Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Rubrik: I. Stability and strength of structural members subjected to compression and bending

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 30.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

I 1

STABILITÄT UND FESTIGKEIT VON AUF DRUCK UND BIEGUNG BEANSPRUCHTEN BAUTEILEN

STABILITÉ ET RÉSISTANCE DES PIÈCES TRAVAILLANT SIMULTANÉMENT A LA COMPRESSION ET A LA FLEXION

STABILITY AND STRENGTH OF STRUCTURAL MEMBERS SUBJECTED TO COMPRESSION AND BENDING

EINLEITENDES REFERAT

RAPPORT D'INTRODUCTION

INTRODUCTORY REPORT

Dr.-Ing. L. KARNER,
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich.

I. Einleitung.

Die Berechnung und Dimensionierung von Bauteilen, die auf Druck und Biegung beansprucht werden, gehört zu den schwierigsten Aufgaben der Statik. Wenn äussere Belastungen im Bauteil Druckkräfte allein, oder solche im Zusammenwirken mit äusseren Biegemomenten und Querkräften hervorrufen, treten senkrecht zu den Axialkräften Deformationen auf, die Zusatzmomente und erhebliche Spannungen hervorrufen. Je nach dem Ueberwiegen des Einflusses der Momente oder des Einflusses der Druckkräfte, haben wir es mit einer Spannungs- oder mit einer Stabilitätsaufgabe, bezw. mit einem gemischten Problem zu tun. Im ersteren Falle wird für die Dimensionierung das Einhalten bestimmter zulässiger Spannungen massgebend, während im zweiten Falle die Untersuchung der Sicherheit gegen Erreichen eines labilen Gleichgewichtszustandes erforderlich ist.

Zu den bekanntesten und am meisten entwickelten Aufgaben gehört die Berechnung zentrisch belasteter Säulen und Stäbe. Die hierbei auftretenden Untersuchungen werden bereits erschwert, wenn die Querschnitte dieser Bauglieder nicht voll, sondern gegliedert sind, da dann die Stabilität der Teilglieder geprüft, sowie deren Einfluss auf die Gesamtstabilität berechnet werden muss. Aber auch bei vollen Querschnitten spielt die Frage des Ausbeulens (Ausknickens) der einzelnen auf kürzeren Strecken frei abstehenden Flansche, sowie der dünnen Stege, eine bedeutende Rolle.

Im Stahlbrückenbau hat in den letzten Jahren die Anwendung weitge-

spannter vollwandiger Balkenbrücken ausserordentliche Fortschritte gemacht. Bei diesen Bauformen muss ganz besonders auf die Knicksicherheit der Stegbleche und auf eine zweckmässige Art der Versteifungen geachtet werden.

Die rechnerischen Untersuchungen werden schwieriger, wenn zu den axialen Beanspruchungen bei Säulen und Stäben oder zu den in der Ebene der Platten wirkenden Momenten, Normal- und Querkräften noch äussere Momente hinzutreten, die Verformungen in einer Stabebene oder senkrecht zur Plattenebene hervorrufen.

Solange sich alle auftretenden Dehnungen elastisch verhalten, sind auch bei kombinierten Beanspruchungen sowohl Knick- als Festigkeitsuntersuchungen relativ einfach. Ungleich schwieriger und noch keineswegs abgeklärt ist dagegen das Verhalten der auf Druck und Biegung beanspruchten Konstruktionen im unelastischen, bezw. plastischen Bereich unserer Baustoffe. Da es praktisch als ausgeschlossen betrachtet werden kann, das unelastische Verhalten der Materialien (nach Ueberschreiten der Proportionalitätsgrenze) rechnerisch zu erfassen oder in Gleichungen zu kleiden, bleibt es meist bei der Notwendigkeit der Durchführung von Versuchsrechnungen oder des Ausprobierens auf Grund meist etwas willkürlicher Annahmen (Ebenbleibens der Querschnitte u. s. w.), um für schwierigere Belastungsfälle das Gleichgewicht zwischen den äusseren Lasten und den inneren Beanspruchungen berechnen zu können. Beispielsweise müssen wir schon bei Baustahl konstatieren, dass gerade Stabilitätsfragen nicht ohne Berücksichtigung des plastischen Verhaltens gelöst werden können. Um nur ein Beispiel zu nennen, verweisen wir auf den exzentrisch beanspruchten Druckstab, der auch bei grösseren Schlankheitsgraden zum Teil unelastisch wird, wenn er in das labile Gleichgewicht übergeht.

Schliesslich deuten wir noch an, dass die meisten Probleme dieser Art bei genauerer Untersuchung eine weitere Erschwernis dadurch erfahren können, dass sich Stabilitäts- und Festigkeitsuntersuchungen auf räumliche Spannungszustände erstrecken und sodann die Veränderlichkeit der Elastizitätsmoduli nach allen Seiten ihren Einfluss geltend macht.

II. Entwicklung und Stand der wissenschaftlichen Forschung und Versuchspraxis[1].

Die älteste Untersuchung eines durch eine Druckkraft beanspruchten geraden Stabes stammt von Euler aus dem Jahre 1744. Die Euler-Formel kam jedoch später wegen ihres Versagens bei gedrungenen Stäben in Misskredit, obwohl schon Lamarle im Jahre 1845 darauf hingewiesen hat, dass für Holz die Gültigkeit der Euler-Formel an die Elastizitätsgrenze gebunden sei. In der Folge behalf man sich mit empirisch abgeleiteten Formeln von Tetmayer, Schwarz-Rankine u.a.. Tetmayer hatte allerdings bereits die Euler-Formel für den elastischen Bereich wieder zu Ehren gebracht. Die erste Arbeit Engessers, in der er auf das plastische Verhalten hinwies, stammt aus dem Jahre 1889, doch fand sie erst ihre volle Anerkennung durch die Arbeiten Kármán's aus

1. Siehe Literaturverzeichnis.

dem Jahre 1910, durch welche die Grundlage für die Theorie von ENGESSER-KÁRMÁN geschaffen wurde. Nach dieser ist es zunächst wenigstens für das zentrische Knicken möglich geworden, im unelastischen Bereiche die Verhältnisse richtiger zu erfassen und Säulen und Stäbe verschiedener Materialien auf Grund der Kenntnis ihres Druck-Stauchung-Diagrammes zu berechnen.

Das nächste Problem, dem sich nun Versuchspraxis und Theorie zuwenden, mussten, ist das Studium des exzentrisch gedrückten Stabes; hier sind die Arbeiten von KROHN und ganz besonders die von ROŠ und BRUNNER zu erwähnen. Von besonderer Bedeutung für die internationale Verbreitung der Erkenntnisse und für die kritische Behandlung der einzelnen Auffassungen sind die Berichte und Diskussionen der Internationalen Tagung für Brückenbau und Hochbau im Jahre 1928 in Wien geworden, und wir verweisen ganz besonders auf diesen Bericht (siehe Literaturverzeichnis).

Ausser der Behandlung der grundlegenden Fragen, die den vollwandigen Stabquerschnitt bei zentrischer und exzentrischer Beanspruchung betreffen, sind gleichzeitig von einer grösseren Zahl von Forschern, — wir nennen BLEICH CHWALLA, DONDORFF, ELWITZ, A. FÖPPL, HUBER, KAYSER, KRIEMLER, KROHN, KÜBLER, LOVE, MAYER, MELAN, VON MIESES, MÜLLER-BRESLAU, OSTENFELD, REISSNER, TIMOSHENKO, WADDEL, ZIMMERMANN, u. a. — theoretische Untersuchungen vorgelegt worden, bei welchen kombinierte Lastfälle, verschiedenartige Lagerungen, veränderliche Querschnitte der Stäbe u. s. w. behandelt wurden. Auf dem Gebiete der Theorie des Knickens von Platten ist besonders TIMOSHENKO zu nennen, nachdem als erster BRYAN 1891 sich mit dem Problem des Ausbeulens rechteckiger Platten beschäftigte. Ausser anderen Forschern wie REISSNER, WAGNER, SCHLEICHER, u. s. w. hat besonders BLEICH die Theorie der Stege und Flansche gedrückter Stäbe, sowie die Knicksicherheit der Stegbleche von vollwandigen Stahlträgern der praktischen Verwendung durch Ausarbeitung von geeigneten Formeln zugänglich gemacht.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass die Berechnung von Stäben, Platten und zusammengesetzten Konstruktionsformen bei Auftreten von Druck und Biegung sowohl in Bezug auf Knick- als auch Festigkeitsberechnungen keine unüberwindlichen Schwierigkeiten bietet, solange die Verformungen sich im elastischen Bereich abspielen. Treten in einzelnen Teilen jedoch plastische Deformationen auf, so werden die Untersuchungen bedeutend schwieriger, weil das unelastiche Verhalten, durch besondere Werkstoffeigenschaften bedingt, keine einwandfreie Gleichgewichtsuntersuchung mehr ermöglicht. Dem technisch-wissenschaftlichen und dem praktischen Versuchswesen bleiben hier noch ein sehr weites Arbeitsfeld offen.

Das Versuchswesen hat dabei eine doppelte Aufgabe. Die Praxis erfordert praktische Dimensionierungs- und Bemessungsformeln für mannigfache Belastungsarten. Die Wissenschaft wünscht die Vorgänge auch nach Ueberschreiten der in der Praxis zulässigen Beanspruchungen und Deformationen kennen zu lernen und wünscht vor allem im Zusammenhang mit Materialprüfungsfragen die Vorgänge beim Auftreten der Instabilität genauer zu prüfen.

Für die Abklärung der Grundlagen ist es erforderlich, die Verhältnisse beim Gleichgewichtswechsel im Zusammenhang mit den auftretenden Spannungen zu betrachten.

Wir wollen nun verschiedene Belastungsfälle am einfachen, in seinen Endpunkten gelenkig gelagerten Stab, von diesem Gesichtspunkt aus ganz allgemein untersuchen, da sich bei anderen Formen sinngemässe Verhältnisse ergeben.

1. Der zentrisch belastete gerade Stab im elastischen Bereich.

Wird ein an den Enden gelenkig gelagerter Stab durch eine Druckkraft zentrisch belastet, so bleibt er infolge Belastungen unterhalb der kritischen Knicklast (Euler'sche Knicklast) gerade. Wird die Stabachse durch Hinzutreten von äusseren Momenten gebogen (und treten keine Randspannungen über der Proportionalitätsgrenze auf) so kehrt der Stab nach Wegfallen der Ausbiegungsursachen wieder in die gerade Lage zurück.

Der Stab bleibt auch bei weiterer Steigerung der Last gerade, er ist im stabilen Gleichgewicht bis die kritische Last, die Knicklast, erreicht ist. Der Stab ist bisher nur durch eine Normalkraft beansprucht. Wird nunmehr die Last um einen noch so kleinen Teil gesteigert, so tritt eine Ausbiegung auf, es wird ein Zusatzmoment wirksam. Nur diesen Vorgang sprechen wir als Knickerscheinung an. Die Lage der Stabachse entspricht nun neuerdings einer Gleichgewichtslage. Bei weiterer langsamster Laststeigerung nimmt die Ausbiegung rasch zu, die Randspannungen überschreiten in Stabmitte bald die Proportionalitätsgrenze und der Stab wird teilweise unelastisch.

Die weiteren Formänderungen und das schliessliche Unbrauchbarwerden des Stabes spielt sich für praktische Schlankheitsverhältnisse im unelastischen Bereich ab.

2. Der exzentrisch belastete Stab im elastischen Bereich.

Wirkt die Druckkraft exzentrisch, dann ist bereits ein Anfangsmoment vorhanden, das eine Ausbiegung der Stabachse bedingt. Bei unbegrenzt elastischem Material entspricht jeder Belastung ein Gleichgewichtsfall. Instabilität kommt nicht in Frage. Aber auch hier können wir durch die Berechnung feststellen, bei welcher Belastung die Randspannungen die Proportionalitätsgrenze überschreiten, und von dieser Belastung an ist wieder plastisches Verhalten massgebend.

3. Der zentrisch belastete gerade Stab im unelastischen Bereich.

Ist die Belastung unterhalb der kritischen Last (Knicklast), so bleibt der Stab gerade. Bleiben die Spannungen dabei unterhalb der Proportionalitätsgrenze, so kehrt der Stab in die gerade Lage zurück, wenn die Ausbiegungsursache entfernt wird. Ueberschreitet jedoch die Axialkraft (die jedoch unter der kritischen Last bleibt) die Grenze, für die die Spannungen die Proportionalitätsgrenze überschreiten, dann dürfen wir einen solchen Stab nicht mehr ausbiegen, da er sonst in eine zweite ausgebogene Gleichgewichtslage übergeht, die bereits eine plastische Deformation eines Teiles der Stabes bedingt. Unterhalb der Knicklast, aber über der Proportionalitätsgrenze, gibt es somit eine Gleichgewichtslage mit gerade bleibender Achse und eine solche mit ausgebogener Stabachse. (Letzterer Fall entspricht bei weiterer Steigerung der

Last wegen der bereits vorhandenen Exzentrizität den im folgenden behandelten Fall 4). Setzen wir nun den Stab noch gerade voraus und steigern wir die Belastung bis zur kritischen Knicklast, so weicht der Stab ähnlich aus, wie im Knickstadium des elastischen Gebietes. Die Ausbiegung nimmt rasch zu, die Zusatzmomente wachsen und der Stab erliegt den Verformungen im plastischen Gebiet.

4. Der exzentrisch belastete gerade Stab im unelastischen Bereich.

Der Stab verhält sich zuerst wie unter 2. Wird die Last gesteigert, so deformiert sich der Stab nach den Gesetzen des Baustoffes, bis er schliesslich ins labile Gleichgewicht kommt, d. h. bei geringster Lastzunahme ausweicht. Dieser Vorgang des Eintretens des labilen Gleichgewichtes ist nicht zu verwechseln mit den früher geschilderten Vorgängen des Knickens. Beim Knicken haben wir es mit dem Wechsel aus einer Gleichgewichtslage (gerade Stabachse unter Normalkraft) in eine andere Gleichgewichtslage (gekrümmte Achse unter Normalkraft und Biegemoment) zu tun. Im Falle des Eintretens des labilen Gleichgewichtes jedoch, wenn ein Teil des Stabes unelastisch wird, ist das Material des Stabes nicht mehr im Stande, den äusseren Kräften genügend Widerstand entgegen zu setzen. Für praktische Verhältnisse ist dieser Zustand des Eintretens der Instabilität im plastischen Bereich auch wirksam für die Belastungsfälle unter 1) 2) und 3), wenn nach dem Ueberschreiten der Proportionalitätsgrenze plastische Verformungen eintreten. Dieser Vorgang lässt sich auch versuchstechnisch deutlich verfolgen, wenn Vorsorge getroffen wird, dass die Last auch im Momente des Ausweichens des Stabes wirksam bleibt und wenn unbegrenzte Deformationsmöglichkeit besteht. Die Stabachse ist zunächst, auch wenn teilweise bereits die Streckgrenze überschritten ist, in allen Teilen gekrümmt; es ist dies der Fall des in allen Teilen noch biegungssteifen Stabes. Wenn jedoch in Stabmitte, als der Stelle des grössten Momentes, infolge mangelnden inneren Widerstandes das Stabmaterial nicht mehr im Stande ist, das äussere Moment aufzunehmen, so tritt an dieser Stelle eine gewisse Gelenkwirkung auf. Ein Gleichgewicht wird für ein solches Tragwerk sofort unmöglich, da der Stab in der Mitte nurmehr begrenzt oder garnicht mehr biegesteif ist. Diesem Gebilde entspricht eine starke Verringerung der Momentenwirkung in beiden Stabhälften, und daher strecken sich die Stabenden, soweit sie nicht bereits dauernd deformiert sind.

5. Schlussfolgerungen.

Die geschilderten Erscheinungen des Knickens und der Instabilität treten bei Stäben mit nicht gelenkiger Lagerung, bei Platten und anderen Körperformen sinngemäss auf. Wir fügen noch hinzu, dass im elastischen Bereich die einzelnen Belastungen hintereinander und in verschiedener Reihenfolge aufgebracht werden können, um immer den gleichen Endzustand an Verformung und an Spannungen zu erhalten. Dies trifft nicht mehr zu, wenn Teile der Konstruktion plastisch verformt werden.

Es ist selbstverständlich, dass die geschilderten verschiedenen Vorgänge für verschiedene Baustoffe, je nach deren Materialeigenschaften, verschieden sind. Wir haben im grossen und ganzen bei unseren Betrachtungen normalen Baustahl im Auge gehabt.

Wir kommen zum Schluss, dass für das genaue versuchstechnische Studium und zur theoretischen Abklärung der Fragen des Knickens, ganz besonders aber für die Frage des Auftretens labiler Gleichgewichtsfälle im plastischen Bereich die Kenntnis der auftretenden Spannungen erforderlich wird. Ganz besonders ist es erwünscht, diejenigen Belastungsfälle zu kennen, unter welchen die Proportionalitätsgrenze an irgend einer Stelle überschritten wird, um den Augenblick des Beginnes der plastischen Verformung zu erfahren.

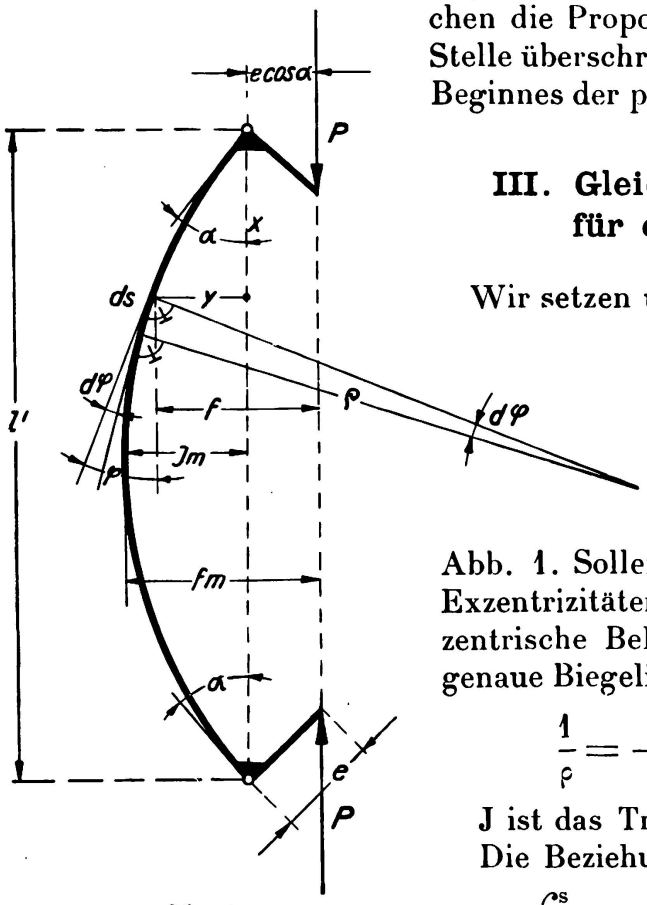


Fig. 1.

Gelenkig gelagerter Stab mit exzentrischer Belastung im elastischen Bereich.

Barre articulée aux appuis avec charge excentrée, dans les limites de l'élasticité.

Member with Hinged Bearings and Eccentric Loading in the Elastic Zone.

III. Gleichgewichtsberechnungen für elastische Baustoffe.

Wir setzen unbegrenzt elastisches Material mit dem Elastizitätsmodul E voraus und nehmen, um die Ableitung ganz allgemein zu gestalten, den Fall exzentrischer Belastung an. Für den an beiden Stabenden gelenkig gelagerten Stab gilt Abb. 1. Sollen unsere Entwicklungen für kleine Exzentrizitäten, und im Grenzübergang für die zentrische Belastung gelten, so müssen wir die genaue Biegelinie berücksichtigen und wir setzen

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{P\,(e\cos\alpha + y)}{EJ}$$

J ist das Trägheitsmoment des Querschnittes. Die Beziehung zwischen y, ds und φ ist durch $y = \int_0^s ds \sin\varphi$ gegeben. Setzen wir $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$, so ergibt sich : $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2k^2\cos\varphi + C$.

Die Konstante bestimmt sich aus den Beziehungen am Stabende, wenn $\varphi = \alpha$ wird aus $\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{M_\alpha}{EJ} = -k^2 e\cos\alpha$. Damit erhalten wir die Beziehung

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{K^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} \cdot \frac{1}{2k}$$

in der $K^2 = \left(\frac{1}{4}k^2e^2\cos^2\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$ bedeutet.

Führt man die Integration über die ganze gebogene Stabachse l (unter Ver-

nachlässigung ihrer Verkürzung durch die reine Druckbelastung P cos φ) durch, so erhält man in allgemeinster Form :

$$l = \frac{1}{k} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{K^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{Gl (1)}$$

Das Integral ist nur mit Reihenentwicklung zu lösen und ergibt :

$$l = \frac{2}{k}\Big[\arcsin \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{K}\Big\{1 + 0{,}25\ K^2 + 0{,}1406\ K^4 + 0{,}0977\ K^6 + \ldots\Big\}$$

$$- \frac{k}{2} e \cos\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\Big\{0{,}25 + 0{,}1406.\ K^2 + 0{,}0977\ K^4 + \ldots\ldots\Big\}$$

$$- \frac{k}{2} e \cos\alpha \sin^3\frac{\alpha}{2}\Big\{0{,}0937 + 0{,}0651\ K^2 + 0{,}0050\ K^4 + \ldots\ldots\Big\}$$

$$- \frac{k}{2} e \cos\alpha \sin^5\frac{\alpha}{2}\Big\{0{,}0391 + 0{,}0299\ K^2 + \ldots\ldots\Big\}\ldots\Big] \quad \text{Gl (2)}$$

Wird $e = 0$, dann bekommen wir für zentrische Belastung (aber bei vorhandener Ausbiegung), da $K = \sin\frac{\alpha}{2}$ wird und da $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ ist :

$$l = -\frac{\pi}{k}\Big\{1 + 0{,}25 \sin^2\frac{\alpha}{2} + 0{,}1406 \sin^4\frac{\alpha}{2} + 0{,}0977 \sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots\Big\} \quad \text{Gl (3)}$$

Geht schliesslich auch α in 0 über (nur bei $e = 0$ möglich), dann wird

$$l = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{EJ}{P}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Gl (4)}$$

was der Euler'schen Knickkraft bei zentrischer Belastung entspricht.

Die Gleichung (2) ist nicht in geschlossener Form nach P auflösbar. Bei gegebenen Stababmessungen und Belastung kann die Gleichgewichtslage nur durch Probieren ermittelt werden. Dagegen eignet sich die Form der Gleichung (2) sehr gut zur Aufstellung von Tabellen und graphischen Darstellungen. Für praktische Fälle und mit Rücksicht auf die Unzulässigkeit grösserer Deformationen, bezw. mit Rücksicht auf das Ueberschreiten der Proportionalitätsgrenze in den Randfasern kommen für die Auswertung nur ganz wenige Glieder in Frage. Es ergeben sich weiter die Deformationen zu :

$$y = \frac{2}{k}\sqrt{K^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}} - e\cos\alpha \quad \text{Gl (5)} \qquad y_m = \frac{2}{k} K - e\cos\alpha \quad \text{Gl (7)}$$

$$f = \frac{2}{k}\sqrt{K^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}} \quad \ldots\ldots \text{Gl (6)} \qquad f_m = \frac{2}{k} K \quad \ldots\ldots \text{Gl (8)}$$

Eliminiert man aus der Gleichung (2) den Wert K durch Einführen des Hebelarmes f_m, so geht sie in die Form über :

$$l = \frac{2}{k}\left[\arcsin \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{k.f_m}{2}}\left\{1 + 0{,}25\frac{k^2}{4}\cdot f_m^2 + 0{,}1406\frac{k^4}{16}\cdot f_m^4 + \ldots\right\}\right.$$

$$\left. -\frac{k}{2}e\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\left\{0{,}25 + 0{,}1406\frac{k^2}{4}\cdot f_m^2 + \ldots\right\} - \ldots\right] \text{ Gl (9)}$$

Für $e = 0$ wird der arc $= \frac{\pi}{2}$ und Gleichung 9 nimmt die Form an, die schon bei Grashof durch Integration der genauen Differentialgleichung der Biegelinie erscheint :

$$l = \frac{\pi}{k}\left\{1 + 0{,}25\frac{k^2}{4}\cdot f_m^2 + 0{,}1406\frac{k^4}{16}\cdot f_m^4 + \ldots\right\} \text{ Gl (10}$$

In den vorangehenden Berechnungen sind die Einflüsse der Querkräfte, der Stabverkürzung und der Querschnittsveränderung vernachlässigt. Da wir nur vergleichende Betrachtungen anstellen werden, führen wir für die Auswertung der Gleichung (2) die Schwerpunktspannung $\sigma_n = \frac{P}{F}$ und den Schlankheitsgrad $\lambda = \frac{i}{l}$ ein. Wir nehmen ferner einen rechteckigen Querschnitt mit der Höhe h und der Breite b an und beziehen die Grösse der Exzentrizität auf die Kernweite, sodass $e = m\frac{h}{6}$ wird. Es ergibt sich nun

$$k = \frac{\lambda}{l}\sqrt{\frac{\sigma_n}{E}} \text{ und e. } k = 0{,}577.\,\text{m.}\sqrt{\frac{\sigma_n}{E}}$$

Schliesslich berechnen wir noch den grössten Hebelarm für die Last P in Stabmitte aus der Gleichung (8) durch Einsetzen der obigen Werte zu :

$$\frac{f_m}{h} = \frac{1}{6}\sqrt{m^2\cos^2\alpha + 12\frac{E}{\sigma_n}\sin^2\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots \text{ Gl. (11)}$$

Als Elastizitätsmodul führen wir $E = 2210\ t/cm^2$ ein, welcher Wert normalem Baustahl entspricht und den wir zunächst unbegrenzt konstant wählen.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich für die Gleichung (2) und für die Beziehung $\frac{f_m}{h}$ Kurvenscharen zeichnen, die in Fig. 2 dargestellt sind und für verschiedene Werte m gelten. Jeder Punkt dieser graphischen Darstellungen gibt für die betreffende Exzentrizität die zusammengehörigen Werte σ_n, λ, α und $\frac{f_m}{h}$, für die Gleichgewicht herrscht.

Die Fig. 2a für $m = 0$ entspricht zentrischer Belastung. In dieser Darstellung ist der Masstab für λ nur bis zum Erreichen der Knickspannung derselbe wie in den übrigen Teilabbildungen. Von dieser Stelle ab entspricht bei gleichbleibender Belastung (konstantes σ_n) einem grösser werdenden Winkel α

ein grösser werdender Schlankheitsgrad. Die Zunahme $\Delta\lambda$ ist jedoch in hundertfachem λ Masstab aufgetragen.

Aus der Gleichung (3) für zentrische Belastung können die zusammengehö-

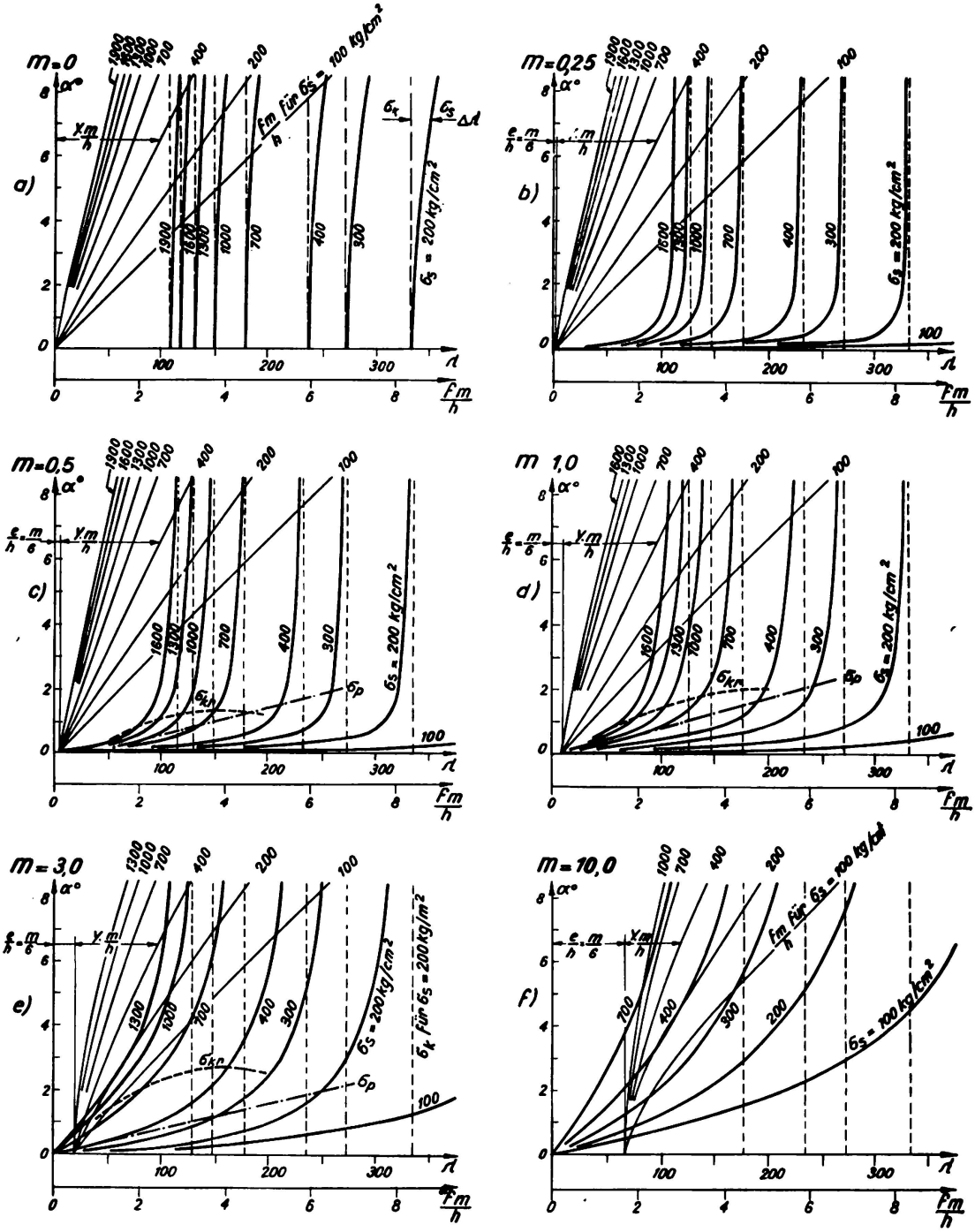


Fig. 2.

Gelenkig gelagerter Stab im elastischen Bereich. Beziehungen zwischen Schwerpunktsspannungen, Schlankheitsgraden und Deformationen, für verschiedene Exzentrizitäten.

Barre articulée aux appuis, travaillant dans la zone élastique. Relations entre les efforts au centre de gravité, les degrés de finesse et les déformations pour différentes excentricités.

Member with Hinged Bearings, in the Elastic Zone. Relations between stresses at centre of gravity, slenderness ratios and deformations for various eccentricities.

rigen Werte der Stablast P nach Ueberschreitung der Knicklast P_k und des Winkels α leicht bestimmt werden:

$$P = P_k \left\{ 1 + 0{,}25 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 0{,}1406 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots \right\}$$

Die folgende Tabelle gibt einen Einblick in diese Zusammenhänge.

P/P_k	1,00015	1,00095	1,0038	1,0350	1,0810
α	2°	5°	10°	30°	45°
$\frac{y_m}{l}$	0,011	0,028	0,055	0,162	0,234

Die Fig. 2b-2f zeigen, dass für ein gegebenes m jede σ_n-Kurve sich assymptotisch der Vertikalen durch jenen Schlankheitsgrad λ_k nähert, für den σ_n bei zentrischer Belastung Knickspannung wird. Für Stabquerschnitte mit der Schwerpunktsspannung σ_n bleiben bei kleineren Exzentrizitäten mit zunehmenden λ die Deformationen zunächst gering, um dann gegen den Schlankheitsgrad für zentrisches Knicken zu plötzlich rasch anzuwachsen.

Bei grösseren Exzentrizitäten bewirkt das Ueberwiegen des Momentes bei wachsendem λ eine raschere Zunahme der Werte α und f_m; jedoch sind die Uebergänge gegen den kritischen Schlankheitsgrad zu weniger unvermittelt.

Für den gewählten Elastizitätsmodul E und für eine entsprechende Proportionalitätsgrenze $\sigma_p = 1{,}9$ t/cm² ist sehr bald für die einzelnen Linien diejenige Grenze erreicht, für die in der Randfaser der Druckseite σ_p überschritten und der Stab teilweise unelastisch wird.

Für die Exzentrizitäten $m = 0{,}50$, 1,0 und 3,0 sind σ_p-Linien eingetragen. Diese geben im Schnitt mit einer σ_n-Kurve den Schlankheitsgrad, für den gleichzeitig in der Randfaser der Druckseite σ_p erreicht wird. Nur zusammengehörige Werte von α, λ und σ_n, die unter der σ_p-Kurve liegen, entsprechen Belastungsfällen, für welche der ganze Stab elastisch ist. Ueber der σ_p-Kurve haben wir es mit Belastungsfällen zu tun, für die der ganze Stab oder Teile desselben unelastisch werden. Unsere Kurvenscharen gelten somit praktisch nur bis zur σ_p-Kurve.

Für die gleichen Werte m sind auch σ_{kr} Kurven eingezeichnet. Das sind diejenigen kritischen Schwerpunktsspannungen, für die nach den Versuchen von Roš Knicken des exzentrisch beanspruchten Stabes oder, nach unseren eingangs gebrachten Erläuterungen, Instabilität eintritt.

Für die drei dargestellten m-Fälle liegen für die in der Praxis zulässigen Schlankheitswerte die Instabilitäten in dem Bereich, für welchen der Stab teilweise oder ganz unelastisch wird. Ein Unterschreiten der σ_p-Kurve durch die Linie σ_{kr}, auch bei sehr kleinen Werten m, ist nach dem Gesagten nicht möglich.

Um die Spannungsverhältnisse bei den exzentrischen Druckbeanspruchungen besser überblicken zu können, werden wir noch die auftretenden Span-

nungen ermitteln. Wir beschränken uns darauf, die grössten Randspannungen für den Rechteck-Querschnitt im Stabmitte zu berechnen.

$$\sigma_m \overset{\max}{\underset{\min}{}} = \frac{P}{F} \pm \frac{P \cdot f_m}{J} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_n \left(1 \pm 6 \frac{f_m}{h}\right) \quad \ldots\ldots \quad \text{Gl (12)}$$

F ist die Querschnittsfläche und J ist das Trägheitsmoment.

Die grössten und kleinsten Spannungen in Stabmitte können ferner auch wie folgt angeschrieben werden :

$$\sigma_m \overset{\max}{\underset{\min}{}} = \sigma_n \left(1 \pm \lambda \frac{h}{l} \sqrt{\frac{E}{\sigma_n}} \cdot K\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{Gl (13)}$$

Uebersteigt beim zentrisch belasteten Stab die Druckkraft die Knicklast, dann lassen sich die Randspannungen für den Querschnitt in der Stabmitte sinngemäss bestimmen.

$$\sigma_m \overset{\max}{\underset{\min}{}} = \sigma_n \left(1 \pm \lambda \frac{h}{l} \sqrt{\frac{E}{\sigma_n}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad \text{Gl (14)}$$

Wenn wir für σ_n bei kleinen Winkeln α wegen der Geringfügigkeit des Zuwachses von P gegenüber P_k den Wert σ_k einsetzen, wird für zentrische Last :

$$\sin \frac{\alpha_p}{2} = (\sigma_p - \sigma_k) \frac{l}{h} \cdot \frac{1}{\lambda . E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{Gl (15)}$$

worin α_p den Ablenkungswinkel bedeutet, für den am Rande σ_p erreicht wird.

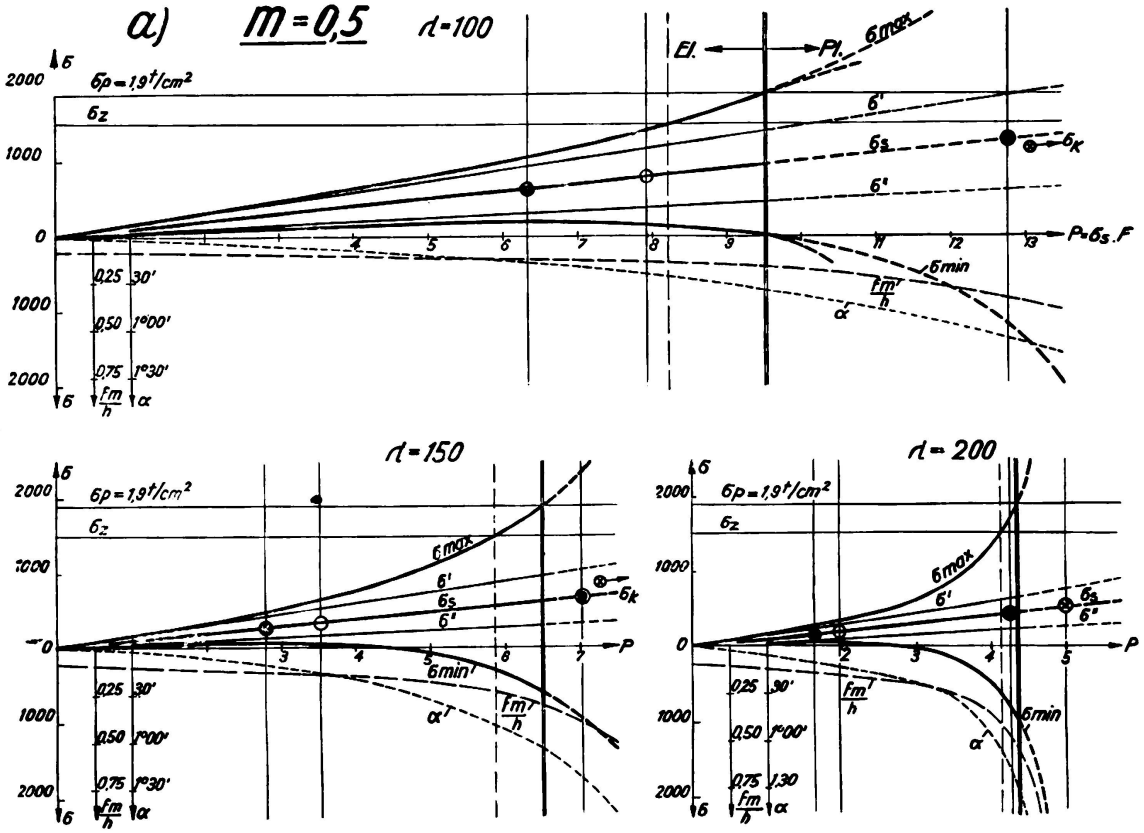
Die folgende Tabelle zeigt solche zusammengehörige Werte.

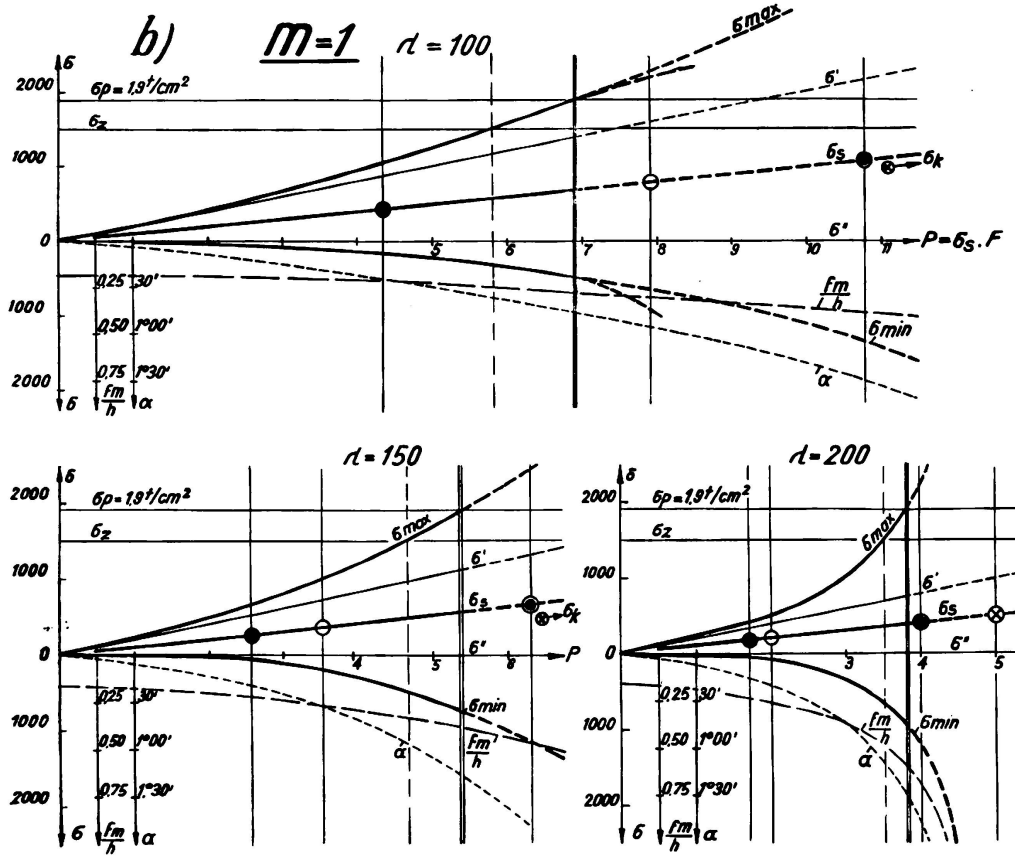
λ	α	$\frac{y_m}{l}$	y_m für $l = 500$ cm
ca. 107	0°	0	0
150	0°40′	0,0037	1,85 cm
200	1°18′	0,0072	3,60 cm
250	1°53′	0,0103	5,15 cm

Nach der Gleichung (13) sind für $m = 0{,}5$, $m = 1{,}0$ und $m = 3{,}0$ je für die Schlankheitsgrade 100, 150 und 200 für eine wachsende Kraft $P = \sigma_s$. F verschiedene Spannungswerte ermittelt und in den Fig. 3a, 3b, und 3c dargestellt.

Auf den Abszissen sind über den Lastordinaten die zugehörigen Spannungswerte, die Ablenkungswinkel α und die Ausbiegungsgrössen $\frac{f_m}{h}$ aufgetragen.

σ_s ist die jeweilige Schwerpunktsspannung, σ' (Druckseite) und σ'' (Zugseite) sind diejenigen Randspannungen in Stabmitte, die sich ohne Berücksichtigung der Verformung der Stabachse ergeben. σ_{max} (Druckseite) und σ_{min} (Zugseite) sind die wirklichen Randspannungen unter genauer Berücksichtigung der Verformung. Der Unterschied $(\sigma_{max} - \sigma')$ bezw. $(\sigma_{min} - \sigma'')$ ergibt den Einfluss der Stabausbiegung, der sehr von m und λ abhängig erscheint.


a) m=0,5 r=100
El.
Pl.
σmax
σz
σ'
σs
σk
σ''
P=σs.F
σmin
α'
fm/h
σp=1,9t/cm²
r=150
r=200


b) m=1 r=100
σmax
σz
σ'
σs
σk
σ''
P=σs.F
σmin
α'
fm/h
σp=1,9t/cm²
r=150
r=200

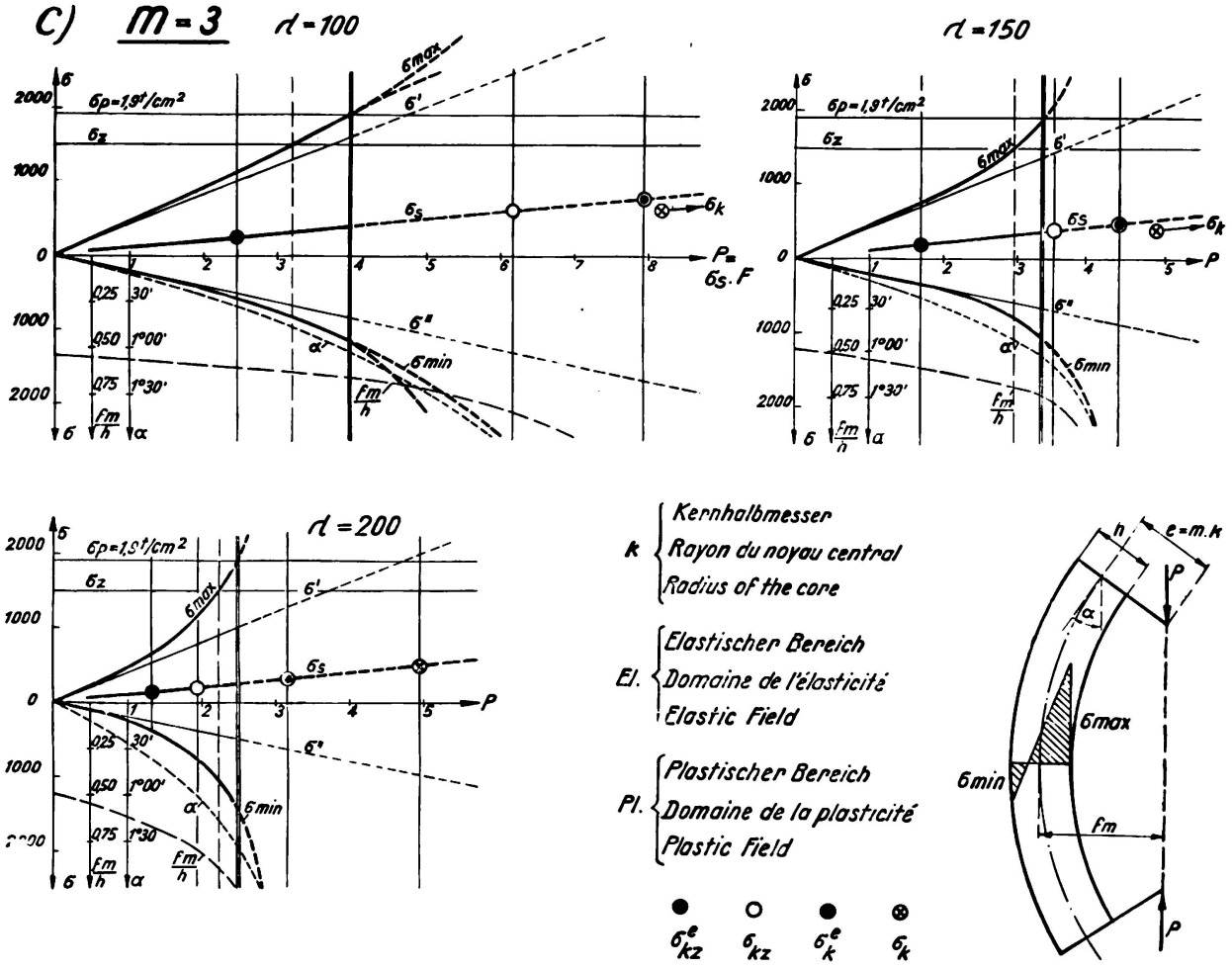


Fig. 3.

