

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Artikel: Discussion

Autor: Broszko, M.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-487>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

c) Das Unzutreffen der v. Kármánschen Grundannahme (III) ist an mehreren Stellen meines Wiener Diskussionsbeitrags mit Nachdruck hervorgehoben worden.

Traduction.

1. — La Publication Préliminaire¹ publiée par le Secrétariat Général de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, à l'occasion du Congrès de Paris, renferme deux Rapports² qui traitent d'une manière détaillée de la question du flambage des barres prismatiques sous l'influence d'une charge centrée. Le même sujet a été, comme on le sait, également traité, il y a quatre ans, au cours du Congrès de Vienne. De très notables divergences d'opinion se sont manifestées au cours des discussions et ont été exprimées d'ailleurs dans le Compte Rendu du Congrès de Vienne³. Les points de vue exprimés dans ces deux Rapports relativement aux questions litigieuses, traitées à Vienne, devaient ainsi éveiller un intérêt particulier. On devait d'ailleurs d'autant plus s'attendre à une attitude nette par rapport à ces questions, que le Rapporteur de ce problème à Vienne a clos les débats sur la question du flambage par un résumé des résultats de la discussion⁴ qu'on ne saurait considérer comme pouvant élucider le problème litigieux. En effet, la démonstration mathématique⁵ du Rapporteur sur la théorie de flambage d'Engesser-Kármán⁶, qui forme la partie essentielle de ce Résumé, contient, par mégarde évidente, des erreurs de calcul⁷; elle présente d'ailleurs, en outre, ce caractère particulier que même en éliminant ces erreurs de calcul on arrive à un résultat qui se trouve en opposition directe avec la thèse à confirmer.

Cependant dans la Publication Préliminaire au Congrès de Paris on ne trouve de rectification ni de la démonstration en question, indiscutablement erronée, ni des conclusions que le Rapporteur à Vienne a tirées de cette démonstration. Cette omission, à laquelle s'ajoute la non-considération des plus récents résul-

Punktes C die Spannungsverteilung genau darstellen sollte, wie dies in der ENGESSER-v. KÁRMÁNSchen Theorie vorausgesetzt wird. (Anm. : Man beachte die in das Figurenmaterial des Roš'schen Referates eingetragene Bezeichnung : « Cours approximatif de la courbe tension-allongement à la décharge »).

1. Association Internationale des Ponts et Charpentes, Premier Congrès, Paris, 1932, 19-25 mai. Publication Préliminaire.

2. L. KARNER, « Stabilität und Festigkeit von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen ». Rapport d'Introduction, Publication Préliminaire, pages 17-39.

M. Roš, « La stabilité des barres comprimées par des forces excentrées ». Publication Préliminaire, pages 57-93.

3. Compte Rendu du 2^e Congrès International de Construction des Ponts et Charpentes. Vienne, Julius Springer, éditeur, 1929, pages 282-346.

4. Ib., pages 338-346.

5. Ib., pages 338-340.

6. Th. v. KÁRMÁN, « Untersuchungen über Knickfestigkeit ». Mitteil. üb. Forschungsarbeiten a. d. Geb. d. Ingenieurwesens, n° 81, Berlin, 1910.

7. Compte Rendu du 2^e Congrès International de Construction des Ponts et Charpentes. Vienne, Julius Springer, éditeur, 1929, page 340, ligne 11 et 17. L'erreur consiste dans l'introduction du module de flambage T_k de Kármán, au lieu du module T d'Engesser, qui est toujours différent du précédent.

tats qu'ont donnés la recherche expérimentale¹ et l'étude théorique²⁻³, peut donner une impression erronée. En effet, le Lecteur de la Publication Préliminaire au Congrès de Paris pourrait, en l'état actuel des choses, avoir l'impression que toutes les objections soulevées contre la théorie d'Engesser-Kármán ont été réfutées dans l'exposé du Rapporteur à Vienne⁴. Il semble donc absolument indispensable de revenir encore une fois sur ces objections, d'autant plus qu'il est désirable de les asseoir sur une base plus précise et plus développée⁵.

