

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 1 (1932)

**Artikel:** Discussion

**Autor:** Spiegel, G.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-489>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.11.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

bandes (W. Rein)<sup>1</sup> ein, und in den höher als bei Kármán erreichten Knicklasten war auch der Anstoss zur weiteren Klärung des Knickproblems gewiesen. Die richtige Deutung des Beobachtungsmaterials ergab die erweiterte Knicktheorie Zimmermanns<sup>1</sup> (Seite 88) und als deren weitere Folge die in der vorliegenden Abhandlung angeschnittenen Fragen in ihrer Anwendung im unelastischen Bereich.

Man ersieht, dass es immer der richtig eingeleitete Versuch ist, der gleichzeitig auch berufen ist, neues Licht in unsere theoretischen Erkenntnisse zu bringen, und so dürften auch die letztgenannten Versuche<sup>1</sup> zum weiteren Ausbau der Knicktheorie in einer Weise beitragen, wie es auf anderem Wege kaum möglich wäre.

### Traduction.

1. — Les différentes interprétations auxquelles donnent lieu les recherches concernant la stabilité conduisent à la nécessité impérieuse de tenter une mise au point de principe. La difficulté de la question réside dans la complexité que prend le problème dans le domaine plastique. En fin de compte, l'ingénieur chargé d'une construction ne se préoccupe pas de l'allure de la variation des contraintes de flambage, en elles-mêmes, mais uniquement à titre de point de départ pour la détermination d'un degré de sécurité uniforme contre les risques de flambage. Cette manière de voir n'a pas été suffisamment prise en considération jusqu'à maintenant et il en est résulté une certaine divergence dans les conceptions. La raison en est tout particulièrement que les valeurs foncièrement différentes, en général, pour la charge de flambage théorique exacte (dans son sens large), d'une part, et pour les contraintes pratiques infiniment voisines de cette charge, d'autre part, arrivent à coïncider dans les problèmes de stabilité les plus étendus que pose la théorie de l'élasticité, par suite du caractère invariable du module  $E$  suivant Euler pour le degré de finesse considéré.

2. — Théoriquement, la question du flambage sous l'action des charges axiales se trouve traitée d'une manière parfaite, dans les domaines élastique et plastique, avec les formules d'Euler et d'Engesser. Lorsqu'il s'agit toutefois d'étudier le flambage dans un cas concret correspondant à la réalité, et étant donnée l'extrême sensibilité des phénomènes d'instabilité vis-à-vis des influences perturbatrices les plus faibles, qu'il est d'ailleurs presque impossible d'éviter dans la pratique, il ne faut pas considérer le flambage axial (au sens le plus rigoureux de terme), dans l'étude duquel on n'envisage que la recherche des positions d'équilibre possibles, comme constituant le cœur de la question, ainsi qu'on le fait couramment. Il ne constitue en effet qu'un cas particulier (purement géométrique et non pas physique) de la question beaucoup plus large que pose la notion de la charge de flambage dans son sens intégral (idéal).

---

1. Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für versch. Baustähle, Ausg. B H. 4 d. Berichte d. Ausschusses f. Versuche im Stahlbau. Berlin, 1930, J. Springer.

Pour les barres de finesse élevée ( $\sigma_K < \sigma_P$ ), la charge critique correspond, dans tous les cas, à la charge d'Euler

$$K = \frac{\pi^2 E I}{l^2} \quad \text{ou} \quad \sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

qui, ainsi que Zimmermann<sup>1</sup> l'a montré d'une manière très approfondie, se trouve toujours atteinte, même en cas de faibles courbures initiales, lorsque la charge est appliquée avec intervention du bras de levier correspondant (charge de flambage dans son sens intégral). S'il en résulte toutefois un passage à l'état d'instabilité dans le domaine plastique, il faut alors chercher la valeur de la charge maximum que peut supporter une barre réelle, c'est-à-dire « aussi rectiligne que possible », dans l'esprit de la nouvelle théorie du flambage.

Du point de vue de la statique de la construction, cependant, la charge idéale de flambage, caractérisée, pour le changement de stabilité, par une discontinuité très nette, doit elle-même être considérée comme une limite qu'il est pratiquement impossible d'atteindre (figure 1) et doit être distinguée de la ligne d'équilibre infiniment voisine, que caractérise un passage progressif à l'état instable. Cette dernière semble jouer un rôle prépondérant dans la manière dont se comporte un élément de construction soumis à une compression axiale et il importe par suite qu'elle fasse l'objet de recherches ultérieures.