Spannungen in gelenkig gelagerten exzentrisch belasteten Stäben im elastischen Bereich.

Efforts dans les barres articulées aux appuis, chargées excentriquement et travaillant dans la zone élastique.

Stresses in Members with Hinged Bearings, eccentrically loaded in the Elastic Zone.

Erläuterung. — Signes employés. — Symbols used.

P Druckkraft des Stabes. — Charge de la barre. — Pressure on the member.

σ_p Spannung an der Proportionalitätsgrenze. — Effort à la limite de proportionnalité. — Stress at the limit of proportionality.

σ_z Zulässige Spannung. — Effort admissible. — Permissible stress.

$\sigma_s = \frac{P}{F}$ Schwerpunktsspannung. — Effort au centre de gravité. — Stress at centre of gravity.

$\sigma' \sigma''$ Randspannung in Stabmitte ohne Berücksichtigung der Verformung. — Efforts périphériques au milieu de la barre sans tenir compte de la déformation. — Stresses at the edge in middle of member, without considering deformation.

$\sigma_{max}, \sigma_{min}$ Randspannung mit Berücksichtigung der Verformung. — Efforts périphériques au milieu de la barre en tenant compte de la déformation. — Stresses at the edge, taking deformation into account.

σ_k Knickspannung für den zentrisch belasteten Stab. — Effort de flambage pour la barre chargée axialement. — Buckling stress for centrally loaded member.

σ_{kz} Zulässige Knickspannung für den zentrisch belasteten Stab bei 2, 5 facher Sicherheit. — Effort admissible de flambage pour la barre chargée axialement, avec coefficient de sécurité de 2,5. — Permissible buckling stress for centrally loaded member, with factor of safety of 2,5.

σ^e_k Knickspannung des exzentrisch belasteten Stabes nach Roš. — Effort de flambage dans la barre chargée excentriquement; d'après Roš. — Buckling stress for eccentrically loaded member, according to Roš.

σ^e_{kz} Zulässige Knickspannung des exzentrisch belasteten Stabes nach Roš bei 2,5 facher Sicherheit. — Effort admissible de flambage pour la barre chargée excentriquement, d'après Roš, avec coefficient de sécurité de 2,5. — Permissible buckling stress in eccentrically loaded member according to Roš, with factor of safety of 2,5.

Der Schnittpunkt der Horizontalen σ_p mit der σ_{max} Kurve zeigt diejenige Last P an, für die die Stabmitte mit der äussersten Druckfaser die Proportionalitätsgrenze überschreitet. Diese Stelle ist in den Figuren durch eine vertikale Doppellinie gekennzeichnet. Links davon ist das Verhalten des Stabes elastisch, rechts davon teilweise unelastisch.

Der Schnitt der für eine zulässige Spannung $\sigma_z = 1{,}5^t/_{cm^2}$ gezeichneten Horizontalen mit der σ_{max} Linie gibt die Last, für welche die ungünstigste Randfaser σ_z erreicht. In Fig. 3 sind noch weitere Spannungswerte eingetragen:

1) die Knickspannung σ_k des Stabes für zentrische Belastung;
2) die zulässige Knickspannung σ_{kz} mit 2,5 facher Sicherheit;
3) die kritische Spannung σ^e_k für den exzentrisch belasteten Stab nach Roš;
4) Die zulässige Spannung σ^e_{kz} mit ebenfalls 2,5 facher Sicherheit.

Die Darstellungen der Fig. 3 verdeutlichen uns den Einfluss von m und λ auf die Spannungs- und Ausbiegungsverhältnisse im Querschnitt der Stabmitte. Wir sehen auch hier (wie schon aus Fig. 2 geschlossen wurde), dass die Instabilität auch bei schlanken Stäben durch das unelastische Verhalten des Baustoffes bedingt wird.

Schliesslich weisen wir noch darauf hin, dass bei statischer Belastung (von Null aus stetig anwachsend) nur bei ganz kleinen Exzentrizitäten (für Werte $m < 1$) auf der Zugseite des Stabes Spannungswechsel eintreten kann, indem σ_{min} zunächst noch Druck ist und erst infolge Zunahme der Verformung zur Zugspannung wird. Für Werte m ganz nahe an Null kann dieser Spannungswechsel auch erst über σ_p eintreten.

IV. Gleichgewichtsberechnung für ganz oder teilweise unelastische Baustoffe.

Wir haben schon eingangs erwähnt, dass eine rechnerische Erfassung des Verhaltens von Bauteilen, deren Verformungen ganz oder teilweise unelastisch werden, ausserordentlich schwierig ist, weil die Plastizitätsmechanik noch keine sicheren, durch Versuche erhärteten Zusammenhänge zwischen Spannungen und Formänderungen zu geben vermag.

Um trotzdem an Hand des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes (von dem wir die Druck- und Zugseite benötigen, weil schon bei kleinen Exzentrizitäten der Momenteneinfluss bei der Spannungsermittlung gegenüber dem Einfluss der Normalkraft überwiegt) Berechnungen anstellen zu können, setzen wir bekanntlich das Ebenbleiben der Querschnitte auch nach Ueberschreiten der σ_p-Grenze voraus. Unter dieser Annahme, d. h. bei linearem Verlauf der Dehnungsänderungen, lässt sich der Spannungsverlauf über den Querschnitt als ein Teil des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes darstellen. Im Masstab i s die Höhe des Querschnittes (in der Richtung der Ausbiegung) sinngemäss der Differenz der Randfaserdehnungen zuzuordnen. Diese rechnerischen Voraussetzungen treffen innerhalb gewisser Grenzen für Baustahl einigermassen zu.

Zwecks praktischer Durchführung der Rechnung nehmen wir für den ganzen Stab, einen konstanten Elastizitätsmodul E an, dem ein linearer

Verlauf der entsprechend reduzierten Spannungen entspricht. Um der wirklichen Veränderlichkeit des Moduls von Faser zu Faser Rechnung zu tragen, reduzieren wir die Querschnittsflächen so, dass die wirklichen inneren Kräfte den aus den reduzierten Werten ermittelten gleichwertig sind. Beträgt an irgend einer Stelle die Breite einer Faser b_η und die zugehörige tatsächliche Spannung σ_η, so entsprechen sich (siehe auch Fig. 5) nach der Reduktion die reduzierte

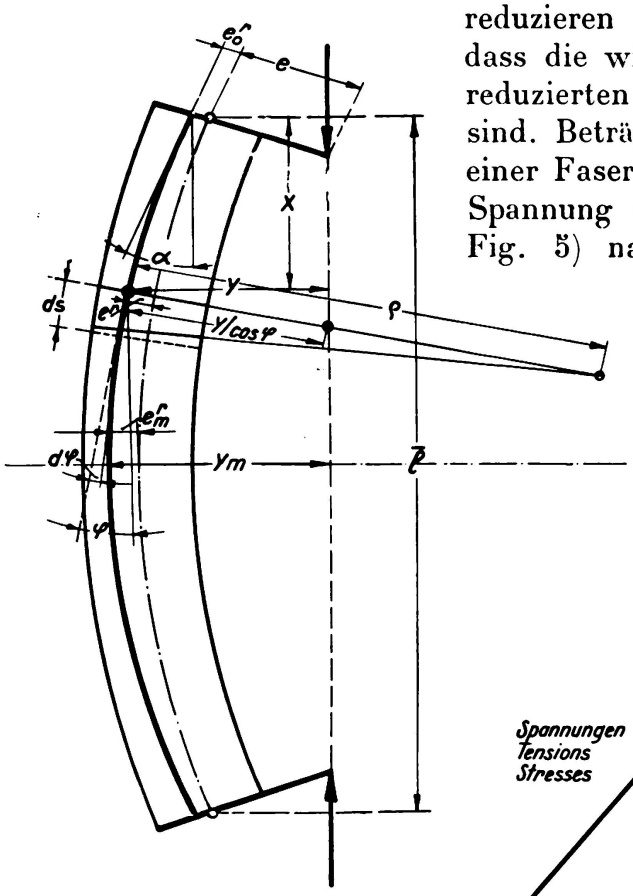
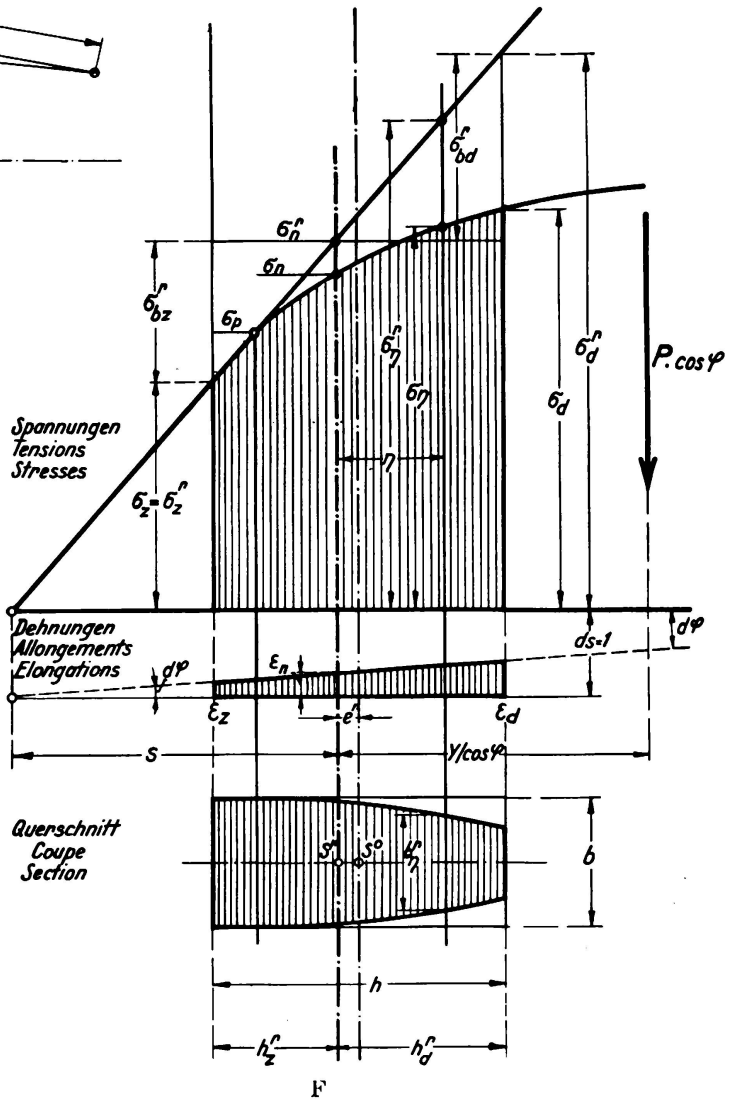


Fig. 4.

Gelenkig gelagerter Stab mit exzentrischer Belastung im unelastischen Bereich.

Barre articulée aux appuis avec charge excentrique, travaillant en dehors de la zone élastique.

Member with Hinged Bearings with Eccentric Loading in the Inelastic Zone.



F

Spannungen und Formänderungen eines Stabquerschnittes im unelastischen Bereich.

Tensions et déformations dans un élément travaillant en dehors de la zone élastique.

Stresses and Deformations of the Cross-Section of a Member in the Inelastic Zone.

Breite b^r_η und die reduzierte Spannung σ^r_η. Es muss nun $b_\eta . \sigma_\eta = b^r_\eta . \sigma^r_\eta$ sein, woraus sich die jeweilige reduzierte Breite einer Quertschnittsfaser $b^r_\eta = b_\eta \frac{\sigma_\eta}{\sigma^r_\eta}$ ergibt. An Stelle der ursprünglichen Fläche F tritt eine reduzierte Fläche F^r.

Die Fig. 4 zeigt die Verhältnisse am exzentrisch belasteten und an beiden Enden gelenkig gelagerten Stab, wenn dieser teilweise oder ganz unelastisch

wird. Die für die rechnerische Untersuchung in Fragekommende statische Stabachse geht durch die Schwerpunkte der reduzierten Querschnittsflächen. Diese statische Stabachse weicht um den Betrag e^r von der geometrischen ab.

Unseren Betrachtungen legen wir wiederum den rechteckigen Querschnitt zugrunde und für den Krümmungsradius führen wir abermals als Variable das Bogenelement der statischen Stabachse *ds* und den zugehörigen Neigungswinkel φ ein. In der Fig. 5 sind über einen rechteckigen Querschnitt die zusammengehörigen Dehnungs- und Spannungsdiagramme, sowie die reduzierte Querschnittsfläche aufgetragen.

Nehmen wir nun zwei Randfaserdehnungen ε_d und ε_z an, so sind aus dem Spannungs- Dehnungs- Diagramm die zugehörigen Randspannungen σ_d und σ_z ebenso wie die reduzierten Spannungswerte σ^r_d und σ^r_z gegeben. Wir bestimmen die reduzierte Breite der einzelnen Querschnittsfasern und ermitteln für die ganze reduzierte Querschnittsfläche deren Grösse F^r, die Lage des Schwerpunktes S^r und das Trägheitsmoment J_s^r der Fläche F^r in Bezug auf den Schwerpunkt S^r. Ueber dem Schwerpunkt der reduzierten Fläche ergibt sich die Dehnung ε_n in der statischen Stabachse und die zugehörigen Schwerpunktsspannungen σ_n bezw. σ^r_n. Aus der Fig. 5 folgt weiters die Beziehung für den Krümmungsradius

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_z}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{Gl (16)}$$

sodass wir auch die Nullinie des Querschnitte durch $s = \rho . \varepsilon_n$ festlegen können. Irgend eine Dehnung im Abstande η vom Schwerpunkt rechnet sich zu

$$\varepsilon_\eta = \varepsilon_n + \frac{\eta}{s}$$

Mit dem konstanten Modul E, den reduzierten Spannungen und der reduzierten Fläche rechnen wir nun in üblicher Weise nach Navier und erhalten die Beziehungen zu den auftretenden äusseren Kräften :

$$P = \sigma^r_n F^r \ldots . \quad \text{Gl (17)} \qquad \text{und } M = \frac{E J^r_s}{\rho} \ldots . \quad \text{Gl (18)}$$

Der Lasthebelarm in Bezug auf die statische Stabachse ist schliesslich mit $y = M : P$ gegeben. Ist für einen bestimmten Querschnitt der Lastangriffspunkt bekannt, so herrscht zwischen den inneren und äusseren Kräften Gleichgewicht, wenn die aus den angenommenen Randfaserdehnungen sich ergebende Kraft P mit der wirklichen Last, und $y = (e^r + \frac{y}{\cos \varphi})$ mit dem Abstand des Lastangriffpunktes von der statischen Stabachse übereinstimmt. (Siehe Fig. 5.)

Für die genaue Ermittlung der Stabachsen müssen wir nunmehr analog wie bei der Untersuchung mit elastischem Baustoff vorgehen, d. h. es ist die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{P \cos\varphi \; y}{E J^r_s}$$

in der $y = \int_0^s ds \sin\varphi$ bedeutet, zu integrieren. Dadurch dass auch das Trägheitsmoment J^r_s mit dem Winkel φ veränderlich ist, können wir die Integration nur graphisch ausführen.

Wir sind jetzt in der Lage, für ein gegebenes Spannungs-Dehnungs-Dia-

gramm Gleichgewichtsdiagramme zu entwickeln. Für eine bestimmte Last P (oder für eine entsprechende Schwerpunktsspannung $\sigma_n = \frac{P}{F}$) nehmen wir zunächst verschiedene Werte von ε_d und ε_z an. Diese müssen jedoch so gewählt werden, dass $P = \sigma_n^r . F^r$ ist. Für jeden solchen Fall bestimmen wir e^r_s und das Moment der inneren Kräfte $M = \frac{E\ J_s^r}{h} (\varepsilon_d - \varepsilon_z)$.

Schliesslich erhalten wir den Hebelarm für die äussere Last P in Bezug auf die statische Stabachse mit $y = \frac{M}{P} = \frac{E}{P.h} . J_s^r (\varepsilon_d - \varepsilon_z)$.

Bei Annahme von endlichen Bogenelementen Δs ist die Änderung des Winkels $\Delta\varphi = \Delta s \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_z}{h}$, wodurch die stufenweise Bestimmung der Stabachse und die damit verbundene Änderung von y ebenfalls gegeben ist.

Es ist für die praktische Rechnung am zweckmässigsten, für bestimmte Werte P (bezw. σ_n) graphisch die einzelnen Grössen aufzutragen, um aus den entstehenden Kurven für die weiteren Untersuchungen alle zusammengehörigen Zwischenwerte zu bekommen.

Für die gegebene Belastung eines gegebenen Stabes sei nun die Gleichgewichtslage zu bestimmen. Wir stellen zunächst fest, ob die Stabmitte unelastisch wird. Da wir bei unseren Voraussetzungen nur den Neigungswinkel der Stabachse in Stabmitte mit $\varphi_m = 0$ kennen, müssen wir mit der Aufzeichnung der Biegelinie hier beginnen. Wir schätzen zuerst einen Lasthebelarm y_m (wobei wir nicht übersehen dürfen, dass dieser Wert nicht nur die Ausbiegung der Stabachse, sondern auch die Anfangsexzentrizität enthält) und bestimmen für ein endliches Δs aus der vorher ermittelten graphischen Zusammenstellung die dazugehörigen Werte der Änderung der Stabachsenneigung $\Delta\varphi$. Dadurch bekommen wir im Abstande Δs von der Stabmitte einen Punkt der Stabachse und die entsprechende Grösse y' des Hebelarmes. Zu diesem neuen Hebelarm bestimmen wir wiederum die zugehörige Änderung $\Delta\varphi$ für ein weiteres Stück Δs, erhalten den Hebelarm y'' im Abstande $2\,\Delta s$, usw. Kommen wir am Endquerschnitt des Stabes an, so müssen wir dort den Wert y_0 erhalten, der bei bekanntem e_0^r zu dem gegebenen Lastangriffspunkt des Endquerschnittes führen muss. Ist dies nicht der Fall, so muss die erste Annahme von y_m erneuert werden, bis das Resultat richtig ist. In den praktischen Fällen wird sich das unelastische Verhalten meist auf Querschnitte in der Stabmitte beschränken und dann ist der Rest rein elastisch zu berechnen.

Sollen wir schliesslich die kritische Belastung für Instabilität untersuchen, dann haben wir von den Grenzwerten für das Moment in Stabmitte, bezw. von dem grösstmöglichsten Hebelarm, auszugehen und die Biegelinie ebenso zu zeichnen wie vor. Diese Stabbiegelinie ist dann massgebend für *alle* möglichen Exzentrizitäten des Lastangriffes am Stabende. Wir sind somit auch in der Lage, die zu einer gegebenen Belastung und beliebigen Anfangsexzentrizität gehörige kritische Stablänge aus der nur einmal zu zeichnenden Biegelinie abzulesen und vermögen so die genauen Grenzwerte für Instabilität zu bestimmen.

Das im vorstehenden entwickelte Rechnungsverfahren schliesst ausser exzentrischer Belastung alle Fälle mit zentrischer Last ein, bei denen aus irgend-

welchen Ursachen Ausbiegungen vorhanden sind, die zur Überschreitung von σ_p geführt haben. Ist schliesslich in Stabmitte die Biegesteifigkeit erschöpft, dann ist der Fall der Instabilität des zentrisch beanspruchten Stabes gegeben (nicht mit Knicken zu verwechseln!). Unsere Rechnungsmethode berücksichtigt auch den Fall des Knickens gedrungener Stäbe, wenn im Sinne unserer Definition der Augenblick des Überganges von der geraden zur gebogenen Stabachse, bei Berücksichtigung der Entlastung auf der Zugseite, der Rechnung zugrunde gelegt wird.

Das Rechnungsverfahren im teilweise unelastischen Bereich schliesst sich eng an die genaue Rechnung im elastischen Bereich an, bezw. enthält natürlich letztere. Es gestattet ein genaues Verfolgen der auftretenden Deformationen und Spannungen von Querschnitt zu Querschnitt auch in komplizierten Lastfällen.

V. Das Versuchswesen.

Wir sind bei unseren Betrachtungen dort angekommen, wo wir der Überprüfung unserer Annahmen und Resultate bedürfen. Das Versuchswesen hat zwei getrennte Aufgaben zu erfüllen, eine mehr theoretische und eine mehr praktische. Letztere Aufgabe besteht darin, dass an Bauteilen, wie sie praktisch vorkommen, die kritischen Belastungen festgestellt werden, um Bemessungsformeln und Diagramme ableiten zu können.

Für den zentrisch belasteten Stab liegen weitaus am meisten Versuchsergebnisse vor. Sie haben zur Bestimmung von Knickspannungskurven geführt, die diejenige kritische Schwerpunktsspannung angeben, für welche Knicken eintritt.

Praktische Versuche zur Untersuchung der Knickfestigkeit von Stegblechen von Trägern, von abstehenden Flanschen usw., sind nicht in so grossem Umfang vorliegend, um sie als brauchbare Stütze von theoretischen Untersuchungen betrachten zu können.

Die Frage der Instabilität von exzentrisch gedrückten Stäben ist besonders durch Roš an der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt in Zürich gefördert worden. Aus zahlreichen Versuchen für verschiedene Exzentrizitätsmasse sind, den Knickspannungskurven ähnliche, kritische Schwerpunktsspannungen ermittelt worden. Die Sicherheit gegen Erreichen dieser kritischen Spannungen werden gleich gross wie bei Knickuntersuchungen gewählt. Dieses Verfahren ist praktisch, befriedigt aber insofern nicht ganz, als in demselben der Momenteneinfluss, der für das Eintreten von Instabilität massgebend ist, nicht zum Ausdruck kommt. Es ist nicht möglich festzustellen, wann eine Instabilitätsrechnung erforderlich ist, und von welchem Verhältnis des Momentes zur Kraft (Exzentrizität) an eine einfache Spannungsuntersuchung genügt. Nicht zu übersehen ist ferner, dass die Fragen der Grösse der Sicherheit in beiden Fällen praktisch aufeinander abgestimmt sein müssen.

Versuchsergebnisse über exzentrische Beanspruchung von Platten, Stegen von Trägern, abstehenden Flanschen usw. liegen, (von zusammengesetzten Lastfällen sehen wir ganz ab) für das praktische Bauwesen in nennenswertem Umfang überhaupt nicht vor.

Wir konstatieren somit, dass auf dem wichtigen Gebiet der Stabilität und Festigkeit von gedrückten und gebogenen Stäben und Platten dem praktischen Versuchswesen noch ausserordentliche Aufgaben bevorstehen. Die Schwierig-

keiten liegen einmal in den grossen Kosten, zum anderen mal darin, dass für die Versuche selbst noch nicht die richtige Basis geschaffen ist, um einen einheitlichen Weg zu einem einheitlichen Ziel beschreiten zu können.

Es besteht somit die Forderung, das mehr theoretisch-wissenschaftliche Versuchswesen zunächst in den Vordergrund zu stellen, um die Grundlagen abzuklären. Erst Versuche an Stäben, Platten usw. werden die Möglichkeit bieten, einen besseren Einblick in das Verhalten im plastischen Bereich zu geben. Im Zusammenhang damit dienen solche Versuche auch der Behandlung aller derjenigen Fragen der Statik und Dynamik, bei welchen das Eintreten einzelner Bauteile in ein plastisches Verhalten (Das Problem nicht vom Standpunkte der Sicherheit gegen Erreichen eines solchen Zustandes gesehen) tatsächlich erfolgt, um durch Umlagerung des statischen Systems wirtschaftlichere Bauformen zu erzielen.

Für die Durchführung von solchen grundlegenden Versuchen mit Bauteilen im plastischen Bereich bedarf es besonderer Einrichtungen. Je nach der Grösse der Verformungsgeschwindigkeit, der Grösse der inneren Reibung, der Charakteristik des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes usw. treten im kritischen Bereiche mehr oder weniger rasch erhebliche Deformationen auf, denen die Last (bezw. die Prüfmaschine) ohne geringste Änderung ihrer Grösse, unbeeinflusst durch die Ablenkungswinkel der Stabachsen und Schwerebenen der Platten, folgen muss, um die gewünschten Verhältnisse genau prüfen zu können.

Bei solchen Versuchen spielt ferner die Möglichkeit geringster Lastabstufungen sowie die Zeit eine Rolle; es ist beispielsweise wünschenswert prüfen zu können, wie weit bei entsprechendem Spannungs-Dehnungsdiagramm nach Überschreitung einer Zone der Instabilität neue Gleichgewichtslagen möglich werden.

Es bedarf weiters der Prüfung des Einflusses wiederholter statischer Belastung (bei jeweiligem Überschreiten der Proportionalitätsgrenze) und des Einflusses dynamischer Belastungen auf Fragen der Instabilität.

Für die versuchstechnische Behandlung der nur andeutungsweise gegebenen Aufgaben eignen sich zweckmässig Stäbe und Platten in Modellform aus Baustoffen der Praxis oder aus anderen geeigneten Materialien mit charakteristischen Spannungs-Dehnungs-Kurven.

Im Institut für Baustatik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich sind vom Referenten besondere Maschinen und Einrichtungen geschaffen worden, um systematisch an die Behandlung der oben angedeuteten wichtigen Fragen der Baustatik herangehen zu können.

Schliesslich sollen einige Belastungsbeispiele ohne Zahlenangaben zu dem bisher gesagten eine kurze Erläuterung bilden. In der Bilderreihe der Abbildung 6 oben ist ein exzentrisch belasteter Stab für $m = 3$ (aus einem besonderen Versuchsmaterial), der sich bei steigernder Belastung deformiert, dargestellt. Das vierte Bild von links zeigt noch eine typische Gleichgewichtslage bei vollkommen elastischem Verhalten. Bei geringfügiger Laststeigerung (5. Bild) tritt in Stabmitte eine stärkere Biegung ein, während sich die Stabenden zu strecken beginnen. Es ist dies eine Gleichgewichtslage mit teilweise unelastischem Verhalten in Stabmitte. Wird der Stab nach dieser Belastung entlastet, so bleibt in der Mitte eine Krümmung zurück (6. Bild).

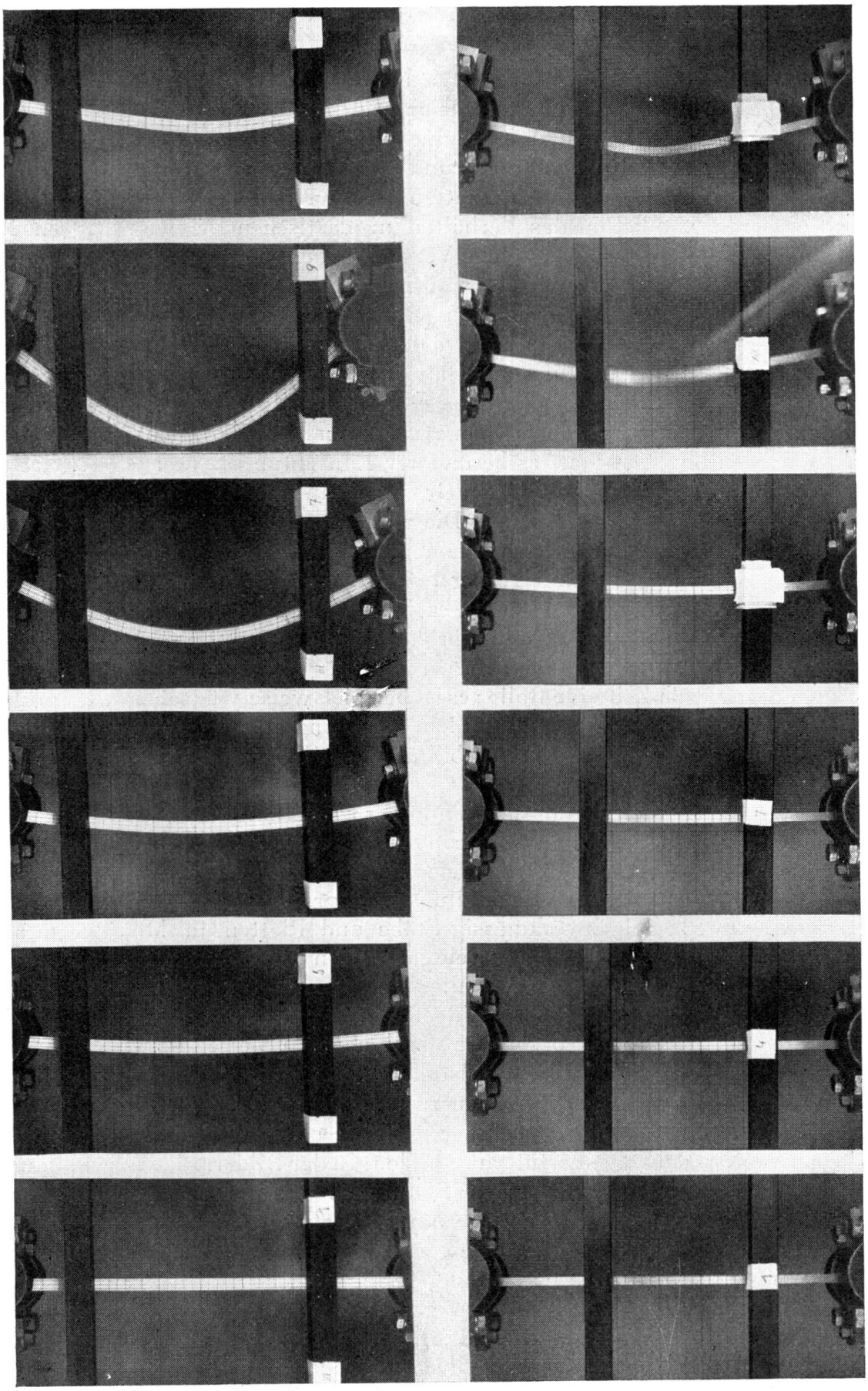


Fig. 6. — Stabdeformationen für schlanke Stäbe.
Déformations des barres élancées. — Deformations in the case of Slender Members.

Die untere Reihe der Abbildung 6 zeigt einen entsprechenden Stab aus Baustahl, ebenfalls für $m = 3$. Das 4. Bild von links zeigt noch vollkommen elastisches Verhalten. Im 5. Bild ist bei geringer Lastvermehrung der Augenblick des Eintretens der Instabilität dargestellt. Wir sehen deutlich, dass,

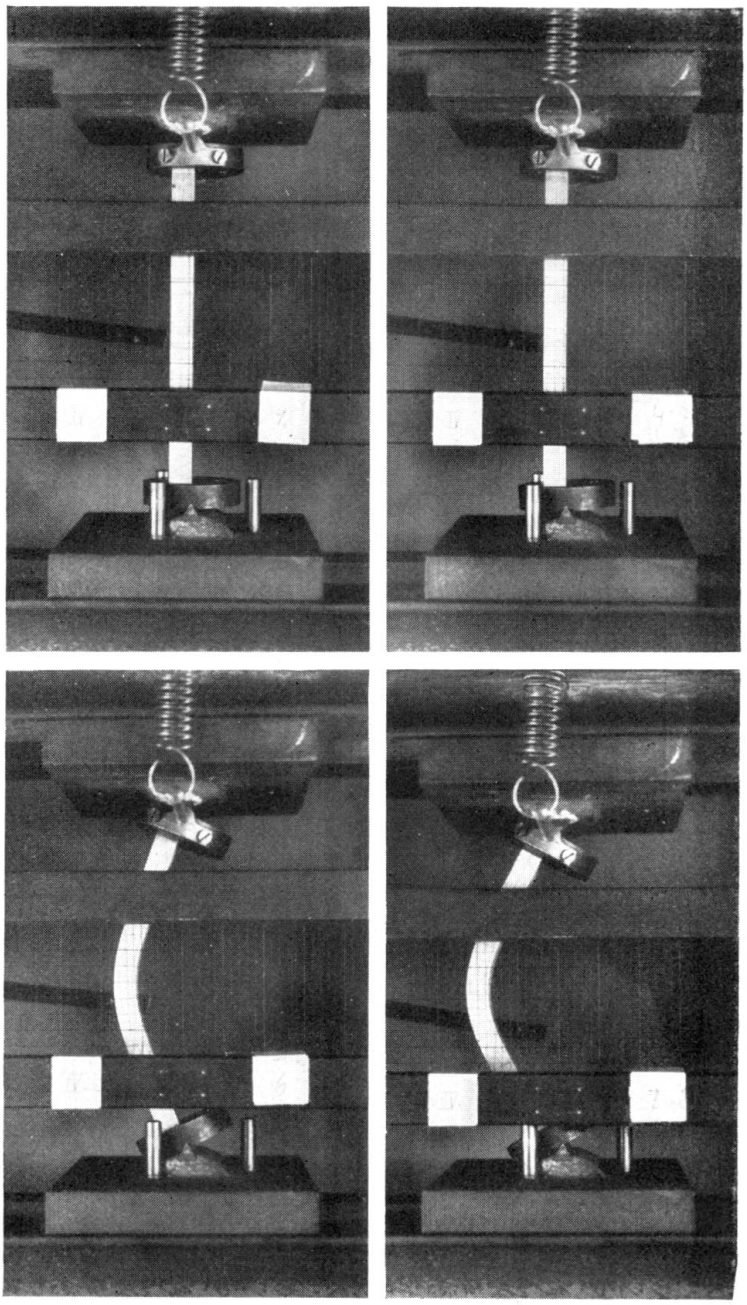


Fig. 7. — Stabdeformationen für gedrungene Stäbe.
Déformations des barres trapues.
Deformations in the case of Squat Members.

immer unter ein und derselben Last, die fortschreitende Verformung sich auf die Stabmitte konzentriert, während die Stabenden sich strecken. (Da sich für den Stab keine weitere Gleichgewichtslage mehr ergab, wurde er abgefangen.) Im entlasteten Zustand bleibt die Formänderung in der Mitte zurück, während die Stabenden wieder gerade geworden sind (6. Bild).

In Abbildung 7 haben wir einen gedrungenen Stab aus Baustahl, ebenfalls für $m = 3$. Hier lassen sich die zuerst rein elastischen und dann teilweise plastischen Gleichgewichtsformen wegen des Masstabes der Wiedergabe nicht gut verfolgen. Das 2. Bild oben rechts ist die äusserste Gleichgewichtslage, für die nach geringer Mehrbelastung der Stab ausweicht. Das folgende Bild links unten zeigt, dass an der weiteren Verformung nur die Stabmitte Anteil hat, während die Stabenden sich wiederum strecken. Das letzte Bild gilt schliesslich dem Stab nach der Entlastung.

Einen schlanken und einen gedrungenen Stab nach erfolgter Entlastung sehen wir schliesslich noch in der Figur 8, um die Art der Verformung nach erfolgtem Überschreiten der Instabilitätsgrenze deutlicher zu veranschaulichen.

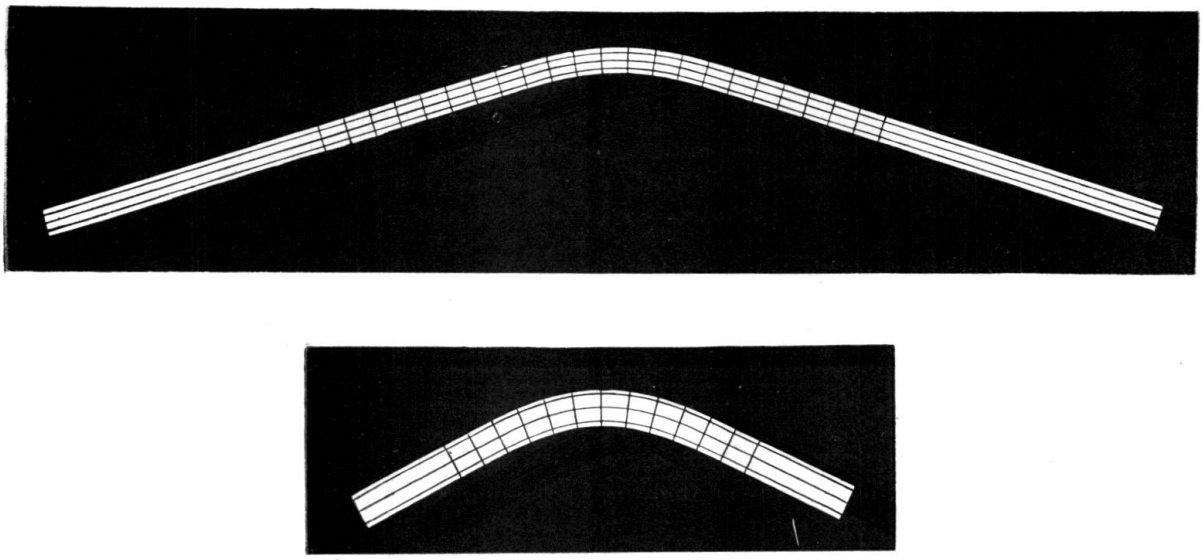


Fig. 8.
Stabformen nach Überschreiten der kritischen Belastung.
État des barres après dépassement de la charge critique.
Shape of Members after exceeding Critical Loading.

Die vorliegenden Ausführungen haben den Zweck zu zeigen, dass die hier behandelten Fälle der Instabilität sich für Stäbe, Platten und kombinierte Bauformen und Belastungen immer und ausschliesslich im teilweise unelastischen Gebiet abspielen. Es ist dringend erforderlich, das Verhalten der Ingenieurkonstruktionen in diesem Bereich genauer zu studieren, schon mit Rücksicht auf jene, noch als tragfähig zu bezeichnende Konstruktionen, bei welchen teilweise unelastisches Verhalten absichtlich herbeigeführt wird, und nicht mit Instabilität verbunden ist.

Literaturverzeichnis.

« Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau ». Wien, 1929. Verlag Julius Springer, Wien. (Broszko, Chaudy, Chwalla, Fillunger, Grüning, v. d. Haeghen, Huber, Kayser, Keelhoff, Memmler, Pigeaud, Ratzersdorfer und Roš.)

M. Broszko. « Über die Engesser-v. Kármán'sche Knickungstheorie und über die allgemeine Lösung des grundlegenden Knickproblems ». 1. Band der Wissenschaftlichen Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau.

Doz. Dr.-Ing. Ernst Chwalla, Wien. « Die Stabilität exzentrisch und zentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl ». Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien, 137. Band, 8. Heft, 1928. Hölder-Pichler-Tempsky A. G., Wien und Leipzig.

E. Elwitz. « Die Lehre von der Knickfestigkeit » 1. Teil. Gebr. Jänecke, Hannover.

P. M. Frandsen. « Die Berechnung der Säulen ». 1. Band der Wissenschaftlichen Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau.

Prof. Dr. L. Karner. « Betrachtungen über das Knickproblem unter Berücksichtigung des Spannungsverlaufes im unelastischen Bereich ». « Die Bautechnik », Heft 48, 7. Nov. 1930. Verlag W. Ernst und Sohn, Berlin.

Kriemler. « Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge. » Druck der G. Braun'schen Hofbuchdruckerei, Karlsruhe.

Dr.-Ing. Rudolf Mayer. « Die Knickfestigkeit », Verlag von Julius Springer, Berlin, 1921.

Dr.-Ing. h. c. H. Müller — Breslau. « Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen ». Alfred Kröner, Verlag in Leipzig, 1913.

A. Ostenfeld. « Exzentrisch beanspruchte Säulen. Versuche mit Stahlsäulen. Querschnittsbemessung. » Laboratorium für Baustatik der Technischen Hochschule, Kopenhagen, Mitteilung Nr. 3.

K. A. Poukka. « Zur Theorie der Knickfestigkeit », Helsinki, 1924.

W. Rein. « Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle, Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau, Ausgabe B. Heft 4. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1930.

Prof. Dr. M. Roš und Dr. J. Brunner. « Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl. » Bericht No. 13 der Eidg. Materialprüfungsanstalt an der E. T. H. und der Gruppe VI der T. K. V. S. B., Zürich, August 1926.

Prof. Dr. M. Roš. « Die Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe auf Knickung ». II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau, Wien, 1928.

Timoshenko-Lessells. « Festigkeitslehre ». Verlag von Julius Springer, Berlin, 1928.

D. H. Young. « Stresses in eccentrically loaded Steel Columns. » 1. Band der Wissenschaftlichen Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau.

TRADUCTION

I. Introduction

Le calcul des éléments de construction travaillant simultanément à la compression et à la flexion est l'un des problèmes les plus difficiles de la statique. Lorsque des charges extérieures créent, dans une membrure, des efforts de compression soit seuls, soit combinés à des efforts tranchants et à des moments fléchissants extérieurs, il se produit des déformations perpendiculaires aux efforts axiaux, qui, à leur tour, déterminent des moments additionnels et des efforts non négligeables.

Parmi les problèmes les plus connus et les mieux étudiés se trouve d'abord le calcul des poteaux et des barres chargés axialement. Les calculs deviennent déjà compliqués si la section d'un poteau ou d'une barre, au lieu d'être pleine, se compose de parties assemblées ; car, dans ce dernier cas, on doit calculer la stabilité de chaque élément de la barre ainsi que son influence sur la stabilité générale. Même dans le cas de sections pleines, la question du flambage joue un rôle important pour les ailes non supportées sur de courtes longueurs, ainsi que pour les âmes minces.

Dans la construction des ponts en acier, l'emploi des poutres à âme pleine et de grande portée a fait, au cours de ces dernières années, des progrès

extraordinaires. Dans ces dernières formes de construction, il est nécessaire d'assurer particulièrement la sécurité contre le flambage de l'âme et un renforcement judicieux.

Les calculs sont encore plus compliqués lorsque des moments extérieurs, provoquant des déformations perpendiculaires à l'axe des barres ou au plan des tôles, viennent s'ajouter aux efforts axiaux sur les poteaux et sur les barres ou aux moments et aux efforts agissant dans le plan des tôles.

Tant que tous les allongements restent dans les limites élastiques, les calculs de flambage et de résistance sont relativement simples, même en cas de sollicitations complexes. Par contre, la façon dont se comportent les constructions soumises à des pressions et flexions dans la zone non élastique [dite plastique] de nos matériaux, est incomparablement plus difficile à étudier et n'a pas encore été élucidée. On peut considérer comme pratiquement impossible de traiter par le calcul le travail des matériaux au delà de la limite d'allongement proportionnel ou de mettre ces phénomènes en équation ; en conséquence, dans la plupart des cas, on est dans la nécessité de faire des calculs d'essai ou de contrôle en se basant sur des données arbitraires (maintien d'une section plane, etc.) afin de pouvoir calculer, dans les cas difficiles de charge, l'équilibre entre les forces extérieures et les sollicitations intérieures. Par exemple, dans l'acier de construction, nous devons constater que presque tous les problèmes de stabilité ne peuvent pas être résolus sans tenir compte de la déformation plastique. Pour ne citer qu'un exemple, nous rappellerons celui d'une barre comprimée excentriquement, qui est, même pour un degré d'élancement élevé, partiellement inélastique dès qu'elle se trouve en état d'équilibre instable.

Signalons enfin que la plupart des problèmes de ce genre, si l'on en fait une étude minutieuse, peuvent présenter, en outre, une autre difficulté du fait que les problèmes de stabilité et de résistance s'étendent à des efforts dans l'espace et non en plan, de sorte que la variabilité des modules d'élasticité dans les diverses directions fait sentir son influence.

II. Développement et état des recherches scientifiques et expérimentales.

La plus ancienne expérience sur une barre droite soumise à un effort de compression est due à Euler en 1744. Cependant, la formule d'Euler tomba en défaveur par suite de son échec pour l'application à des barres trapues ; cependant, dès 1845, Lamarle avait signalé le fait que pour le bois la validité de la formule d'Euler est liée à la limite élastique. Plus tard, on s'aida de formules empiriques dont les principales sont celles de Tetmayer, de Schwartz et Rankine, etc... Néanmoins, Tetmayer avait déjà réhabilité la formule d'Euler dans la zone d'élasticité. Le premier travail d'Engesser, dans lequel il traite de la plasticité, date de 1889 ; toutefois, il ne fut pleinement apprécié qu'à la suite des travaux de Kármán, en 1910, d'où sortirent les principes de la théorie d'Engesser-Kármán. D'après cette théorie, il est devenu possible, tout au moins pour le flambage axial, de mieux saisir les conditions qui règnent en dehors du domaine élastique et de calculer les poteaux et barres en maté-

riaux divers en se basant sur la connaissance de leur diagramme « compression-déformation ». Le second problème demandant une étude théorique et pratique est celui que pose une barre comprimée ; ici, il faut mentionner les travaux de KROHN et tout spécialement ceux de ROŠ et BRUNNER. Les rapports et discussions du Congrès International de Construction des Ponts et Charpentes tenu à Vienne en 1928 sont particulièrement importants pour la diffusion des connaissances et l'étude critique des diverses hypothèses ; nous les signalons tout particulièrement (voir la bibliographie).