2. — La théorie du flambage d'Engesser-Kármán repose sur trois hypothèses d'ordre physique, et le caractère non défendable de cette théorie résulte nécessairement du fait que l'une de ces hypothèses de base se trouve en contradiction avec les faits d'ordre expérimental les plus certains.

Dans les deux premières hypothèses de base d'Engesser-Kármán, sont exprimées, aussi bien pour le domaine des déformations élastiques, que pour le domaine des déformations plastiques, les conceptions suivantes :

I. — Les sections planes de la barre comprimée non fléchie restent planes après une flexion infiniment faible de cette barre ;

II. — La relation fonctionnelle entre les modifications de longueur spécifiques provoquées dans les fibres élémentaires de la barre par la flexion et les contraintes correspondantes est la même que lors de l'essai de traction-compresion pure.

La légitimité de ces hypothèses ne fait aucun doute⁶. Elles ne suffisent toutefois pas à permettre une solution nettement déterminée, car la deuxième hypothèse ne contient aucune indication parfaitement définie en ce qui concerne la forme de la relation fonctionnelle qui existe entre les modifications spécifiques de longueur et les contraintes correspondantes dans la section d'une barre comprimée fléchie. Dans le but d'arriver à une forme nettement déterminée pour cette relation fonctionnelle, Engesser a tout d'abord supposé⁷ qu'elle

1. W. REIN, « Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle ». Berlin, Julius Springer, éditeur, 1930.

2. M. BROSZKO, « Ueber die allgemeine Lösung des grundlegenden Knickproblems ». Comptes Rendus du 3^e Congrès International de Mécanique Appliquée, Stockholm, 1930, vol. III, pages 51-59.

3. M. BROSZKO, « Beitrag zur allgemeinen Lösung des Knickproblems ». Mémoires de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, Zurich, 1932, 1^{er} volume, pages 4-8.

4. Convaincu que l'exactitude de la théorie d'Engesser-Kármán était confirmée par la démonstration mathématique ci-dessus apportée, le Professeur F. Hartmann, de Vienne, a tenté récemment de montrer, sur plusieurs exemples, que les résultats des recherches qui se trouvaient en désaccord avec les conceptions de cette théorie étaient *ipso facto* inexacts (voir Zeit. d. Oesterr. Ing.-u. Arch.-Ver., 84, 1932, page 165). La courte étude de Hartmann permet de se rendre compte d'une manière si nette des idées et des raisonnements d'un protagoniste convaincu de la théorie d'Engesser-Kármán que l'on ne peut qu'en recommander chaudement la lecture complète à tous les Ingénieurs qui s'intéressent au problème du flambage. Remarque faite sur éprouve).

5. Ces objections doivent être d'ailleurs limitées en tenant compte de ce fait que l'exactitude de l'exposé mathématique de la formule du flambage de Kármán ne peut faire l'objet d'aucune contestation.

6. La validité de la première hypothèse, même dans le cas de la déformation plastique, a été démontrée par des voies théoriques, par Grünig et Domke. La deuxième hypothèse est évidente par elle-même.

7. Zeit. d. Hannoverschen Ing.-u. Arch.-Ver., 35, 1889, page 455.

était donnée par l'allure du diagramme de compression-contraction. Sur une objection formulée à ce sujet par Jasinski¹, Engesser substitua à sa troisième hypothèse initiale de base la conception suivante² qui fut également adoptée par Kármán.