Un calcul simple, basé sur les formules existantes, peut déjà donner quelques indications sur la légitimité de cette manière de voir en ce qui concerne une barre parfaitement rectiligne et de constitution homogène. Lorsque le mode d'application de la charge cesse, à un degré infiniment petit, d'être axial, le module initial d'Engesser (1889) est applicable à la charge critique :

$$T = E'_n = \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_n$$

ce module est sensiblement plus faible que le module de flambage correspondant à une charge purement axiale. Par exemple, pour un même  $\lambda$  et pour une section rectangulaire telle que  $E' = 0,6$  on constate déjà une réduction de plus de 20 %.

3. — Cette sensibilité extrême, qui se fait sentir tout particulièrement dans le domaine plastique, se manifeste, en ce qui concerne la valeur des charges de flambage, dans le sens indiqué pour la première fois, avec exactitude, par Zimmermann (voir 2) : l'état critique qui s'établit progressivement par suite du fléchissement latéral et de l'apparition corrélative de contraintes de flexion additionnelles est largement conditionné par la diminution progressive du module variable  $E'$ . En ce qui concerne la charge de flambage idéale, interviennent donc, non seulement le voisinage immédiat de  $\sigma_K$  mais également le parcours tout entier de la courbe  $\sigma-\varepsilon$  jusqu'à cette limite.

En se basant, pour la barre, sur une ligne voisine de la rectitude parfaite et

1. Rapports de Séance de la Preuss. Akad. d. Wissensch. phys. math. Klasse 1923, fasc. XXIII et XXV ; en outre « Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage », Berlin, 1930, Verlag W. Ernst u. Sohn, éditeur.

en faisant intervenir la compression et la flexion combinées, qui se traduisent par une action d'ensemble, on obtient, pour le module  $T$  de l'équation générale

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2}$$

dans le cas de charge correspondant au n° 2 ci-dessus, qui nous occupe :

$$T = E'_n + \frac{\nu}{\varepsilon_n} \sum_n^{n-1} \frac{1}{2} (\varepsilon_r + \varepsilon_{r+1}) (E'_r - E'_{r+1}) \quad (1)$$

qui doit être déterminé sur la base de la courbe de déformation ( $E'-\varepsilon$ ) du matériau correspondant (figure 2).  $\nu$  désigne un coefficient variable avec  $\varepsilon_r$ .

En passant à l'intégrale, on peut calculer directement à partir de l'équation (1) les degrés de finesse de flambage  $\lambda_K$  et les valeurs correspondantes de  $\sigma_K$  au moyen de la relation simple :

$$\lambda_K = \alpha_K \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_K}}$$

Le coefficient  $\alpha$  peut être déterminé d'une manière simple à partir de la courbe de  $E'$ , courbe qui peut être tracée analytiquement et généralement sans difficulté, d'une manière suffisamment approximative, jusqu'au voisinage de la limite supérieure d'écoulement<sup>1</sup>.

L'allure ultérieure de  $\sigma_K$  en particulier dans la zone des plus petits degrés de finesse, présente surtout intérêt du point de vue théorique et ne peut être déterminée que sur la base de données hypothétiques.

4. — Les questions qui viennent d'être exposées trouvent toute leur importance pratique dans l'étude et la détermination, sur des bases rationnelles, du degré de sécurité contre le flambage. Dans cet ordre d'idées également, on se trouve encore fréquemment en face de conceptions erronées; il n'est donc pas inutile d'entrer dans le vif du sujet. Dans le flambage lui-même, il s'agit d'une question d'instabilité, tandis que le calcul des pièces proprement dit pose une question de contrainte à la compression et à la flexion<sup>2</sup>. Pour autant que la question du flambage elle-même soit accessible à une conception exacte, la théorie du flambage élargie constitue un point d'appui pour son étude complète, sur la base suivante : Dans un élément de construction soumis à une charge axiale, le cas le plus favorable correspond à une charge  $K$ , telle qu'elle est définie dans le n° 2 ci-dessus et correspondant à la contrainte critique (fig. 3 a). Du point de vue pratique, toutefois, la courbe de  $\sigma_K$  ainsi obtenue subit encore un certain décalage, par suite de l'approximation sur la limite d'écoulement; il en résulte qu'il faut adopter comme limite de base, pour la gamme des degrés de finesse moyens et faibles, la limite supérieure d'écoulement. Le cas le plus défavorable est caractérisé par une déformation du bras

1. Une justification plus détaillée de ces calculs sera publiée dans une prochaine étude. La sécurité au flambage, dont la détermination n'est qu'indiquée dans ce qui suit, fera également l'objet d'un prochain travail.