Indépendamment de l'étude des questions fondamentales relatives à la section d'une barre pleine sous une charge axiale ou excentrique, de nombreux chercheurs ont présenté des études théoriques et pratiques traitant des cas de charge complexe avec des appuis variés et des sections variables de barre, etc. Signalons ceux de BLEICH, CHWALLA, DONDORFF, ELWITZ, A. FÖPPL, HUBER, KAYSER, KRIEMLER, KROHN, KÜBLER, LOVE, MAYER, MELAN, von MIESES, MÜLLER-BRESLAU, OSTENFELD, REISSNER, TIMOSHENKO, WADDEL, ZIMMERMANN et autres. Dans le domaine de la théorie du flambage des dalles, il faut mentionner spécialement TIMOSHENKO après que BRYAN se fut, le premier, en 1891, occupé du problème du flambage des dalles rectangulaires. Outre divers chercheurs, tels que REISSNER, WAGNER, SCHLEICHER, etc., BLEICH, en particulier, par l'établissement de formules appropriées, a rendu accessible à l'application pratique la théorie des âmes et ailes des poutres en compression ainsi que la sécurité au flambage des âmes des poutres pleines en acier.

En résumé, nous pouvons dire que le calcul des barres, des dalles et systèmes complexes travaillant à la compression et à la flexion n'offre plus de difficultés insurmontables aux calculs de flambage et de résistance, tant que les déformations restent dans le domaine élastique. Toutefois, si des déformations plastiques se produisent, les recherches deviennent notablement plus difficiles, parce que la façon dont se comportent les matériaux dans la zone non élastique dépend des caractéristiques particulières des matériaux et il n'est plus possible d'établir avec certitude les conditions d'équilibre.

Les essais ont donc un double but. La pratique exige des formules pratiques de calcul, pour des charges très diverses. La science désire étudier les phénomènes, au delà des efforts et déformations admissibles en pratique, et contrôler plus exactement les phénomènes qui se produisent lorsque apparaît l'instabilité, en se maintenant avant tout en accord avec les résultats du contrôle expérimental.

Il est indispensable, pour l'étude des principes fondamentaux, de prendre en considération les conditions créées par modification d'équilibre, concurremment avec les efforts qui sont mis en jeu.

Nous considérerons maintenant, en partant de ce point de vue, et d'une façon tout à fait générale, divers cas de charge d'une barre simple, articulée à ses extrémités.

1. Cas d'une barre rectiligne chargée axialement et travaillant dans la zone élastique.

Si une barre articulée à ses extrémités, supporte un effort axial de compression, elle reste rectiligne si la charge est inférieure à la charge critique de flambage (charge de flambage d'EULER). Si l'axe de la barre subit une flexion du

fait de l'intervention des moments extérieurs (et qu'il ne se produise en même temps aucune tension périphérique dépassant la limite de proportionnalité), la poutre, après disparition des causes qui ont motivé sa flexion, reprend sa forme rectiligne.

La barre reste également droite si la charge augmente; elle est en équilibre stable jusqu'à ce que la charge atteigne sa valeur critique ou charge de flambage. Jusqu'à présent, la barre n'a été soumise qu'à une force normale. Si, dès lors, la charge augmente, même d'une faible quantité, il se produit une flexion, et un moment additionnel entre en jeu. Ce n'est que ce phénomène que nous appelons flambage. L'axe de la poutre correspond de nouveau à une position d'équilibre. Si l'on continue à augmenter très lentement la charge, la flexion augmente rapidement, les tensions périphériques au milieu de la barre dépassent la limite de proportionnalité et la barre sort partiellement du domaine élastique. Pour les proportions courantes les déformations et finalement la mise hors service de la poutre se manifestent en dehors du domaine élastique.

2. La barre chargée excentriquement et travaillant dans les limites élastiques.

Si la compression agit excentriquement, il existe un moment initial qui occasionne une flexion de l'axe.

Dans un matériau possédant une élasticité illimitée, à n'importe quelle charge correspond un état d'équilibre. L'instabilité n'intervient pas. Mais, dans ce cas aussi, nous pouvons déterminer par le calcul pour quelle charge les tensions périphériques dépasseront les limites de proportionnalité; à partir de cette charge, c'est de nouveau l'état plastique qui intervient.

3. La barre chargée axialement et travaillant en dehors de la zone élastique.

Si la charge se maintient au-dessous de la valeur critique (charge de flambage) la barre reste rectiligne. Si les tensions demeurent dans les limites de proportionnalité, la barre revient à sa forme rectiligne normale lorsque des charges supplémentaires transversales, causant un fléchissement de l'axe de la barre, cessent d'agir. Si, par contre, les efforts dus à la charge axiale (qui reste cependant inférieure à la charge critique), dépassent la limite de proportionnalité, nous ne pouvons plus déformer cette barre, car autrement elle prendrait une deuxième position d'équilibre avec axe courbe impliquant la déformation plastique d'une partie de la barre. Il existe donc, au-dessous de la charge de flambage, mais au-dessus de la limite de proportionnalité, une position d'équilibre, pour laquelle l'axe reste rectiligne, et une autre, pour laquelle l'axe est infléchi (ce dernier cas correspond, lorsque la charge augmente et en raison de l'excentricité survenue, au cas 4 examiné plus loin).

Supposons de nouveau la barre rectiligne et augmentons la charge jusqu'à la valeur critique de flambage. Les phénomènes seront à peu près les mêmes que ceux de la phase de flambage dans la zone élastique. La courbure augmente rapidement; les moments additionnels croissent et la barre subit les déformations de l'état plastique.

4. La barre chargée excentriquement dans le domaine plastique.

La barre se comporte tout d'abord comme en 2 ci-dessus. Si la charge augmente, la barre se déforme suivant les lois propres à la matière qui la compose, jusqu'à ce qu'elle arrive à une position d'équilibre instable. c'est-à-dire qu'elle commence à se déformer pour une très faible augmentation de la charge. Il ne faut pas confondre ce phénomène de l'apparition de l'état d'équilibre instable avec le phénomène de flambage précédemment décrit. Dans le flambage, nous avons affaire à la substitution à un état d'équilibre (axe rectiligne de la barre soumise à une force axiale), d'un autre état d'équilibre (axe fléchi sous l'action d'une force normale et d'un moment de flexion). Dans le cas de l'équilibre instable, par contre, lorsqu'une partie de la barre devient inélastique, la barre n'est plus en état d'opposer une résistance suffisante aux forces extérieures.

Pratiquement, cet état d'instabilité dans le domaine de la plasticité intervient également dans les cas 1, 2, 3, lorsque après le dépassement de la limite de proportionnalité résultent des déformations plastiques. Ce phénomène peut être suivi d'une manière très nette lorsque au cours des essais on a soin que la charge continue à agir au moment de la déformation et lorsqu'il subsiste une possibilité d'accroître encore cette déformation. L'axe de la poutre s'incurve dès le début dans toutes ses parties, même si la limite d'allongement proportionnel n'a été dépassée que dans certaines parties. C'est là le cas des barres rigides dans toutes leurs parties. Mais dès l'instant où dans la partie médiane de la barre, pour laquelle le moment fléchissant est maximum, la matière constituante n'est plus en état de supporter l'action du moment extérieur par manque de résistance intérieure, il se produit en cet endroit une sorte d'effet d'articulation. L'équilibre d'une telle barre sera impossible parce que, dans sa partie médiane, elle n'a plus qu'une résistance à la flexion très limitée ou même nulle. Dans un pareil système il se produit alors une forte diminution de l'action du moment dans les deux moitiés de la barre ; par suite, les extrémités se redressent si elles n'ont pas déjà subi, à ce moment, une déformation permanente.

5. Conclusions.

Ces phénomènes de flambage et d'instabilité interviennent également pour des barres dont les appuis ne sont pas articulés, pour des dalles et autres systèmes. Ajoutons en outre que, dans la zone élastique, les différentes charges peuvent être appliquées les unes après les autres et dans un ordre successif quelconque, sans que les déformations résultantes et l'état final résultant en soient modifiés. Ceci ne se produit plus lorsque certaines parties du système subissent des déformations plastiques.

Il est évident que les phénomènes que nous venons de décrire se présentent de manière différente pour des éléments constitués par des matériaux différents et suivant les caractéristiques propres de ces matériaux. Les considérations qui précèdent s'appliquent à l'acier de construction de qualité courante.

Nous en arrivons maintenant à cette conclusion que, pour l'étude pratique et théorique de la question du flambage, et tout particulièrement en ce qui concerne l'apparition des états d'équilibre instable dans la zone plastique, il

est nécessaire de connaître les efforts qui se trouvent mis en jeu. Il serait également intéressant de connaître les conditions de charge pour lesquelles la limite de proportionnalité est dépassée en un point quelconque, pour pouvoir déterminer à quel moment précis commence la déformation plastique.

III. Calculs d'équilibre pour les matériaux élastiques.

Supposons un matériau possédant une élasticité illimitée (module d'élasticité E) et admettons, pour situer la question d'une manière tout à fait générale, le cas d'une charge excentrique. La figure 1 s'applique à une barre articulée à ses deux appuis d'extrémité. Si nous tenons à considérer de faibles excentricités et le cas de la charge axiale limite, nous devons faire intervenir la courbe effective de flexion et poser :

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{P\,(e\cos\alpha + y)}{EJ}$$

J est le moment d'inertie de la section; y, ds et φ sont liés entre eux par la relation $y = \int_0^s ds \sin\varphi$.

Si nous posons $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ nous obtenons : $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2k^2\cos\varphi + C$.

On peut déterminer la constante C d'après les conditions aux extrémités pour $\varphi = \alpha$, $\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{M\alpha}{EJ} = -k^2 e\cos\alpha$. On obtient par suite la relation :

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{K^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} \cdot \frac{1}{2k} \text{ dans laquelle } K^2 = \left(\frac{1}{4}k^2e^2\cos^2\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

Si l'on intègre sur toute la longueur de l'axe de la barre fléchie, soit l, en négligeant la contraction résultant de l'effort de compression simple P $\cos\varphi$, on obtient la forme générale suivante :

$$l = \frac{1}{k}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{K^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Cette intégrale ne peut être résolue que par un développement en série et on a :

$$\begin{aligned} l = \frac{2}{k}\Big[&\arcsin\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{K}\Big\} 1 + 0{,}25\,K^2 + 0{,}1406\,K^4 + 0{,}0977\,K^6 + \ldots \Big\{ \\ &-\frac{k}{2}e\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\Big\} 0{,}25 + 0{,}1406\,K^2 + 0{,}0977\,K^4 + \ldots\ldots \Big\{ \\ &-\frac{k}{2}e\cos\alpha\sin^3\frac{\alpha}{2}\Big\} 0{,}0937 + 0{,}0651\,K^2 + 0{,}0050\,K^4 + \ldots \Big\{ \\ &-\frac{k}{2}e\cos\alpha\sin^5\frac{\alpha}{2}\Big\} 0{,}0391 + 0{,}0299\,K^2 + \ldots\ldots \Big\{ - \ldots \Big] \quad (2) \end{aligned}$$

Si $e = 0$, $K = \sin\frac{\alpha}{2}$, et comme : $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

on obtient pour la charge axiale, pour une déformation déjà existante :

$$l = -\frac{\pi}{k}\left(1 + 0{,}25\sin^2\frac{\alpha}{2} + 0{,}1406\sin^4\frac{\alpha}{2} + 0{,}0977\ \sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots\right) \quad (3)$$

Si α tend également vers 0, ce qui n'est possible que pour $e = 0$, on a alors :

$$l = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{EJ}{P}} \quad (4)$$

ce qui correspond à l'effort de flambage d'Euler pour une charge axiale.

L'équation (2) n'est pas résoluble par rapport à P. Pour des dimensions et une charge données, la position d'équilibre ne peut être déterminée qu'expérimentalement. Toutefois, sous la forme (2), elle convient parfaitement à l'établissement de tables et de représentations graphiques. Dans la pratique et en tenant compte de l'impossibilité d'admettre de grosses déformations pour lesquelles la limite de proportionnalité se trouverait dépassée dans les fibres périphériques, on peut se limiter, pour ces calculs, à un nombre restreint de termes.

On obtient en outre les déformations :

$$y = \frac{2}{k}\sqrt{K^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}} - e\cos\alpha \quad (5) \qquad f = \frac{2}{k}\sqrt{K^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}} \quad (6)$$

$$y_m = \frac{2}{k}K - e\cos\alpha \quad (7) \qquad f_m = \frac{2}{k}K \quad (8)$$

Dans les calculs qui précèdent, on a négligé l'influence des efforts tranchants, de la contraction de la barre et des modifications de sa section. Comme nous n'envisageons ici que des considérations relatives, nous introduirons, pour interpréter l'équation (2), l'effort au centre de gravité : $\sigma_n = \frac{P}{F}$ et le coefficient définissant la finesse : $\lambda = \frac{l}{i}$.

Considérons maintenant une section rectangulaire de hauteur h et de largeur b et exprimons l'excentricité en fonction de la largeur du noyau central, de sorte que : $e = m\frac{h}{6}$. On aura : $k = \frac{\lambda}{l}\sqrt{\frac{\sigma_n}{E}}$ et $e.k = 0{,}577\, m\sqrt{\frac{\sigma_n}{E}}$.

Enfin, à partir de l'équation (8) nous obtenons, pour le plus grand bras de levier, correspondant à la charge P, au milieu de la barre et en tenant compte des valeurs ci-dessus :

$$\frac{f_m}{h} = \frac{1}{6}\sqrt{m^2\cos^2\alpha + 12\,\frac{E}{\sigma_n}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}} \quad (11)$$

Prenons comme module d'élasticité $E = 22.100$ kg par mm², valeur qui correspond à l'acier de construction de qualité ordinaire et que nous supposerons tout d'abord constante.

En partant des points ci-dessus, on obtient pour l'équation (2) et pour le rapport $\frac{f_m}{h}$ des familles de courbes qui sont représentées sur la figure (2) et qui correspondent à différentes valeurs de m. Chacun des points de ces graphiques donne, pour l'excentricité correspondante, les valeurs correspondantes de σ_n, λ, α et $\frac{f_m}{h}$ qui impliquent l'équilibre.

La figure 2 a, pour $m = 0$, correspond à une charge axiale. Dans ce dia-

gramme, l'échelle des λ ne correspond à celle des autres diagrammes que jusqu'à la charge de flambage. A partir de ce point, et pour une charge constante (σ_n constant), à un plus grand angle α correspond un plus grand coefficient de finesse λ. L'accroissement $\Delta\lambda$ est toutefois porté à une échelle cent fois plus forte que celle des λ eux-mêmes.

Les figures 2b à 2f montrent que, pour une valeur donnée de m, chaque courbe σ_n est asymptote à la verticale correspondant au λ_k pour lequel le flambage se produit avec une charge axiale. Pour une section de la barre correspondant à une charge de σ_n au centre de gravité et pour de faibles excentricités, les déformations restent tout d'abord faibles. Elles augmentent brusquement à l'approche du degré de finesse correspondant au flambage axial.

Pour des excentricités plus importantes, l'influence prédominante du moment provoque, pour un degré de finesse croissant, une augmentation rapide des valeurs de α et de f_m. Toutefois, la zone correspondant au degré de finesse critique est moins accusée.

Pour le module d'élasticité E choisi et pour une limite de proportionnalité correspondante $\sigma_p = 19$ kg par mm² on atteint rapidement, avec les courbes individuelles, la limite pour laquelle σ_p se trouve dépassée dans les fibres périphériques du côté comprimé, et à partir de laquelle l'élément sort partiellement de la zone élastique.

On a tracé les lignes représentant les valeurs de σ_p pour des excentricités de $m = 0{,}50 - 1{,}0 -$ et 3. Par leur intersection avec une courbe σ_n, on obtient le coefficient de finesse pour lequel la valeur de σ_p sera en même temps atteinte dans la fibre périphérique du côté comprimé. Ce n'est qu'aux valeurs correspondantes de α, λ et σ_n qui se trouvent *au-dessous* de la courbe σ_p qu'il existe des cas de charge pour lesquels la barre entière travaille dans la zone élastique. Au-dessus de cette courbe σ_p nous avons affaire à des cas de charge pour lesquels l'élément travaille soit intégralement, soit partiellement, en dehors de la zone élastique. Nos familles de courbes ne sont donc valables que jusqu'à la courbe σ_p.

Pour les mêmes valeurs de m, on a également tracé les courbes de σ_{kr}. Ce sont les efforts critiques au centre de gravité, pour lesquels, suivant les résultats expérimentaux de Roš, il se produit un flambage de la barre chargé excentriquement, ou, d'après les considérations que nous avons exposées au début, une instabilité.

Pour les trois cas d'excentricité envisagés, et pour les finesses admissibles dans la pratique, les états d'instabilité se manifestent dans des zones pour lesquelles l'élément travaille partiellement ou intégralement en dehors du domaine élastique. Même pour de très faibles valeurs de m, il est impossible que la courbe de σ_{kr} passe au dessous de la droite σ_p.

Pour pouvoir mieux nous rendre compte de la distribution des efforts dans le cas d'une compression excentrique, nous nous proposons encore de déterminer les efforts qui se trouvent mis en jeu. Nous nous limiterons au calcul des efforts maxima sur les bords de la section rectangulaire située au milieu de la barre.

$$\sigma_{m\,\min}^{\max} = \frac{P}{F} \pm \frac{P.f_m}{J} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_n\left(1 \pm 6\,\frac{f_m}{h}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

F représente la section et J le moment d'inertie.

Les efforts maxima et minima au milieu de la barre peuvent également s'écrire comme suit : $\sigma_{m\,\min}^{\max} = \sigma_n\left(1 \pm \lambda \frac{h}{l}\sqrt{\frac{E}{\sigma_n}} . K\right)$ . . . . . (13)

On a déterminé d'après l'équation (13) différentes valeurs des efforts pour $m = 0{,}5$, 1 et 3 pour chacun des coefficients de finesse de 100, 150 et 200 et pour une charge croissante $P = \sigma_s . F$.

Ces valeurs ont permis d'établir les courbes des figures 3a, 3b et 3c.

Sur les ordonnées qui correspondent aux différentes charges, on a porté les efforts, les déviations α et les valeurs des fléchissements $\frac{f_m}{h}$.

σ_s, désigne l'effort au centre de gravité.

σ' l'effort périphérique au milieu de la barre, dans les fibres comprimées;

$\sigma_{''}$ — — — dans les fibres tendues;

ces deux efforts étant considérés sans tenir compte de la déformation de l'axe de la barre ;

σ_{max} et σ_{min} désignent respectivement les efforts effectifs périphériques dans les fibres comprimées et dans les fibres tendues, en tenant compte d'une manière précise de la déformation de cet axe. Les différences $(\sigma_{max} - \sigma')$ et $(\sigma_{min} - \sigma'')$ représentent l'influence du fléchissement de l'élément, qui paraît dépendre largement de m et de λ.

L'intersection de l'horizontale σ_p avec la courbe de σ_{max} donne la charge P pour laquelle les fibres extérieures du milieu de la barre dépassent la limite de proportionnalité. Ce passage est indiqué dans les figures par un trait vertical double. A gauche de ce trait double, l'élément travaille dans la zone élastique, et à droite, il travaille partiellement en dehors de la zone élastique.

L'intersection de l'horizontale correspondant à un effort admissible $\sigma_z = 15$ kg par mm² avec la courbe σ_{max} donne la charge pour laquelle on atteint dans les fibres périphériques le taux de σ_z. Sur les figures 3 sont encore indiquées :

1) l'effort de flambage de l'élément σ_k pour une charge axiale ;
2) l'effort admissible au flambage σ_{kz} pour un coefficient de sécurité de 2,5;
3) l'effort critique σ^e_k pour un élément chargé excentriquement, suivant Roš;
4) l'effort admissible σ^e_{kz} avec un même coefficient de sécurité de 2,5.

Les indications fournies par les figures 3 nous montrent les influences de m et de λ sur la répartition des efforts et des fléchissements dans la section du milieu de la barre et nous constatons ici encore, de même qu'il est résulté des figures 2, que l'instabilité des éléments doués d'une certaine finesse est conditionnée par le moment où le matériau de cet élément commence à sortir de la zone élastique.

IV. Calcul de l'équilibre pour des matériaux partiellement ou intégralement plastiques.

Nous avons déjà signalé, dès le début, qu'il est extrêmement difficile d'interpréter analytiquement la manière dont se comportent les parties d'ouvrages dont les déformations sortent, en totalité ou en partie, du domaine élastique, du fait que la mécanique actuelle de la plasticité ne peut pas encore mettre à

notre disposition des relations sûres, basées sur des recherches expérimentales, entre les efforts et les déformations.

Pour l'exécution pratique des calculs, nous supposons, pour toute la barre, un module d'élasticité E constant, auquel correspond une variation linéaire d'efforts réduits comme suit : pour pouvoir tenir compte de la variation effective du module E d'une fibre à l'autre, nous réduisons les valeurs des sections successives, de telle sorte que les résultantes des efforts internes effectifs soient équivalents à ceux qui sont déterminés par les efforts et sections réduits.

Si, à un endroit donné, la largeur d'une fibre est b_η et si l'effort effectif correspondant atteint σ_η, il leur correspond, après la réduction (voir figure 5), la largeur réduite b^r_η et l'effort réduit σ^r_η. On doit avoir $b_\eta . \sigma_\eta = b^r_\eta . \sigma^r_\eta$ d'où l'on déduit la largeur réduite correspondante d'une fibre de la section : $b^r_{\eta_i} = b_{\eta_i} . \frac{\sigma_{\eta_i}}{\sigma^r_{\eta_i}}$.

La section initiale F se trouve remplacée par une section réduite F^r.

La figure 4 représente l'état d'une barre soumise à une charge excentrique et articulée à ses deux appuis d'extrémité, dans le cas où cette barre travaille partiellement ou intégralement en dehors de la zone élastique. L'axe statique qui doit être pris en considération dans les présentes recherches théoriques passe par les centres de gravité des sections réduites. Cet axe statique accuse par rapport à l'axe géométrique un écart e^r.

Considérons à nouveau la section rectangulaire, en introduisant toutefois, comme variable pour le rayon de courbure, l'élément d'arc *ds* de l'axe statique et l'angle φ correspondant. Sur la figure 5, on a porté, pour une section rectangulaire, le diagramme des allongements et des tensions, de même que la section réduite.

Considérons maintenant deux allongements ε_d et ε_z de fibres périphériques ; nous en déduisons, par le diagramme des allongements, les efforts correspondants à la périphérie σ_d et σ_z, de même que les valeurs des efforts réduits σ^r_d et σ^r_z. Nous déterminons la largeur réduite des fibres particulières et, pour toute la section réduite, la valeur F^r, la position du centre de gravité S^r, ainsi que le moment d'inertie J^r_s de la surface F^r par rapport au centre de gravité S^r. Au centre de gravité de la section réduite, on a l'allongement ε_n suivant l'axe statique et les efforts correspondants σ_n ou σ^r_n. De la figure 5, il résulte enfin, pour le rayon de courbure, la relation :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_z}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

de sorte que nous pouvons fixer également la position de l'axe neutre de la section au moyen de la relation : $s = \rho . \varepsilon_n$.

Un allongement quelconque à une distance η_i du centre de gravité est donné par : $\varepsilon_{\eta_i} = \varepsilon_n + \frac{\eta_i}{s}$.

En partant du module constant E, des efforts réduits et de la section réduite, nous pouvons maintenant effectuer le calcul suivant Navier et nous obtenons les relations concernant les efforts extérieurs :

$$P = \sigma^r_n F^r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17) \qquad \text{et} \qquad M = \frac{E J^r_s}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Le bras de levier par rapport à l'axe statique de la barre est enfin donné

par $y = M : P$. Si pour une section déterminée, on connaît le point d'application de la charge, on atteindra l'équilibre lorsque l'effort P déduit des allongements considérés pour les fibres périphériques concordera avec la charge effective et $y = e^r + \frac{y}{\cos \varphi}$ avec l'intervalle entre le point d'application de la charge et l'axe statique de la barre (voir figure 5).

Pour la détermination exacte de l'axe de la barre, il faut maintenant procéder d'une manière analogue à ce qui a été fait pour le matériau élastique, en intégrant l'équation différentielle : $\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{P \cos \varphi \, y}{E J^r_s}$

dans laquelle $y = \int_0^s ds \sin \varphi$. Comme le moment d'inertie J^r_s varie avec l'angle φ, l'intégration ne peut être effectuée que graphiquement.

Nous sommes donc maintenant en mesure d'établir des diagrammes d'équilibre pour un diagramme d'allongement donné. Pour une charge P déterminée (ou pour un effort correspondant $\sigma_n = \frac{P}{F}$ au centre de gravité), considérons tout d'abord différentes valeurs de ε_d et de ε_z. Ces valeurs doivent être choisies telles que : $P = \sigma^r_n . F^r$. Pour chaque cas, nous déterminons e^r et s ainsi que le moment M des efforts intérieurs : $M = \frac{E J^r_s}{h} (\varepsilon_d - \varepsilon_z)$.

Enfin nous avons pour le bras de levier de la charge extérieure P par rapport à l'axe statique de la barre : $y = \frac{M}{P} = \frac{E}{P . h} . J^r_s (\varepsilon_d - \varepsilon_z)$

Si l'on considère des éléments d'arc finis Δs, on a pour la variation de l'angle correspondant : $\Delta \varphi = \Delta s \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_z}{h}$, d'où l'on peut déterminer progressivement l'axe de la barre et les modifications corrélatives de y.

Pour la conduite pratique des opérations, on pourra établir des graphiques pour différentes valeurs de P (ou de σ_n) ; pour toutes déterminations ultérieures, on obtiendra les valeurs demandées par interpolation des courbes des graphiques.

Il faut maintenant déterminer la position d'équilibre qui correspond à une charge donnée appliquée à une barre donnée. Déterminons tout d'abord si le milieu de cette barre se comporte plastiquement. Comme, avec les hypothèses que nous avons faites, nous ne connaissons que l'angle de déviation de l'axe de la barre en son milieu pour $m = 0$, il faut commencer par tracer la courbe de flexion. Admettons tout d'abord un bras de levier y_m, sans perdre toutefois de vue que cette valeur comprend non seulement le fléchissement de l'axe de la barre, mais également l'excentricité initiale ; déterminons les valeurs correspondantes de la déviation de l'axe de la barre $\Delta \varphi$ à partir des résultats graphiques obtenus précédemment et pour un Δs fini. Nous obtenons ainsi pour un écart Δs du milieu de la barre, un point de son axe ainsi que la valeur correspondante y' du bras de levier. Pour ce nouveau bras de levier, déterminons à nouveau la variation $\Delta \varphi$ correspondante pour un nouveau Δs, nous obtenons le bras de levier y'' qui correspond à $2 \Delta s$ et ainsi de suite. En arrivant à l'extrémité de la section de la barre, nous devons obtenir la valeur y_0

qui, étant donné le e_o^r connu, doit nous conduire au point d'application de la charge à l'extrémité de cette section. Sinon, il conviendra de choisir une autre valeur de départ y_m jusqu'à ce que l'on arrive à un résultat exact. Dans la pratique, la section du milieu de la barre seule travaillera en dehors de la zone élastique, le reste pouvant être calculé sur la base de l'élasticité.

Si nous devons enfin rechercher quelle est la charge critique d'instabilité, nous devons partir des valeurs limites pour le moment dans le milieu de la barre, ou des maxima possibles du bras de levier et déterminer la courbe de flexion comme précédemment. C'est cette courbe de flexion de la barre qui servira de point de départ, pour *toutes* les excentricités possibles du point d'application de la charge à l'extrémité de la barre. Cette courbe de flexion une fois établie, nous sommes en mesure de déterminer les longueurs critiques de la barre qui correspondent à une charge donnée et à une excentricité initiale arbitraire, et d'établir la valeur limite précise à partir de laquelle il y a instabilité.

Le procédé de calcul développé dans les lignes qui précèdent s'applique, indépendamment des charges excentriques, à tous les systèmes de charge axiale, lorsque l'on se trouve en présence de fléchissements provoqués par des causes quelconques ayant conduit à un dépassement de σ_p. Si, en définitive, la résistance à la flexion se trouve dépassée au milieu de la barre, on se trouve en présence du cas de l'instabilité d'une barre soumise à une charge axiale, et qu'il ne faut pas confondre avec le flambage. Notre méthode permet également de prendre en considération le cas du flambage des barres trapues lorsque, suivant l'esprit de notre définition, le calcul est basé sur la considération de l'instant où l'axe de la barre, de droit, devient incurvé, en tenant compte de la réduction de la charge sur le côté tendu.

Cette méthode de calcul se rattache étroitement, pour les cas de plasticité partielle, au calcul exact applicable dans la zone élastique, et naturellement l'englobe. Elle permet de suivre exactement les déformations et les efforts de section en section, même pour des cas de charge compliqués.

V. Études expérimentales.

Les considérations qui ont été exposées jusqu'à maintenant nous amènent à envisager la vérification des hypothèses et des résultats obtenus. Les études expérimentales ont deux objectifs : l'un de caractère théorique, l'autre de caractère pratique. Ce dernier consiste à déterminer les charges critiques, telles qu'elles se présentent en pratique, dans les différents éléments utilisés en construction, afin de permettre l'établissement de formules et de diagrammes.

C'est en ce qui concerne les barres chargées axialement que l'on possède le plus de résultats pratiques. Ces résultats ont permis de déterminer les courbes des efforts de flambage, donnant les valeurs critiques des efforts au centre de gravité, pour lesquelles le flambage se produit.

Les essais pratiques pour la détermination de la résistance au flambage des tôles d'âme et des ailes des poutres, etc... n'ont pas encore été établis en nombre suffisant pour pouvoir servir de base aux recherches théoriques.

La question de l'instabilité des barres chargées excentriquement a été suivie

tout particulièrement par Roš au Laboratoire Fédéral d'Essai des Matériaux à Zurich. A la suite de nombreux essais, on a déterminé pour des excentricités variables, les courbes des tensions critiques au centre de gravité, analogues aux courbes des efforts de flambage. On a envisagé des marges de sécurité équivalentes à celles qui ont été adoptées pour les recherches sur le flambage. Cette méthode est évidemment pratique, mais elle ne permet pas de traduire l'influence des moments fléchissants, dont l'importance est pourtant prépondérante en ce qui concerne l'apparition de l'état d'instabilité. Il n'est pas possible de déterminer pour quelles relations entre les moments et les efforts (excentricités) il faut procéder à un calcul d'instabilité et pour quelles autres on peut se contenter d'une simple étude portant sur les efforts. Il ne faut d'ailleurs pas perdre de vue que les questions concernant l'importance de la marge de sécurité doivent être traitées d'une manière concordante dans les deux cas.

On ne possède encore que très peu de résultats expérimentaux, susceptibles d'intéresser la technique pratique de la construction, en ce qui concerne les efforts s'exerçant excentriquement sur les dalles, les âmes, les ailes des poutres, etc... (les cas de charges groupées n'étant toujours pas considérés).

Nous pouvons donc constater que ce domaine très intéressant de la stabilité et de la résistance des barres et des dalles comprimées et fléchies offre encore aux recherches expérimentales un champ très vaste.

Il convient donc tout d'abord de poursuivre des effets d'ordre scientifique, afin de dégager les bases de la question. Seules de telles investigations permettront de mieux saisir la manière dont se comportent les barres, les dalles, etc... dans le domaine plastique. Corrélativement, ces recherches apporteront également leur contribution à l'étude des questions d'ordre statique et dynamique dans lesquelles le problème que pose l'entrée de certains éléments de construction dans le domaine plastique conduit non pas à envisager le point de vue de la marge de sécurité, mais l'adoption, pour l'ensemble du système statique, de dispositions plus rationnelles.

L'exécution de tels essais de base, portant sur des éléments de construction travaillant dans le domaine plastique, demande des installations particulières. Suivant la vitesse de déformation, les frottements internes, suivant l'allure du diagramme des allongements, etc..., l'apparition des déformations considérables dans le domaine critique est plus ou moins rapide ; il ne doit pas en résulter la plus petite répercussion sur la charge (c'est-à-dire sur la machine d'essai), pas plus que de la déviation de l'axe de la barre ou du plan des tôles, si l'on veut que l'essai soit effectué dans les conditions désirables de précision.

Dans ces recherches, les possibilités d'augmentations progressives aussi faibles que possible de la charge, ainsi que le temps, jouent un rôle important ; il sera par exemple intéressant de pouvoir déterminer, en correspondance avec le diagramme des allongements, dans quelles conditions on pourra, après dépassement d'une zone d'instabilité déterminée, réaliser une nouvelle position d'équilibre.

Il est en outre nécessaire de contrôler l'influence des charges statiques répétées (avec dépassement de la limite de proportionnalité), ainsi que l'influence des charges de nature dynamique, sur ces questions d'instabilité.

Pour l'étude expérimentale des questions ainsi indiquées, il conviendra de

travailler sur des modèles de barres et de dalles préparés avec les matériaux utilisés en pratique, ou avec d'autres matériaux appropriés admettant des diagrammes d'allongement nettement déterminés.

L'auteur a conçu, à l'Institut pour la Statique de la Construction de l'École Polytechnique Fédérale de Zurich, différents appareils et dispositifs, permettant l'étude systématique des questions importantes de la statique qui viennent d'être indiquées.

Concrétisons les considérations précédemment exposées par la discussion de quelques essais effectués. La série de photographies de la figure 6 se rapporte à l'application d'une charge excentrique avec $m = 3$, sur une barre préparée avec un matériau expérimental particulier. Le quatrième cliché à partir de la gauche représente un cas typique d'équilibre, dans des conditions intégralement élastiques. Pour une faible augmentation de la charge (cliché 5) il se produit dans le milieu de la barre un fort fléchissement, tandis que les extrémités de cette barre accusent un commencement de redressement. On a alors une position d'équilibre correspondant à un travail partiellement plastique pour le milieu de la barre. Si, après de telles conditions de charge, on supprime la charge, le milieu de la barre accuse un fléchissement permanent (cliché 6).

La série inférieure des clichés de cette même figure se rapporte à un essai effectué sur une barre en acier de construction et pour $m = 3$ également. Le quatrième cliché à partir de la gauche concerne encore un travail entièrement élastique. Sur le cinquième cliché, on arrive au moment où, par suite d'une légère augmentation de la charge, l'état d'instabilité apparaît. On constate, là encore, que pour une même charge, la déformation se localise au milieu de la barre, tandis que ses extrémités accusent un redressement. Après enlèvement de la charge, aucune nouvelle position d'équilibre n'ayant été atteinte, la déformation est restée localisée au milieu de la barre, les extrémités restant entièrement droites, suivant le cliché 6.

L'essai de la figure 7 a été effectué sur une barre trapue en acier doux et également pour $m=3$. On ne peut pas suivre aussi bien, sur ces clichés, les formes d'équilibre tout d'abord entièrement élastique, puis partiellement plastique, par suite de l'aspect plus ramassé de la figure. Le deuxième cliché représente la position extrême d'équilibre à partir de laquelle la barre commence à s'infléchir pour une faible augmentation de la charge. Le cliché inférieur de gauche montre que seul le milieu de la barre participe à la déformation ultérieure, tandis que les extrémités subissent un redressement. Le dernier cliché représente enfin la barre après suppression de la charge.

La figure 8 représente deux barres, après la suppression de la charge. L'une de ces barres est très mince et allongée et l'autre plus courte et ramassée ; on peut observer très nettement le mode de déformation après dépassement de la limite d'instabilité.

Les exemples qui viennent d'être exposés montrent que pour les barres, les dalles et les dispositions complexes de formes et de charges, l'instabilité se manifeste toujours et exclusivement dans une zone partiellement inélastique. Il est extrêmement important d'étudier d'une manière précise le travail des systèmes de construction, dans ce domaine, tout particulièrement en vue des ouvrages que l'on fait sortir intentionnellement de la zone élastique, sans faire intervenir l'instabilité.

Zusammenfassung.

Werden Stäbe mit gerader Achse durch Druckkräfte, oder werden ebene Platten durch Momente und Querkräfte in ihrer Schwerebene beansprucht (Zentrische Belastung), dann bleiben die Stabachsen gerade und die Platten eben, bis bei allmählichem, statischem Anwachsen die kritische Belastung, die Knicklast, erreicht wird. Stäbe und Platten nehmen gebogene Formen an, die neuen Gleichgewichtslagen entsprechen. Zu den ursprünglichen äusseren Lasten treten noch Biegemomente und Querkräfte hinzu, die senkrecht zur Stabachse oder senkrecht zur Plattenebene wirken. Aus der reinen Druckbelastung des Stabes wird eine kombinierte Druck-Biegebeanspruchung, und aus dem ebenen Spannungsproblem der Platte ein räumliches. Nach dem Wechsel der Gleichgewichtslage verhalten sich ausgeknickte Bauglieder bei weiterer Belastung wie solche mit anfänglichen Biegemomenten. Knicken ist somit nur dann möglich, wenn die ursprüngliche Belastung bei gerader Stabachse oder ebenen Platten zentrisch wirkt.

Sind Stabachsen oder Schwerebenen von Platten von Anfang an gekrümmt, oder wirken ausser anderen Lasten Kräfte, die infolge von Deformationen Biegemomente hervorrufen, so haben wir es mit kombinierter Druck-Biegebeanspruchung zu tun. Hieher gehören : exzentrischer Druck, Druck mit Querbelastuug, zentrischer Druck nach Überschreiten der Knicklast usw.

Die Ausbiegungen, und Spannungen nehmen infolge der von den Deformationen abhängigen Biegemomente schneller zu als die Last; jedoch entspricht jeder Last eine Gleichgewichtslage, solange wir unbegrenzt elastisches Material voraussetzen. Die Materialeigenschaften der Baustoffe bedingen, dass bei Eintreten grösserer örtlicher Verformungen die Biegesteifigkeit erschöpft wird und zunächst an der Stelle des ungünstigsten äusseren Momentes die inneren Kräfte nicht mehr im Stande sind, Gleichgewicht mit der äusseren Belastung herzustellen. Wir erhalten eine Änderung in der statischen Gliederung des Bauteiles und damit eine Umlagerung des Spannungsverlaufes. Ist nach der teilweisen oder gänzlichen Ausschaltung von Teilen des Tragsystems eine neue Gleichgewichtsform möglich (kontinuierlicher Träger bei Überschreitung der Fliessgrenze über einer Stütze, ausgesteifte Stegbleche von Biegeträgern nach teilweisem Ausbeulen der Stege usw.), so ist diese bei der Prüfung der Tragfähigkeit nach weiterer Laststeigerung den Untersuchungen zu Grunde zu legen. Treten die Einschränkungen der Biegesteifigkeit jedoch an Stellen auf, die nicht gestützt sind, beispielsweise die Mitte eines exzentrisch gedrückten Stabes, und daher ausweichen können, so ist keine neue stabile Gleichgewichtslage mehr möglich. Wir sprechen in diesem Falle von Instabilität; der Bauteil ist gänzlich unbrauchbar geworden.

Instabilität von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen kann demnach nur eintreten, wenn nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze in einzelnen Teilen unelastisches Verhalten auftritt. Die Form des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes ist von grundlegendem Einfluss. Das Problem selbst kann als Gleichgewichtsaufgabe oder als Spannungsuntersuchung behandelt werden.

Die genaue rechnerische Behandlung der geschilderten Belastungsfälle ist im elastischen Gebiet ohne weiteres, im unelastischen nur nach gewissen Annahmen möglich. Um der Praxis wirtschaftliches Dimensionieren von Baugliedern, die auf Druck und Biegung beansprucht werden, zu ermöglichen und um genügende Sicherheit gegen das Erreichen von Instabilität im unelastischen Bereich zu gewährleisten, ist das Verhalten der Baustoffe im plastischen Gebiet zunächst auf wissenschaftlich-versuchstechnischer Basis eingehend zu erforschen. Über die speziellen Aufgaben der « Stabilität und Festigkeit von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen » hinaus müssen die Grundlagen geschaffen werden, die eine praktische Berechnung der Bauglieder im unelastischen Gebiet ermöglichen, um eine Reihe von wichtigen Fragen der Statik und Dynamik ihrer Lösung entgegenführen zu können.

Résumé.

Si l'on soumet des barres à axe rectiligne à des efforts de compression, ou des dalles planes à des moments et à des efforts tranchants s'exerçant dans le plan du centre de gravité, les axes des barres restent rectilignes et les dalles restent planes, jusqu'à ce que la charge, augmentée progressivement, atteigne la valeur critique, c'est-à-dire la charge de flambage. Les barres et les dalles accusent ensuite des fléchissements qui correspondent à de nouvelles positions d'équilibre. Aux charges extérieures initiales s'ajoutent encore des moments fléchissants et des efforts tranchants, qui s'exercent perpendiculairement à l'axe de la barre ou au plan de la dalle. A partir de la charge de compression simple de la barre, prennent naissance des systèmes combinés d'efforts de compression et de flexion. L'étude de la dalle devient un problème intéressant les trois dimensions. Après modification du système d'équilibre, les éléments fléchis se comportent, pour les nouvelles augmentations de la charge, comme des éléments soumis à des moments fléchissants initiaux. Le flambage n'est ainsi possible que lorsque la charge initiale s'exerce axialement, tant dans les barres rectilignes que dans les dalles planes.

Si les axes des barres ou les plans des dalles ont subi un fléchissement initial, ou si ces éléments se trouvent, en outre, soumis à des charges qui se traduisent, par suite des déformations initiales ci-dessus, par des moments fléchissants, nous aurons alors affaire à un système combiné d'efforts de compression et de flexion. A ce cas appartiennent : les charges appliquées excentriquement, les compressions avec efforts tranchants, les compressions axiales après dépassement de la charge de flambage, etc...

Par suite de l'intervention des moments fléchissants résultant des déformations, les fléchissements augmentent plus rapidement que les charges. Toutefois, à chaque charge correspond une position d'équilibre, tant qu'il s'agit de matériaux ayant une élasticité illimitée. Les caractéristiques propres des matériaux employés conditionnent le dépassement de la résistance à la flexion, lorsque de plus grandes déformations locales entrent en jeu ; c'est d'elle que dépend la possibilité d'un équilibre entre les efforts internes et la charge extérieure, à l'endroit où le moment s'exerce de la manière la plus défavorable. Il en résulte

une modification dans la conception statique des éléments de la construction et un regroupement des efforts. Si, après la mise hors de cause partielle ou totale de certaines parties du système porteur, une nouvelle forme d'équilibre est possible (cas des poutres continues après dépassement de la limite d'écoulement au-dessus d'un appui, étançonnement des poutres travaillant à la flexion après flambage partiel de l'âme, etc...), cette nouvelle forme doit servir de point de départ pour le contrôle de la capacité de charge, pour de nouvelles augmentations de la charge. Si toutefois la résistance à la flexion se trouve dépassée à des endroits non soutenus, par exemple au milieu d'une barre comprimée excentriquement, endroits qui sont par conséquent susceptibles de fléchir, on ne pourra plus trouver une nouvelle position d'équilibre stable. Nous dirons alors qu'il y a apparition de l'état d'instabilité; l'élément est complètement mis hors service.

L'instabilité des éléments soumis à des efforts de compression et de flexion ne peut donc se produire que lorsque certains éléments sortent de la zone élastique, par suite du dépassement de la limite de proportionnalité. La forme du diagramme des allongements est là d'une importance déterminante. Le problème peut être traité comme une question d'équilibre ou comme une question d'efforts.

L'étude rigoureuse des cas de charges indiqués est possible immédiatement dans le domaine élastique; mais elle ne peut être abordée, en dehors de ce domaine, qu'en partant de certaines hypothèses. Il importe tout d'abord d'étudier d'une manière approfondie, théoriquement et expérimentalement, la manière dont se comportent les matériaux utilisés en construction; cette question est nécessaire si l'on veut pouvoir arriver, pour les différentes parties de la construction, à des dimensions économiques et si l'on veut réaliser des marges de sécurité suffisantes, par rapport à l'instabilité dans le domaine plastique. Pour pouvoir résoudre toute une série de questions capitales, en statique et en dynamique, on devra mettre sur pied les bases d'une étude spéciale de la « Stabilité et de la résistance des éléments travaillant simultanément à la compression et à la flexion », étude destinée à permettre le calcul pratique des éléments dans le domaine plastique.

Summary.

If members with straight axes are submitted to compression, or if flat plates are stressed by moments and transverse forces in the plane of their centre of gravity (central loading), the ends of the members remain straight and the plates flat, until through gradual static increase the load reaches the critical (buckling) load. Members and plates then assume bent shapes, corresponding to the new positions of equilibrium. In addition to the original external loads, there come into play also bending moments and transverse forces, which act perpendicular to the axis of the member or perpendicular to the plane of the plate. The purely compression loading of the member becomes a combined compression and bending stressing, and the problem of the stresses in the plate is in three dimensions instead of in two. After the position of equilibrium has altered, buckled structural members when still further loaded behave as members

with initial bending moments. Buckling is consequently only possible, when the original load acts centrally in the case of a member with straight axis or in the case of a flat plate.