III. — La forme de la relation fonctionnelle $\sigma = f(\epsilon)$, qui existe, pendant la flexion de la barre comprimée, entre la contrainte σ se manifestant en un point de la section transversale et le raccourcissement ϵ spécifique correspondant, est donnée, pour le côté correspondant à la compression par flexion, par la branche *ca* du diagramme de compression-contraction (fig. 1), et pour le côté correspondant à la traction par flexion, par la droite *cb*, qui est parallèle à la partie rectiligne *op* de ce même diagramme. La relation fonctionnelle $\sigma = \Phi(\epsilon)$, qui exprime la dépendance entre les contraintes σ qui se manifestent simultanément en différents points de la section transversale et les raccourcissements ϵ spécifiques correspondants est par suite déterminée, à tout moment, par le tracé *bca*.

Par suite de l'introduction de cette conception, le but que se proposaient les promoteurs de la théorie d'Engesser-Kármán³ était atteint. En effet, la proposition complémentaire III permet d'arriver parfaitement, en liaison avec l'hypothèse de base I, à une détermination sans ambiguïté de la répartition des contraintes. Par contre, Engesser et Kármán ne se sont pas rendu compte que l'introduction de cette conception est incompatible avec l'hypothèse exacte II.

La cause de cette incompatibilité de la proposition III avec l'hypothèse de base II devient très nette si l'on considère les résultats expérimentaux⁴ d'Ewing, que représente la figure 2 ; on voit en effet nettement sur cette figure que la forme de la relation fonctionnelle qui existe entre la contrainte et la modification de longueur spécifique d'une barre soumise à une charge axiale dépend, dans une large mesure, de la vitesse de déformation spécifique⁵. Suivant la première hypothèse, cette dernière admet une valeur différente, sur un même plan de la section transversale, pour chaque couche de fibres perpendiculaire au plan de flexion. Par suite, la forme de la relation fonctionnelle $\sigma = f(\epsilon)$, dans le domaine de la section transversale de la barre fléchie et pour chaque couche de fibres perpendiculaire au plan de flexion, doit être différente, d'après la deuxième hypothèse. Les courbes qui traduisent la relation $\sigma = f(\epsilon)$ pour différentes couches de fibres doivent donc suivre des parcours différents et leur allure doit subir une modification continue, au passage d'une couche de fibres à la couche voisine, étant donné que la vitesse de déformation varie elle-même d'une manière continue d'une couche à l'autre. Du côté surchargé par flexion, ces courbes (figure 3) passent entre le diagramme *ch* du plan le plus extrême de la zone surchargée et le diagramme

1. Schweizerische Bauzeitung, 25, 1895, page 172.

2. Schweizerische Bauzeitung, 26, 1895, page 26.

3. Il faut citer Jasinski, en tout premier lieu, à côté d'Engesser, comme promoteur de la théorie d'Engesser-Kármán.

4. J. A. EWING, The strength of materials. Cambridge, 1914, p. 42.

5. Au cours des essais d'Ewing, le rapport entre les vitesses de déformation spécifiques moyennes était de 1/5000.

cd de la région neutre, c'est-à-dire de la couche de fibres sur lequel la variation de charge au cours de la déformation de la barre se produit suivant une vitesse nulle. Les courbes qui correspondent aux couches de fibres qui se trouvent du côté souschargé par flexion (fig. 4), passent par contre entre le diagramme *cd* des fibres neutres et le diagramme constitué par la branche tombante *cf* d'un cycle d'hystérésis et qui correspond à la couche de fibres extrêmes du côté convexe de la barre. L'ensemble des courbes correspondantes aux différentes couches de fibres constitue par suite une famille de courbes différentes les unes des autres, en nombre infini et qui remplissent d'une manière continue l'espace délimité par les lignes *ch* et *cf* (figures 3 et 4). Cette conclusion déduite des hypothèses I et II est toutefois incompatible avec l'énoncé de la proposition III, car dans cette dernière, il n'est question, pour la relation fonctionnelle $\sigma = f(\varepsilon)$, que de deux formes différentes, l'une d'elles étant applicable au côté comprimé par flexion, l'autre au côté tendu par flexion. Par suite de cette incompatibilité avec l'hypothèse légitime II, il faut donc nécessairement que la proposition III soit inexacte¹. Il en est naturellement de même en ce qui concerne la théorie du flambage qui a été déduite de l'hypothèse exacte I et de la proposition inexacte III.