2. Voir également à ce sujet les conclusions de M. T. Huber, Varsovie : Bericht der II. Brückenbautagung, Vienne, 1928, pages 310 et suivantes, Vienne, 1930, J. Springer, éditeur.

de levier  $f$  (figure 3 b),  $f$  et  $y_{om}$  étant définis parallèlement par une relation linéaire simple telle que :

$$f = \gamma h \qquad y_{om} = \beta l$$

Pour un degré de charge  $S$  déterminé, cette disposition conduit à une contrainte périphérique maximum  $\sigma_{max}$ . Le degré de sécurité est alors donné par la relation :

$$n = \frac{K}{S}$$

Le calcul se fait, en particulier, à partir de l'équation du fléchissement  $y_m = \varphi(f, y_{om})$  de la théorie de la stabilité, équation complétée par Zimmermann<sup>1</sup> (page 93) pour tenir compte de l'influence de la flèche  $y_{om}$ , et que l'on emploiera en tenant compte de ce que  $\sigma_{max}$  doit se trouver encore dans le domaine élastique, même dans le cas de flambage inélastique. A l'aide des relations précédentes concernant  $f$  et  $y_m$  et de l'équation des moments :

$$M_{max} = S(f + y_{om} + y_m)$$

on obtient une relation entre  $\lambda$  et  $n$ . On arrive ainsi à une équation ayant la forme générale suivante :

$$n^2 - 2pn = \alpha q$$

En comparant les résultats obtenus pour différentes formes de section de la barre et pour différentes positions de la fibre moyenne, on peut déterminer la valeur moyenne exacte de  $n$  ; il faut en outre tenir compte d'une certaine marge en pourcent correspondant aux influences dans lesquelles il n'est pas possible de faire intervenir le calcul.

5. — La multiplicité des phénomènes qui se présentent dans la réalité effective ne peut pas être expliquée uniquement par des moyens déductifs ou spéculatifs purs ; c'est là un fait d'expérience fréquente que l'on constate d'ailleurs encore plus nettement qu'ailleurs dans le domaine du flambage. Il peut nous paraître parfaitement naturel aujourd'hui que la formule d'Euler, qui date de 1744, ne puisse se trouver justifiée que lorsque les hypothèses sur lesquelles elle est basée sont effectivement remplies (constance du module  $E$ ) ; et cependant ce n'est qu'à la suite des essais de Tetmajer que cette formule, déjà généralement contestée, put recevoir une limite de validité effective. Sur cette base définitivement acquise, Engesser<sup>1</sup> publia ses travaux, qui furent complétés ultérieurement par Kármán<sup>2</sup> ; les travaux de Kármán, d'ailleurs, tout en élargissant largement le champ de nos connaissances théoriques, étaient encore insuffisants, la nécessité d'un développement ultérieur se faisant nettement sentir. A cette nécessité, répondirent les travaux suisses<sup>3</sup> concernant les charges excentrées, ces derniers travaux aboutissant, outre les résultats directs qu'ils purent fournir, à la méthode du T. K. V. S. B., de Roš et Brunner, pour le calcul des barres soumises à des charges excentrées. Sur ces

1. Zeitschrift d. hann. Arch. u. Ing. Verein 1889, page 455, Schweiz. Bauztg., 1895, page 24.

2. Untersuchungen über Knickfestigkeit, Forschungsheft n° 81 du V. D. I., Berlin, 1910.

3. M. Roš et J. BRUNNER, Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl, Rapport n° 13, Laboratoire Fédéral d'Essai des Matériaux, Zurich, 1926.

recherches, se greffèrent également les travaux de base d'E. Chwalla<sup>1</sup> qui aborda, pour la première fois, dans son ensemble, le problème de l'équilibre des barres comprimées en acier de construction. Par ailleurs, la nécessité se fit sentir de pousser les essais de Kármán, particulièrement en ce qui concerne les grandes divergences constatées en dehors du domaine d'Euler, afin d'obtenir des données plus précises sur l'allure des contraintes de flambage dans cette région, qui présente une telle importance pour la pratique. C'est ici que viennent se placer les essais effectués par le Deutscher Stahlbau-Verband (W. Rein)<sup>2</sup>, les efforts pour arriver à une meilleure compréhension du problème du flambage portant même sur des charges de flambage plus élevées que celles qu'avait atteintes Kármán. L'importance du rôle que joue le matériau soumis à l'observation conduisit Zimmermann à publier sa théorie développée du flambage<sup>1</sup> (v. p. 93), puis à pousser l'étude des questions abordées par cette étude dans le domaine plastique.

On voit que les essais judicieusement entrepris nous permettent toujours de développer nos connaissances dans le domaine théorique et c'est ainsi que les dernières séries de travaux expérimentaux que nous venons de citer<sup>2</sup> doivent contribuer eux aussi à faire progresser la théorie du flambage dans des conditions qu'il aurait été à peine possible de réaliser différemment.