If the axes of members, or the central planes of plates, are initially bent, or if in addition to other loads forces act which cause bending moments in consequence of deformations, we have to deal with combined compression and bending. To these belong : eccentric pressure, compression with transverse loading, central pressure after the buckling load has been exceeded, etc.

The deflections and stresses, in consequence of the bending moments depending on the deformations, increase more quickly than the load; but to every load there is a corresponding position of equilibrium, as long as we assume unlimited elasticity of the material. From the properties of the structural material it results that, when larger local deformations occur, the resistance to bending becomes weak and at first at the place where the external moment is most unfavourable the internal forces are no longer able to bring about equilibrium with the external loading. We get a change in the static conditions of the structural part and therefore a change in the run of the stresses. If, after partial or complete elimination of parts of the system, it is possible to have a new form in equilibrium (continuous girders with the elastic limit exceeded over one support, stiffened webs of plate girders after partial buckling of the web, etc.), this has to be taken into consideration when testing the carrying capacity after further increase in load. If however the reductions in the resistance to bending occur at places which are not supported, — for example in the middle of an eccentrically compressed member, — and may consequently give way, a new stable position of equilibrium is no longer possible. In this case we speak of instability ; the system will be destructed.

Instability of structural parts submitted to compression and bending can accordingly only occur if inelastic conditions result after the limit of proportionality is exceeded in individual parts. The shape of the stress-strain diagram is of fundamental significance. The problem itself may be treated as a problem in equilibrium or as an investigation of stresses.

The exact mathematical treatment of the described cases of loading is quite possible in the elastic zone; in the inelastic zone certain assumptions must first be made. In order to make possible in practice to obtain economical dimensioning of structural members which are submitted to compression and bending, and in order to ensure sufficient safety against reaching instability in the inelastic zone, the behaviour of the structural material in the plastic zone must first of all be thoroughly investigated scientifically and technically. For the special problems of the " stability and strength of structural members subjected to compression and bending ", one must search for principles which will enable to make practical calculations for structural members in the inelastic zone, in order to solve a series of important questions in statics and dynamics.

I 2

LA STABILITÉ DES BARRES COMPRIMÉES PAR DES FORCES EXCENTRÉES

KNICKUNG EXZENTRISCH BELASTETER STÄBE

BUCKLING OF ECCENTRICALLY LOADED BARS

Dr.-Ing. h. c. M. ROŠ,
Professeur à l'École Polytechnique Fédérale et
Directeur du Laboratoire Fédéral d'Essai des Matériaux, Zürich.

Ce mémoire est une extension et un complément des publications suivantes parues à l'occasion des deux premiers Congrès internationaux de construction des ponts et charpentes :

« La résistance au flambage des barres articulées aux deux bouts » (Zurich, 1926) et

« Le dimensionnement au flambage des barres comprimées par des forces axiales et excentrées » (Vienne, 1928).

Tous les essais ont été exécutés au Laboratoire Fédéral d'Essai des Matériaux sous la direction du Prof. M. Roš et celle du Dr J. Brunner. Ce dernier s'est chargé, d'autre part, de l'exécution et de la surveillance des essais ainsi que de la mise en valeur des résultats.

C'est aussi sous la direction immédiate du Dr Brunner qu'ont été exécutés les essais de flambage

sur le bois de construction, par le Dr Christen Ostenfeld, Copenhague, Danemark ;

sur la fonte, par le Prof. Tomoyasu Yuki de l'École Polytechnique de Sendai, Japon ;

sur l'acier à haute résistance (Ac 52), par le Prof. Shizuo Ban de l'Université impériale de Kyoto, Japon, et

sur le béton armé, par l'Ingénieur dipl. O. Baumann de Baden, Suisse.

L'ingénieur diplômé A. Eichinger, collaborateur scientifique du L. F. E. M., a pris part aux discussions théoriques.

I. Suppositions.

Les suppositions sur lesquelles se basent les recherches théoriques et les considérations développées au cours de ce mémoire sont les suivantes :

1) la barre est à âme pleine, de section invariable et rectangulaire (F) ;

2) l'axe de la barre est rectiligne;
3) la barre est articulée aux deux bouts;
4) les sections restent planes;
5) la courbe des flèches est une sinusoïde qui répond à la fonction

$$y = f.\sin\left(\frac{\pi.x}{l}\right);$$

6) le diagramme tension-allongement est connu;
7) l'allègement des fibres comprimées suit la loi élastique;
8) la force de compression P croît d'une façon constante, mais toutefois pas trop lentement, jusqu'au moment où elle atteint la charge de flambage P_k (essais statiques de flambage);
9) la force P agit parallèlement à l'axe rectiligne de la barre lorsque le flambage se produit sous l'action de forces excentrées.

II. Processus du flambage.

Le flambage est un problème de stabilité. Tous ces problèmes de stabilité se basent sur les diagrammes tension-déformation et, dans la règle, sur les diagrammes compression-raccourcissement; dans certains cas on utilise aussi les diagrammes tension-allongement des matériaux de construction.

Le moment intérieur M_i, dû, lors de la compression axiale, à un fléchissement latéral, virtuel et infiniment petit, est en relation avec le moment développé par la charge extérieure.

Ces moments sont donnés par les formules :

moments intérieurs

dans le cas de la compression axiale

$$M_i = \frac{T.J}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dans le cas de la compression excentrée

$$M_i = J\,\frac{T}{h}.\Delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

moments extérieurs

dans le cas de la compression axiale

$$M_a = P_k./. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

dans le cas de la compression excentrée

$$M_a = P_k.(p+f). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Au moment du flambage la relation existant entre le moment interne M_i et le moment extérieur M_a correspond à un état d'équilibre instable. Cette relation d'équilibre ne peut pas être assimilée au cas où on atteint une tension déterminée de la fibre extérieure (limite d'écoulement, résistance à la rupture). Ce n'est que dans le cas où l'élancement $\frac{l}{i}$ ne dépasse pas un certain chiffre cri-

tique, dépendant lui-même de la loi de déformation du matériau sollicité à la compression, que le problème de stabilité devient un problème de résistance à l'écrasement.

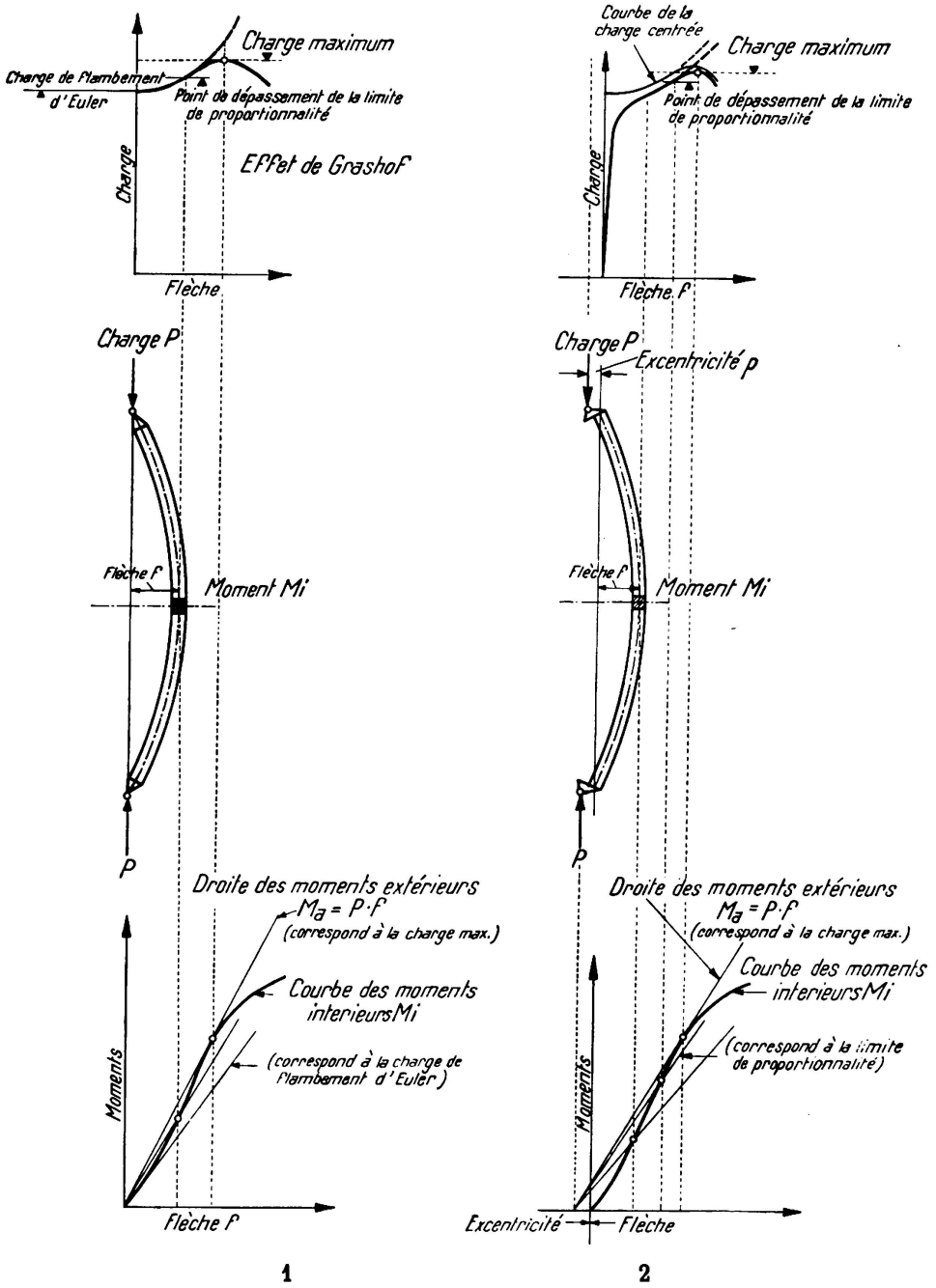


Fig. 1.
Principe du processus de flambement par charge centrée.
Prinzip des Knickvorganges bei zentrischer Belastung.
Laws governing buckling under a central load.

Fig. 2.
Principe du processus de flambement par charge excentrée.
Prinzipe des Knickvorganges bei exzentrischer Belastung.
Laws governing buckling under a eccentric load.

III. Compression centrée et excentrée.

Le flambage dû à des forces centrées ne peut avoir lieu que dans des conditions idéales qui ne se réalisent en pratique qu'extraordinairement rarement ; dans la très grande majorité des cas, ces conditions ne sont pas remplies. En réalité, le point d'application des forces est excentrique.

Comme causes d'excentricité on peut citer :

le fait que l'axe de la barre n'est pas, géométriquement parlé, absolument rectiligne (dressage) ;

le fait que la structure du matériau n'est pas partout absolument la même (manque d'homogénéité) ;

le fait que la résistance et les déformations du matériau ne sont pas partout exactement égales (anisotropie) et enfin

le fait qu'il est pratiquement impossible de centrer parfaitement les forces (frottements, encastrements et finalement l'excentricité primaire).

Le problème du flambage par compression excentrée ne peut être mis en doute, il existe de droit.

*
* *

Les fig. 1 et 2 représentent, à une échelle réduite, les conditions de stabilité, telles qu'elles se présentent pour une barre très élancée, comprimée par des forces centrées et excentrées.

Pour les barres dont l'élancement est le même que celui qu'on rencontre dans la construction, les degrés distingués dans les graphiques :

charge de flambage d'Euler,

effet de Grashof,

dépassement de la limite de proportionnalité,

charge maximum

sont très rapprochés et, pratiquement, coïncident. Ceci provient du fait que, dès le début, la limite de proportionnalité est déjà dépassée ou que, lors du fléchissement, succédant à la première phase de stabilité, on ne constate qu'une très faible élévation de la charge critique.

*
* *

Lors du flambage dû à des charges excentrées, la barre fléchie se trouvera toujours dans une position d'équilibre, à supposer que le matériau dont elle se compose soit absolument élastique ; en réalité, on constate qu'une flèche relativement petite occasionne déjà un état d'équilibre instable.

La théorie du flambage par forces centrées s'appuie directement sur les travaux d'Engesser et de v. Kármán.

Pour le flambage par forces excentrées, M. Roš et J. Brunner ont développé une théorie spéciale qui est rappelée brièvement ci-dessous.

La relation (2) $M_i = \frac{J}{h} T.\Delta.$ permet de tracer la courbe des moments internes M_i pour une tension de base déterminée. L'excentricité critique dépend de

l'élancement de la barre sollicitée par ladite tension de base. On détermine graphiquement cette excentricité en déplaçant la ligne M_a des moments extérieurs jusqu'au moment où elle est tangente à la courbe M_i. Le point de contact est le point de stabilité critique ; l'abscisse de ce point représente l'excentricité critique, fig. 3.

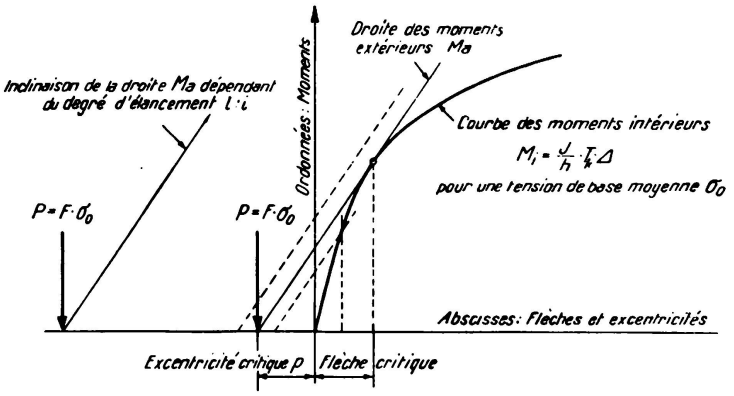


Fig. 3.

La tangente à la courbe des moments intérieurs M_i, correspondant à une charge et à un degré d'élancement donnés, détermine l'excentricité critique par son intersection avec l'axe des abscisses.

Die Tangente an die Kurve der innern Momente M_i, entsprechend einer gegebenen Last und einem gegebenen Schlankheitsgrad, bestimmt die kritische Exzentrizität durch ihren Abschnitt auf der Abscissenachse.

The tangent to the curve of internal moments M_i, corresponding to a given load and a given slenderness ratio, determines the critical eccentricity by its intersection with the abcissae axis.

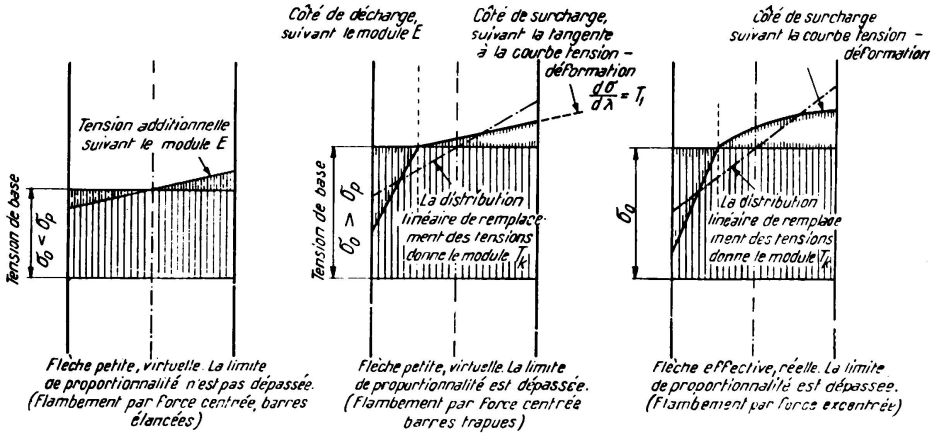


Fig. 4.

Détermination du module T_K pour le flambage sous charge centrée et excentrée.
Bestimmung des Knickmoduls T_K für zentrische und exzentrische Last.
Determination of modulus T_K for buckling under central and eccentric load.

La fig. 4 permet de se rendre compte schématiquement de la détermination du module T_k. Ce dernier est, pour des fléchissements virtuels infiniment petits (flambage par forces centrées), dépendant de la tension de base et du diagramme tension-déformation du côté chargé et du côté allégé. Pour des fléchissements de grandeur finie, tels qu'ils se produisent lors du flambage par charges excentrées, le module T_k dépend de la tension initiale uniformément

répartie et de la différence algébrique des allongements Δ des fibres extrêmes due à la flexion.

Les précédentes publications du L. F. E. M. contiennent un graphique ayant servi de base pour le calcul des courbes M_i, fig. 5, et qui illustre la relation entre T_k et Δ pour des tensions initiales de grandeur différente et pour l'acier de construction. Les publications sus-nommées renferment par ailleurs tous les détails intéressant la question.

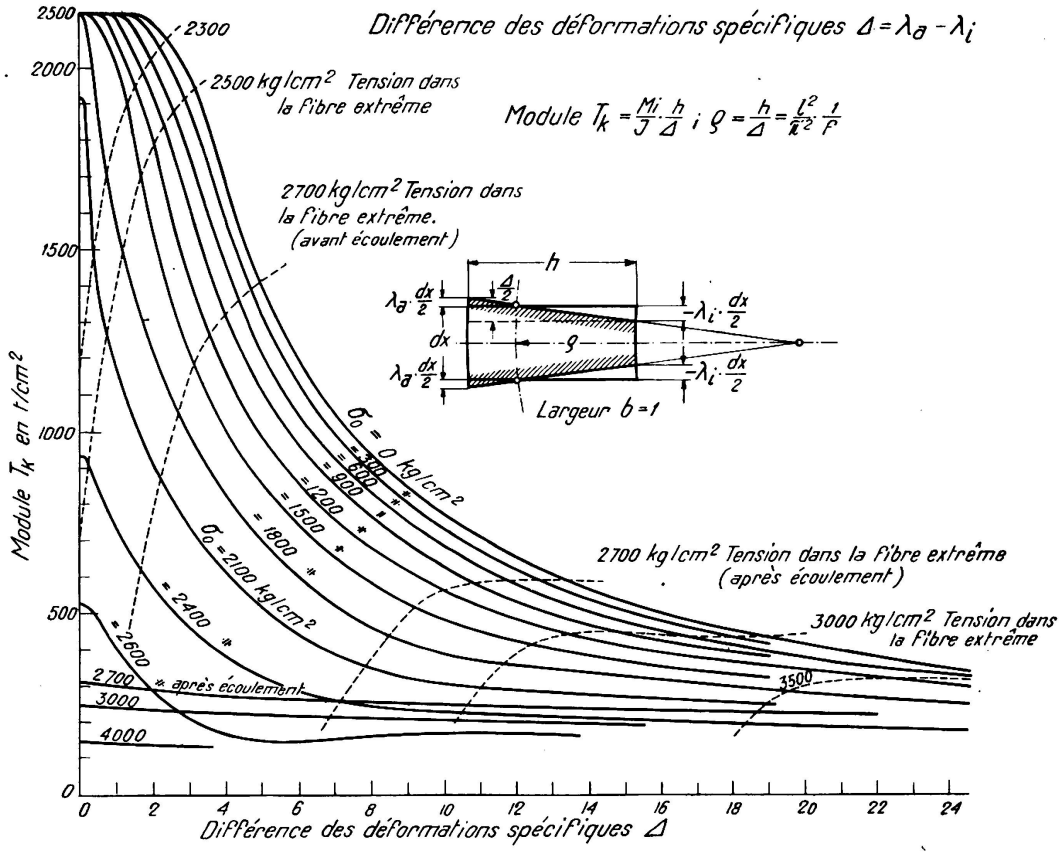


Fig. 5.

Module T_K en fonction des différences des déformations spécifiques Δ en °/₀₀ des fibres extrêmes et de la tension de base.

Modul T_K als Funktion der Differenz der Randfaserdehnungen und der Grundspannungen in °/₀₀.

T_K modulus as a function of the original tension and of the specific deformations differences Δ of the outside fibres.

Il faut relever, comme le Prof. E. Chwalla l'a fait dans le compte rendu du congrès de Vienne, que la manière dont on applique la force, dans le cas du flambage par charges excentrées, joue un rôle au point de vue théorique. On peut appliquer la force axialement et produire le déplacement après coup pour atteindre l'excentricité voulue ou bien faire augmenter la charge déjà excentrée dès le début. On a prouvé par ailleurs, pendant la discussion, que cette différence n'est sensible que pour des barres très trapues qui ne sont, pour ainsi dire, pas utilisées en pratique. Au cours de la même discussion, on a aussi traité à fond la question de l'influence que joue la courbe admise de la barre (sinusoïde) sur les résultats de la charge théorique de flambage et du fléchissement.

1) Acier de construction.

Valeurs de résistance caractérisant le matériau

$\sigma_p = 1{,}90$ t./cm² $\quad\quad \sigma_f = 2{,}70$ t./cm²
$\beta_z = 4{,}00$ » $\quad\quad E = 2.150$ »

Le rapport publié à l'occasion du Ier congrès international de construction des ponts (Zurich, 1926) : « La résistance au flambage des barres articulées aux deux bouts » illustrait l'application à l'acier de construction, de la théorie esquissée ci-dessus et relatait les essais exécutés pour en confirmer l'exactitude. Nous reproduisons ci-après les courbes permettant de déterminer immédiatement les tensions de flambage pour les degrés d'excentricité $m = 0$ jusqu'à $m = 6$ (fig. 6).

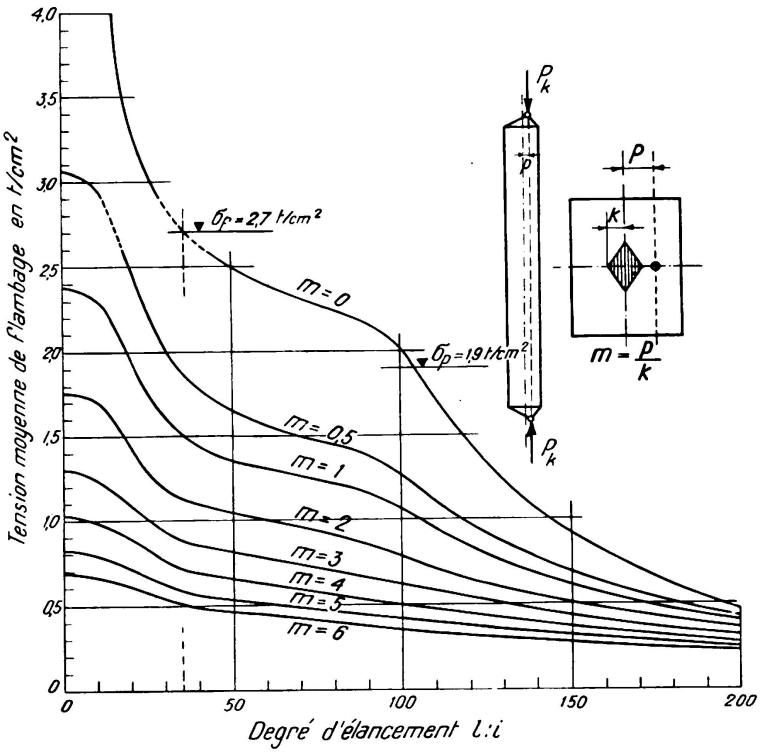


Fig. 6.

Courbes théoriques de flambage pour l'acier de construction. Degrés d'excentricité $m = 0$; $m = 6$.
Theoretische Knickspannungkurven für Baustahl. Exzentrizitätsmasse m.
Theoretical buckling curves for structural steel. Degrees of eccentricity m.

2) Acier de construction au silicium.

Valeurs de résistance caractérisant le matériau

$\sigma_p = 2{,}80$ t./cm² $\quad\quad \sigma_f = 3{,}80$ t./cm²
$\beta_z = 5{,}40$ » $\quad\quad E = 2.070$ »

Par la suite, la théorie a été appliquée à l'acier de construction au silicium comme il a été indiqué dans le rapport du congrès de Vienne (1928), intitulé : « Le dimensionnement au flambage des barres comprimées par des forces axiales

et excentrées ». Les courbes théoriques pour $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$ ont été déterminées à l'aide d'une méthode d'approximation. Pour les barres élancées où la tension au flambage $\sigma_k \leqslant \sigma_p$, les courbes de l'acier de construction sont valables du fait que les coefficients d'élasticité sont les mêmes ; pour l'élancement $\frac{l}{i} = 35$, la valeur de la tension de flambage augmente proportionnellement aux limites d'écoulement σ_f.

Les valeurs intermédiaires sont déterminées par interpolation (fig. 8).

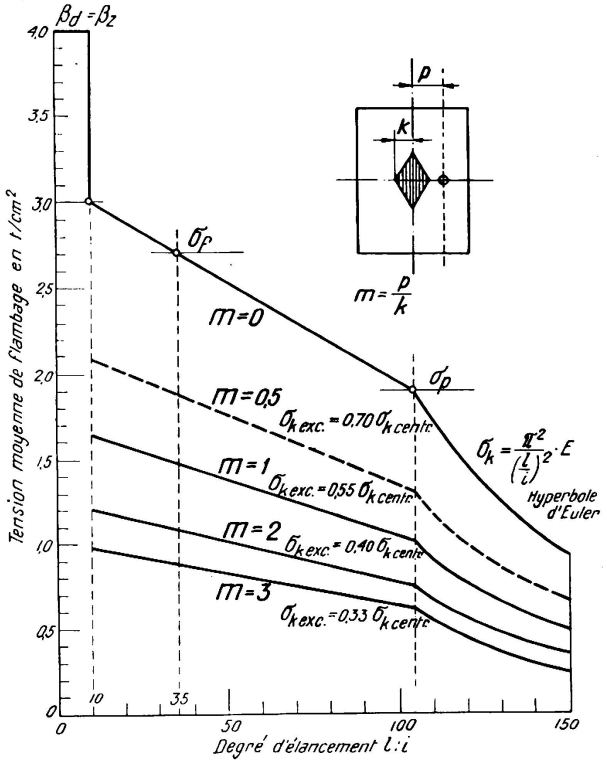


Fig. 7.

Acier de construction. Lignes approximatives des tensions de flambage.
Degrés d'excentricité $m = 0$ 0,5 1,0 2,0 et 3,0.

Baustahl. Angenäherte Knickspannungslinien. Exzentrizitätsmasse m.

Structural steel. Approximate buckling tension-lines. Degrees of eccentricity, m.

* * *

Le procédé suivant, convenant très bien en pratique, donne une approximation plus grossière mais qui fournit des valeurs utilisables pour les sortes d'aciers les plus différentes : l'hyperbole d'Euler est valable pour $\sigma_k \leqslant \sigma_p$; on relie par une droite le point σ_p au point σ_f dont l'ordonnée est reportée pour l'élancement $\frac{l}{i} = 35$. Cette droite est valable, dans le sens de l'élancement décroissant, jusqu'à $\frac{l}{i} = 10$ $\left(\frac{l}{a} \sim 3\right)$. Pour des élancements plus faibles on trace une horizontale d'ordonnée $\beta_z = \beta_d$ (fig. 7).

En partant des courbes théoriques σ_k (fig. 6) pour le flambage par compression excentrée, on peut calculer, avec une exactitude largement suffisante en pratique, les lignes σ_k pour le flambage par compression excentrée en appliquant les coefficients de réduction suivants :

pour $m = \frac{p}{k} = 0{,}5$: $\sigma_{k\,exc.} = 0{,}70\ \sigma_{k\,centr.}$

$m = 1$: » $= 0{,}55$ »

$m = 2$: » $= 0{,}40$ »

$m = 3$: » $= 0{,}33$ »

(fig. 7).

* * *

En vue de la rédaction du présent rapport pour le Congrès des ponts et charpentes de 1932 à Paris, on a appliqué, pendant les années 1929 à 1931, la

théorie du flambage par compression axiale et excentrée aux matériaux de construction les plus différents en se basant sur leurs diagrammes tensions-déformations ; en outre, on a exécuté de nombreux contrôles expérimentaux. Les essais exécutés au Laboratoire Fédéral d'Essai des Matériaux comprenaient l'examen de

barres à âme pleine
- en acier de construction à haute résistance (Ac 52) ;
- en tubes d'acier pour avions ;
- en fonte grise ;
- en métaux légers ;
- en bois de construction et
- en béton armé

de barres à châssis en acier au silicium et de
barres à treillis en acier de construction.

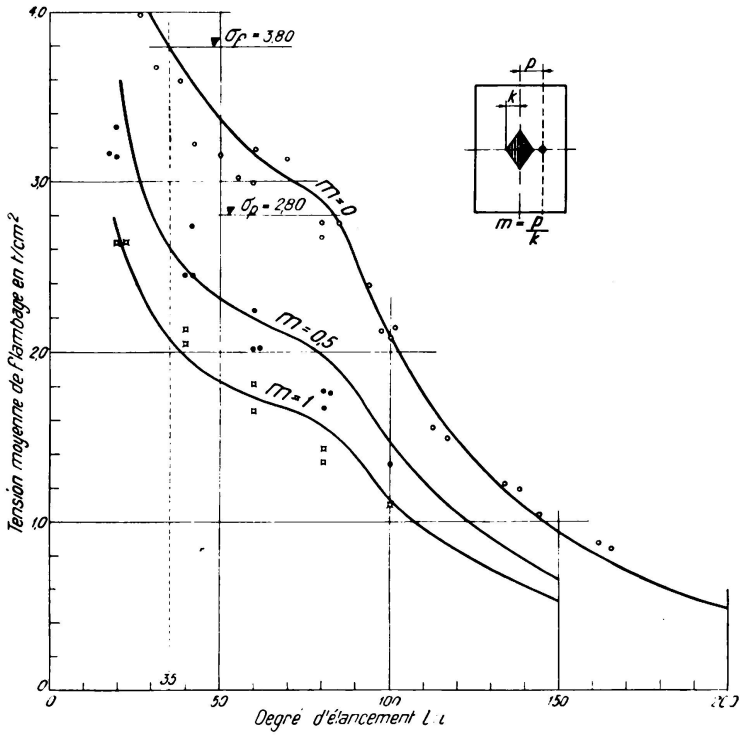


Fig. 8.

Acier de construction au silicium. Courbes théoriques de flambage pour charges centrées et excentrées. Valeurs d'essais. Degrés d'excentricité $m = 0$ 0,5 et 1,0.

Siliziumstahl. Theoretische Knickspannungskurven. Versuchswerte. Exzentrizitätsmasse m.

Structural silicon steel. Theoretical buckling curves for central and eccentric loads. Test values. Degrees of eccentricity, m.

Toutes les barres étaient articulées aux deux bouts de façon à être mobiles dans la direction du plus petit rayon de giration, respectivement de l'excentricité. Le centrage et la mise en place excentrique ont été mis au point géométriquement ; les positions furent ensuite vérifiées et corrigées à l'aide de mesures de tensions.

3) Acier de construction à haute résistance (Ac 52).

Valeurs de résistance caractérisant le matériau

$\sigma_p = 2{,}9$ t./cm² $\quad \sigma_f = 3{,}90$ t./cm²
$\beta_z = 5{,}8$ » $\quad E = 2.150$ »

Les essais ont été exécutés sur des barres prélevées sur des profils normaux I P N 20 et P N 30. La fig. 9 montre le diagramme compressions-raccourcissements, tandis que la fig. 10 représente graphiquement les lignes théoriques de tensions au flambage et les valeurs d'essai pour $m = 0$ (compression centrée) et $m = 1$ (compression excentrée, agissant sur le périmètre du noyau central). Les résultats d'essais et les courbes théoriques des tensions de flambage présentent une très bonne concordance.

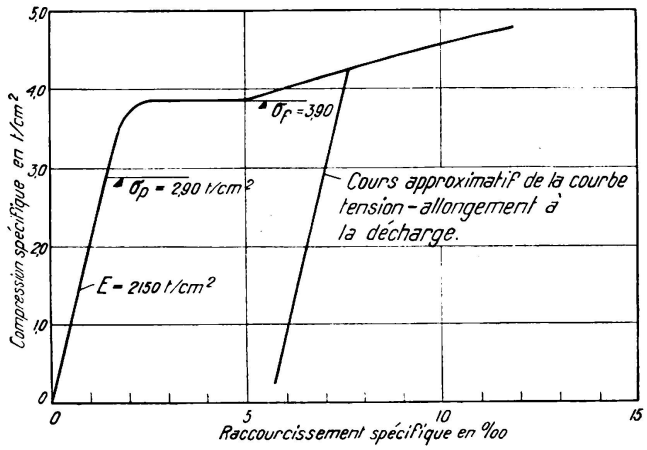


Fig. 9.

Diagramme tension-déformation pour l'acier de construction à hautes résistances. (AC.52).
Spannungs-Dehnungs-Diagramm für hochwertigen Baustahl. (St. 52).
Tension-deformation diagram for high grade structural steel. (St. 52).

4) Tubes en acier pour avions.

Valeurs de résistance caractérisant le matériau :

tubes à l'état de livraison	$\sigma_p = 1{,}50$ t./cm²	$\sigma_f = 3{,}9$ t./cm²
	$\beta_z = 5{,}20$ »	$E = 1.890$ »
tubes après traitement thermique	$\sigma_p = 4{,}37$ »	$\sigma_f = 5{,}2$ »
	$\beta_z = 5{,}50$ »	$E = 1.940$ »

Les essais furent exécutés avec des tubes d'acier étirés, à l'état de livraison et après un traitement thermique approprié. La fig. 11 représente les diagrammes caractéristiques tension-déformation.

Les tubes à l'état de livraison présentent, par rapport à l'acier de construction une limite de proportionnalité très basse ensuite du phénomène de Bauschinger dû à l'étirage

acier de construction	$\sigma_p = 1{,}90$ t./cm²
tubes à l'état de livraison	$\sigma_p = 1{,}50$ »

Par contre, la limite d'écoulement $\sigma_f = 3{,}90$ t./cm² est plus élevée que celle de l'acier de construction $\sigma_f = 2{,}70$ t./cm². Conformément à ces valeurs d'essai, les points sont groupés plus ou moins près de la courbe du T. K. V. S. B. pour l'acier de construction, tracée là à titre de comparaison.

Grâce au traitement thermique des tubes on a élevé la limite de proportionnalité jusqu'à 4,37 t./cm² et la limite d'écoulement jusqu'à 5,20 t./cm². En reportant les valeurs d'essais jusqu'à cette haute limite de proportionnalité, on

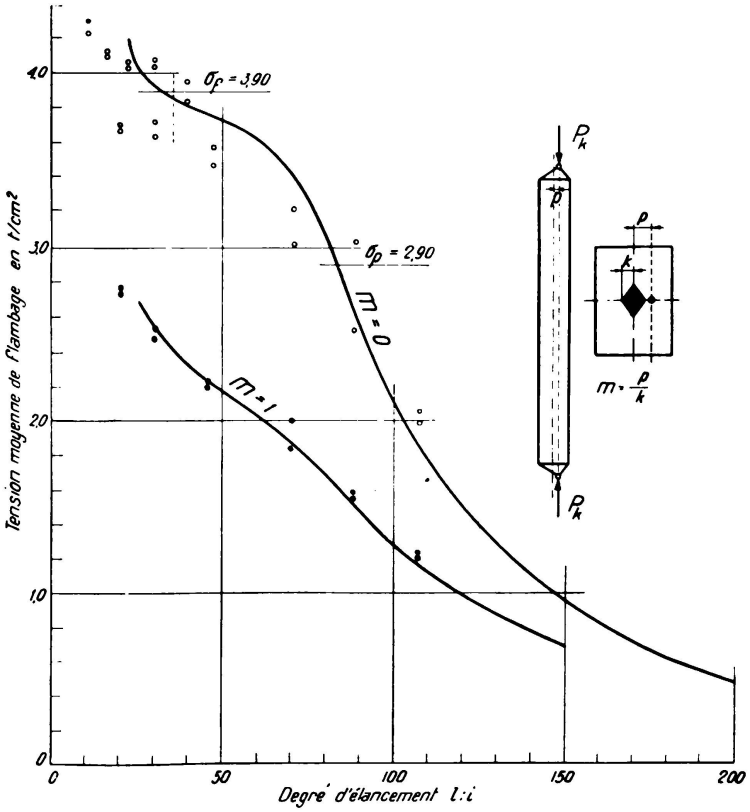


Fig. 10.

Acier de construction à hautes résistances (AC. 52). Courbes théoriques de flambage pour charges centrées et excentrées. Valeurs d'essais. Degrés d'excentricité : $m = 0$ et $m = 1$.

Hochwertiger Baustahl (St. 52). Theoretische Knickspannungslinien, Versuchswerte, Exzentrizitätsgrade m.

High grade structural steel (St. 52). Theoretical buckling curves for central and eccentric loads. Test values. Degrees of eccentricity m.

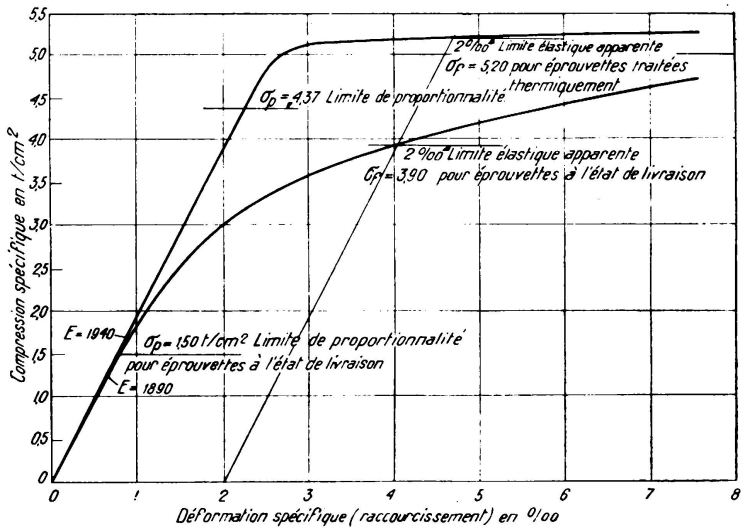
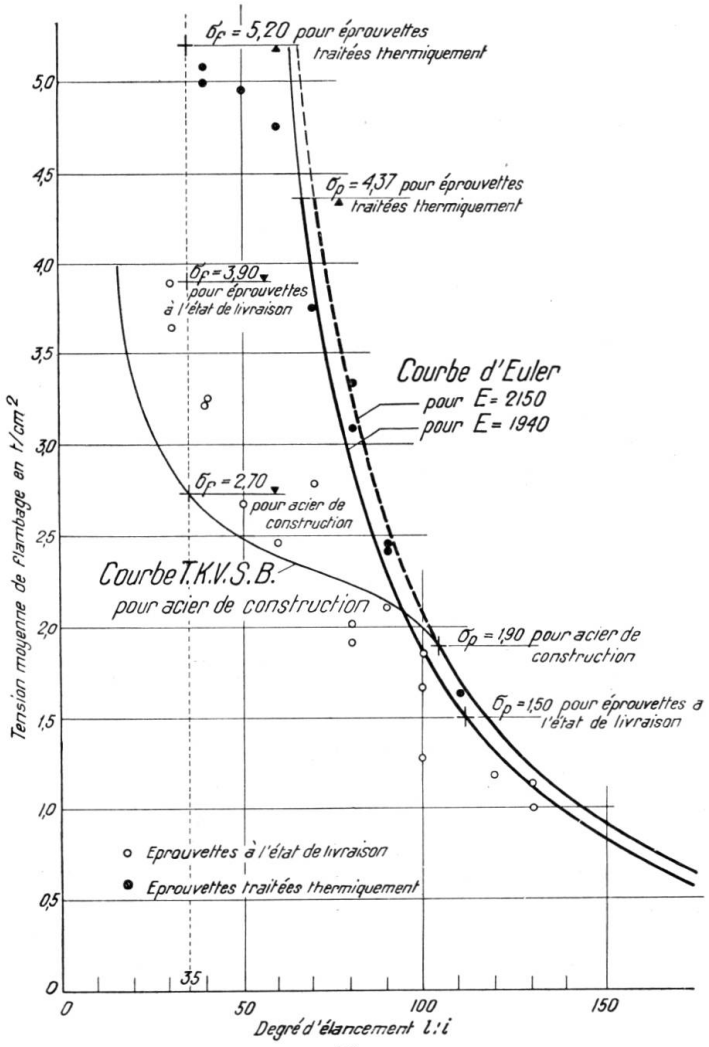


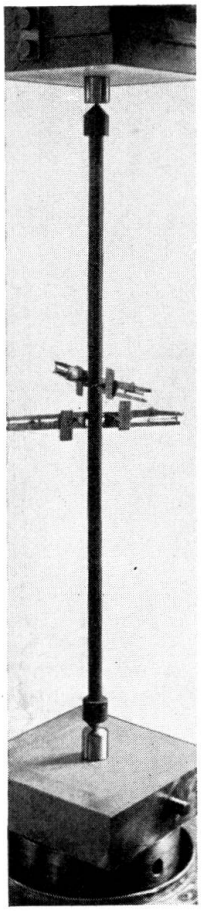
Fig. 11.

Diagrammes tension-déformation pour les tubes en acier.
Spannungs-Dehnungs-Diagramme für Stahlrohre.
Tension-deformation diagrams for steel tubes.

s'aperçoit que les points ne s'éloignent guère de l'hyperbole d'Euler et qu'ils tendent vers la limite d'écoulement lorsqu'on atteint $\frac{l}{i} = 35$ (fig. 12 et 13).



12



13

Fig. 12.

Essais de tubes en acier :
a) Eprouvettes à l'état de livraison ; *b*) Eprouvettes traitées thermiquement.
Courbes dessinées : Courbe d'Euler et courbes T.K.V.S.B. pour acier de construction.

Versuche mit Stahlrohren :
a) Stäbe im Anlieferungszustand ; *b*) Stäbe thermisch behandelt.
Gezeichnete Kurven : Eulerkurve und T.K.V.S.B. Kurven für Baustahl.

Steel tube tests :
a) Specimens as received ; *b*) Specimens thermally treated.
Curves drawn : Euler curve and T.K.V.S.B. curves for structural steel.

Fig. 13.

Essai de flambage sur un tube en acier. Distance entre les appuis-pointes 122 cm. Diamètre extérieur 2,8 cm. Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 130$.

Knickversuch mit Stahlrohr. Spitzenentfernung, Aussendurchmesser, Schlankheitsgrad $\frac{l}{i}$.

Buckling test on a steel tube. Distance beetween bearing points. Outside diameter. Rate of slenderness $\frac{l}{i}$.

5) Fonte grise.

La fonte grise utilisée avait les valeurs de résistance suivantes :

$\beta_z = 2{,}10$ t./cm²
$\beta_d = 8{,}80$ »
$\beta_b = 4{,}70$ »
$E = 1.250$ t./cm²

Les essais furent exécutés sur des barres de section rectangulaire dont le diagramme tension-déformation est représenté sur la fig. 14. On peut remarquer

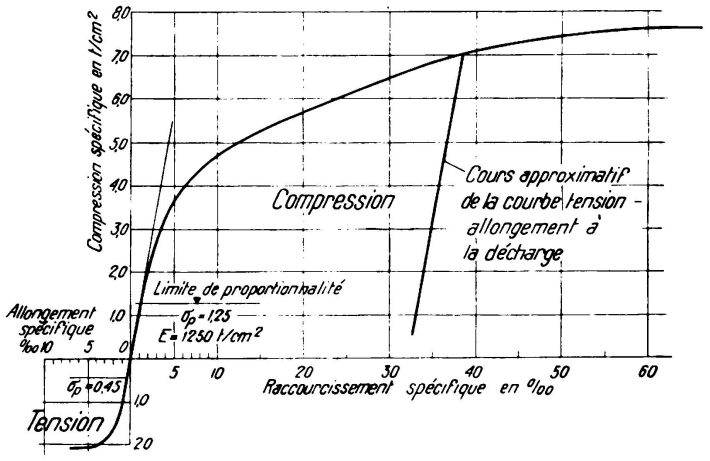


Fig. 14.
Diagramme tension-déformation pour la fonte grise.
Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Gusseisen.
Tension-deformation curve for grey cast iron.

que pour la fonte, le diagramme tension-allongement présente des valeurs très différentes de celles du diagramme compression-raccourcissement, tandis que pour tous les autres métaux examinés, ces deux diagrammes peuvent être considérés comme semblables dans la zone qui entre en considération. Cette particularité se répercute aussi sur la forme des lignes théoriques des tensions au flambage. Les valeurs d'essais pour $m = 0$ (compression centrée) ; $m = 1$ (point d'application de la force au bord du noyau) ; $m = 3$ (point d'application de la force à une distance égale à 3 fois la grandeur du noyau), sont groupées aux abords immédiats de la ligne théorique des tensions (fig. 15 et 16).

6) Métaux légers.

Duraluminium, avional et anticorodal.