3. — Il résulte suffisamment nettement des indications qui précèdent que la forme réelle de la relation fonctionnelle $\sigma = \Phi(\varepsilon)$, qui existe entre les contraintes σ qui se manifestent simultanément dans la section de la barre comprimée après sa flexion et les contractions ε spécifiques correspondantes, ne peut en aucun cas être identique à la forme déterminée par le tracé *bca* (figure 1). En effet, la courbe qui représente cette relation (et qui, dans ce qui suit, sera désignée sous le nom d'« isochrone ») doit dans tous les cas et à tout moment contenir un point de chaque caractéristique d'augmentation et de diminution de charge (figures 4 et 3) ; en outre, sa forme doit varier avec le temps.

La relation $\sigma = \Phi(\varepsilon)$ se déduit de l'expression exacte au moyen d'une équation mathématique et il n'est pas possible de représenter exactement sa variation par une courbe analogue au tracé *bca* d'Engesser-Kármán (figure 1). Quoique l'on ne connaisse pas d'une manière exacte l'allure précise de l'isochrone, on peut toutefois déterminer d'après les faits expérimentaux connus les caractéristiques tout à fait générales de cette courbe^{(3) page 82}. Leur connaissance donne une base suffisante pour résoudre d'une manière générale et sans ambiguïté le problème du flambage. Ces caractéristiques peuvent se résumer dans les deux énoncés suivants :

III a. — Contrairement au tracé *bca* brisé d'Engesser-Kármán (figure 1), l'isochrone n'accuse aucune discontinuité dans sa courbure.

III b. — En conformité avec le tracé *bca* d'Engesser-Kármán, l'allure de l'isochrone est caractérisée par ce fait que les valeurs de la grandeur $\tilde{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ qui correspondent aux différents points de la section transversale au moment

1. L'inexactitude de la proposition III se remarque déjà dans l'allure du tracé *bca*, figure 1, ce tracé accusant au point C un coude invraisemblable, contraire à toute conception de continuité.

du flambage atteignent leur maximum $\tilde{E}_k = \frac{\sigma_k}{\varepsilon_k}$ dans la couche neutre et diminuent lorsque l'on s'éloigne de cette dernière ¹.

La condition de flambage déterminée sur la base des hypothèses I, III a et III b dans le cas où les extrémités de la barre comportent un appui mobile ², valable aussi bien dans le domaine élastique que dans le domaine plastique, est exprimée par l'équation suivante :

$$P_k = \pi^2 \frac{(1 - \varepsilon_k) \tilde{E}_k J_k}{l_k^2} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

relation dans laquelle on désigne par :

J_k le plus petit moment d'inertie de la surface de la section transversale au moment du flambage,

l_k la longueur de la barre au même moment.

Cette équation peut être ramenée à la forme plus simple ci-après, en introduisant le degré de finesse λ_k rapporté au moment considéré :

$$\varepsilon_k = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \lambda_k^2} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Si toutefois la modification des dimensions de la barre sous l'action de la charge de flambage est négligée comme on le fait généralement, les équations qui précèdent prennent alors les formes suivantes :

$$P_k = \pi^2 \frac{\tilde{E}_k J}{l^2} \quad \dots \dots \dots \quad (1a)$$

et :

$$\varepsilon_k = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \quad \dots \dots \dots \quad (2a)$$

dans lesquelles l désigne la longueur de la barre non chargée, les valeurs de J et λ correspondant à l'état non chargé de cette barre.

