Lösungstypen elastostaticher Probleme. Desgl. 11 (1931).