Valeurs de résistances caractérisant les matériaux :

Duraluminium et avional

$\sigma_p = 1{,}80$ t./cm²
$E = 730$ »
$\beta_z = 4{,}20$ t./cm²

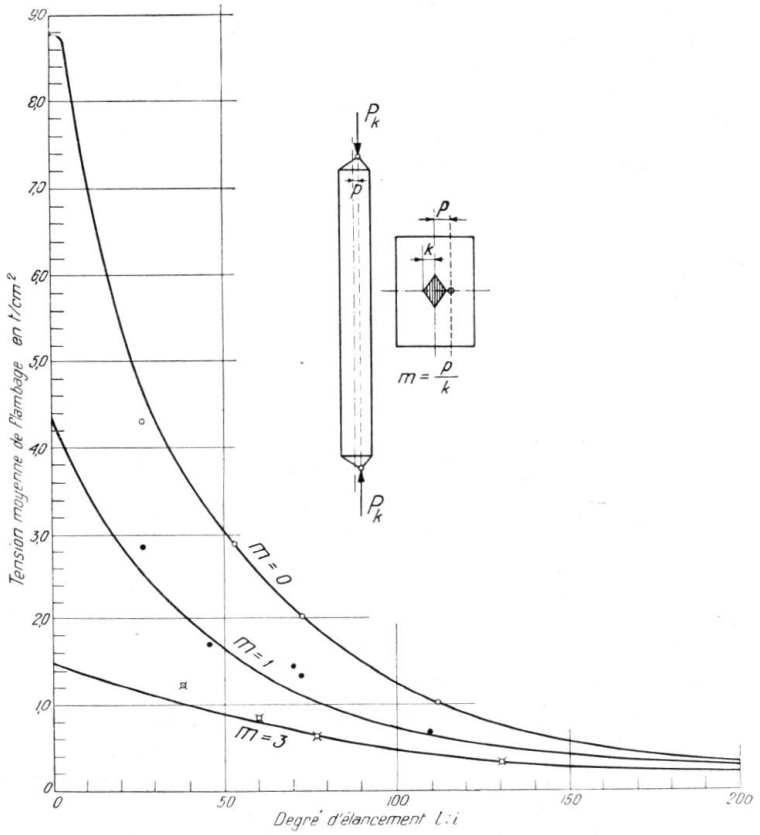
Anticorodal

$\sigma_p = 2{,}1$ t./cm²
$\beta_z = 4{,}30$ t./cm²

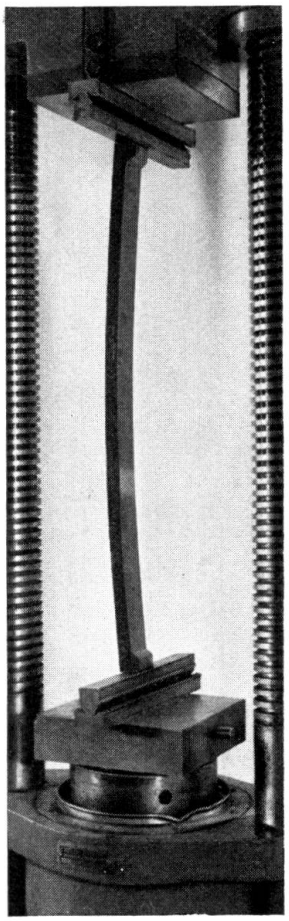
On a exécuté un grand nombre d'essais sur des barres de section rectangulaire et de section circulaire ainsi que sur des tuyaux. Les diagrammes ten-

sion-déformation pour le duraluminium et l'avional ne présentent que des différences peu importantes, tandis que les valeurs pour l'anticorodal sont un peu plus élevées (fig. 17).

La longueur des barres destinées aux essais de flambage varie de 140 à 2.040 mm., leur diamètre extérieur de 10 à 86 mm. et l'épaisseur de leur paroi de 1 à 4 mm.



15



16

Fig. 15.

Fonte grise. Courbes théoriques de flambage pour charges centrées et excentrées. Valeurs d'essais. Degrés d'excentricité : $m = 0$ 1,0 et 3,0.

Gusseisen. Theoretische Knickspannungslinien, Versuchswerte. Exzentrizitätsmasse m.

Grey cast iron. Theoretical buckling curves for central and eccentric loads. Test values. Degrees of eccentricity m.

Fig. 16.

Essai de flambage sur une barre de fonte grise. Distance entre les appuis à couteau 105 cm. Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 132$, degré d'excentricité $m = 3$.

Knickversuch mit einem Gusseisenstab. Spitzenentfernung, Schlankheitsgrad $\frac{l}{i}$. Exzentrizitätsmass m.

Buckling test on a grey cast iron bar. Distance between knife-edge supports. Rate of slenderness. Degree of eccentricity, m.

La fig. 18 représente graphiquement la ligne théorique des tensions de flambage pour la compression axiale ainsi que les valeurs d'essais correspondantes.

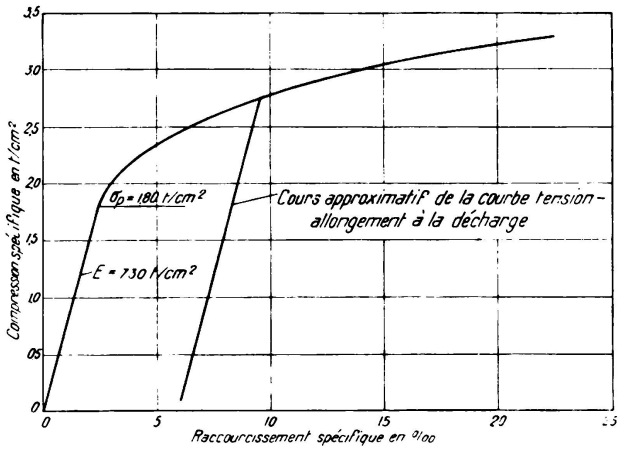


Fig. 17.
Diagramme tension-déformation pour métaux légers.
Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Leichtmetalle.
Tension-deformation diagram for light metals.

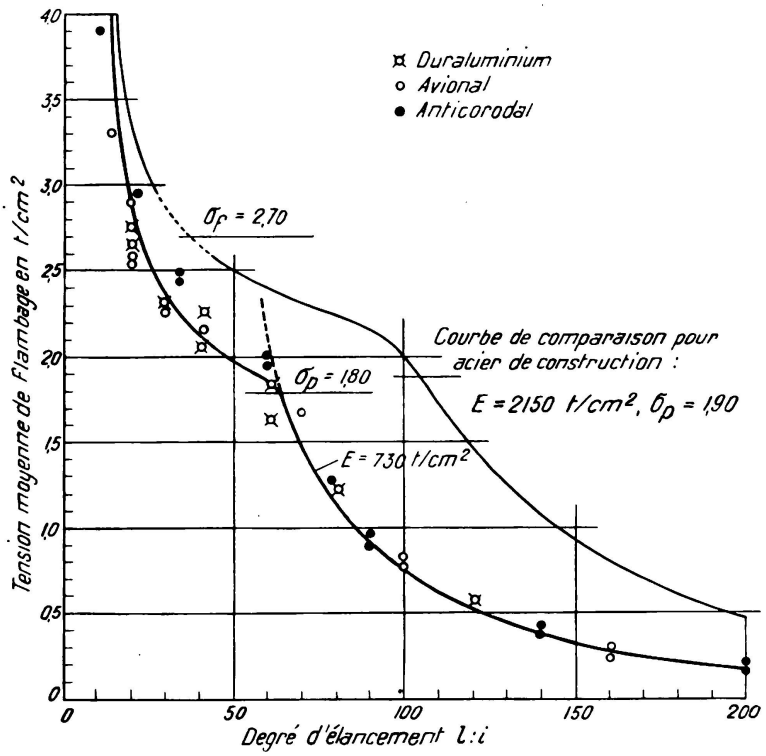
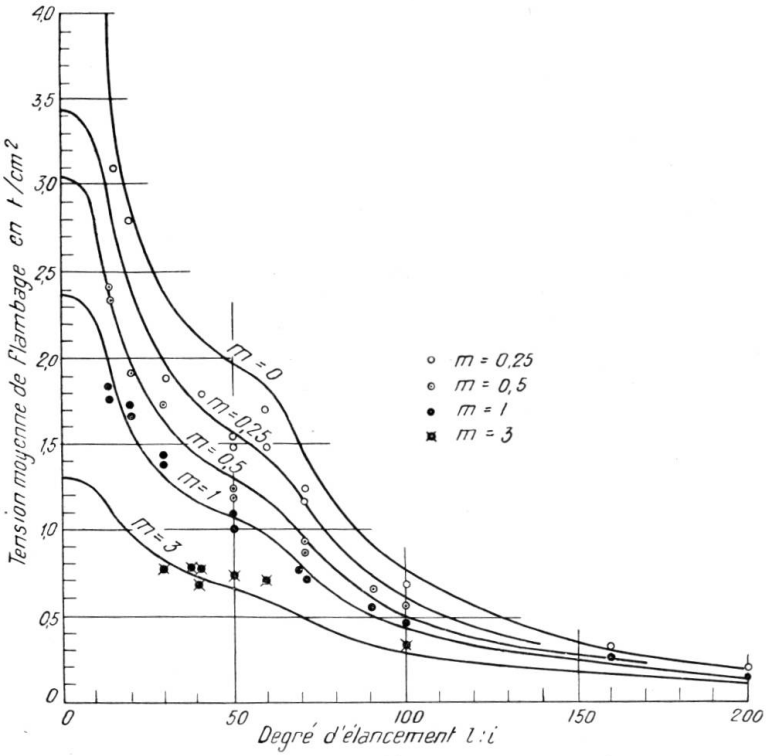


Fig. 18.
Métaux légers. Courbes théoriques de flambage pour charge centrée. Valeurs d'essais.
Leichtmetalle. Theoretische Knickspannungskurven für zentrische Last. Versuchswerte.
Light metals. Theoretical buckling curves for central load. Test values.

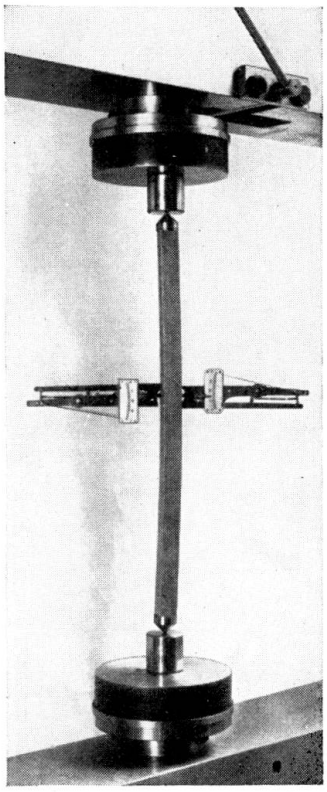
Les 22 valeurs d'essai des barres de duraluminium et d'avional sont très proches de la ligne théorique des tensions de flambage. Par contre, les 14 valeurs d'essai pour les barres d'anticorodal sont situées, dans la zone plastique, un peu

plus haut, conformément au diagramme compression-raccourcissement déterminé pour ce matériau.

Relativement à la ligne des tensions de flambage, on peut remarquer les particularités suivantes : jusqu'à la tension de flambage $\sigma_k = \sigma_p$ (en moyenne 1,80 t./cm²), on obtient une ligne correspondant à l'hyperbole d'Euler mais



19



20

Fig. 19.

Métaux légers. Courbes théoriques pour charges excentrées. Valeurs d'essais. Degrés d'excentricité $m = 0{,}25$ 0.5 1,0 et 3,0.

Leichtmetalle. Theoretische Knickspannungskurven für exzentrische Last. Versuchswerte. Exzentrizitätsmasse.

Light metals. Theoretical buckling curves for eccentric loads. Test values. Rates of eccentricity m.

Fig. 20.

Essai de flambage sur une barre d'anticorodal à section carrée de 2 cm. d'arête. Distance entre les appuis-pointes 46 cm. Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 80$. Charge de flambage P = 5,0 t.

Knickversuch mit einen Anticorodalstab. Viereckiger Querschnitt Spitzenentfernung, Schlankheitsgrad, Knicklast.

Buckling test on an « anticorodal » bar, 2 cm square. Distance between bearing points. Rate of slenderness. Buckling load.

tracée en se basant sur un coefficient d'élasticité de 730 t./cm². De ce fait, la force de flambage des barres dont l'élancement $\frac{l}{i} > 100$ est environ 3 fois plus faible que celle des barres d'acier de construction, de qualité normale, pour

lesquels $E = 2.150$ t./cm^2; lorsque l'élancement s'abaisse, la courbe des tensions de flambage des métaux légers se rapproche de celle de l'acier de construction et atteint presque cette dernière lorsque l'élancement est très faible.

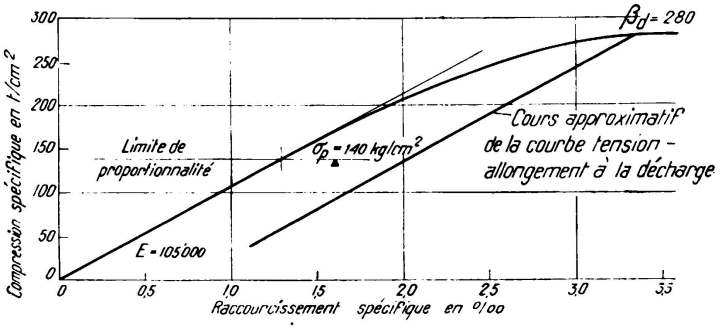


Fig. 21.
Diagramme tension-déformation pour le bois de construction.
Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Bauholz.
Tensi n-deformation diagram for timber.

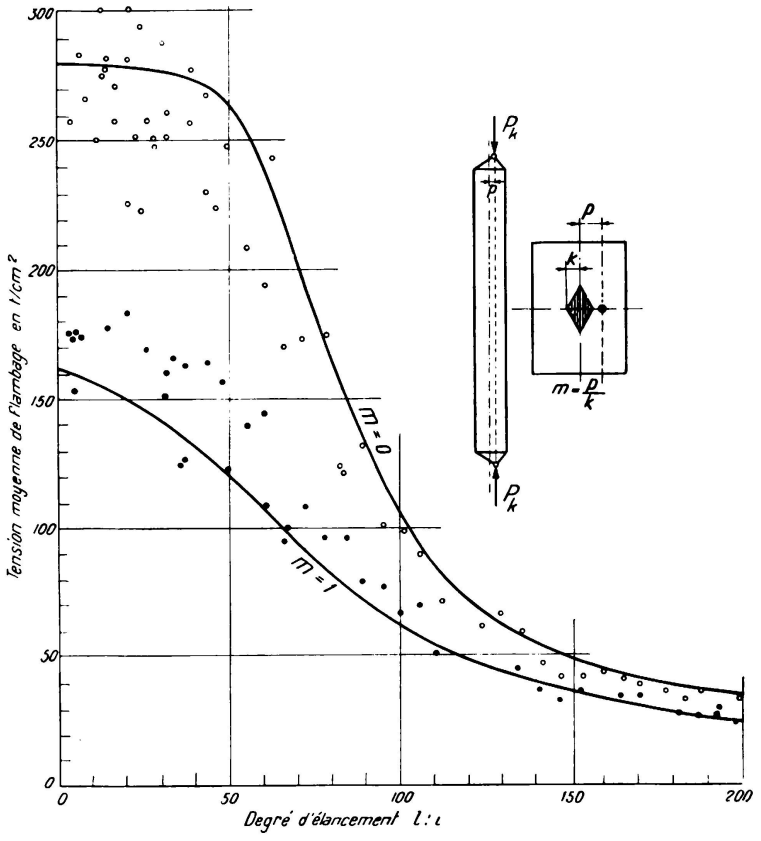


Fig. 22.
Bois de construction. Courbes théoriques de flambage pour charges centrées et excentrées.
Valeurs d'essais. Degré d'excentricité $m = 0$ et $m = 1$.
Bauholz. Theoretische Knickspannungskurven. Versuchswerte. Exzentrizitätsmasse m.
Timber. Theoretical buckling curves for central and eccentric loads.
Test values. Degrees of eccentricity m.

On a exécuté, en outre, un grand nombre d'essais avec les excentricités suivantes : $m = 0{,}25$, $0{,}5$, $1{,}0$ et $3{,}0$. Les courbes théoriques ont été établies par

approximation en réduisant les valeurs trouvées pour le flambage par force centrée. On a utilisé pour la réduction les rapports déterminés à l'aide des courbes pour l'acier de construction. Les résultats d'essai montrent que ces facteurs de réduction permettent de déterminer aussi pour les métaux légers, des valeurs parfaitement utilisables en pratique (fig. 19 et 20).

7) Bois de construction (sapin blanc).

Valeurs de résistance caractérisant le matériau :

$\sigma_p = 140$ kg./cm^2 $\qquad$ $\beta_d = 280$ kg./cm^2
$\beta_z = 600$ $\qquad$ $\beta_b = 450$ »
$E_d = 105.000$ kg./cm^2.

Il était aisé de concevoir l'application de la théorie développée ci-dessus au calcul du bois de construction. Dans ce but on a exécuté environ 90 essais de flambage sur des poutres de bois, toutes prélevées d'un seul gros tronc afin qu'elles soient de même qualité. La fig. 21 représente le diagramme compression-raccourcissement, la fig. 22 la ligne théorique des tensions de flambage ainsi que les valeurs d'essais pour $m = 0$ et $m = 1$.

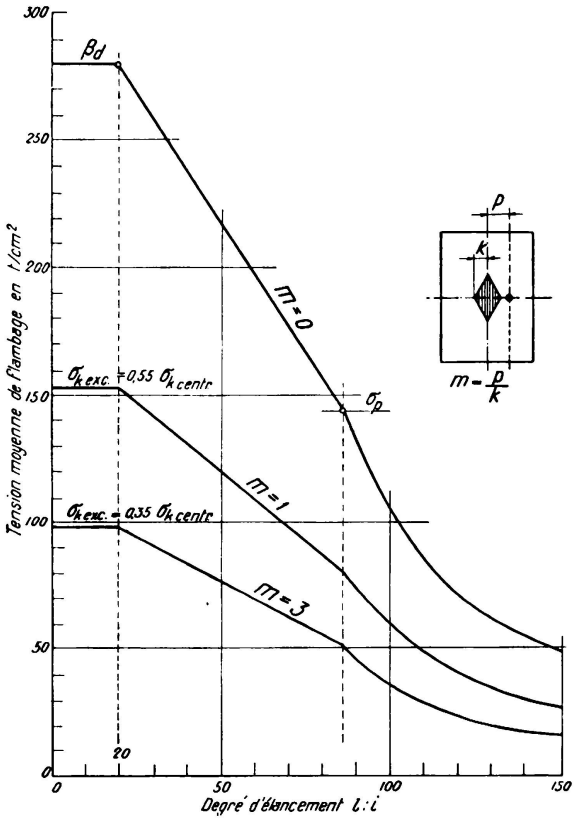


Fig. 23.
Bois de construction. Lignes approximatives de tension de flambage. Degré d'excentricité $m = 0$ 1,0 et 3,0.
Tauholz. Angenäherte Knickspannungslinien, Exzentrizitätsmasse.
Timber. Approximate buckling tension lines. Degrees of eccentricity m.

Pour le calcul de la résistance au flambage des bois de construction dont on connaît la résistance à la compression des prismes debout $_p\beta_d$, la limite de proportionnalité σ_p et le coefficient d'élasticité E (valable jusqu'à σ_p), on peut utiliser la méthode d'approximation suivante qui fournit des valeurs satisfaisantes pour les tensions de flambage.

Tant que la tension de flambage σ_k ne dépasse pas la limite de proportionnalité σ_p, l'hyperbole d'Euler est valable

$$\sigma_k = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \cdot E.$$

A partir de la limite de proportionnalité σ_p, la ligne des tensions de flambage se réduit à une droite qui relie le point σ_p au point β_d dont l'ordonnée est reportée pour l'élancement $\frac{l}{i} = 20 \left(\frac{l}{b} = 6\right)$. Le choix d'un élancement critique $\frac{l}{i} = 20$ est justifié du fait que les poutres de bois plus trapues n'accusent aucune différence sensible de la résistance à la compression β_d (fig. 23).

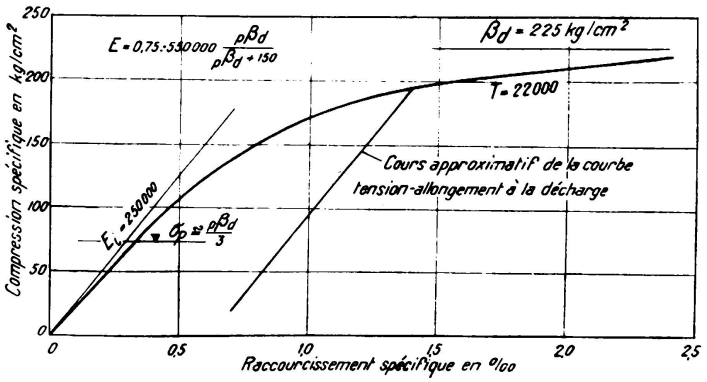


Fig. 24.
Diagramme tension-déformation pour le béton.
Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Beton.
Tension-deformation diagram for concrete.

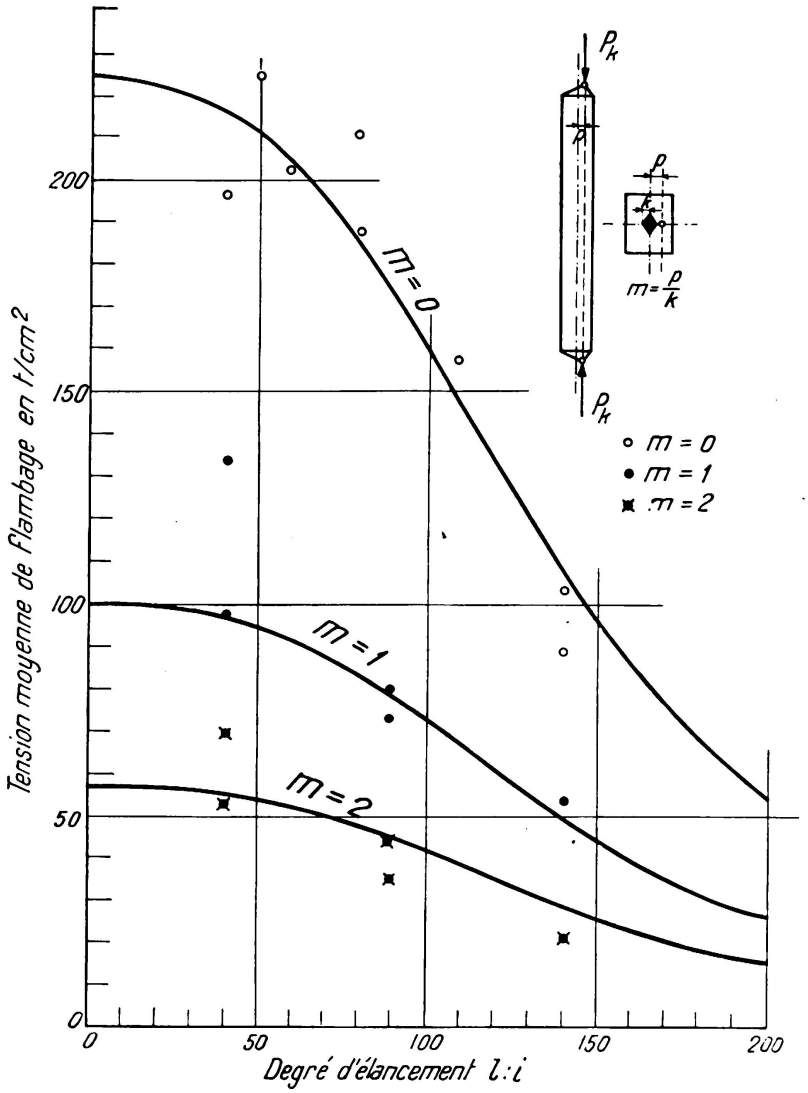


Fig. 25.
Courbes théoriques de flambage du béton armé.
Résistance à la compression sur prisme $_p\beta_d = 225$ kg/cm², Pourcentage d'armature 1 °/₀.
Theoretische Knickspannungslinien für armierten Beton.
Prismendruckfestigkeit — Armierungsgrad.
Theoretical buckling curves for reinforced concrete. Crushing strength on prism.
Percentage of reinforcement.

C'est dans le domaine intéressant spécialement la pratique, c'est-à-dire dans le cas de barres trapues ou d'élancement moyen $\left(\frac{l}{i} < 100\right)$, que la chute des tensions pour le flambage par compression centrée, par suite de l'excentricité du point d'application, est la plus considérable. Elle est en moyenne de 45 °/₀ pour $m = 1$ et de 65 °/₀ pour $m = 3$. Les relations suivantes assurent une exactitude suffisante pour le calcul des constructions dans le cas de flambage par compression excentrée :

pour $m = 1$ $\quad \sigma_{k\ excentr.} = 0{,}55\ \sigma_{k\ axial}$
pour $m = 3$ $\quad \sigma_{k\ excentr.} = 0{,}35\ \sigma_{k\ axial.}$ (fig. 23).

Pour les barres très élancées $\left(\frac{l}{i} > 100\right)$, l'influence de l'excentricité devient de plus en plus faible (fig. 23).

8) Béton armé.

Chiffres caractérisant la composition et la résistance du béton :
dosage en ciment 300 kg./m³, consistance plastique ($H_20 = 7{,}5$ °/₀) ;
résistance des prismes debout à la compression ${}_p\beta_d = 225$ kg./cm² ;
$E_{el} = 330.000$ kg./cm² ;
pourcentage d'armature ~ 1 °/₀.

La figure 24 représente le diagramme compression-raccourcissement, tandis que la fig. 25 donne une image des courbes théoriques de tension au flambage pour

$m = 0$, compression axiale ;
$m = 1$, point d'application de la force sur le périmètre du noyau ;
$m = 2$, point d'application de la force à une distance de deux fois la grandeur du noyau.

Les 18 valeurs d'essais sont aussi reportées sur la fig. 25 après réduction effectuée en admettant une seule résistance à la compression des prismes debout ${}_p\beta_d = 225$ kg./cm². La concordance entre les valeurs théoriques et expérimentales est très satisfaisante.

Il apparaît nettement que l'excentricité du point d'application de la force, dépendant aussi du pourcentage d'armature, diminue de façon très sensible la stabilité au flambage.

La méthode suivante est à conseiller en pratique pour l'établissement des lignes de tensions de flambage.

La formule d'Euler reste valable pour les élancements où la tension au centre de gravité ne dépasse pas $\sigma = \frac{{}_p\beta_d}{3} \sim \sigma_p$ (à peu près la limite de proportionnalité)

$$\sigma_k = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \cdot E.$$

Si la détermination du coefficient d'élasticité n'a pas lieu expérimentale-

ment, on peut en calculer la valeur, avec une exactitude suffisante, à l'aide de la relation

$$E_{kg./cm^2} = 0{,}75 \times 550.000. \frac{{}_p\beta_d}{{}_p\beta_d + 150}$$

Le coefficient 0,75 a pour but de tenir compte des déformations permanentes qui apparaissent, même si la tension à la compression ne dépasse pas $\frac{{}_p\beta_d}{3}$.

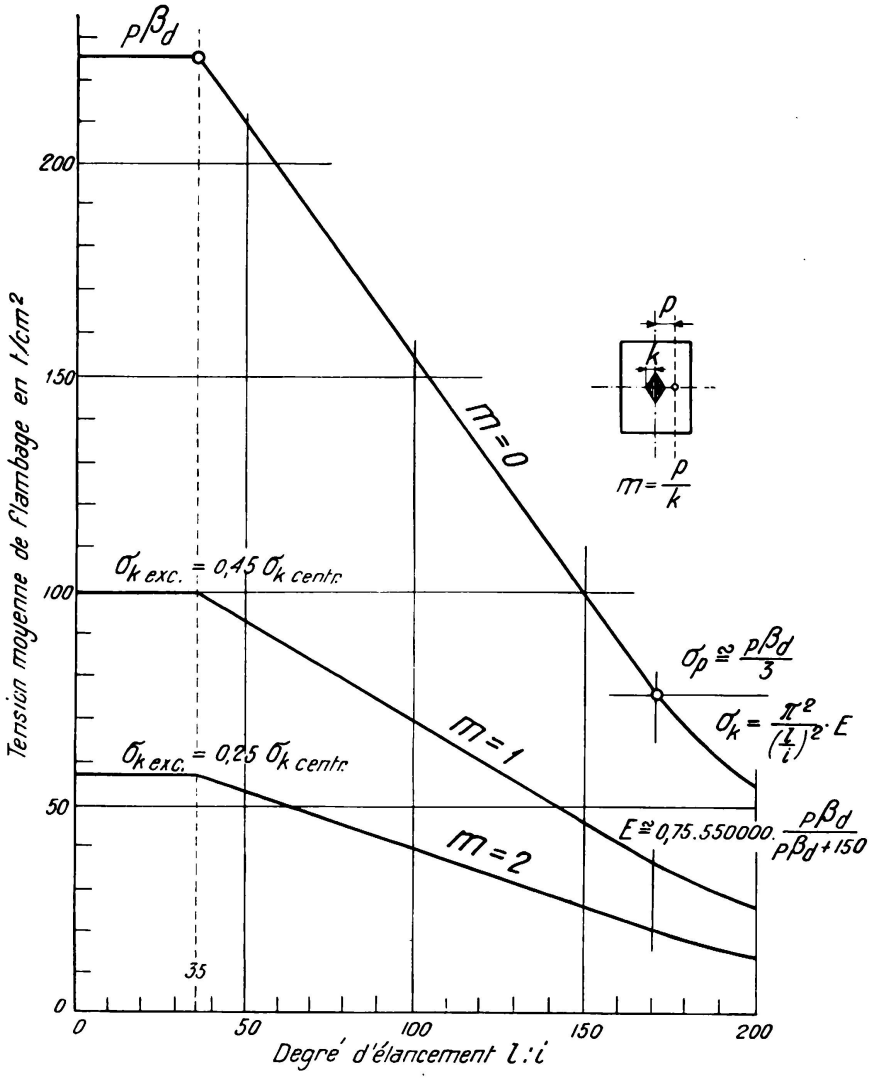


Fig. 26.

Béton armé. Lignes approximatives de tension de flambage. Degré d'excentricité $m = 0$ 1,0 et 2,0.
Armierter Beton. Angenäherte Knickspannungslinien. Exzentrizitätsmasse.
Reinforced concrete. Approximate buckling tension lines. Degrees of eccentricity, m.

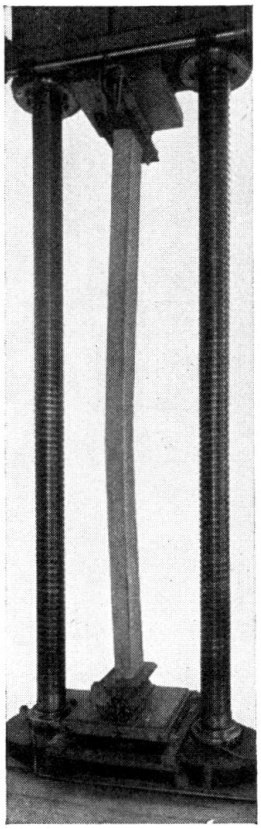
Le point répondant à l'ordonnée σ_p $\left(\sigma_p \sim \frac{{}_p\beta_d}{3}\right)$ est relié par une droite à un second point dont l'ordonnée est ${}_p\beta_d$ et l'abscisse $\frac{l}{i} = 35$ (correspondant à $\frac{l}{a} = 10$).

Si l'élancement $\frac{l}{i}$ est plus petit que 35, la résistance à la compression des prismes debout ${}_{p}\beta_{d}$ est valable.

Si on a des forces excentrées parallèles à l'axe de la barre, on réduit les lignes σ_k pour la compression axiale dans les proportions suivantes :

excentricité $m = 1$ $\sigma_{k\ excentr.} = 0{,}45\ \sigma_{k\ axial}$

$m = 2$ $\sigma_{k\ excentr.} = 0{,}25\ \sigma_{k\ axial}$ (fig. 26, 27, 28 et 29).



27

28

Fig. 27.

Essai de flambage sur une barre de béton armé. Distance entre les appuis à couteau 3,30 m. Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 114$, degré d'excentricité $m = 0$.

Knickversuch mit armiertem Betonbalken. Schneidenentfernung. Schlankheitsgrad, Exzentrizitätsmasse $m = 0$.

Buckling test on a reinforced concrete bar. Distance between knife-edge supports. Slenderness ratio, degree of eccentricity.

Fig. 28.

Essai de flambage sur une barre de béton armé. Distance entre les appuis à couteau 6,60 m. Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 142$, degré d'excentricité $m = 1$.

Knickversuch mit armiertem Betonbalken. Schneidenentfernung, Schlankheitsgrad, Exzentrizitätsmass.

Buckling test on a reinforced concrete bar. Distance between knife-edge supports. Slenderness ratio, degree of eccentricity.

IV. Flambage dans le cas d'une charge transversale invariable agissant au milieu de la barre.

Les éléments de construction ayant à supporter, en plus d'une charge axiale de flambage, une force latérale agissant en leur milieu ont des rapports communs avec les barres sollicitées par des forces excentrées, aussi bien au point de vue théorique (calcul) qu'au point de vue pratique (construction).

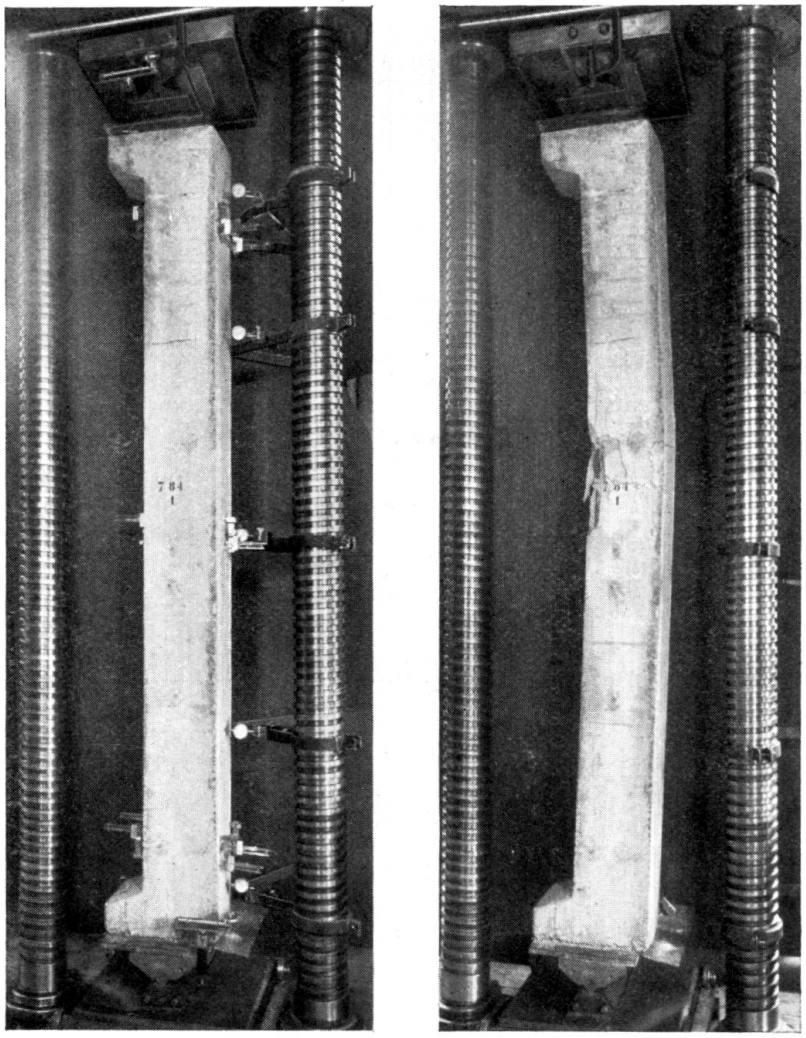


Fig. 29.

Essai de flambage sur une barre de béton armé. Distance entre les appuis à couteau 3,00 m. Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 42$. Degré d'excentricité $m = 1$.

Knickversuch mit armiertem Betonbalken. Schneidenentfernung, Schlankheitsgrad, Exzentrizitätsmass.

Buckling test on a reinforced concrete bar. Distance between knife-edge supports, Slenderness ratio, degree of eccentricity.

Notre rapport, présenté au Congrès de Vienne, contient un tableau graphique calculé pour l'acier de construction et vérifié expérimentalement. Ce graphique permet de lire immédiatement les valeurs déterminantes des

charges de flambage avec force latérale, en pourcent des charges de flambage sans force latérale (fig. 30).

D'une façon générale on peut déterminer la charge portante au flambage des barres, chargées transversalement en leur milieu par une force H, à l'aide du graphique établi pour les barres comprimées par des charges excentrées (fig. 6). Cette manière de faire, tout en ne donnant que des valeurs approximatives, présente une exactitude suffisante dans la plupart des cas pratiques.

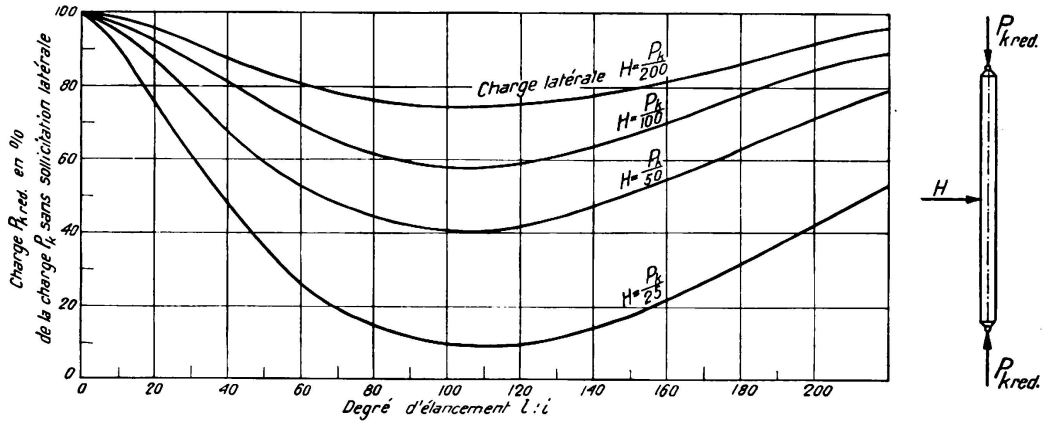


Fig. 30.

Courbes représentant la diminution de la force de flambage par suite d'une charge transversale: Acier de construction voir fig. 6.

Kurven der Knickkraft-Abminderung durch Seitenlast. Baustahl.

Curves showing decrease in buckling strength owing to a transverse load. Structural steel.

L'excentricité (p) du point d'application de la force est donnée par la relation

$$p = \frac{M}{P_{k\,red}} = \frac{H\,\frac{l}{4}}{P_{k\,red}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Par tâtonnements on recherche, pour un élancement déterminé, la concordance entre $P_{k\,red}$ et $m = \frac{p}{k}$. De cette manière il est possible de déterminer la diminution de la charge au flambage des barres comprimées axialement et sollicitées latéralement par rapport à la charge au flambage des barres comprimées axialement, mais sans sollicitation transversale.

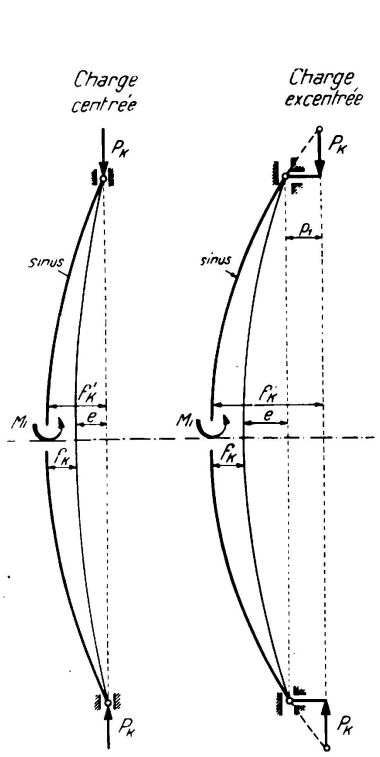
La même méthode d'approximation est applicable aux barres comprimées par une charge excentrée, parallèle à l'axe de la barre et sollicitée simultanément par une force transversale agissant en son milieu.

V. Flambage des barres à axe de courbure continue.

Tout en étant certain d'une exactitude suffisante, on peut traiter et calculer les barres courbes, sans tension initiale, comme des barres comprimées par une charge parallèle à l'axe de celles-ci. On introduit dans le calcul l'excentricité $p = e$, respect. $p = e + p_1$ (fig. 31).

VI. Flambage dans le cas où le point d'application de la force est excentrique et la direction du flambage perpendiculaire au plan de la force.

Supposons une barre comprimée par une force excentrique située sur un des axes principaux de la section. La force portante subira une diminution, non seulement dans cette direction de flambage, mais encore dans la direction de flambage perpendiculaire au plan de la force si certains éléments de la section



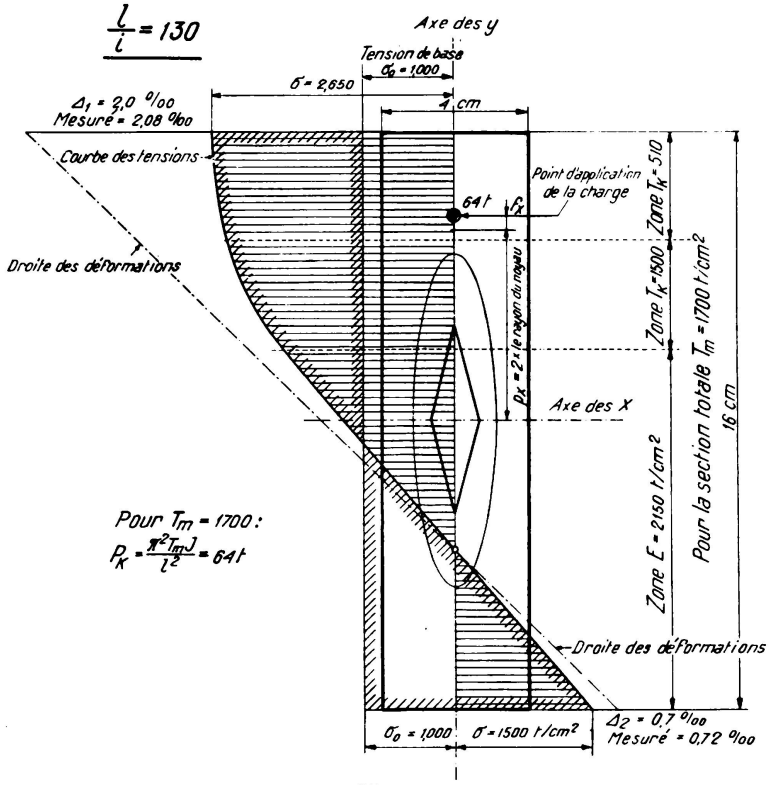


Fig. 31.
Barres d'axe courbe. — Stäbe mit gekrümmter Achse. — Bars with curved axis.

Fig. 32.
Flambage sous charge excentrée, direction du flambage perpendiculaire au plan de la charge. Répartition des tensions pour la charge de flambage évaluée à $P_K = 64\ t.$; charge déterminée au moyen du module $T_K = 1700$: $P_K = 64\ t.$ (Conforme à l'évaluation.) charge de flambage mesurée (essai) $P_K = 60\ t.$
Knicken bei exzentrischem Lastangriff, Knickrichtung winkelrecht zur Lastebene. Spannungsverteilung für die geschätzte Last, gemessene Knicklast.
Buckling under eccentric load; direction of buckling perpendicular to load plane. Distribution of tensions for buckling load estimated; buckling load measured at tests.

sont sollicités au-dessus de la limite de proportionnalité par le moment dû à l'excentricité initiale et à la flèche. Le module de flambage de ces zones subit de ce fait une diminution.

La détermination de la force de flambage se fait à l'aide de la répartition effective des tensions dans la section flambée. La fig. 32 représente une répartition semblable des tensions et la variation du module de flambage dans les différentes zones. Le tableau I qui suit rassemble les valeurs des forces de flambage obtenues lors d'une série d'essais dans lesquels le flambage a toujours eu lieu perpendiculairement à la direction de l'excentricité.

Tableau 1.

Flambage perpendiculaire au plan de la force. Section : rectangle de 40 × 160 mm.