4. — La concordance très satisfaisante entre la courbe théorique des contraintes de flambage déterminée à partir de l'équation (2a) et les résultats des essais de flambage extrêmement sérieux de Dahlem (¹ page 82) peut être constatée sur la figure 5; par contre, les figures 6 et 7 montrent que les courbes des contraintes de flambage déduites de la théorie du flambage d'Engesser-Kármán (⁶ page 81) et, plus encore, celles qui avaient été déduites de la théorie initiale du flambage d'Engesser (² page 83) sont nettement en discordance avec les résultats expérimentaux mentionnés. La dispersion non négligeable des points expérimentaux introduits dans ces figures, dans un but de contrôle des formules de flambage correspondantes, résulte du fait que des éprouvettes qui sont censées être constituées par le même métal ont des caractéristiques élastiques et plastiques qui accusent toujours quelques écarts. On peut remédier dans une certaine mesure à l'influence défavorable des écarts ci-dessus signalés, qui ne vont pas sans nuire à la rigueur du contrôle, en ayant recours, pour ce contrôle de l'allure des courbes théoriques de contraintes de flam-

1. σ_k et ε_k désignent respectivement les valeurs de la contrainte et de la contraction spécifique qui correspondent à la charge de flambage P_k .

2. M. Broszko, « Sur le flambage des barres prismatiques comprimées axialement ». Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 186, 1928, page 1041.

bage, à des valeurs moyennes de contraintes de flambage obtenues au cours de nombreux essais. Le résultat obtenu par un regroupement motivé des points d'origine expérimentale portés sur la figure 5 est mis en évidence, à titre d'exemple, sur la figure 8, dans laquelle on a porté les points moyens de couples de valeurs (λ , σ_k) afin de permettre un contrôle plus précis et plus aisément de la courbe théorique des contraintes de flambage. L'influence des écarts entre les caractéristiques des matériaux constituant les différentes éprouvettes d'essai, sur le résultat de ce contrôle de la nouvelle théorie du flambage, serait toutefois complètement éliminée en ayant recours non plus aux essais de compression, mais à la méthode directe de contrôle, c'est-à-dire en déterminant par la mesure directe les valeurs des grandeurs ϵ_k et λ_k dans l'équation (2) sur des éprouvettes accusant différents degrés de finesse. Le contrôle direct de la condition de flambage exprimée par l'équation (2), par les résultats des essais dont on dispose actuellement, n'est toutefois pas possible, car les essais précis qui ont été effectués jusqu'à maintenant ont été basés sur les principes établis par Engesser et Kármán et l'on ne peut, par suite, pas trouver, dans les compte rendus de ces essais, les indications numériques qui seraient précisément nécessaires pour le contrôle direct de l'équation (2)¹.

Les figures 9, 10 et 11 montrent enfin que pour un diagramme de compression-contraction donné, figure 10, la courbe degré de finesse-contrainte de flambage, figure 11, peut être déduite sans aucun calcul de ce dernier diagramme, en se basant sur l'équation (2a), à condition de disposer d'une représentation graphique, à l'échelle, de la relation fonctionnelle déterminée par cette équation (figure 9).

5. — L'application d'une théorie du flambage nécessite la connaissance de plusieurs caractéristiques degré de finesse-contrainte de flambage, ces caractéristiques devant être déduites du diagramme de compression-contraction des matériaux envisagés. Il est par suite évident que pour un ingénieur qui a à calculer un ouvrage ayant à supporter une charge déterminée (statique par exemple), ces caractéristiques seraient d'une valeur tout à fait problématique si on les déduisait, suivant l'habitude antérieure, des diagrammes de compression-contraction relevés avec des vitesses de mise en charge ordinaires, qui sont relativement très fortes. En effet, le parcours géométrique du diagramme de compression-contraction et par suite également celui de la caractéristique finesse-contrainte de flambage qui en est déduite, dépendent, dans une large mesure, de l'allure dans le temps de la mise en charge au cours des essais de compression correspondants. Et en fait, l'influence du temps dans les essais de compression courants se manifeste dans ce sens, que pour de plus faibles vitesses de mise en charge, les diagrammes de compression-contraction descendent plus bas. Aux diagrammes inférieurs de compression-contraction correspondent pourtant les diagrammes inférieurs de la contrainte de flambage en fonction du degré de finesse. La figure 12 montre que l'influence du temps sur l'allure de ces derniers diagrammes peut être notable ; cette figure représente deux caractéristiques degré de finesse-contrainte de flambage qui