### Zusammenfassung.

Auf Grund der Versuchsergebnisse des Deutschen Stahlbau-Verbandes und der daraus hervorgegangenen erweiterten Knicktheorie Zimmermanns wird die Frage einer prinzipiellen Klärung unserer bisherigen Berechnungsgrundlagen aufgeworfen.

Die gewöhnlich in den Mittelpunkt der Betrachtung gestellte zentrische Knickbelastung (Euler und Engesser-Kármán) ist nur ein Sonderfall des weiter gefassten Begriffes der « ideellen » Knickbelastung; die der letzteren unendlich benachbarte Belastung  $K$  mit noch stetigem Uebergang in den labilen Zustand ist massgebend zur Ermittlung einer gleichmässigen Sicherheit und im allgemeinen vom ganzen Verlauf der Arbeitslinie unterhalb  $\sigma_K$  abhängig. Der Sicherheitsgrad  $n = \frac{K}{S}$  ist durch die Randspannung  $\sigma_{\max}$  infolge der entsprechend einzulegenden Last  $S$  bedingt;  $n = f(\lambda)$  kann analytisch festgelegt werden.

### Résumé.

L'auteur pose la question d'une justification de principe des bases de calcul adoptées jusqu'à maintenant, justification s'appuyant sur les résultats des essais effectués par le Deutscher Stahlbau-Verband et sur la théorie du flambage telle qu'elle a été étendue par Zimmermann.

1. Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl, Rapports de Séance, Akad. d. Wissensch. math. naturw. Klasse, page 469, Vienne, 1928.

2. Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für versch. Baustähle, Ausg. B H. 4 d. Ausschusses f. Versuche im Stahlbau. Berlin, 1930, J. Springer, éditeur.

La charge de flambage axiale, généralement considérée comme constituant le cœur de la question (Euler et Engesser-Kármán) n'est qu'un cas particulier de la notion plus générale de la charge de flambage idéale; la charge  $K$ , infiniment voisine de cette dernière joue, avec le passage encore continu à l'état labile, un rôle capital pour l'obtention d'un degré de sécurité uniforme; elle dépend, en général, de l'allure de toute la courbe elle-même au-dessous de  $\sigma_K$ .

Le degré de sécurité  $n = \frac{K}{S}$  est conditionné par les contraintes périphériques  $\sigma_{\max}$  résultant de la charge  $S$ , la fonction  $n = f(\lambda)$  peut être étudiée analytiquement.

### Summary.

Based on the results of tests by the German Stahlbau Verband and the extended buckling theory of Zimmermann resulting from them, the question is raised of a clearing-up in principle of the bases hitherto used for our calculations.

The central buckling loading, usually regarded as the most important to be considered (Euler and Engesser-Kármán), is only a special case of the extended conception of the « ideal » buckling loading; the loading  $K$ , infinitely close to the latter, still steadily passing over into the instable state, is decisive for determining a uniform safety and depends in general on the whole run of the line of work below  $\sigma_K$ . The factor of safety  $n = \frac{K}{S}$  conditioned by the stress at the edge,  $\sigma_{\max}$ , in consequence of the corresponding load  $S$  that has to be applied;  $n = f(\lambda)$  can be found analytically.

Dr. Ing. K. HOOST,

Reg.- und Baurat, Dozent der Technischen Hochschule, Danzig.

In seinem einleitenden Referat über Stabilität und Festigkeit von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen sucht Herr Professor Dr. L. Karner u. a. das sehr schwierige, unelastische Gebiet des Knickvorganges tiefer zu erforschen. Wie er ganz richtig angibt, kann dieser Teil des Knickproblems nur allein auf die Prüfungsergebnisse von Druckversuchen der verschiedenen Materialien aufgebaut werden. Dadurch, dass er die gekrümmte Druckstauchungslinie für Stahl geradlinig verlaufen lässt, ergeben sich mit den für diesen Zweck abgeänderten Querschnittsgrößen  $F^r$  und  $J_s^r$  sehr einfache Beziehungen für die Spannungsermittlung. Die Flächenwerte werden ohne Schwierigkeiten aus der Beziehung der geraden Druckstauchungslinie zum wirklichen Kurvenverlauf erhalten. Hierbei ergibt sich für die abgeänderte Querschnittsgröße  $F^r$  eine Lage des Schwerpunktes, die um eine Exzentrizität  $e^r$  von der normalen Lage entfernt ist. Die statische Stabachse weicht um den Betrag  $e^r$  von der geometrischen ab. Eine gleiche Exzentrizität ist bereits in