Forces de flambage							
élancement $\frac{l}{i} = 65$				élancement $\frac{l}{i} = 130$			
$m_x = 0$	$m_x = 1$	$m_x = 2$	$m_x = 3$	$m_x = 0$	$m_x = 1$	$m_x = 2$	$m_x = 3$
132 t	102	75	—	83 t	—	60	51

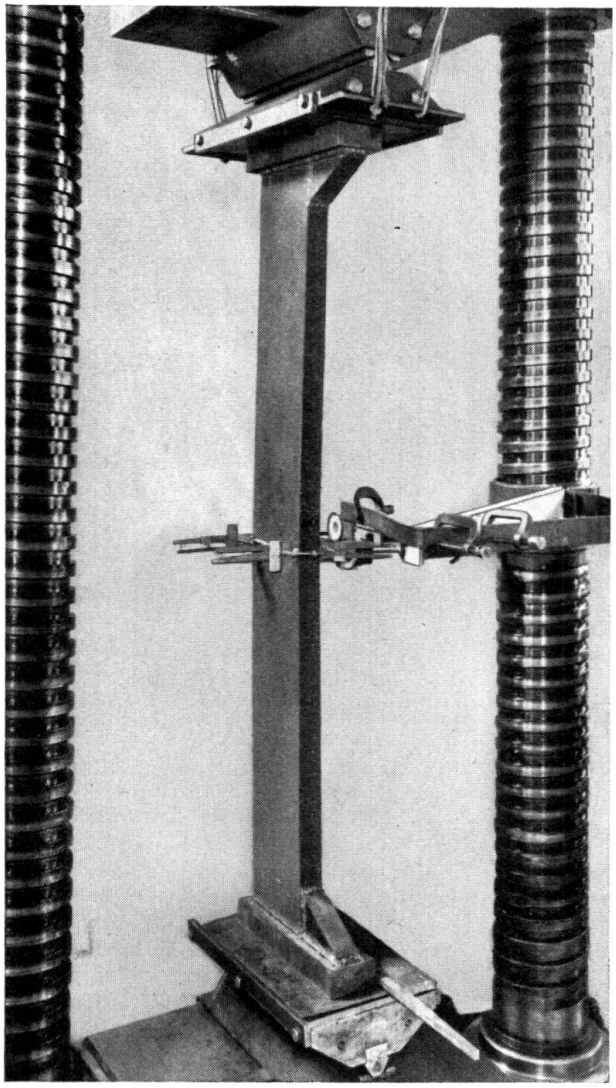
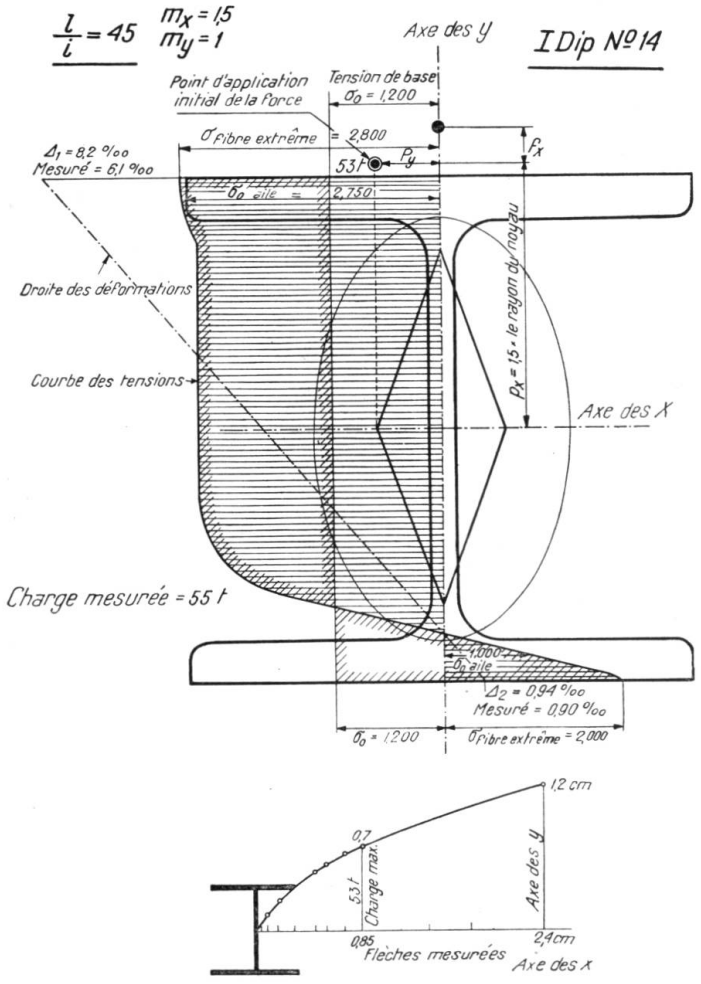


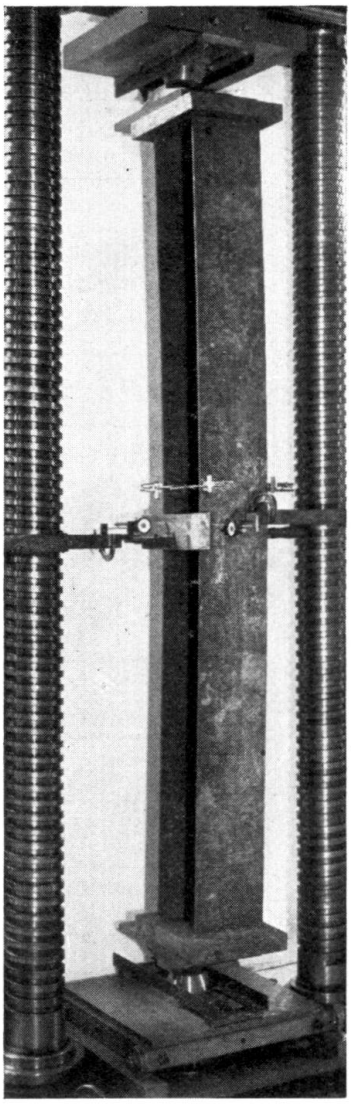
Fig. 33.
Essai de flambage sur une barre rectangulaire 16 × 4 cm.
Distance entre les appuis à couteau 1,52 m $\frac{l}{i_y} = 130$, $m_x = 2$, $m_y = 0$.
Knickversuch mit Rechteckeisen. Schneidenentfernung, Schlankheitsgrad, Exzentrizitätsmass.
Buckling test on rectangular bar. Distance between knifeedge supports, Slenderness ratio, degree of eccentricity.

VII. Flambage dans le cas où le point d'application de la force est excentrique par rapport aux deux axes principaux.

Lorsqu'une barre est comprimée excentriquement par rapport aux deux axes principaux, il n'est pas admissible d'examiner d'abord sa sécurité au flam-



34



35

Fig. 34.

Flambage sous charge excentrée par rapport aux 2 axes principaux. Répartition des tensions pour la charge de flambage évaluée : $P_K = 53\ t$. Charge de flambage mesurée (essai) $P_K = 55\ t$.

Knicken bei nach beiden Hauptachsen exzentrischem Lastangriff. Spannungsverteilung für die geschätzte Last, gemessene Last.

Buckling under eccentric load with reference to the two main axes. Distribution of tensions for buckling load estimated. Buckling load mesured at test.

Fig. 35.

Essai de flambage sur un I Diff. N° 22. Distance entre les appuis-pointes 2,38 m

$$\frac{l}{i} = 50,\ m_x = 1,\ m_y = 1.$$

Knickversuch mit I Diff. N° 22. Schneidenentfernung, Schlankeitsgrad, Exzentrizitätsmass.

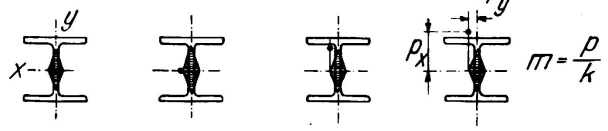
Buckling test on a I Diff. N° 22. Distance between knife-edge supports. Slenderness ratio, degree of eccentricity.

bage par rapport à un des axes puis ensuite par rapport à l'autre, du fait que les deux excentricités s'influencent réciproquement.

Lors des essais, le flambage s'est produit essentiellement dans la direction perpendiculaire à l'axe y. La force de flambage est, d'autre part, influencée

Tableau 2.

Flambage dans le cas où le point d'application de la force est excentrique par rapport aux deux axes principaux.

Noyaux et points d'application de la charge				
Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 45$				
Excentricité	$m_x = 0$ $m_y = 0$	$m_x = 0$ $m_y = 1$	$m_x = 1$ $m_y = 1$	$m_x = 1{,}5$ $m_y = 1$
Force au flambage mesurée. I Dip. N° 14	120	79	63	55 t
Tension de flambage moyenne	2,72	1,78	1,43	1,25 t/cm²
%	100	66	52	46
Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 50$				
Excentricité	$m_x = 0$ $m_y = 0$	$m_x = 0$ $m_y = 1$	$m_x = 1$ $m_y = 1$	$m_x = 1{,}5$ $m_y = 1$
Force au flambage mesurée. I. Diff. N° 22	203	117	100	88
Tension de flambage moyenne	2,50	1,44	1,21	1,07
%	100	57	49	43
Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 60$				
Excentricité	$m_x = 0$ $m_y = 0$	$m_x = 0$ $m_y = 1$	$m_x = 1$ $m_y = 1$	$m_x = 1{,}5$ $m_y = 1$
Force au flambage mesurée. I Diff. N° 18	140	84	73	64
Tension de flambage moyenne	2,35	1,40	1,22	1,06
%	100	60	52	46
Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 80$				
Excentricité	$m_x = 0$ $m_y = 0$	$m_x = 0$ $m_y = 1$	$m_x = 1$ $m_y = 1$	$m_x = 1{,}5$ $m_y = 1$
Force au flambage mesurée. I Dip. N° 14	94	58	47	43
Tension de flambage moyenne	2,13	1,31	1,06	0,97
%	100	61	50	46

aussi par l'excentricité dans la direction de l'axe des x lorsque certains éléments de la section sont sollicités en dessus de la limite de proportionnalité. Le matériau possède donc dans ces zones un autre module de flambage. On peut voir sur la fig. 34 la répartition d'une de ces tensions dans un profil en I. Par tâtonnements on détermine la stabilité.

Le tableau 2 résume les résultats au flambage, obtenus avec des barres à I, dont les élancements atteignaient 45, 50, 60 et 80, c'est-à-dire appartenaient au domaine intéressant spécialement la pratique. Le tableau donne les valeurs des tensions au flambage par charges axiales ainsi que la diminution produite par trois excentricités différentes. Cette diminution est aussi notée en % de telle façon qu'on peut, par interpolation, déterminer des valeurs directement utilisables dans les bureaux de construction, en tenant compte d'un coefficient de sécurité n.

VIII. Profils asymétriques. Influence de la forme de la section.

La tension de flambage est, avant tout, fonction de l'élancement $\frac{l}{i}$. Dans les cas extrêmes, il peut cependant arriver qu'il faille exécuter des calculs précis, c'est alors que la théorie, aussi bien que les essais, montrent clairement que la forme de la section, quoique n'étant pas déterminante, joue cependant un rôle (fig. 36).

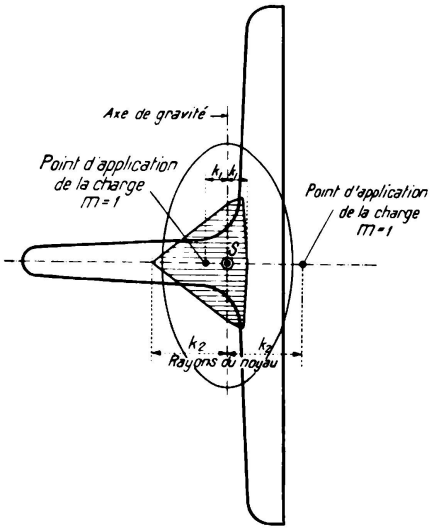


Fig. 36.

Noyau, rayons du noyau et ellipse d'inertie. Points d'application de la charge correspondant aux rayons inversés du noyau.

Kern, Kernweiten und Trägheitsellipse. Druckmittelpunkte mit den verschränkt gemessenen Kernweiten.

Core, core radii and inertia ellipse. Points of application of load corresponding to inversed core radii.

La fig. 37 représente les essais avec des poutrelles à T. Sous une charge axiale, le fer à T flambe du côté de la semelle avec une tension de flambage plus faible qu'un profil rectangulaire de même élancement. Si on oblige la poutrelle à flamber du côté de l'âme, on remarque au contraire que la tension de flambage est plus élevée que celle du profil rectangulaire.

Si la charge est excentrée — $m = 0{,}5$ et $m = 1$ — il est à noter qu'on doit déterminer l'excentricité relative, c'est-à-dire le degré d'excentricité m, à l'aide du rayon du noyau inversé (rayon opposé au point d'application de la force). Les résultats sont reportés sur la fig. 37 ; ils permettent de se rendre compte qu'il y a bonne concordance entre théorie et essais.

On a observé que les charges au flambage des profils symétriques en forme de I sont un peu plus faibles que celles des profils rectangulaires ; cette différence est sans grande importance au point de vue pratique.

IX. Calcul des barres à treillis et à châssis.

Pour calculer les assemblages des barres comprimées — diagonales, montants, tôles de liaison — il faut connaître la grandeur de l'effort tranchant au flambage. Cette dernière est donnée par la formule

$$Q_{max} = P_k . f_k . \frac{\pi}{l} . \qquad (8)$$

Q_{max} dépend donc de la valeur du fléchissement f_k qu'on introduit dans la formule. Dans le cas d'une charge centrée, le fléchissement f_k est théoriq

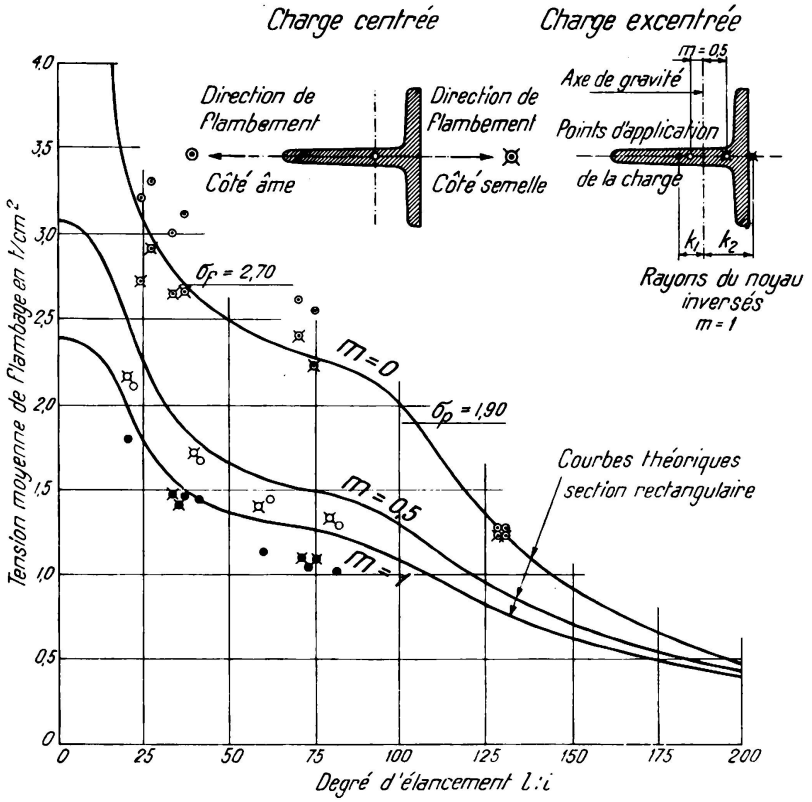


Fig. 37.

Influence de la forme de la section. Profils dissymétriques. Essais avec charges centrées, flambement : libre du côté de la semelle et contraint du côté de l'âme. Essais avec charges excentrées du côté de l'âme et du côté de la semelle. Degrés d'excentricité $m = 0,5$ et $m = 1,0$.

Einfluss der Querschnittsform. Unsymetrische Profile. Versuche mit exzentrischer Last. Knickrichtungen : frei nach der Flanschseite und erzwungen nach der Stegseite. Versuche mit exzentrischer Last nach der Stegseite und nach der Flanschseite. Exzentricitätsmasse.

Influence of section shape. Unsymetrical profiles. Tests with central loads; buckling : free on the flange side and constrained on the web side. Tests with eccentric loads, both web and flange. Degrees of eccentricity.

ment égal à zéro. Si l'on admet par contre certaines excentricités p, on peut recourir à la méthode du T.K.V.S.B. pour déterminer la flèche critique f_k de la force de flambage P_k.

En tenant compte de diverses excentricités, on forme les produits $P_k . f_k$, nécessaires à la détermination de l'effort tranchant. Lorsque l'excentricité croît, la force de flambage diminue et le fléchissement augmente ; on s'aperçoit qu'à

partir du degré d'excentricité $m = 0{,}25$, les produits $P_k \cdot f_k$ atteignent une valeur à peu près constante qui fournit le point d'appui désiré pour les calculs.

Pour rendre l'application de la méthode indépendante de la section, on divise l'expression, qui donne la valeur de l'effort tranchant, par la section F de la barre, de façon à obtenir le quotient

$$\frac{P_k \cdot f_k \cdot \pi}{l \cdot F} = \frac{Q}{F} . \qquad (9)$$

Si on reporte graphiquement ce quotient en fonction de l'excentricité et de l'élancement, on s'aperçoit qu'il ne varie pas beaucoup, même quand excentricité et élancement varient dans de larges limites (fig. 38).

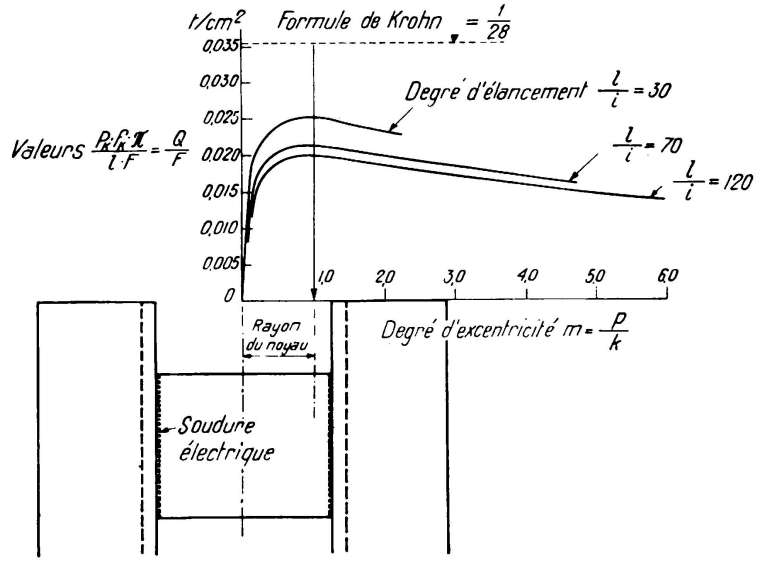


Fig. 38.

Valeurs $\frac{Q}{F}$ pour différents degrés d'élancement et d'excentricité. — Acier de construction.

Werte $\frac{Q}{F}$ für verschiedene Schlankheitsgrade und verschiedene Excentrizitäten — Baustahl.

$\frac{Q}{F}$ values for various slenderness ratios and degrees of eccentricity. Structural steel.

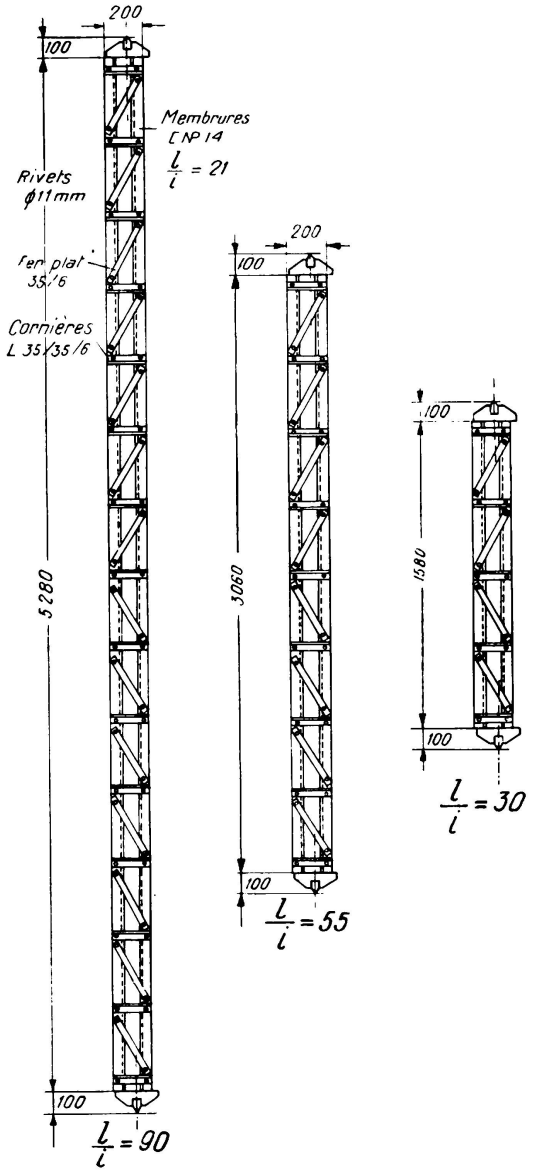
Si l'on reporte sur le graphique la valeur de la formule de Krohn $Q = \frac{F}{28}$, le quotient $\frac{Q}{F} = \frac{1}{28} = 0{,}035\ t/cm^2$ se trouve être une droite parallèle aux abscisses. Quoique la formule de Krohn donne des valeurs trop élevées et que les déductions sur lesquelles elle se base ne soient pas à l'abri de toute critique, elle touche le fond même du problème.

Une fois l'effort tranchant trouvé, on sait que la force de cisaillement pour une barre à âme pleine répond à la formule

$$T = \frac{Q \cdot S}{J} \cdot l$$

où l = longueur d'un panneau.

Supposons qu'on ait un profil à treillis composé de deux fers à **U** ; on peut poser pour la valeur $\frac{S}{J}$ le quotient $\frac{l}{h}$, dans lequel h représente la distance



Degré d'élancement l:i	90	55	30
Charge de flambage théorique m = 1	47 t	55 t	66 t
Charge de flambage mesurée m = 1	42,5	59,5	68,2
Flèche théorique	4,0 cm	1,95 cm	0,90 cm
Flèche mesurée	4,9	2,15	0,94
Tension théorique dans la diagonale extrême	0,73 t/cm²	0,80 t/cm²	0,90 t/cm²
Tension mesurée dans la diagonale extrême	0,60	0,65	0,65

Fig. 39

Barres à treillis. Degrés d'élancement $\frac{l}{i}$ = 30, 55 et 90.

Gitterstäbe. Schlankheitsgrade $\frac{l}{i}$. — Lattice bars. Rates of slenderness $\frac{l}{i}$.

des centres de gravité des deux profils. On obtient, après ce remplacement

$$T = Q. \frac{l}{h} .$$

L'effort dans une diagonale est donné par

$D = \frac{T}{\cos \alpha}$; α = angle que forme la diagonale avec la membrure.

Si la barre est assemblée par des tôles de liaison, l'effort de cisaillement T crée un moment

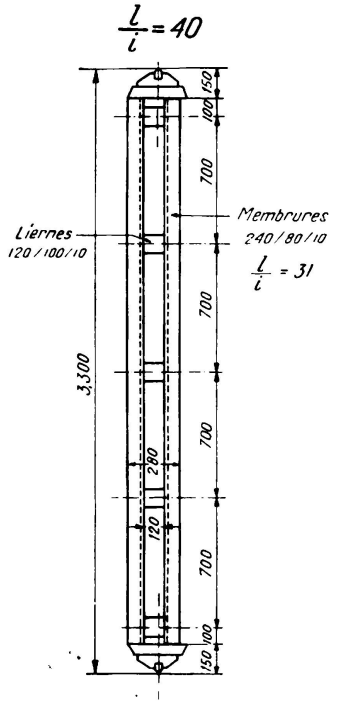
$M = T. \frac{h_0}{2}$; h_0 = écartement des rivets (resp. des lignes de soudures) des tôles de liaison.

Lors de ces calculs, on suppose que les membrures sont très rigides par rapport aux tôles de liaison, c'est-à-dire que les tôles sont maintenues parallèles le long de leur intersection avec les membrures.

Nous renvoyons à la fig. 3 pour l'examen détaillé de la détermination du fléchissement. Le graphique indique aussi la flèche critique f_k au point critique de stabilité.

Afin de pouvoir dessiner le graphique de la fig. 38, on a calculé comme indiqué ci-dessus les quotients $\frac{P_k . f_k . \pi}{l}$ pour un grand nombre d'élancements en tenant compte pour chacun d'eux d'excentricités variables. Pour l'acier de construction, la fig. 38 donne les valeurs $\frac{P_k . f_k . \pi}{l . F}$ de façon qu'il est possible sans autres indications de déterminer l'effort tranchant.

On peut consulter sur le tableau de la fig. 39 les résultats des mesures exécutées sur des barres à treillis en acier de construction. Les tensions mesurées sur les diagonales du treillis sont légèrement inférieures aux valeurs théoriques. Il faut remarquer à ce propos que montants et diagonales ne possèdent pas des nœuds articulés, parfaitement mobiles, même lorsque l'assemblage n'est assuré que par un seul rivet et que, d'autre part, les membrures des poutres sont continues. Il en résulte que l'ensemble agit un peu comme une série de cadres qui aide à répartir les efforts. En calculant selon la théorie développée ci-dessus, on obtient un treillis un peu plus léger que p. ex. en calculant suivant la formule de Krohn; toutefois les valeurs trouvées se rapprochent mieux de la réalité.



Acier de construction au silicium

m = 0,5 Charge de flambage théorique = 193 t

m = 0,5 Charge de flambage mesurée { 189 t / 177 t

Liernes extrêmes :

Tension théorique dans la fibre extrême = 1,35 t/cm²

Tension mesurée dans la fibre extrême (moyenne) = 1,50 t/cm²

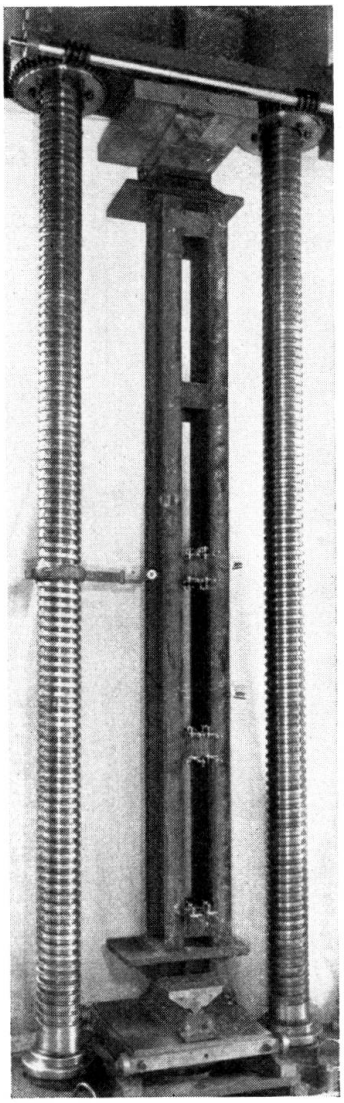
Fig. 40.

Barre à châssis. Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 40$.

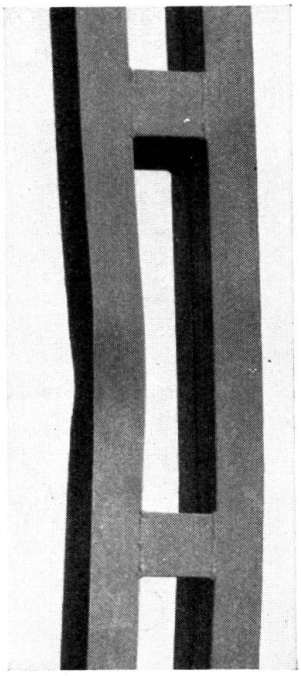
Rahmenstab. Schlankheitsgrad.

Frame bar. Slenderness ratio.

A propos du tableau de la fig. 40, nous faisons remarquer que les barres à châssis sont en acier au silicium avec tôles de liaison soudées électriquement. Par comparaison avec les valeurs théoriques, on s'aperçoit que les forces de flambage mesurées sont légèrement plus faibles, les tensions aux arêtes un peu plus élevées ; ceci s'explique du fait des forces additionnelles et des tensions dues à l'action des cadres. D'ailleurs les différences constatées sont sans importance pratique.



41

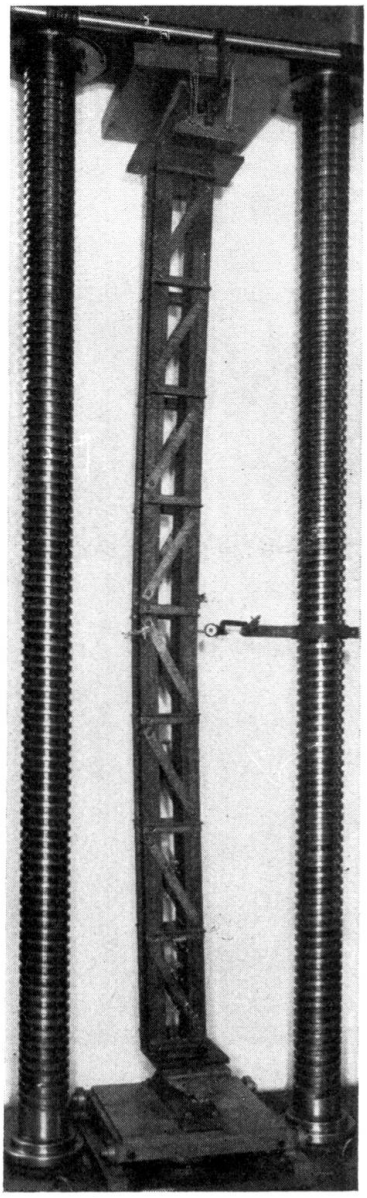


42

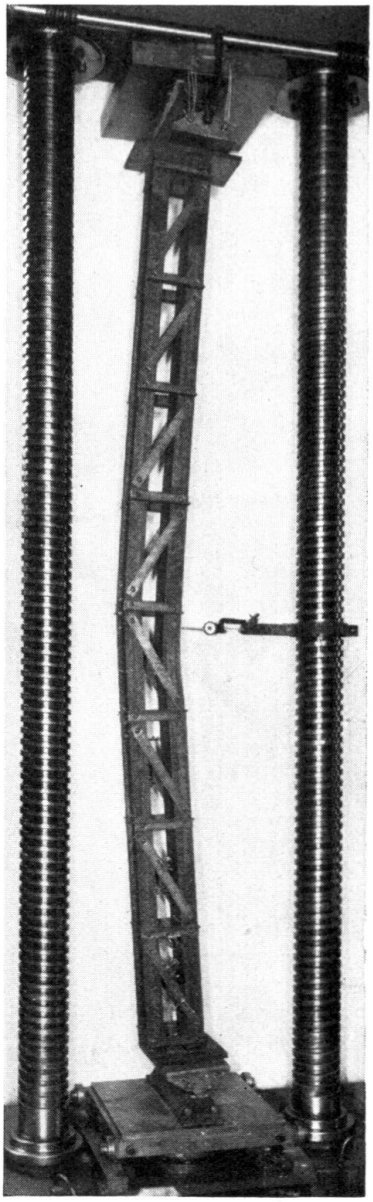
Fig. 41.
Essai de flambage sur une barre à châssis. Distance entre les appuis à couteau 3,30 m.
Degré de l'élancement $\frac{l}{i} = 40$; degré d'excentricité $m = 0{,}5$.
Knickversuch mit Rahmenstab. Schneidenentfernung, Schlankheitsgrad, Exzentrizitätsmass.
Buckling test on a frame bar. Distance between knife-edge supports ; slenderness ratio, degree of eccentricity.

Fig. 42.
Vue de détail de la barre flambée.
Einzelheit zum ausgeknickten Stab.
Illustration of a buckled bar.

La limite de proportionnalité de l'acier au silicium est plus élevée que celle de l'acier de construction. Les fléchissements correspondants à des charges



43



44

Fig. 43.

Essai de flambage sur une barre à treillis. Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 55$.

Première phase : Flambage de la barre entière.

Knickversuch mit Gitterstab. Erste Phase : Stab als Ganzes ausgeknickt. Schlankheitsgrad.

Buckling test on a lattice bar. Slenderness ratio. First phase : Buckling of whole bar.

Fig. 44.

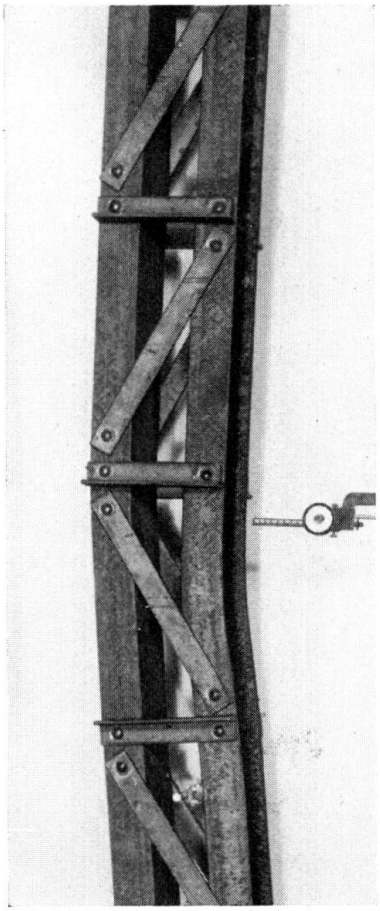
Essai de flambage sur une barre à treillis. Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 55$.

Deuxième phase : Flambage local de la membrure.

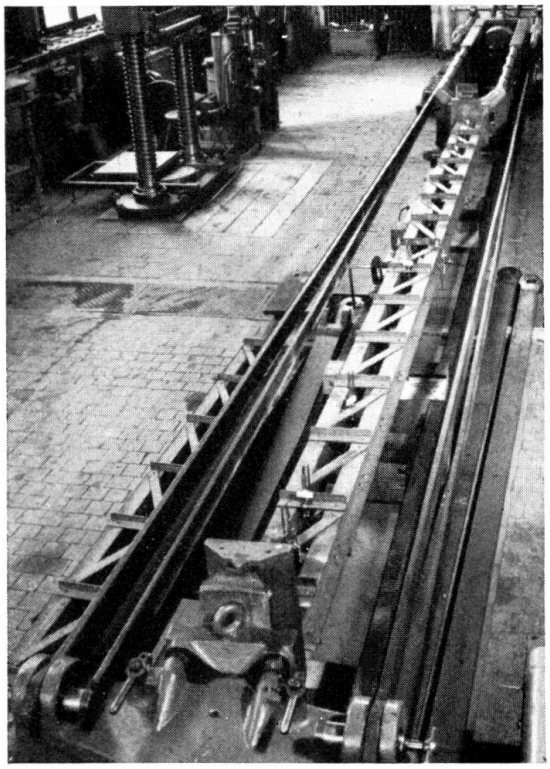
Knickversuch mit Gitterstab. Schlankheitsgrad. Zweite Phase : Gurtungsstab örtlich ausgeknickt.

Buckling test on a lattice bar. Slenderness ratio.
Second phase : Local buckling of the component parts.

$\sigma = \frac{P}{F} > \sigma_{p\ (\text{acier construct.})}$, sont plus petits que ceux de l'acier de construction ; par contre, la force portante au flambage est plus élevée. Les produits $\frac{P_k \cdot f_k}{l}$, déterminés pour l'acier de construction, sont aussi, comme les essais le montrent, valables approximativement pour ces dernières barres.



45



46

Fig. 45.
Vue de détail de la barre flambée.
Einzelheit zum ausgeknickten Stab.
Illustration of a buckled bar.

Fig. 46.
Essai de flambage sur une barre à treillis, disposée horizontalement.
Distance entre les appuis à couteau = 5,48 m. Degré d'élancement $\frac{l}{i} = 90$,
degré d'excentricité $m = 1$.
Knickversuch mit Gitterträger, waagrecht gelagert. Schneidenentfernung, Schlankheitsgrad, Exzentrizitätsmass.
Buckling test on a lattice bar, placed horizontally. Distance between knife-edge supports, slenderness ratio, degree of eccentricity.

Les barres à treillis et à châssis qui furent examinées avaient été dimensionnées de telle sorte que, théoriquement, elles devaient flamber comme une barre simple et non localement, ce qui est d'ailleurs arrivé lors des essais.

Ce n'est qu'après avoir atteint la charge de flambage, lorsque la barre composée continue de fléchir, que la membrure la plus sollicitée, située du côté concave, a flambé dans le sens du moment d'inertie minimum. Le processus de flambage des barres à treillis est représenté sur les fig. 43-46, celui des barres à châssis sur les fig. 41 et 42.

Résumé.

A. Sommaire.

I. Suppositions.
II. Processus du flambage.
III. Compression centrée et excentrée :
1) acier de construction ;
2) acier de construction au silicium ;
3) acier de construction à haute résistance (Ac 52) ;
4) tubes d'acier pour avions ;
5) fonte grise ;
6) métaux légers (duraluminium, avional, anticorodal) ;
7) bois de construction ;
8) béton armé.
IV. Flambage dans le cas d'une charge transversale invariable agissant au milieu de la barre.
V. Flambage des barres à axe de courbure continue.
VI. Flambage dans le cas où le point d'application de la force est excentrique et la direction du flambage perpendiculaire au plan de la force.
VII. Flambage dans le cas où le point d'application de la force est excentrique par rapport aux deux axes principaux.
VIII. Profils asymétriques. Influence de la forme de la section.
IX. Calcul des barres à treillis et à châssis.
X. Résumé et conclusions.

B. Conclusions.

1) La méthode de calcul appliquée pour la détermination de la force de flambage des barres comprimées par des forces excentrées a, si on tient compte des suppositions faites, une valeur d'ordre tout à fait général.

Elle se base sur la connaissance du diagramme tension-déformation d'un matériau de construction et présuppose que les conditions d'équilibre et de déformation, exprimées par l'équation différentielle de la ligne élastique de la barre fléchie, sont remplies.

Cette méthode rend possible la détermination de la flèche correspondant à la charge de flambage.

2) Les lois qui régissent le flambage par charges excentrées, dans les domaines de l'élasticité et de la plasticité, ont été examinées théoriquement et vérifiées expérimentalement pour

l'acier de construction,
l'acier de construction au silicium,
l'acier de construction à haute résistance (Ac 52),
les tubes d'acier pour avions,
la fonte grise,
les métaux légers,
le bois de construction et
le béton armé.

Les résultats théoriques et les vérifications expérimentales présentent une concordance très satisfaisante. Les écarts constatés restent dans les limites des variations des chiffres de résistance et de déformation du matériau examiné.

3) L'excentricité du point d'application de la force est cause d'une diminution de la charge de flambage. L'influence de cette excentricité est plus à craindre pour les barres trapues et à élancement moyen $\left(\frac{l}{i} < 100\right)$ que pour les barres élancées et très élancées $\left(\frac{l}{i} > 100\right)$.

Lorsque l'excentricité augmente, la diminution de la force de flambage est plus faible en comparaison de l'augmentation du degré d'excentricité.

4) Grâce à l'encastrement des deux extrémités des barres d'élancement moyen, on constate une augmentation de la force de flambage qui varie suivant le matériau de construction mais qui est en général peu importante. Si les extrémités de la barre encastrée ont un peu de jeu ou subissent de petites déformations, l'augmentation de la force de flambage peut être annulée.

5) On considère comme points caractéristiques du diagramme compression-raccourcissement :

la limite de proportionnalité σ_p,
la limite d'écoulement σ_f et
la résistance à la compression des prismes debout $_p\beta_d$.

A l'aide de ces valeurs et du coefficient d'élasticité E, correspondant à la limite de proportionnalité, il est possible de déterminer approximativement la ligne des tensions de flambage pour la *compression axiale* en fonction de l'élancement.

Jusqu'à la limite de proportionnalité la tension au flambage peut être calculée à l'aide du coefficient E, d'après Euler.

$$\sigma_k = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \mathrm{E} \leq \sigma_p.$$

Entre la limite de proportionnalité σ_p et la limite d'écoulement σ_f (c'est-à-dire avec une approximation suffisante, pour $\frac{l}{i} = 35$, s'il s'agit d'un acier de construction), la ligne des tensions de flambage se réduit à une droite. Elle est

valable jusqu'aux élancements suivants correspondant à la résistance à la compression des prismes debout :

pour les aciers de construction $\frac{l}{i} \sim 10 \quad \left(\frac{l}{a} = 3\right)$

» le bois de construction $\frac{l}{i} \sim 20 \quad \left(\frac{l}{a} = 6\right)$

» le béton armé $\frac{l}{i} \sim 35 \quad \left(\frac{l}{a} = 10\right)$

Dans le domaine de la résistance à la compression des prismes ($_p\beta_d$), la ligne des tensions de flambage est parallèle à l'axe $\frac{l}{i}$. Pour les aciers de construction, on remplace la résistance à la compression des prismes debout par la résistance à la traction calculée pour la section initiale, non déformée.

Lorsque le diagramme tension-allongement ne présente pas une limite d'écoulement bien caractérisée — bois, béton armé —, la ligne des tensions de flambage se trouve être la droite qui relie la limite de proportionnalité à la résistance à la compression des prismes debout.

Dans le cas du flambage par charges excentrées des matériaux de construction les plus importants :

acier — bois — béton armé,

on se sert des coefficients de réduction suivants pour calculer les valeurs des tensions de flambage. On pose dans ce cas $\sigma_{k\ centré} = 1{,}0$.

Matériau de construction	Degré d'excentricité			
	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3
Acier	1,0	0,55	0,40	0,33
Bois	1,0	0,55	—	0,35
Béton armé	1,0	0,45	0,25	—

(fig. 7, 23 et 26)

6) Une charge transversale agissant au milieu, et perpendiculairement à l'axe de la barre, diminue la force de flambage de cette barre comprimée par des forces centrées ou excentrées. Le graphique de la fig. 30 donne les valeurs de la charge de flambage avec charge transversale en pourcent de la charge de flambage par force centrée sans charge transversale pour l'acier de construction. Ce graphique peut rendre en pratique des services très appréciables.

Le graphique de la fig. 6, se rapportant à l'acier de construction, permet de déterminer les valeurs des forces de flambage avec une précision bien suffisante pour la pratique. L'excentricité (p) du point d'application de la force au milieu de la barre est déterminée à l'aide de la relation

$$p = \frac{\text{H.} \frac{l}{4}}{P_{k\ red.}}$$

7) Si une barre est comprimée par des forces excentrées ayant leur point d'application sur un des axes principaux, la force de flambage, dans la direction perpendiculaire au plan d'excentricité, subit une diminution dès que la limite de proportionnalité est dépassée. L'importance de cette diminution dépend de la forme de la section de la barre, de la grandeur de l'excentricité du point d'application de la force et de l'allure du diagramme tension-allongement. Les barres en acier de construction qui ont été examinées fournissent des renseignement très précieux en pratique.

8) Les barres sollicitées à la compression, au-dessus de la limite de proportionnalité, par des forces excentrées par rapport aux deux axes principaux présentent une diminution considérable de leur force de flambage. Il n'est pas possible d'établir des règles générales, chaque cas particulier doit être examiné pour lui-même. La classification sous forme de tableau des résultats d'essais obtenus avec l'acier de construction, peut rendre de précieux services lors d'une première estimation.

9) Lorsqu'on connaît la flèche de flambage f_k, il est possible de déterminer l'effort tranchant $Q_{max} = \frac{P_k . f_k . \pi}{l}$ correspondant à la charge de flambage, et par là de dimensionner les liaisons — treillis, tôles de liaison — des barres comprimées par des forces excentrées. Les barres à treillis ou à châssis, comprimées par des forces excentrées, peuvent de ce fait être composées de telle manière qu'elles aient une charge portante de flambage équivalente à celles des barres à âme pleine. On admettra pour les membrures d'une barre à châssis un degré de sécurité au flambage plus élevé que pour la barre entière, du fait que les membrures ont à supporter des sollicitations additionnelles.

10) Lorsqu'on connaît les modules de flambage pour différentes tensions au centre de gravité — tension initiale uniformément répartie ou tension de base — et diverses différences des déformations spécifiques des fibres extrêmes — courbure de la ligne de flexion —, par exemple pour l'acier de construction suivant la fig. 5, il est possible de calculer :

a) la déformation des poutres sollicitées en dessus de la limite de proportionnalité à la flexion seule ou à la flexion avec force longitudinale ;

b) la stabilité au flambage des barres sollicitées à la compression ou à la compression et à la flexion, même dans le domaine de la plasticité.

En lieu et place du coefficient d'élasticité E, on introduit le module de flambage T_k.

La concordance de l'intégration de l'équation différentielle de la ligne de flexion

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{T_k . J}$$

avec la ligne de flexion admise selon le procédé de Mohr-Vianello permet la solution du problème.

Zusammenfassung.

A. Inhaltsverzeichnis.

I. Voraussetzungen.
II. Wesen des Knickens.
III. Zentrisches und exzentrisches Knicken.
1) Baustahl
2) Silizium-Baustahl
3) Hochwertiger Baustahl St 52
4) Stahlrohre für Flugzeugbau
5) Gusseisen
6) Leichtmetalle — Duraluminium, Avional, Anticorodal
7) Bauholz
8) Eisenbeton.
IV. Knicken bei einer in der Stabmitte wirkenden unveränderlichen Querbelastung.
V. Knicken von Stäben mit stetig gekrümmter Axe.
VI. Knicken bei exzentrischem Kraftangriff, Knickrichtung winkelrecht zur Kraftebene.
VII. Knicken bei einem nach beiden Hauptaxen exzentrischen Kraftangriff.
VIII. Unsymmetrische Profile. Einfluss der Querschnittsform.
IX. Berechnung der Gitter- und Rahmenstäbe.
X. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen.

B. Schlussfolgerungen.

1) Das angewandte Berechnungsverfahren für die Bestimmung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stäbe besitzt, unter Beachtung der gemachten Voraussetzungen, allgemeine Gültigkeit.

Es stützt sich auf die Kenntnis des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes eines Baustoffes und die Erfüllung der durch die Differentialgleichung der elastischen Linie des gebogenen Stabes ausgedrückten Gleichgewichts- und Verformungsbedingung.

Es ermöglicht die Bestimmung des der Knicklast entsprechenden Biegepfeiles.

2) Die Gesetzmässigkeit des exzentrischen Knickens im elastischen und plastischen Gebiet wurde theoretisch untersucht und durch Versuche überprüft für

Baustahl,
Silizium-Baustahl,
hochwertigen Baustahl St 52,
Stahlrohre für Flugzeugbau,
Gusseisen,
Leichtmetalle,
Bauholz und
Eisenbeton.

Die Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Theorie und der Versuche ist gut. Die Abweichungen liegen innerhalb des Streuungsgebietes der Festigkeitseigenschaften und des Verformungsvermögens der untersuchten Baustoffe.

3) Die Exzentrizität des Kraftangriffes vermindert die Knicktragkraft. Der Einfluss des exzentrischen Kraftangriffes wirkt sich bei gedrungenen und mittelschlanken Stäben $\left(\frac{l}{i} < 100\right)$ verhängnisvoller aus als bei schlanken und sehr schlanken Stäben $\left(\frac{l}{i} > 100\right)$.

Mit wachsender Exzentrizität fällt das Tragvermögen in vergleichsweise geringerem Masse ab als das Exzentrizitätsmass selbst zunimmt.