1. Des essais très étendus, ayant pour but la vérification directe de l'équation (2), doivent se terminer l'année prochaine.

ont été déterminées, d'après l'équation (2 a), et pour le même matériau d'épreuve, à partir des deux diagrammes compression-contraction qui sont représentés sur la figure 2 et qui ont été relevés avec des vitesses de mise en charge différentes.

Des considérations qui précèdent, il résulte que les caractéristiques degré de finesse-contrainte de flambage ne peuvent répondre aux nécessités de la pratique que si elles sont déduites de diagrammes de compression-contraction qui ont été relevés à peu près avec les mêmes vitesses de contraction que celles avec lesquelles il faut compter lorsqu'il s'agit d'éléments de construction effectifs. Il est clair, par suite, que pour obtenir un diagramme de compression-contraction répondant à cette dernière exigence, il ne suffirait pas d'un diagramme de compression normal, même si l'essai de compression consistait en un essai de durée. Pour aboutir à une relation fonctionnelle $\sigma = f(\varepsilon)$ qui soit susceptible de servir de point de départ pour l'obtention d'une caractéristique degré de finesse-contrainte de flambage qui soit elle-même utilisable pour le calcul statique d'un ouvrage, il est nécessaire de procéder, pour chaque matériau, à toute une série d'essais de compression de durée, sur des éprouvettes de mêmes dimensions, constitués avec un métal accusant des caractéristiques aussi uniformes que possible. Chacune de ces éprouvettes devrait être soumise à une charge permanente, appliquée à la vitesse normale puis maintenue constante. Après détermination expérimentale de l'allure de la variation de la contraction en fonction du temps, pendant un temps suffisamment long, il y aurait alors lieu de déterminer, pour chacune de ces éprouvettes, la valeur correspondante de ε_{\max} de la contraction spécifique obtenue par extrapolation pour une durée d'application indéfinie de la charge correspondante. Au moyen des couples de valeurs $(\sigma, \varepsilon_{\max})$ ainsi déterminés, on obtiendrait un diagramme de compression-contraction particulier qui serait susceptible de servir de point de départ à la détermination d'une caractéristique « statique » parfaite degré de finesse-contrainte de flambage.

6. — En ce qui concerne la discussion de Vienne au sujet de la question du flambage, on en arrive en résumé aux conclusions suivantes :

a. — Les objections qui ont été faites à la déduction mathématique de l'équation (1) se montrent insoutenables, du point de vue des hypothèses III a et III b.

b. — Ces objections sont nées de la conviction que le tracé brisé de l'isochrone constituait un dogme intangible¹.

c. — L'inexactitude de l'hypothèse de base de Kármán a été mise très nettement en évidence à plusieurs reprises au cours de ma contribution à la discussion de Vienne.

1. Le crédit accordé à la validité de l'hypothèse III de Kármán paraît d'autant plus surprenant que les protagonistes de la théorie d'Engesser-Kármán eux-mêmes n'accordent à la droite bc , figure 1, que la valeur d'une représentation approchée de la partie inférieure de la courbe de répartition des efforts. Il est de fait que l'on ne voit pas pourquoi cette représentation approchée pourrait représenter la répartition des efforts avec exactitude uniquement aux environs du point c, ainsi que le suppose la théorie d'Engesser-Kármán. (Noter à ce sujet l'indication introduite sur les diagrammes dans le Rapport du Professeur Roš : « Cours approximatif de la courbe tension-allongement à la décharge »).