4) Durch die Einspannung der Stabenden wird für das Gebiet der mittelschlanken Stäbe die Knicktragkraft für die verschiedenen Baustoffe in verschieden hohem, zumeist geringem Masse erhöht. Kleine Nachgiebigkeiten der elastisch eingespannten Stabenden können die Erhöhung der Tragkraft verwirken.

5) Als charakteristische Punkte des Druck-Stauchungs-Diagrammes gelten
die Proportionalitätsgrenze σ_p
die Fliessgrenze σ_f und
die Prismendruckfestigkeit ${}_p\beta_d$,
welche mit dem der Proportionalitätsgrenze zugeordneten Elastizitätsmodul E die angenäherte, für die Praxis sehr wertvolle Bestimmung der Knickspannungslinie für zentrisches Knicken, als Funktion des Schlankheitsgrades ermöglichen.

Bis zur Proportionalitätsgrenze gilt die mit E berechnete Knickspannung

$$\sigma_k = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \cdot E. \leqslant \sigma_p$$

Zwischen der Proportionalitätsgrenze σ_p und der Fliessgrenze σ_f, welcher bei Baustählen im Mittel und genügend genau ein Schlankheitsgrad von $\frac{l}{i} = 35$ zugeordnet ist, wird die Knickspannungslinie durch eine Gerade begrenzt, welche bis zu den der Prismendruckfestigkeit ${}_p\beta_d$ noch entsprechenden Schlankheitsgraden

für Konstruktionsstähle $\frac{l}{i} \sim 10 \quad \left(\frac{l}{a} = 3\right)$
für Holz $\frac{l}{i} \sim 20 \quad \left(\frac{l}{a} = 6\right)$
für Eisenbeton $\frac{l}{i} \sim 35 \quad \left(\frac{l}{a} = 10\right)$

gilt.

Innerhalb des Bereiches der Prismendruckfestigkeit ${}_p\beta_d$ weist die Knickspannungslinie zur $\frac{l}{i}$-Axe parallelen Verlauf auf. Bei den Baustählen ist die

Prismendruckfestigkeit durch die Zugfestigkeit, bezogen auf den ursprünglichen, unverformten Querschnitt, zu ersetzen.

Zeigt das Spannungs-Dehnungs-Diagramm keine ausgesprochene Fliessgrenze — Holz, Eisenbeton — so gilt die die Proportionalitätsgrenze mit der Prismendruckfestigkeit verbindende Gerade als Knickspannungslinie.

Für exzentrisches Knicken gelten für die wichtigsten Baustoffe

Stahl — Holz — Eisenbeton

nachfolgende Abminderugs-Koeffizienten, bezogen auf die Knickspannungswerte für zentrisches Knicken, $\sigma_{k\,zentrisch}$ gleich 1,0 gesetzt.

Baustoff	Exzentrizitätsmass			
	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3
Stahl	1,0	0,55	0,40	0,33
Holz	1,0	0,55	—	0,35
Eisenbeton	1,0	0,45	0,25	—

(Abb. 7, 23, und 26).

6) In der Stabmitte winkelrecht zur Stabaxe wirkende Querbelastungen H vermindern die Tragkraft auf Knicken von zentrisch und exzentrisch gedrückten Stäben. Das Graphikon der Abb. 30, welches die Knicktragkräfte mit Querbelastung in Prozenten der zentrisch wirkenden Knicktragkräfte ohne Querbelastung für Baustahl angibt, leistet für den praktischen Gebrauch sehr schätzenswerte Dienste.

Für die Praxis ausreichend genaue Werte der Knicktragkräfte lassen sich für Baustahl anhand des Graphikons der Abb. 6 ermitteln. Die Exzentrizität des Kraftangriffes p in Stabmitte wir daus der Beziehung.

$$p = \frac{H \cdot \frac{l}{4}}{P_{K\,red}}$$

ermittelt.

7) Bei in einer der Hauptaxen exzentrisch gedrückten Stäben wird bei Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze die Knickkraft auch für die zur Exzentrizitätsebene winkelrechte Richtung abgemindert. Das Mass der Abminderung hängt von der Querschnittsform des Stabes, der Grösse der Exzentrizität des Kraftangriffes und vom Verlauf des Spannungs-Dehnungsdiagrammes ab. Die untersuchten Stäbe aus normalem Baustahl liefern für die Praxis wertvolle Anhaltspunkte.

8) Nach beiden Hauptaxen exzentrisch gedrückte und über die Proportionalitätsgrenze beanspruchte Stäbe weisen einen sehr starken Abfall der Knick-Tragfähigkeit auf. Allgemein gültige Regeln lassen sich nicht aufstellen; jeder Einzelfall ist zu untersuchen. Die tabellarische Zusammenstellung der gewonnenen Versuchsergebnisse für normalen Baustahl leistet wertvolle Dienste für die angenäherte, erste Einschätzung.

9) Die Kenntnis des Knickbiegepfeiles f_k ermöglicht die Bestimmung der der Knicklast zugeordneten Querkraft $Q_{max} = \frac{P_k f_k \cdot \pi}{l}$. und dadurch die Be-

messung der Verbindungen — Vergitterungen, Bindebleche — von exzentrisch gedrückten, gegliederten Stäben.

Exzentrisch gedrückte, vergitterte Stäbe oder durch Bindebleche verbundene Rahmenstäbe können somit derart ausgebildet werden, dass sie in ihrer Tragfähigkeit auf Knicken den vollwandigen Stäben praktisch gleichwertig sind. Bei Rahmenstäben ist zufolge zusätzlicher Beanspruchungen der Gurtungen, deren Knicksicherheitsgrad höher zu wählen als für den Rahmenstab als Ganzes.

10) Die Kenntnis der Moduli T_k für verschieden hohe Schwerpunktspannungen — Grundspannungen — und verschiedene Differenzen der Randfaserdehnungen — Krümmung der Biegelinie — z. B. für Baustahl entsprechend der Abb. 5 ermöglicht die Berechnung der Verformung von auf reine Biegung oder Biegung mit Längskraft über die Proportionalitätsgrenze beanspruchten Trägern, sodann
die Bestimmung der Knickstabilität von beliebig auf Druck oder Druck und Biegung auch im platischen Bereich versagenden Stäben.

An Stelle des E-Moduls tritt der T_k-Modul.

Die Uebereinstimmung der Integration der Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M}{T_k J}$$

mit der angenommen Biegelinie nach dem Verfahren von Mohr-Vianello gibt die Lösung des Problems.

Summary.

A. Contents.

I. Assumptions.
II. Mode of buckling.
III. Buckling under central and eccentric loads.
1. Structural steel.
2. Structural silicon-steel.
3. High grade structural steel (st 52).
4. Steel tubes for aircraft construction.
5. Cast iron.
6. Light metals — duralumin, avional, anticorodal.
7. Timber.
8. Reinforced concrete.
IV. Buckling under a constant transverse load acting in the middle of the bar.
V. Buckling of bars having a continuous bending axis.
VI. Buckling in the case of eccentrically applied load, the direction of buckling being perpendicular to the plane of the load.
VII. Buckling in the case where the load is applied eccentrically with reference to the two main axes.

VIII. Unsymmetrical sections. Influence of the shape of the section.
IX. Calculation of trellis and frame bars.
X. Recapitulation and conclusions.

B. Conclusions.

1) Under the assumptions made in the foregoing, the method of calculation followed for determining the resistance of bars to a load applied eccentrically may be taken to apply in the generality of cases.

It is based upon the information derived from the tension-extension diagram of structural materials, and depends upon compliance with the equilibrium and deformation conditions that ensue from the differential equation of the elastic line of the bent bar.

It allows the deflexion corresponding to the buckling load to be determined.

2) The occurence of eccentric buckling in the elastic and plastic realm has been investigated theoretically and confirmed by tests for.

Structural steel;
structural silicon steel!
high grade structural steel (St 52);
steel tubes for aircraft construction;
cast iron;
light metals;
timber and;
reinforced concrete.

There is good agreement between the findings of theory and the test results. The deviations lie within the normal variation limits in the figures defining the strength properties and the deformations capacity of the material dealt with.

3) Eccentricity in the application of the stress decreases the buckling load. The influence of the eccentric stress in the case of stout and medium-sized bars $\left(\frac{l}{i} < 100\right)$ appears to be greater than in that of thin and very thin bars $\left(\frac{l}{i} > 100\right)$.

With increasing eccentricity, the buckling load decreases proportionately slower than the increase in eccentricity.

4) By clamping the two ends of the bar the buckling strength, in the case of medium thin bars of the various materials, is increased to a varying but mostly small extent. A slight yielding at the elastically clamped bar ends may have a counteracting effect upon an increase in resistance.

5) The pressure-compression diagram is characterised by
the limit of proportionality σ_p;
the limit of flow σ_f;
and the crushing strength of a prism $_p?_d$ which, with the modulus of elasticity E coordinated to the limit of proportionality, allow a close determination of the buckling tension-line for central compression as a function of the slenderness ratio, this being of great value in actual practice.

The buckling tension calculated with E from Euler's formula $\sigma_k = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} E \leq \sigma_p$ applies up to the limit of proportionality.

Between the limit of proportionality σ_p and the limit of flow σ_f, which in the case of structural steels corresponds to a sufficiently approximate average value of $\frac{l}{i} = 35$ the buckling tension-line is limited by a straight one which still applies to the values $\frac{l}{i}$ that correspond for the crushing strength of a prism

for structural steels to $\frac{l}{i} \sim 10 \quad \left(\frac{l}{a} = 3\right)$

for timber to $\frac{l}{i} \sim 20 \quad \left(\frac{l}{a} = 6\right)$

for reinforced concrete to $\frac{l}{i} = 35 \quad \left(\frac{l}{a} = 10\right)$

Within the sphere of prism crushing strength, the buckling tension-line shows a parallel run with reference to the $\frac{l}{i}$-axis. In structural steels, the prism crushing strength is to be replaced by the tensile strength referred to the original non-deformed section.

When the tension-expansion diagram has no marked limit of flow (Timber, reinforced concrete), then the straight line connecting the limit of proportionality with the prism crushing strength serves as buckling tension-line.

In the case of an eccentric load and for the most important structural materials ;

steel, timber, reinforced concrete,

the following, diminishing coefficients. referred to the buckling tension values for a central load, apply, taking $\sigma_{k\,central} = 1{,}0$

Structural Material	Degree of eccentricity			
	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
Steel	1.0	0.55	0.40	0.33
Timber	1.0	0.55	—	0.35
Reinforced concrete	1.0	0.45	0 25	—

(fig. 7, 23 and 26).

6) The transverse loads H which act in the middle of the bar at right angles to the bar axis decrease the buckling resistance of centrally and eccentrically loaded bars. The diagram, fig. 30, which illustrates the buckling loads with transverse loading in per cent. values of the centrally operating buckling loads without transverse loading for structural steel, gives valuable data in practical work.

For structural steel sufficiently accurate values for buckling resistance figures and for practical purposes can be derived from the diagram fig. 6. The eccentricity (p) of the effect of load in the middle of the bar is obtained from the equation

$$p = \frac{H \cdot \frac{l}{4}}{P_{k\,red}}$$

7) In the case of bars eccentrically loaded, the overstepping of the limit of proportionality in one of the main axes decreases the buckling load for the eccentric plane in a right angle location. The measure of decrease depends upon the shape of the bar section, the extent of eccentricity, the operation of the load and the run of the tension-expansion diagram. The bars of structural steel experimented with provide valuable information for practical work.

8) In the case of bars which have been eccentrically loaded in regard to bath main axes and over the limit of proportionality, there is a very heavy drop in buckling load. Rules for general application cannot be arrived at; every instance must be considered separately. The data in tabular form yielded by the test salready made for structural steel are most serviceable for making a first approximation.

9) When knowing the buckling deflection F_k one can determine the transverse load $Q_{max} = \frac{P_k \cdot F_k \cdot \pi}{l}$ coordinated tho the buckling load and hence the dimensions max. of connexions, such as lattice work and junction plates, of bars under an eccentric load.

Bars arranged in lattice work or frame bars connected by junction straps, and subjected to an eccentric load, can be so designed that in resistance to buckling they are practically equal to full plate bars. In frame bars, owing to the additional stress, the buckling safety coefficient of the straps should be selected higher than for the frame bar in itself.

10) When knowing the buckling moduli for differently high centre of gravity stresses (initial stresses) and various differences in the elongation of the outside fibres — curvature of the bending line — for example in the case of structural steel (see fig. 5) it is possible to calculate the deformation of girders subjected to pure bending or bending under longitudinal force above the limit of proportionality, then to determine the buckling stability of bars which fail under pressure, or pressure and bending, also in the plastic range.

The E modulus is replaced by the T_k one.

The agreement of the integration of the differential equation of the bending line

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{T_k \cdot J}$$

with the bending line according to the Mohr-Vianello process gives the solution of the problem.

Designations

Bezeichnungen

M_i	Moment intérieur	Inneres Moment	Internal moment
M_a	Moment extérieur	Aeusseres Moment	External moment
P	Force ou charge	Kraft oder Last	Force or load
P_k	Force de flambage	Knickkraft	Buckling load
E	Module d'élasticité	Elastizitätsmodul	Modulus of elasticity
T_k	Coefficient de flambage	Knickmodul	Modulus of buckling
F	Section	Querschnitt	Section
J	Moment d'inertie	Trägheitsmoment	Moment of inertia
i	Rayon de giration	Trägheitsradius	Radius of gyration
σ_p	Limite de proportionnalité	Proportionalitätsgrenze	Limit of proportionality
σ_f	Limite d'écoulement	Fliessgrenze	Limit of flow
β_z	Résistance à la traction	Zugfestigkeit	Tensile strength
β_d	Résistance à la compression	Druckfestigkeit	Compression strength
β_b	Résistance à la flexion	Biegungsfestigkeit	Bending strength
$_p\beta_d$	Résistance d'un prisme à la compression	Prismendruckfestigkeit	Crushing strength of prism
σ	Tension	Spannung	Tension
σ_k	Tension de flambage	Knickspannung	Buckling tension
l	Longueur, longueur au flambage	Länge, Knicklänge	Length, collapsing length
h	Hauteur, hauteur de la section	Höhe, Querschnittshöhe	Height, height of section
a	Largeur	Breite	Width
ρ	Rayon de courbure	Krümmungsradius	Radius of curvature
Δ	Différence des allongements des fibres extrêmes	Differenz der Randfaserdehnungen	Difference in elongation of outside fibres
f	Flèche	Pfeil	Deflection
f_k	Flèche au flambage	Knickpfeil	Buckling deflection
p	Excentricité	Excentrizität	Eccentricity
k	Grandeur du noyau central	Kernweite	Core dimension
$\frac{l}{i}$	Degré d'élancement	Schlankheitsgrad	Slenderness ratio
$m=\frac{p}{k}$	Degré d'excentricité	Excentrizitätsmass	Degree of eccentricity

Littérature.

ENGESSER Fr. Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. Berlin, 1892.

TETMAJER L. Die Gesetze der Knickungs-und der zusammengesetzten Druck festigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe.

Mitteilung der Eidg. Material prüfungsanstalt, Heft 8. Zürich, 1901

MONCRIEFF J. M. The Practical Column under Central or Eccentric Loads.

American Society of Civil Engineers. 1901.

KÁRMÁN Th. Untersuchungen über Knickfestigkeit.

Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 81. Berlin, 1910.

RUDELOFF M. Untersuchung von Druckstäben auf Knickfestigkeit. Verhandlungen des Vereins zur Förderung des Gewerbefleisses. 1912/14.

HABERKALT K. Versuche mit hochwertigem Eisen für Tragwerke. Wien, 1915.

WESTERGAARD H. M. Buckling of Elastic Structures.

American Society of Civil Engineers. 1922.

KROHN R. Knickfestigkeit. Berlin, 1923.

GREENE T. W. Strenght of Steel Tubing under Combined Column and Transverse Loading, Including Tests of Columns and Beams. 1924.

CHWALLA E. Die Stabilität des Rahmenstabes. Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl.

Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. Wien, 1928.

GRAF O. Knickversuche mit Bauholz. Bautechnik, Heft 15. Berlin, 1928.

Bruch- und Biegeversuche mit gegliederten Stäben aus Holz.

Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 319 Berlin.

OSTENFELD A. Exzentrisch beanspruchte Säulen, Versuche mit Holzsäulen, Querschnittsbemessungen. Kopenhagen, 1929.

REIN W. Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle. Deutscher Stahlbau-Verband. Berlin, 1930.

MONNIN M. La résistance au flambage des pièces de bois.

Manuscrit. Paris, 1931.

BOYD J. E. Investigation of the Compressive Strength of Spruce Struts of Rectangular Cross Section and the Derivation of Formulas Suitable for use in Air plane Designe.

Special Committee. Steel column research.

American Society of Civil Engineers, 1931.

PETERMANN. Zur Berechnung von Rahmenstäben. Die Bautechnik, Heft, 19. Berlin, 1931.

TUCKERMANN L. B. et Stang A. H. Tests of large Columns with H-Shaped Sections. United States Bureau of Standards.

BOYD J. E. Tapered Struts. A Theoretical and Experimental Investigation.

Bulletin, Engineering Experiment Station of the Ohio State University.

Leere Seite
Blank page
Page vide

I 3

DIE STABILITÄT DÜNNER WÄNDE GEDRÜCKTER STÄBE

LA STABILITÉ DE L'AME ET DES AILES DES BARRES COMPRIMÉES

STABILITY OF THE WEBS AND THE FLANGES OF COMPRESSED BARS

Dr. Ing. Friedrich BLEICH,
Zivilingenieur, Wien.

Die gedrückten Bauteile der Stahlbauten, wie Fachwerkstäbe, Stützen u. ä. werden in der Regel nur hinsichtlich ihrer Knicksicherheit als ganzer Stab untersucht. Nun bestehen diese Stäbe aber vielfach aus dünnen, plattenförmigen Elementen, die für sich genommen oft noch lange bevor der Stab als ganzer ausknickt, in einen unstabilen Gleichgewichtszustand geraten können, sie beulen aus. Da derartige plattenförmige Teile besonders im Brückenbau eine hervorragende Rolle spielen, so erscheint die Frage nach einfachen Regeln und Formeln für die Bemessung dieser Einzelteile äusserst wichtig, umsomehr, als durch die zunehmende Verwendung von hochwertigem Stahl im Brückenbau, das Bestreben dahin geht, die Wandstärken immer mehr zu verringern.

Die Aufgabe dieses Berichtes wird daher folgendermassen umgrenzt : Auf Grund der bekannten Theorie der Stabilität gedrückter Platten sind einfache Regeln für das Verhältnis der Plattenstärke zu den übrigen Wand- und Stababmessungen aufzustellen. Das Referat beschränkt sich auf die *dünnen Wände gleichmässig gedrückter Stäbe*. Das analoge Problem für den dünnen Steg von Biegungsträgern ist dem Referat des Herrn Prof. St. TIMOSCHENKO vorbehalten.

Die Frage der Stabilität gedrückter rechteckiger Platten ist erstmalig von BRYAN 1891 [1] behandelt worden. Später haben sich REISSNER [2], TIMOSCHENKO [3] und LILLY [4] mit dem Problem beschäftigt. Einfache Anwendungsformeln für den Stahlbau hat der Berichterstatter aufgestellt [5].

---

1. G. K. BRYAN. On the Stability of a Plan Plate under Thrusts in its own Plane with Application on the « Buckling » of the Sides of a Ship. London, Math. Soc. Proc., 1891, p. 54.
2. H. REISSNER. Ueber die Knicksicherheit ebener Bleche. Zentralblatt der Bauverwaltung, 1909, S. 93.
3. S. TIMOSCHENKO. Sur la stabilité des systèmes élastiques. Ann. des Ponts et Chaussées, 1913. Ueber die Stabilität versteifter Platten. Der Eisenbau, 1921, S. 147.
4. W. E. LILLY. Web Stresses in Plate Girders and Columns. Engineering, 1907, p. 156.
5. F. BLEICH. Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin, 1924.

Die Untersuchung geht von dem in Abb. 1 dargestellten Gleichgewichtsfall der rechteckigen Platte von der Stärke δ, deren Seiten $x = -\frac{a}{2}$, und $x = +\frac{a}{2}$ durch gleichmässigen Druck $\sigma . \delta$ belastet sind, aus. Die Ränder $x = \pm \frac{a}{2}$ sind frei drehbar befestigt, während für die Ränder $y = \pm \frac{b}{2}$ folgende Fälle in Betracht zu ziehen sind.

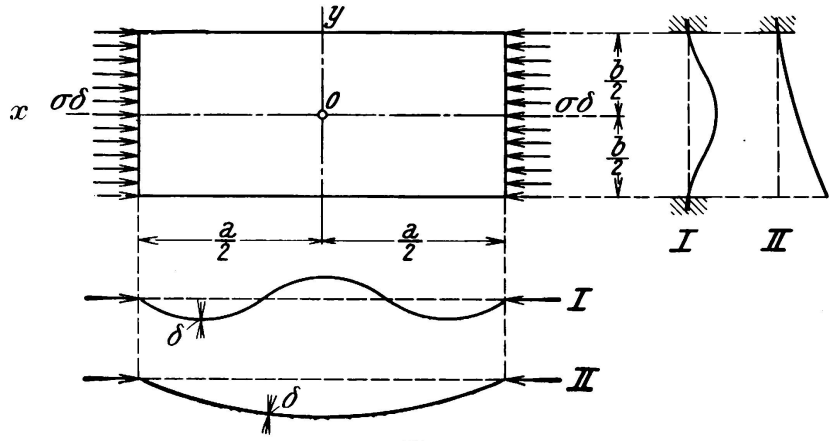


Fig. 1.

Fall I. Die Ränder $y = \pm \frac{b}{2}$ sind elastisch eingespannt

Fall II. Der Rand $y = +\frac{b}{2}$ ist elastisch eingespannt, der Rand $y = -\frac{b}{2}$ ist vollständig frei.

Der Einfluss der Befestigungsweise der Ränder $x = \pm \frac{a}{2}$ auf das Ergebnis ist in Fällen, wo a gross gegen b ist, und bei Druckstäben ist a immer ein Vielfaches von b, geringfügig, so dass man berechtigt ist, für die Befestigungsweise dieser Ränder jene Annahme zu treffen, die zu einer möglichst einfachen Berechnungsweise führt.

Die Theorie nimmt ihren Ausgang von der Differentialgleichung der Ausbiegung dünner Platten, die in einer Richtung durch $\sigma \delta$ gleichmässig gedrückt sind. Diese Differentialgleichung lautet :

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\tau + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\sqrt{\tau} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right] + \sigma\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Unter der Voraussetzung, dass das Material bei Ueberschreiten der Elastizitätsgrenze anisotrop wird, d. h. dass in der Druckrichtung x der mit σ veränderliche KÁRMÁNSCHE Knickmodul T, in der darauf senkrechten Richtung y aber der unveränderte Young'sche Elastizitätsmodul E gelten, hat BLEICH die aus der Elastizitätstheorie bekannte Differentialgleichung (1) durch Beifügung der Beiwerte τ und $\sqrt{\tau}$ verallgemeinert[5]. Hierbei bedeutet

$$\tau = \frac{T}{E},$$

τ ist gleich 1, solange σ nicht die Elastizitätsgrenze σ_E überschreitet, und ist kleiner als 1, wenn σ über σ_E ansteigt. Unter D ist in Gl. (1) die Biegungssteifigkeit

$$D = \frac{EJ}{1-\mu^2} = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \qquad (\mu = 0{,}3 \text{ für Stahl})$$

zu verstehen. Die Zulässigkeit des Ansatzes (1) wird durch die Uebereinstimmung der berechneten kritischen Werte der Druckspannung σ mit den bei Versuchen beobachteten Werten von σ erwiesen.

1. Fall. Die Platte ist um die Ränder $x = \pm \frac{a}{2}$ frei drehbar gelagert und ist an den beiden anderen Rändern $x = \pm \frac{b}{2}$ elastisch eingespannt.

Die Lösung der Differentialgleichung (1) nimmt hier mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse die Form

$$w = \cos \frac{n\pi x}{a} \left[A \cosh k_1 y + C \cos k_2 y\right] \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

an, wobei k_1 und k_2 durch die Gleichungen

$$k_1^2 = \frac{n\pi}{a}\left(\sqrt{\frac{\sigma\tau}{D}} + \sqrt{\tau}\,\frac{n\pi}{a}\right), \qquad k_2^2 = -\frac{n\pi}{a}\left(\sqrt{\frac{\sigma\tau}{D}} - \sqrt{\tau}\,\frac{n\pi}{a}\right)$$

definiert sind[5]. A und C sind Konstanten, die aus den Bedingungen an den Rändern $y = \pm \frac{b}{2}$ bestimmt werden, n gibt die Zahl den Halbwellen an, in der die Platte in der Richtung x ausbeult. Entlang den beiden Rändern $y = \pm \frac{b}{2}$ gelten die Randbedingungen

$$w = 0 \quad \text{und} \quad M = \nu \frac{\partial w}{\partial y},$$

wo M das Biegungsmoment am Rande und ν ein Proportionalitätsfaktor ist, der von der Grösse der Einspannung abhängt. Da aber nach der Elastizitätstheorie an den Rändern der Platte wegen $w = 0$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

$$M = \frac{EJ}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

so reduzieren sich die beiden Randbedingungen auf

$$w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \xi \frac{b}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ξ ist eine Konstante, die von der Art der Einspannung abhängt. Bei frei drehbarem Rand ist $\xi = \infty$, bei fest eingespanntem Rand ist $\xi = 0$. Führt man die Lösung (2) in die Bedingungen (3) ein, so gewinnt man 2 homogene Gleichungen für A und C, die nur dann von Null verschiedene Wurzeln liefern, wenn ihre Determinante verschwindet. Damit ist aber die Knickbedingung in der Form

$$\operatorname{tg} \frac{\nu n}{\alpha}\sqrt{\rho - 1}\,\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi\rho\xi}{\sqrt{\rho-1}}\frac{\nu n}{\alpha} - \frac{\sqrt{\rho+1}}{\sqrt{\rho-1}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

mit den Abkürzungen

$$v = \sqrt[4]{\tau}, \qquad \alpha = \frac{a}{b}, \qquad \rho^2 = \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \frac{\delta}{\tau D}\sigma_k \ldots\ldots \quad (4')$$

gefunden. Aus der transzendenten Gleichung (4) kann ρ und damit nach (4') die kritische Spannung σ_k ermittelt werden.

Der durch Gl. (4) dargestellte transzendente Zusammenhang zwischen der Grösse ρ und $\frac{vn}{\alpha}$ lässt sich nun mit sehr grosser Genauigkeit durch eine algebraische Gleichung von der Form

$$\rho^2 = 1 + p\left(\frac{\alpha}{vn}\right)^2 + q\left(\frac{\alpha}{vn}\right)^4 \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

ersetzen. p und q sind hierbei Funktionen der Einspannungszahl ξ. Im besonderen gilt:

für frei drehbare Ränder : $p = 2 \quad q = 1$;

für fest eingespannte Ränder : $p = 2{,}50 \quad q = 5$.

Vereinigt man Gl. (4') und (5), so erhält man für die kritische Spannung σ_k die Beziehung

$$\sigma_k = \left[\left(\frac{vn}{\alpha}\right)^2 + p + q\left(\frac{\alpha}{vn}\right)^2\right] \frac{\pi^2 E\sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2.$$

Aus $\frac{\partial \sigma_k}{\partial \frac{\alpha}{vn}} = 0$ findet man schliesslich den Kleinstwert von σ_k, der für die Bemessung massgebend ist zu

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E\sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}) \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Will man schliesslich die Wandteile der Druckstäbe so bemessen, dass die einzelnen Wände die gleiche Sicherheit gegen Ausbeulen bieten wie der ganze Stab gegen Knicken, so muss die Spannung σ_k, die das Ausbeulen bewirkt, gleich der kritischen Spannung sein, bei der der Stab mit dem Schlankheitsgrad $\frac{l}{i}$ als ganzes knickt. Es gilt daher die Verknüpfung

$$\frac{\pi^2 E\tau}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E\sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}),$$

aus der folgende Regel für das Verhältnis $\frac{\delta}{b}$ d. i. Plattenstärke zu Plattenbreite, folgt, nämlich

$$\frac{b}{\delta} = \frac{\sqrt{p + 2\sqrt{q}}}{2\sqrt{3(1-\mu^2)\sqrt{\tau}}}\left(\frac{l}{i}\right) = \frac{0{,}303}{\sqrt[4]{\tau}}\sqrt{p + 2\sqrt{q}}\left(\frac{l}{i}\right) \ldots \quad (7)$$

Gleichung (7) lässt die wichtige Tatsache erkennen, dass das Verhältnis $\frac{b}{\delta}$ wächst, wenn die Schlankheit $\frac{l}{i}$ wächst. Je schlanker der Stab, umso dünner können seine Wände gemacht werden.

Gleichung (7) liefert für die beiden Grenzwerte, die in Abb. 2 a und b dargestellt sind, folgende Sonderwerte : In einem Druckstab aus 4 gleichbreiten und gleichstarken Wänden verhalten sich die einzelnen Wände so wie Platten, die an beiden Rändern biegungsfrei gelagert sind, da die Platten gleich-

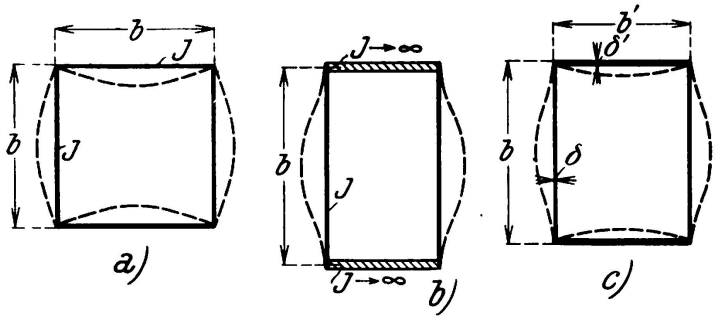


Fig. 2.

zeitig ausbeulen und keine die andere durch Einspannung entlasten kann. Man erhält aus Gl. (7), wenn man für diesen Fall wie oben angegeben $p = 2$, $q = 1$, einführt, $\frac{b}{\mathfrak{d}} = \frac{0{,}606}{\sqrt[4]{\tau}} \left(\frac{l}{i}\right)$. Allgemein muss bei verschiedenen Breiten b und b' der beiden Wände, Abb. 2 c die Steifigkeitszahl $\xi = \frac{\mathfrak{d}^3 b'}{\mathfrak{d}'^3 b} = 1$ sein, wenn man die Plattenränder als frei drehbar betrachten will. Sind andererseits zwei Wände sehr steif gegenüber den beiden anderen, so nähert sich das Verhältnis $\frac{b}{\mathfrak{d}}$ dem Grenzwert für feste Einspannung, d. i. mit $p = 2{,}5$, $q = 5$, $\frac{b}{\mathfrak{d}} = \frac{0{,}800}{\sqrt[4]{\tau}} \left(\frac{l}{i}\right)$. In diesem Falle ist $\xi = \frac{\mathfrak{d}^3 b'}{\mathfrak{d}'^3 b} = 0$. Abb. 2 b.

In praktischen Fällen wird ξ im allgemeinen zwischen 1 und 0 liegen ; Fig. 2 c. In diesen Fällen genügt es, zwischen den beiden Grenzwerten $\frac{0{,}606}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i}$ und $\frac{0{,}800}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i}$, die sich ja nicht allzu sehr voneinander unterscheiden, linear einzuschalten. So gelangen wir zu der folgenden einfachen Formel für geschlossene Querschnitte

$$\frac{b}{\mathfrak{d}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} \left(0{,}8 - 0{,}2 \frac{\mathfrak{d}^3 b'}{\mathfrak{d}'^3 b}\right) \frac{l}{i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Hierbei sind $\mathfrak{d}$ und b die Abmessungen der schwächeren Wand. $\frac{\mathfrak{d}^3 b'}{\mathfrak{d}'^3 b}$ ist also immer kleiner als 1.

Die Zahl τ lässt sich nun für jede Stahlsorte aus dem Spannungsdehnungsdiagramm als Funktion der Schlankheit $\frac{l}{i}$ darstellen. Für gewöhnlichen Baustahl von 37-45 kg/mm² Festigkeit schlage ich folgende Formel vor [1] :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i} = 33 + 0{,}67 \frac{l}{i} \qquad \text{giltig für } \frac{l}{i} \leqslant 100.$$

1. Die folgenden Beziehungen wurden mit Hilfe der Tetmajerschen Geradenformel für gewöhnlichen Baustahl abgeleitet.

Für $\frac{l}{i} > 100$ gilt $\frac{1}{\sqrt{\tau}} = 1$.

Damit geht Gleichung (8) in folgende zwei Formeln über:

für $\frac{l}{i} \leqslant 100$ | für $\frac{l}{i} > 100$

$$\frac{b}{\mathfrak{d}} = \left(33 + 0{,}67\,\frac{l}{i}\right)\left(0{,}8 - 0{,}2\,\frac{\mathfrak{d}^3 b'}{\mathfrak{d}'^3 b}\right) \qquad \frac{b}{\mathfrak{d}} = \left(0{,}8 - 0{,}2\,\frac{\mathfrak{d}^3 b'}{\mathfrak{d}'^3 b}\right)\frac{l}{i} \quad \ldots \quad (8')$$

Die Wände eines Stabes nach Abb. 2 a beulen in Wellen aus, deren Länge bei schlanken Stäben gleich der Plattenbreite b ist. Im Falle 2 b sind die Wellen noch kürzer, nämlich 0,67 b. Es hätte daher keinen Sinn, die Ausbeulung durch Querschotten verhindern zu wollen, da diese so eng gesetzt werden müssten, dass ihre Anordnung unwirtschaftlich wird. Bei gedrückten geschlossenen Druckstäben hat daher die übliche Anordnung von Querschotten in Abständen von dem Mehrfachen der Breite der schwächeren Wandplatten keine Erhöhung der Tragfähigkeit zur Folge.

Gleichung (8') findet Anwendung auf die in Abb. 3 a-d im Querschnitt dargestellten Druckstäbe, wobei in den Fällen 3 c und 3 d die Stege sich wie frei

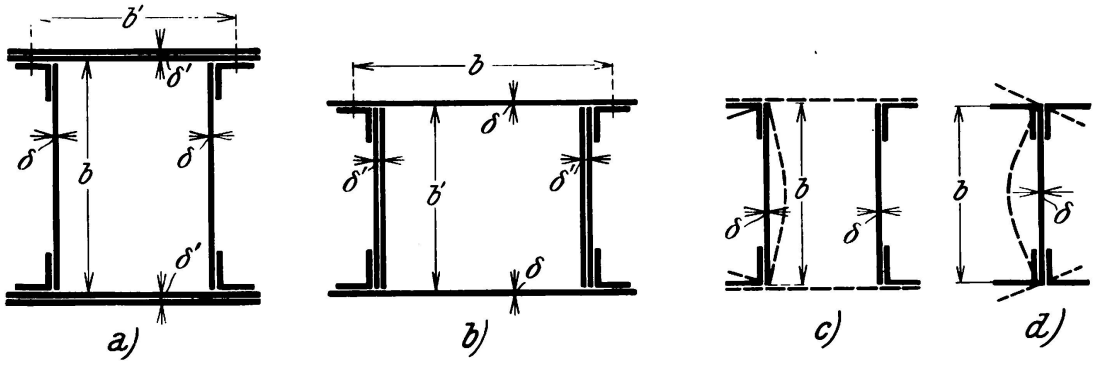


Fig. 3.

drehbar gelagerte Platten verhalten. Für diese beiden Stabformeln gelten sonach die einfachen Formeln

$$\text{für } \frac{l}{i} \leqslant 100 \ldots\ldots \frac{b}{\mathfrak{d}} = 20 + 0{,}4\,\frac{l}{i}; \qquad \text{für } \frac{l}{i} > 100 \ldots\ldots \frac{b}{\mathfrak{d}} = 0{,}6\,\frac{l}{i}.$$

Bei Walzträgern und ⊏-Eisen liegt das Verhältnis $\frac{b}{\mathfrak{d}}$ ungünstigsten Falles bei 28, so dass ein Ausbeulen bei Druckstäben mit einem Schlankheitsgrad $\frac{l}{i} > 20$ ausgeschlossen ist.

2. Fall. Die Platte ist an beiden Rändern $x = \pm \frac{a}{2}$ frei drehbar gelagert. Am Rande $y = + \frac{b}{2}$ ist sie elastisch eingespannt, am anderen Rande vollständig frei.

Die Integration der Differentialgleichung (1) führt auf ähnlichem Wege wie beim ersten Fall auf folgende Gleichung für die kritische Belastung σ_k [5]

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\mathfrak{d}}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Diese Gleichung zeigt den gleichen Bau wie Gl. (6), nur haben p und q andere Werte. Es ist jetzt :

wenn ein Rand frei drehbar ist : $p = 0{,}425 \quad q = 0$;

wenn ein Rand fest eingespannt ist : $p = 0{,}570 \quad q = 0{,}125$.

Bei elastischer Einspannung liegen die Werte p und q zwischen den beiden eben angegebenen Grenzen.

Soll gleiche Sicherheit gegen Ausbeulen der Wände wie gegen Ausknicken des ganzen Stabes bestehen, so muss wieder die Beziehung

$$\frac{\pi^2 E \tau}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q})$$

gelten, aus der die gleiche Formel wie oben

$$\frac{b}{\delta} = \frac{\sqrt{p + 2\sqrt{q}}}{2\sqrt{3(1-\mu^2)\sqrt{\tau}}} \left(\frac{l}{i}\right)$$

hervorgeht. In den beiden in Abb. 4 a und b dargestellten Grenzfällen erhält man folgende Ergebnisse :

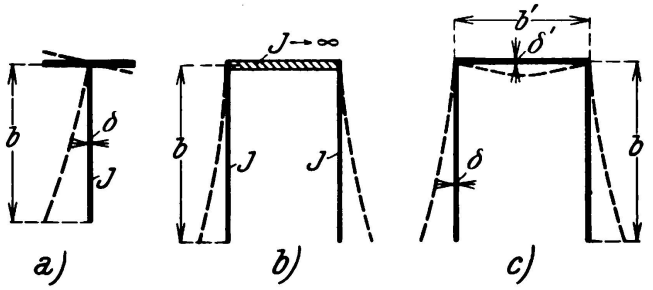


Fig. 4.

Freie Drehbarkeit des einen Randes, Abb. 4 a. $p = 0{,}425$, $q = 0$

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0{,}197}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i} \approx \frac{0{,}20}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i};$$

Feste Einspannung des einen Randes, Abb. 4 b. $p = 0{,}570$, $q = 0{,}125$

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0{,}342}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i} \approx \frac{0{,}34}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i}.$$

Für elastische Einspannung ergibt sich demnach, wenn man als Mass derselben $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}$ einführt, siehe Abb. 4 c, bei linearer Einschaltung

$$\frac{b}{\delta} = \frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} \left(0{,}34 - 0{,}14 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right) \frac{l}{i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Aus dieser Gleichung erhält man unter Benützung des oben angegebenen linearen Zusammenhanges zwischen τ und $\frac{l}{i}$ die beiden folgenden Bemessungsformeln :

$$\frac{l}{i} \leqslant 100 : \qquad \frac{b}{\delta} = \left(33 + 0{,}67 \frac{l}{i}\right) \left(0{,}34 - 0{,}14 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right) \quad \ldots \quad (10')$$

Tafel —

Bemessungsformeln für gewöhnlichen Baustahl —

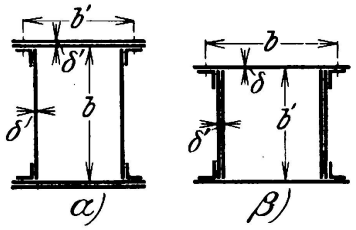
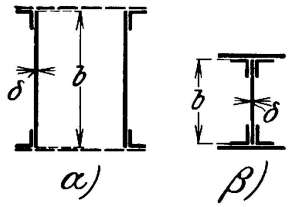
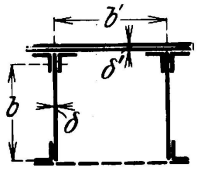
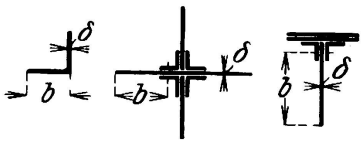
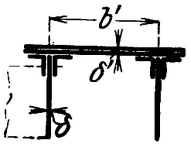
Nr	Stabquerschnitt — Coupe Section	$\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erforderlich}}$ nécessaire
1	 α) β)	$\frac{l}{i} \leqslant 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{erf} = \left(33 + 0{,}67\,\frac{l}{i}\right)\left(0{,}8 - 0{,}2\,\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right)$ $\frac{l}{i} > 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{erf} = \left(0{,}8 - 0{,}2\,\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right)\frac{l}{i}$
2	 α) β)	$\frac{l}{i} \leqslant 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{erf} = 20 + 0{,}4\,\frac{l}{i}$ $\frac{l}{i} > 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{erf} = 0{,}6\,\frac{l}{i}$
3		$\frac{l}{i} \leqslant 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{erf} = \left(33 + 0{,}67\,\frac{l}{i}\right)\left(0{,}7 - 0{,}1\,\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right)$
4		$\frac{l}{i} \leqslant 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{erf} = \left(6{,}6 + 0{,}134\,\frac{l}{i}\right)$ $\frac{l}{i} > 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{erf} = 0{,}2\,\frac{l}{i}$
5		$\frac{l}{i} \leqslant 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{erf} = \left(33 + 0{,}67\,\frac{l}{i}\right)\left(0{,}34 - 0{,}14\,\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right)$ $\frac{l}{i} > 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{erf} = \left(0{,}34 - 0{,}14\,\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right)\frac{l}{i}$

Tableau — Table

Formules pour Acier doux — Formulae for Soft Steel

Anmerkung — Annotation Remark
$\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} \leqslant 1$ Querschotten nur an den Stabenden. Weitere Schotten erhöhen nicht die Tragfähigkeit. Entretoisements transversaux seulement aux extrémités de la barre. Des entretoisements supplémentaires n'augmentent pas la résistance. Diaphragms only at the ends of the bar. Intermediate diaphragms don't increase the strength.
Querschotten im Falle α) nur an den Stabenden. Weitere Schotten erhöhen nicht die Tragfähigkeit. Pour la barre α) entretoisements transversaux seulement aux extrémités. Des entretoisements supplémentaires n'augmentent pas la résistance. In case α) only end diaphragms. Intermediate diaphragms don't increase the strength.
Querschotten nur an den Stabenden. Weitere Schotten erhöhen nicht die Tragfähigkeit. Entretoisements transversaux seulement aux extrémités de la barre. Des entretoisements supplémentaires n'augmentent pas la résistance. Diaphragms only at the ends of the bar. Intermediate diaphragms don't increase the strength.
Säumt man den Querschnitt am freien Rande mit Winkeln, so können die nach nebenstehenden Formeln errechneten Verhältnisse $\frac{b}{\delta}$ zweimal so gross genommen werden. Lorsque les bords libres des tôles sont renforcés par des fers cornières, les coefficients $\frac{b}{\delta}$ peuvent atteindre le double de la valeur indiquée. When bordering the free edge of the web with angle iron, $\frac{b}{\delta}$ may increase up to its double value.
Wird $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} < 1$ [schwache Deckbleche], so ist es zweckmässig Schottenbleche anzuordnen. Ist ihr Abstand a, so beträgt für $\frac{l}{i} \leqslant 100$: Pour $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} < 1$ [semelles faibles], des entretoisements intermédiaires sont à recommander. Si la distance entre elles est a, on trouve pour $\frac{l}{i} \leqslant 100$: When $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} < 1$ [thin booms], intermediate diaphragms are desirable. If their distance is a, and $\frac{l}{i} \leqslant 100$, then will be : $$\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\substack{\text{erf} \\ \text{necess.}}} = \left(10 + 0{,}2\,\frac{l}{i}\right)\sqrt{\frac{b}{2a} + 0{,}42}$$

$$\frac{l}{i} > 100 : \qquad \frac{b}{\delta} = \left(0{,}34 - 0{,}14 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right) \frac{l}{i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10')$$

Ist der eine Plattenrand frei drehbar gelagert, so beult die Platte, gleichgiltig welche Länge sie hat, in einer Halbwelle aus. Ist die Platte einerseits eingespannt, so bilden sich bei genügender Länge a mehrere Halbwellen aus. Es ist daher in dem in Abb. 4 dargestellten Fall zweckmässig, Querschotten einzubauen, um die Tragkraft der Stäbe zu vergrössern. Ist die Entfernung der Schotten a, so gilt folgende Gleichung [5]

$$\frac{b}{\delta} = \left(10 + 0{,}2 \frac{l}{i}\right) \sqrt{\frac{b}{2a} + 0{,}42} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

giltig für $\frac{l}{i} \leqslant 100$.

Die Formeln (10′) finden Anwendung auf die in Abb. 5 dargestellten Quer-

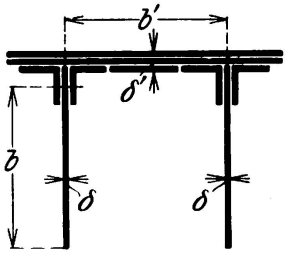


Fig. 5.

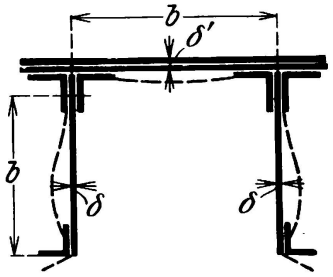


Fig. 6.

schnittsformen. Sie liefern bei kleinen Schlankheitsverhältnissen $\frac{l}{i}$ grössere Blechstärken als man gewohnt ist auszuführen. Die im Brückenbau gebräuchlichen Erfahrungsregeln geben bei gedrungen gebauten Stäben nicht die nötige Sicherheit gegen Ausbeulen.

Will man grössere Steghöhen erzielen, dann ist es unbedingt notwendig, den freien Rand der Bleche durch Winkel zu säumen und diese Winkel durch Querschotten gegen seitliches Ausweichen zu sichern. Die Stegverformung wird dann etwa so wie in Abb. 6 dargestellt erfolgen. Der Steg ist einerseits elastisch eingespannt, andererseits frei drehbar gelagert. Man kann daher einen aus Formel (8′) errechneten Mittelwert

$$\frac{b}{\delta} = \left(33 + 0{,}67 \frac{l}{i}\right) \left(0{,}7 - 0{,}1 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

benützen, Formel (12) gilt für $\frac{l}{i} \leqslant 100$.

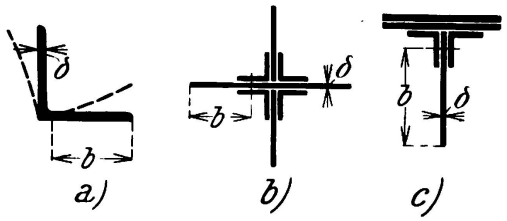


Fig. 7.

Die freien Stege der in Abb. 7 im Querschnitt dargestellten Stäbe verhalten sich so wie Platten, die entlang des einen Randes frei drehbar gelagert sind. Hierfür ergibt sich die einfache Formel

$$\frac{l}{i} \leqslant 100 \ldots\ldots \frac{b}{\delta} = \left(6{,}6 + 0{,}134 \frac{l}{i}\right). \quad (13)$$

Für den praktischen Gebrauch bei der Bemessung der dünnen Wände von auf zentrischen Druck beanspruchten Stäben werden daher die in der Tafel zusammengestellten Formeln und Regeln vorgeschlagen.

Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit Versuchswerten.

Laboratoriumsversuche an einzelnen in ihrer Ebene gedrückten Platten zur Feststellung ihrer Stabilität sind meines Wissens bisher noch nicht durchgeführt worden. Doch habe ich in den Veröffentlichungen über Versuche mit aus Platten zusammengesetzten Stäben, die den im Brückenbau verwendeten Stabformen nachgebildet waren, einzelne Fälle gefunden, die ganz gut geeignet sind, die oben abgeleiteten Formeln auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen. Es sind dies Versuche, die in den Jahren 1912 und 1913 mit Stäben aus gewöhnlichem Baustahl auf Veranlassung der Board of Engineers gelegentlich des Neubaues der Quebecbrücke durchgeführt wurden [1].

Zwei Versuchsgruppen, bei denen deutlich die Zerstörung des Stabes durch Ausbeulen der Stabwände ersichtlich ist, kommen hier in Betracht.

Das verwendete Material hatte eine mittlere Streckgrenze von 3,01 t/cm² und eine mittlere Festigkeit von 4,58 t/cm² bei 23 % Bruchdehnung.

1. Versuchsgruppe. Für die Nachrechnung kommen 4 gleiche Stäbe von 2,87 cm Knicklänge nach Abb. 8 in Betracht. Versuche Nr. TC 1,1 TC 1,2

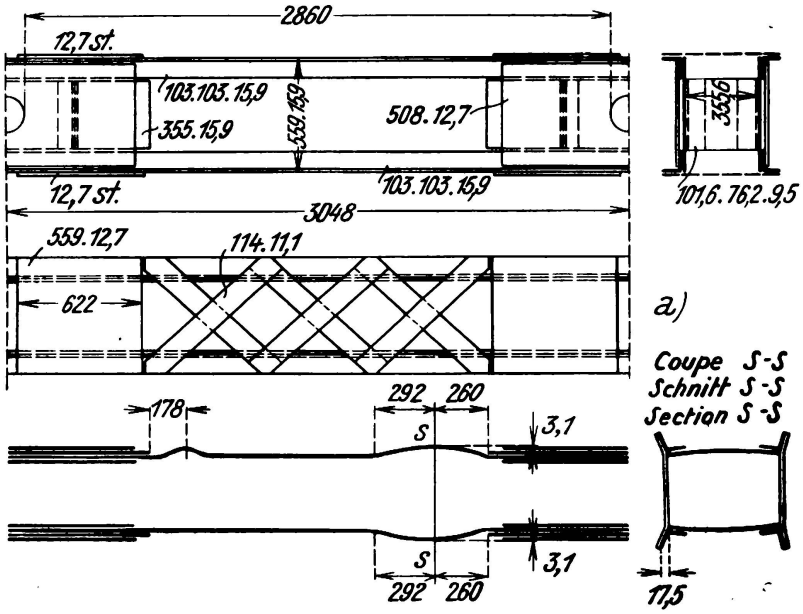


Fig. 8.

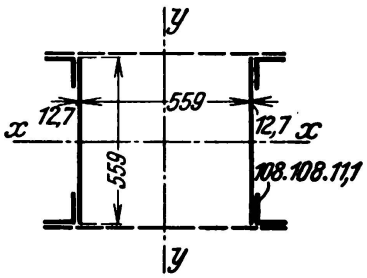


Fig. 9.

TC 2,1 TC 2,2. Die Stäbe bestanden aus zwei Blechen 559.15,9 und 4 Gurtwinkeln 103.15,9. Die beiden Wände waren durch Flacheisenvergitterung verbunden. Die Bemessung der Wände dieser Stäbe hätte nach Fall 2 in der oben stehenden Tafel zu erfolgen.

---

1. Dr. Ing. Rudolf Mayer. Die Knickfestigkeit. Berlin, 1921, S. 421 ff.

Mit den Querschnittswerten $F = 296$ cm², $i = 20{,}55$ cm, $l = 286$ cm findet man $\frac{l}{i} = 14$ und daher nach der in der Tafel unter 2 angegebenen Formel

$$\left(\frac{b}{\delta}\right)_{erf} = 20 + 0{,}4\,\frac{l}{i} = 25{,}6.$$

Das tatsächliche Verhaltnis war aber $\frac{55{,}9}{1{,}59} = 35{,}2$.

Es mussten daher alle Stäbe dieser Bauart vorzeitig durch Ausbeulen der Bleche zugrunde gehen. Tatsächlich beträgt die Knickspannung nach Tetmajer $\sigma = 2{,}94$ t/cm², während die 4 Stäbe bei 2, 60, 2,74, 2,70 und 2,68 t/cm²; i.M. also bei 2,68 t/cm² vollständig durch Verbeulen der Stege versagten.

Zur Ueberprüfung der Richtigkeit der hier in Betracht kommenden Formel (6) für die kritische Spannung σ_k führen wir folgende Rechnung durch :

Für frei drehbare Plattenränder ist $p = 2$, $q = 1$ daher

$$\sigma_k = \frac{4\pi^2 E\sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2 = 7770\sqrt{\tau}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2.$$

Stellt man τ nach der bekannten aus den Versuchen Tetmajers abgeleiteten Formel Engessers

$$\tau = \frac{\sigma_k}{E}\left(\frac{3{,}1-\sigma_k}{0{,}0358}\right)^2$$

dar und führt man diesen Wert in die voranstehende Gleichung für σ_k ein, so erhält man σ_k in der Form

$$\sigma_k = \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - 9{,}61} \qquad \text{mit } r = \frac{\left(\frac{b}{\delta}\right)^4}{2190.10^4} + 6{,}2 \text{ (in t und cm)}.$$

Da $\frac{b}{\delta} = 35{,}2$, so folgt

$$\sigma_k = 2{,}67 \text{ t/cm}^2.$$

Diese kritische Beanspruchung stimmt nahezu vollständig mit der beobachteten Spannung von 2,68 t/cm² überein. Die Verformung der Bleche bei Stab T C 1,1 lässt Fig. 8 gut erkennen.

2. Versuchsgruppe. Die Querschnittsgestaltung der Stäbe war ähnlich wie vor, siehe Abb. 9, doch hatten die Stäbe 1020 cm Knicklänge. $\frac{l}{i}$ war hier 50,7. Geprobt wurden zwei gleiche Stäbe, die bei $\sigma_k = 2{,}55$ und $\sigma_k = 2{,}33$ t/cm² knickten. Der Mittelwert beträgt 2,44 t/cm².

Für die Wandbleche 559.12,7 war $\frac{b}{\delta} = 44$. Damit erhält man nach der gleichen Formel für σ_k, die oben benützt wurde.

$$\sigma_k = 2{,}46 \text{ t/cm}^2.$$

Beide Stäbe gingen durch Ausbeulen der Stegbleche zugrunde. Der Mittelwert des Versuches 2,44 t/cm² stimmt sehr gut mit dem Rechnungswert 2,46 t/cm² überein.

TRADUCTION

Les parties comprimées des constructions métalliques, telles que, par exemple, les barres d'un treillis, les poteaux, sont en règle générale déterminées en ne considérant que la stabilité au flambage de la pièce entière. Mais ces pièces sont souvent constituées d'éléments minces et plans qui, pris en eux-mêmes, peuvent présenter un état d'instabilité et se voiler souvent bien avant que ne commence le flambage de la barre elle-même. Ces éléments ont de ce fait une grande importance et jouent, particulièrement dans la construction des ponts, un rôle prédominant. Il paraît donc indiqué de disposer de règles et formules simples pour les calculer, d'autant plus que, par suite de l'emploi des aciers à haute résistance, on a toujours tendance à diminuer de plus en plus l'épaisseur des parois.

Cette étude se borne à résoudre le problème de la façon suivante : établir des règles simples pour proportionner l'épaisseur de la section par rapport aux autres dimensions des parois et des barres, et cela en se basant sur la théorie connue de la stabilité des plaques comprimées. On ne considérera dans ce rapport que des *parois minces appartenant à des barres uniformément comprimées*. Le problème analogue qui se pose pour l'âme mince des poutres fléchies sera traité dans le mémoire du professeur St. Timoschenko.

La question de la stabilité des plaques rectangulaires comprimées a été traitée pour la première fois par Bryan, 1891 [1]. Plus tard Reissner [2], Timoschenko [3] et Lilly [4] se sont occupés de ce problème. F. Bleich [5] a établi des formules pratiques simples pour la construction métallique.

L'étude part de l'état d'équilibre, représenté par la figure 1, d'une plaque rectangulaire d'épaisseur δ, dont les côtés $x = +\frac{a}{2}$ et $x = -\frac{a}{2}$ supportent une pression uniforme $\sigma . \delta$.

Les bords $x = \pm \frac{a}{2}$ sont articulés, tandis que pour les côtés $y = \pm \frac{b}{2}$ on considère les cas suivants :

1° Les côtés $y = \pm \frac{b}{2}$ sont élastiquement encastrés.

2° Le côté $y = +\frac{b}{2}$ est élastiquement encastré.

Le côté $y = -\frac{b}{2}$ est complètement libre.

Dans le cas où a est grand par rapport à b, le mode de fixation des bords

1. G. K. Bryan. On the Stability of a Plan Plate under Thrusts in its own Plane with Application on the « Buckling » of the Sides of a Ship. London Math. Soc. Proc., 1891, p. 54.
2. H. Reissner. Über die Knicksicherheit ebener Bleche. Zentralblatt der Bauverwaltung, 1909, p. 93.
3. S. Timoschenko. Sur la stabilité des systèmes élastiques. Ann. des Ponts et Chaussées. Über die Stabilität versteifter Platten. Der Eisenbau, 1921, p. 147.
4. W. E. Lilly. Web Stresses in Plate Girders and Columns. Engineering, 1907, p. 156.
5. F. Bleich. Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin, 1924.

$x = \pm \frac{a}{2}$ a peu d'influence sur le résultat. Dans les barres comprimées, a est toujours un multiple de b, on peut donc admettre, pour ces côtés, un genre de fixation qui conduise à des résultats aussi simples que possible.

L'étude théorique a pour point de départ l'équation différentielle de déformation des plaques minces, qui sont soumises, suivant une direction, à une compression uniforme $\sigma . \delta$. Cette équation différentielle est :

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot \tau + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \sqrt{\tau} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right] + \sigma . \delta . \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Pour généraliser l'équation différentielle (1) on a fait la supposition suivante :

Le matériau devient anisotrope lorsqu'on dépasse la limite d'élasticité, c'est-à-dire que le module de flambage T de KÁRMÁN (variable avec σ) est valable dans la direction de la pression x, alors que le module d'élasticité E (invariable) est valable dans la direction perpendiculaire y. M. BLEICH a de cette façon généralisé l'équation différentielle, bien connue dans la théorie de l'élasticité, en introduisant les coefficients τ et $\sqrt{\tau}$ [1] où $\tau = \frac{T}{E}$

$\tau = 1$ tant que σ ne dépasse pas la limite d'élasticité σ_E.
$\tau < 1$ si σ dépasse σ_E.

Dans l'équation (1), D représente la rigidité : $D = \frac{E.J}{1 - \mu^2} = \frac{E.\delta^3}{12(1 - \mu^2)}$
($\mu = 0{,}3$ pour l'acier).

La proposition (1) est justifiée par la concordance des valeurs critiques calculées de la pression spécifique σ avec les valeurs de σ observées au cours des essais.

1er cas. La plaque est articulée sur les côtés $x = \pm \frac{a}{2}$ et encastrée élastiquement sur les deux autres côtés $y = \pm \frac{b}{2}$.

La solution de l'équation différentielle (1) prend par raison de symétrie la forme :

$$w = \cos \frac{n \pi x}{a}\left[A \cosh k_1 y + C \cos k_2 y\right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

où k_1 et k_2 sont déterminés par les équations [1] :

$$k_1^2 = \frac{n\pi}{a}\left(\sqrt{\frac{\sigma . \delta}{D}} + \sqrt{\tau}\,\frac{n\pi}{a}\right)$$

$$k_2^2 = -\frac{n\pi}{a}\left(\sqrt{\frac{\sigma . \delta}{D}} - \sqrt{\tau}\,\frac{n\pi}{a}\right)$$

A et C sont des constantes qui sont déterminées par les conditions aux appuis $y = \pm \frac{b}{2}$. n indique le nombre des demi-ondulations dans la direction x quand la plaque se voile. Le long des deux côtés $y = \pm \frac{b}{2}$ les conditions suivantes sont valables :

$$w = 0 \text{ et } M = \nu . \frac{\partial w}{\partial y}$$

1. F. BLEICH. Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1924.

où M désigne le moment fléchissant au bord et ν un facteur de proportionnalité, qui dépend du degré d'encastrement.

Comme d'après la théorie de l'élasticité nous avons pour les bords de la plaque :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$M = \frac{EJ}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Les deux conditions aux appuis se simplifient de la façon suivante :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \xi \frac{b}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ξ est une constante qui dépend du mode d'encastrement.

$\xi = \infty$ si le bord est articulé.

$\xi = 0$ si le bord est rigidement encastré.

Si on introduit la solution (2) dans les relations (3), on obtient, pour A et C, deux équations homogènes qui n'admettent de racines non nulles que lorsque leur déterminant s'annule.

La condition de flambage prend alors la forme

$$\operatorname{tg} \frac{v.n}{\alpha} \sqrt{\rho - 1} \cdot \frac{\pi}{2} = - \frac{\pi \rho \xi}{\sqrt{\rho - 1}} \frac{v.n}{\alpha} - \frac{\sqrt{\rho + 1}}{\sqrt{\rho - 1}} \ldots\ldots \quad (4)$$

où v, α et ρ sont définis par les relations suivantes :

$$v = \sqrt[4]{\tau}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad \rho^2 = \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \cdot \frac{\delta}{\tau . D} \sigma_k \ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

De l'équation transcendante (4) on tire ρ, et par suite de l'équation (4') l'effort critique σ_k.

On peut remplacer avec une grande approximation la relation transcendante entre les valeurs ρ et $\frac{v\,n}{\alpha}$, représentée par l'équation (4), par une équation algébrique de la forme

$$\rho^2 = 1 + p \left(\frac{\alpha}{v.n}\right)^2 + q \left(\frac{\alpha}{v.n}\right)^4 \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

dans laquelle p et q sont des fonctions du coefficient d'encastrement ζ.

En particulier :

Pour les bords articulés : $p = 2$, $q = 1$.

Pour les bords rigidement encastrés : $p = 2{,}50$; $q = 5$.

En réunissant les équations (4') et (5) on obtient, pour l'effort critique σ_k, la relation :

$$\sigma_k = \left[\left(\frac{v.n}{\alpha}\right)^2 + p + q \left(\frac{\alpha}{v.n}\right)^2\right] \cdot \frac{E \pi^2 \sqrt{\tau}}{12 (1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{\delta}{b}\right)^2$$

de $\frac{\partial \sigma_k}{\partial \frac{\alpha}{v.n}} = 0$, on tire enfin la valeur minimum de σ_k qui permet de déterminer les dimensions :

$$\sigma_k = \frac{E \pi^2 \sqrt{\tau}}{12 (1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 \left(p + 2\sqrt{q}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Si l'on veut finalement calculer les parois des barres comprimées de telle façon que chaque paroi offre par elle-même la même sécurité contre le voilement que celle qu'offre l'élément dans son ensemble contre le flambage, la tension σ_k qui cause le voilement doit être égale à la tension critique sous laquelle flambe l'élément. On a donc la relation :

$$\frac{\pi^2 E \tau}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12\,(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 \left(p + 2\sqrt{q}\right)$$

$\left(\frac{l}{i}\right)$ étant l'indice de finesse, c'est-à-dire le rapport de la longueur de l'élément au rayon minimum de giration. On en déduit la loi suivante pour le rapport $\frac{\delta}{b}$, de l'épaisseur à la largeur de la plaque :

$$\frac{b}{\delta} = \frac{\sqrt{p + 2\sqrt{q}}}{2\sqrt{3\,(1-\mu^2)\sqrt{\tau}}} \left(\frac{l}{i}\right) = \frac{0{,}303}{\sqrt[4]{\tau}} \sqrt{p+2\sqrt{q}} \cdot \left(\frac{l}{i}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Cette équation (7) fait ressortir, fait important, que le rapport $\frac{b}{\delta}$ croît avec le rapport $\frac{l}{i}$.

Plus la barre est longue et plus sa section est faible, en un mot, plus sa finesse est grande, plus ses parois peuvent être minces.

L'équation (7) fournit les valeurs particulières suivantes pour les deux cas extrêmes qui sont représentés dans la figure 2 :

Dans une barre comprimée composée de quatre parois d'égale largeur et d'égale épaisseur, les parois elles-mêmes se comportent chacune comme des plaques prenant appui librement sur les deux bords, étant donné que ces parois se déforment simultanément, sans pouvoir se décharger mutuellement par l'intervention d'un encastrement. Si, dans ce cas, on introduit dans l'équation (7) les valeurs indiquée ci-dessus, $p = 2$ et $q = 1$, on arrive à :

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0{,}606}{\sqrt[4]{\tau}} \left(\frac{l}{i}\right).$$

En général, si l'on considère les bords des plaques comme articulés, la valeur de ζ est égale à $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}$ pour différentes largeurs b et b' des deux parois.

Si, par contre, deux parois sont très rigides par rapport aux deux autres, le rapport $\frac{b}{\delta}$ s'approche de la valeur limite pour l'encastrement rigide, qui est pour $p = 2{,}5$; $q = 5$:

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0{,}800}{\sqrt[4]{\tau}} \left(\frac{l}{i}\right).$$

Dans ce cas, $\zeta = \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} = 0$ (fig. 2 *b*).

Dans la pratique, ζ varie en général entre 1 et 0, il suffit d'interpoler linéairement entre les deux valeurs limites $\frac{0{,}606}{\sqrt[4]{\tau}}\left(\frac{l}{i}\right)$ et $\frac{0{,}800}{\sqrt[4]{\tau}}\left(\frac{l}{i}\right)$, qui ne diffèrent pas beaucoup l'une de l'autre. Nous arrivons ainsi à la formule simple suivante pour des sections en caisson :

$$\frac{b}{\mathfrak{d}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\tau}}\left(0{,}8 - 0{,}2\,\frac{\mathfrak{d}^3 b'}{\mathfrak{d}'^3 b}\right)\cdot\frac{l}{i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

dans laquelle $\mathfrak{d}$ et b sont les dimensions de la paroi la plus faible ; $\frac{\mathfrak{d}^3 b'}{\mathfrak{d}'^3 b}$ est ainsi toujours plus petit que 1.

La valeur de τ peut être représentée comme une fonction de la finesse $\frac{l}{i}$, si l'on se base sur le diagramme des tensions et des déformations correspondant à chaque catégorie d'acier. F. Bleich propose la formule suivante pour l'acier ordinaire de construction, ayant une résistance à la traction de 37 à 45 kg/mm² :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\tau}}\cdot\frac{l}{i} = 33 + 0{,}67\,\frac{l}{i} \qquad \text{pour } \frac{l}{i} \leqslant 100$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} = 1 \qquad \text{pour } \frac{l}{i} > 100.$$

De la formule (8) on tire les deux formules suivantes :

$$\left.\begin{array}{c} \text{Pour } \frac{l}{i} \leqslant 100 \\ \frac{b}{\mathfrak{d}} = \left(33 + 0{,}67\,\frac{l}{i}\right)\left(0{,}8 - 0{,}2\,\frac{\mathfrak{d}^3 b'}{\mathfrak{d}'^3 b}\right) \\ \text{Pour } \frac{l}{i} > 100 \\ \frac{b}{\mathfrak{d}} = \left(0{,}8 - 0{,}2\,\frac{\mathfrak{d}^3 b'}{\mathfrak{d}'^3 b}\right)\cdot\frac{l}{i} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8')$$

Les parois d'un élément semblable à celui de la figure 2 *a* se voilent en formant des ondulations qui, pour les barres élancées, ont une longueur égale à la largeur b de la plaque. Dans le cas de la figure 2 *b*, les ondulations sont plus courtes, à savoir égales à 0,67 b. Il n'y aurait donc pas lieu de vouloir éviter le voilement par des entretoisements, car ces derniers devraient être disposés si près les uns des autres que ce renforcement ne serait pas économique. Ainsi, dans les barres comprimées à section en caisson, la capacité de charge n'est nullement augmentée par la disposition habituellement adoptée d'entretoisements séparés par des intervalles multiples de la largeur de la paroi la plus faible.

L'équation (8) trouve son application pour les barres comprimées dont la section est représentée par les figures 3 *a-d*. Dans les cas représentés par les figures 3 *c* et 3 *d*, les âmes se comportent comme des plaques librement articulées aux appuis. Pour ces deux types d'éléments, on a par conséquent les formules simples suivantes :

$$\text{Pour } \frac{l}{i} \leqslant 100. \quad \frac{b}{\mathfrak{d}} = 20 + 0{,}4\,\frac{l}{i}, \qquad \text{pour } \frac{l}{i} > 100. \quad \frac{b}{\mathfrak{d}} = 0{,}6\,\frac{l}{i}. \quad (8'')$$

Dans les profilés, y compris les fers en ⊏, le rapport $\frac{b}{\delta}$ étant égal à 28 dans le cas le plus défavorable, de sorte que le voilement n'est pas à craindre pour les barres comprimées, pour lesquels l'indice $\frac{l}{i}$ caractérisant la finesse est supérieur à 20.

2e cas. La plaque est articulée sur les deux bords $x = \pm \frac{a}{2}$; le côté $y = + \frac{b}{2}$ est encastré élastiquement et l'autre côté est complètement libre.

De l'intégration de l'équation différentielle (1) conduite comme dans le premier cas, résulte l'équation suivante donnant l'effort critique σ_k[1] :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Cette équation présente la même structure que l'équation (6) toutefois avec d'autres valeurs pour p et q ; on a maintenant : si un côté est articulé : $p = 0{,}425$; $q = 0$; si un côté est totalement encastré : $p = 0{,}570$; $q = 0{,}125$. Pour un encastrement élastique, les valeurs de p et q varient entre les limites ci-dessus.

La sécurité devant être la même contre le voilement des parois et le flambage de la barre entière, la relation ci-dessous doit être satisfaite :

$$\frac{\pi^2 E \tau}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}).$$

De celle-ci résulte la même formule que précédemment :

$$\frac{b}{\delta} = \frac{\sqrt{p + 2\sqrt{q}}}{2\sqrt{3(1-\mu^2)\sqrt{\tau}}} \left(\frac{l}{i}\right).$$

Dans les deux cas extrêmes, représentés par les figures 4 *a* et *b*, on obtient les résultats suivants :

Un des côtés présente un appui articulé (fig. 4 *a* ; $p = 0{,}425$; $q = 0$)

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0{,}197}{\sqrt[4]{\tau}} \cdot \frac{l}{i} \approx \frac{0{,}2}{\sqrt[4]{\tau}} \cdot \frac{l}{i}.$$

Un des côtés présente un encastrement rigide (fig. 4 *b* ; $p = 0{,}570$; $q = 0{,}125$)

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0{,}342}{\sqrt[4]{\tau}} \cdot \frac{l}{i} \sim \frac{0{,}34}{\sqrt[4]{\tau}} \cdot \frac{l}{i}.$$

Pour un encastrement élastique (fig. 4 *c*), si l'on introduit l'expression $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}$ comme mesure de celui-ci, et si on interpole linéairement, on trouve :

$$\frac{b}{\delta} = \frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} \left(0{,}34 - 0{,}14 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right) \left(\frac{l}{i}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

1. F. Bleich. Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin, 1924.

De cette équation on obtient, en utilisant la relation linéaire entre τ et $\frac{l}{i}$, indiquée précédemment, les deux formules suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pour } \frac{l}{i} \leqslant 100 : & \frac{b}{\delta} = \left(0{,}33 + 0{,}67\,\frac{l}{i}\right)\left(0{,}34 - 0{,}14\,\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right) \\ \text{Pour } \frac{l}{i} > 100 : & \frac{b}{\delta} = \left(0{,}34 - 0{,}14\,\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right)\cdot\frac{l}{i} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (10')$$

Une plaque dont l'un des côtés est articulé se voile, quelle que soit sa longueur, suivant une demi-ondulation. Dans une plaque encastrée suivant l'un de ses côtés, il se forme plusieurs demi-ondulations si elle est suffisamment longue. Dans le cas représenté par la figure 4, il est indiqué de disposer des entretoisements pour augmenter la résistance de la barre. L'intervalle entre les entretoisements étant a, on a l'équation suivante :

$$\frac{b}{\delta} = \left(10 + 0{,}2\,\frac{l}{i}\right)\sqrt{\frac{b}{2a} + 0{,}42} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

valable pour $\frac{l}{i} \leqslant 100$.

La formule (10') trouve son application aux sections du type représenté par la figure 5 ; elle donne pour des degrés de finesse $\frac{l}{i}$ petits des épaisseurs de tôle plus grandes que celles que l'on emploie habituellement. Les formules empiriques employées dans la construction des ponts ne donnent pas la sécurité nécessaire contre le voilement des parois des barres de courte longueur relative.

Pour des âmes de hauteur relativement grande, il est absolument nécessaire de border le côté libre de la tôle avec des cornières et de disposer des entretoises afin d'éviter leur déversement latéral. La déformation de l'âme se produira alors à peu près comme elle est représentée sur la figure 6. L'âme est encastrée élastiquement d'un côté et articulée de l'autre. On peut donc utiliser une valeur moyenne tirée de la formule (8') :

$$\frac{b}{\delta} = \left(33 + 0{,}67\,\frac{l}{i}\right)\left(0{,}7 - 0{,}1\,\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

valable pour $\frac{l}{i} \leqslant 100$.

Les âmes libres des barres dont les sections sont représentées dans les figures 7, se comportent comme des plaques articulées le long d'un côté. Dans ce cas on obtient la formule simple :

$$\frac{l}{i} \leqslant 100 : \qquad \frac{b}{\delta} = \left(6{,}6 + 0{,}134\,\frac{l}{i}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

En pratique, on propose donc d'appliquer les formules et les règles groupées dans le tableau, établies pour le calcul des parois minces des barres travaillant à la compression sous l'influence d'une charge appliquée suivant l'axe.

Comparaison entre les résultats théoriques et les valeurs obtenues expérimentalement.

Jusqu'à maintenant il semble qu'aucun essai de laboratoire n'ait été entrepris dans le but d'étudier la stabilité des plaques comprimées dans leur plan. Toutefois, dans des publications concernant des essais sur des barres composées par assemblage de tôles, telles qu'elles sont connues dans la construction des ponts, F. Bleich a signalé quelques cas particuliers permettant de vérifier l'exactitude des formules développées dans ce travail. Ces essais avaient été proposés par le Board of Engineers à l'occasion de la construction du nouveau pont de Québec et ont été exécutés en 1912 et 1913 [1].

Deux groupes d'essais doivent être pris ici en considération, dans lesquels la destruction de l'élément par voilement des parois est nettement visible.

Le métal employé présentait une limite élastique apparente moyenne de 30,1 kg/mm², une résistance à la traction moyenne de 45,8 kg/mm² et un allongement de 23 % à la rupture.

Groupe d'essais I. Aux fins de vérification, on a pris en considération quatre éléments identiques de 286 cm. de longueur de flambage (fig. 8 ; essais n° TC 1,1 ; TC 1,2 ; TC 2,1 ; TC 2,2). Les barres étaient composées de deux tôles de 559.15,9, bordées de quatre cornières 103.15,9. Les deux parois étaient entretoisées au moyen d'un treillis en fers plats. Les dimensions des parois auraient dû être déterminées d'après le tableau I, 2e cas.

Pour une section $F = 296$ cm², un rayon de giration $i = 20{,}55$ cm. et une longueur $l = 286$ cm., on a $\frac{l}{i} = 14$ et d'après la formule correspondant au 2e cas, on a

$$\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{adm.}} = 20 + 0{,}4\,\frac{l}{i} = 25{,}6.$$

En réalité le rapport était de $\frac{55{,}9}{1{,}59} = 35{,}2$. De ce fait, toutes les barres de ce type devaient être détruites prématurément par voilement des tôles. D'après Tetmajer l'effort de flambage σ est 29,4 kg/mm², tandis que lorsque les quatre barres ont cédé par voilement des âmes, la tension σ n'était que de 26, 27,4, 27 et 26,8 kg/mm² ; soit en moyenne 26,8 kg/mm².

Les calculs suivants vérifient la formule (6) qui entre ici en considération pour déterminer la tension critique σ_k : pour une plaque à appuis articulés $p = 2$, $q = 1$ et par conséquent :

$$\sigma_k = \frac{4\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2 = 7770\,\sqrt{\tau}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2$$

Si on remplace τ par la formule connue d'Engesser, déduite des essais de Tetmajer :

$$\tau = \frac{\sigma_k}{E}\left(\frac{3{,}1 - \sigma_k}{0{,}0358}\right)^2$$

1. Dr. Ing. Rudolf Mayer. Die Knickfestigkeit. Berlin, 1921. P. 421, etc.

et si l'on introduit cette valeur dans l'équation précédente donnant σ_k, on obtient :

$$\sigma_k = \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - 9{,}61} \quad \text{où} \quad r = \frac{\left(\frac{b}{\delta}\right)^4}{2190.10^4} + 6{,}2$$

(en t et cm.).

Lorsque $\frac{b}{\delta} = 35{,}2$ on obtient : $\sigma_k = 26{,}7$ kg/mm². Cette tension critique correspond assez exactement à la valeur observée de 26,8 kg/mm². La déformation des tôles de la barre TC 1,1 est représentée sur la figure 8.

Groupe d'essais II. La section des barres était semblable à celle des barres du groupe I (fig. 9), mais leur longueur de flambage était de 1.020 cm. et $\left(\frac{l}{i}\right)$ de 50,7. Deux barres identiques ont été essayées et ont flambé sous un effort de $\sigma_k = 25{,}5$ kg/mm² et 23,3 kg/mm², la valeur moyenne étant 24,4 kg/mm².

Pour les tôles des parois de 559.12,7, on avait : $\frac{b}{\delta} = 44$. En employant la même formule que ci-dessus, on obtient :

$$\sigma_k = 24{,}6 \text{ kg/mm}^2.$$

Les deux barres ont cédé par voilement des tôles des âmes. La valeur moyenne des essais 24,4 kg/mm² correspond bien à la valeur calculée de 24,6 kg/mm².

Zusammenfassung.

Von der auch für den nicht elastischen Bereich erweiterten Differentialgleichung der Ausbiegung dünner Platten ausgehend, wird die das Eintreten der Instabilität kennzeichnende kritische Druckbelastung einer langen, schmalen Platte, die in ihrer Längsrichtung gleichmässig gedrückt ist, bestimmt. An den Längsrändern können die Platten frei drehbar oder beliebig stark elastisch eingespannt sein. Unter der Annahme, dass gleiche Sicherheit für das Ausbeulen der Wände und für das Knicken des ganzen Stabes bestehen soll, werden einfache Bemessungsformeln, die die Tragfähigkeit als Funktion von $\frac{\delta}{b} = \frac{\text{Blechstärke}}{\text{Blechbreite}}$ angeben, für die praktisch wichtigen Fälle des Stahlbaues abgeleitet und in einer Tafel zusammengestellt.

Résumé.

En partant de l'équation différentielle exprimant la flexion de plaques minces, étendue à l'application aux cas non élastiques, on détermine, pour une plaque longue et mince sollicitée uniformément à la compression dans le sens de sa

longueur, la charge critique à partir de laquelle il y a instabilité. Sur leurs côtés longitudinaux, ces plaques peuvent soit être montées sur appuis libres, soit être encastrées d'une façon plus ou moins élastique. En admettant la même sécurité par rapport au voilement des parois que par rapport au flambage de la barre entière, on développe, pour le calcul des dimensions, des formules simples qui donnent la capacité en fonction du rapport $\frac{\delta}{b} = \frac{\text{épaisseur de la tôle}}{\text{largeur de la tôle}}$. Les formules relatives aux cas les plus importants qui se présentent pour les constructions métalliques sont reportées dans un tableau.

Summary.

Starting with the differential equation for the bending of thin plates, and extending it also to the non-elastic field, the critical pressure characterising the commencement of instability is determined for a long narrow plate, uniformly compressed in the direction of its longest axis. Along the edges parallel to this axis, the plate may be left free to turn, or be held quite elastically in any desired manner. Assuming that the same certainty shall exist for the bulging of the web as for the buckling of the whole test piece, simple formulae, giving the carrying capacity as a function of $\frac{\delta}{b} = \frac{\text{tickness of plate}}{\text{breadth of plate}}$, are deduced for important cases occuring in practice in steel construction, and are given in a table.

I 4

STABILITY OF PLATE GIRDERS SUBJECTED TO BENDING

LA STABILITÉ DE L'AME DES POUTRES SOLLICITÉES A LA FLEXION

DIE STABILITÄT DER STEGBLECHE VON BIEGUNGSTRÄGERN

S. TIMOSHENKO,
Professor of Engineering, University of Michigan, Ann Arbor.

Introduction.

In the design of a plate girder not only the stresses but also the elastic stability of the structure should be considered. It is well known [1] that an I-beam bent in the plane of the web may prove to be insufficiently stable and buckle sidewise. The critical value of the load at which such a buckling may occur depends not only on the lateral rigidity of flanges but also on the torsional rigidity of the beam and on the ratio of the span length to the depth of the beam. To eliminate this kind of instability an adequate system of lateral bracing is necessary [2].

Another problem of elastic stability which arises in the design of plate girders is the determination of the thickness of the web and of the spacing of the web stiffeners. It will often be found that the web thickness must be increased beyond that calculated for direct shear, on account of the tendency to buckling. Instead of increasing the thickness of the web, adequate placing of web stiffeners can be used to the same purpose of insuring the stability of the web.

The problems of sidewise buckling of an I-beam and of buckling of the web of a plate girder are discussed in this article.

I. Lateral Stability of a Girder.

1. Notations.

In this discussion the following notations are used :

$2l$ is the span of the plate girder.

h is the depth of the plate girder.

$B_1 = EJ_1$ is the flexural rigidity of the girder in the plane of the web.

$B_2 = EJ_2$ is the flexural rigidity of the girder in the direction perpendicular to the web.

1. L. PRANDTL. Kipperscheinungen, Dissertation, Nürnberg, 1899.

2. An example of the failure of girders in consequence of sidewise buckling is given by the bridge disaster near Tarbes, La Revue Technique, November 15, 1897.

Q_{cr} is the total load at which the girder becomes unstable and sidewise buckling begins.

σ_{cr} is the maximum bending stress corresponding to the load Q_{cr}.

C is the torsional rigidity of the girder.

$$\alpha = \frac{C}{B_2}\left(\frac{2l}{h}\right)^2 \quad \ldots \quad (1)$$

$$\beta = \frac{B_2}{B_1}\left(\frac{h}{2l}\right)^2 \quad \ldots \quad (2)$$

2. Critical Load.

The critical load in all cases can be represented by the equation [1]:

$$Q_{cr} = K\frac{\sqrt{B_2 C}}{(2l)^2} \quad \ldots \quad (3)$$

in wich K is a numerical factor depending on : (*a*) the magnitude of the quantity α given above by eq. (1) (*b*) the kind of loading and (*c*) the manner of fastening at the ends of the beam. It is seen that Q_{cr} can be easily calculated if the factor K is known. It should be noted that a change in the magnitude of C has a comparatively small influence on the critical load, hence in calculation of C we can use approximate formulae. In the case of an I cross section shown in figure 1 we can assume that the torsional rigidity of the beam is approximately equal to the sum of torsional rigidities of the three rectangular bars into which the beam can be subdivided, and take :

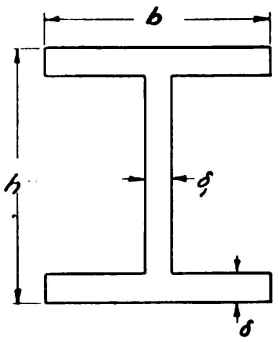


Fig. 1.

$$C = G\left(\frac{2}{3} b \delta^3 + \frac{1}{3} h \delta_1^3\right) \quad \ldots \quad (4)$$

in wich G denotes the modulus of rigidity. In a more general case C can be calculated by the use of the approximate equation of Saint-Venant :

$$C = \frac{1}{40}\frac{A^4}{J_p} G \quad \ldots \quad (5)$$

in which A denotes the cross sectional area and $J_p = \frac{B_1 + B_2}{E}$ is the polar moment of inertia of the cross section.

3. A Uniformly Loaded Beam Simply Supported at the Ends.

In this case it is assumed that the ends can freely rotate with respect to the axis of symmetry of the end cross sections, but are restrained from rotating about the axis coinciding with the axis of the beam. The buckled form of the beam is shown in figure 2. It will be noted that, owing to the type of end fastening, sidewise buckling of the beam is accompanied by twist. This explains why the stability of the beam depends not only on the lateral flexural rigidity B_2, but also on the torsional rigidity C, as shown by equation (3).

The values of the coefficient K in equation (3) calculated for this case (1) are given in table 1 as a function of the quantity α, defined by eq. 1. If the dimen-

1. S. Timoshenko. Zeitschr. F. Math. u. Phys. Vol. 58, 1910.
S. Timoshenko. Annales des Ponts et Chaussées, 1913-IV.

sions of the plate girder are known, the values of C and B_2 can be easily calculated. Then α will be found from eq. (1) and the corresponding value of K obtained from the table. Substituting this value in eq. (3), the critical load Q_{cr} is obtained.

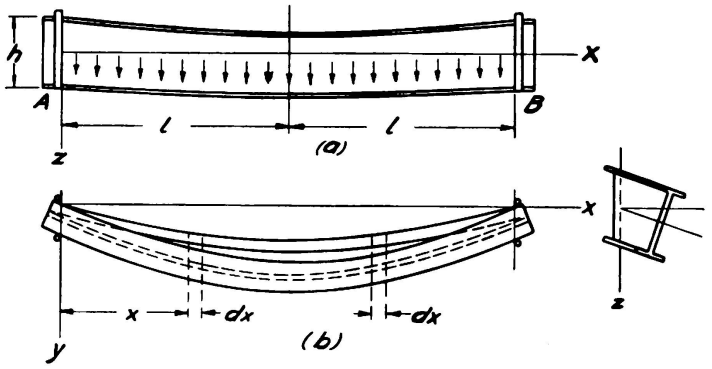


Fig. 2.

Table 1.

Factor K and critical stresses in lb. per sq. in.
for a uniformly loaded beam with simply supported ends.

α =	1	1	2	4	6	8	12
K =	143	53.0	42.6	36.3	33.8	32.6	31.5
σ_{cr} =	8520	9950	11300	13600	15600	17300	20300
σ'_{cr} =	5510	6810	8070	10300	12200	13800	16800
σ''_{cr} =	13200	14500	15800	18000	20000	21500	24500

α =	16	20	32	50	70	90	100
K =	30.5	30.1	29.4	29.0	28.8	28.6	28.6
σ_{cr} =	23000	25200	31200	38600	45300	51000	53700
σ'_{cr} =	19400	21600	27600	35000	41600	47400	50000
σ''_{cr} =	27200	29400	35300	42600	49200	55100	57600

The corresponding value of the critical stress is

$$\sigma_{cr} = \frac{Q_{cr}\, E h l}{8 B_1}$$

or by using equations (1) and (2).

$$\sigma_{cr} = \frac{KE}{16}\, \beta \sqrt{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

From this equation the values of σ_{cr} can be easily calculated provided K is known. The third line of the table 1 gives the values of σ_{cr} calculated from equation (6) on the assumption that $\beta = 10^{-4}$ and $E = 30.10^6$ lbs. per sq. in. The critical stresses for a beam with any other value of β and with the modulus E, are obtained by multiplying the corresponding number in table 1 by $10^4\, \beta\, \frac{E_1}{E}$.

It should be noted that the lateral stability of a plate girder varies with the position of the load. The values of K given in the table 1 are calculated on the assumption that the load is distributed along the axis of the beam. When a uniform load is distributed along the upper flange of the beam, the stability decreases and in accordance with this the values of the coefficient K become smaller. The corresponding values of critical stresses, denoted by σ'_{cr}, are given in the fourth line of the table 1. Line 5 of the table 1 furnishes the values of critical stresses σ''_{cr}, when the uniform load is distributed along the lower flange of the beam.

4. Numerical Examples.

Let us consider as a first example a rolled I beam of the following dimensions : Span $2l = 20$ ft., depth $h = 24$ in., flange width $b = 7$ in., thickness of web $\delta_1 = .5$ in., mean thickness of flanges $\delta = \frac{1}{2}(60 + 1.14) = .87$ in., area of cross section $A = 23.3$ sq. in., flexural rigidity $B_1 = 2087E$ lb. sq. in. flexural rigidity $B_2 = 42.7$ E. The torsional rigidity, from eq. 5, is :

$$C = \frac{23{,}3^4\, G}{40\,(2087 + 42{,}7)} = 3{,}46\ G.$$

Then from eqs. (1) and (2) we find :

$$\alpha = 3.24\ ;\ \beta = 205.10^{-6}$$

Table 1 gives, by interpolation, for $\alpha = 3.24$,

$$\sigma_{cr} = 11300 + \frac{1}{2}(13600\text{-}11300)\ 1.24 = 12700 \text{ lb. per sq. in.}$$

This is the critical stress for $\beta = 10^{-4}$, in our case the critical stress is :

$$\sigma_{cr} = 12700\ \beta\ 10^4 = 26000 \text{ lb. per sq. in.}$$

If, instead of eq. (5), eq. (4) is used in calculating torsional rigidity we find $C = 4.07$ G. Then $\alpha = 3.80$ and the table 1 gives :

$$\sigma_{cr} = 11300 + \frac{1}{2}(13600\text{-}11300)\ 1.80 = 13400 \text{ lb. per sq. in.}$$

The critical stress for our case then is :

$$\sigma_{cr} = 13400.\ \beta.\ 10^4 = 27400 \text{ lb. per sq. in.}$$

which is about $5\frac{1}{2}$ per cent greater than the stress obtained previously.

The usual approximate method of calculating critical stresses for laterally unsupported beams consists in considering the upper compressed flange of the beam as a column. On account of the fact that the compressive force in the flange is proportional to the bending moment and follows the parabolic law, the reduced length $L = 0.694.20.12 = 167$ in., instead of the actual length, must be substituted in the column formula. The radius of giration of the cross section of the flange is $r = \frac{7}{2\sqrt{3}} = 2.02$ in. Therefore, $\frac{L}{r} = 83$. For such proportions the Euler's formula gives the critical stress beyond the

yield point of ordinary structural steel. Taking the usual straight-line formula we find :

$$\sigma_{cr} = 52500\text{-}220\,\frac{L}{r} = 34300 \text{ lb. per sq. in.}$$

which is a stress 32 per cent greater than that obtained above by the use of the equation (3).

As a second example let us consider a plate girder consisting of a web plate, 26 by 3/8 in., and for flange angles, 5 by $3\frac{1}{2}$ by $\frac{1}{2}$ in. The dimensions of the beam are :

$$2l = 480 \text{ in.}, \quad h = 26\,\frac{1}{2} \text{ in.}, \quad A = 25{,}75 \text{ sq. in.}$$

$$B_1 = 3000\ E \text{ lb. sq. in.} \quad B_2 = 95\ E \text{ lb. sq. in.}$$

The torsional rigidity, from eq. (4), is :

$$C = 3.55\ G.$$

Substituting in to eqs. (1) and (2) we find :

$$\alpha = 4.91\,; \quad \beta = 0.967.\ 10^{-4}.$$

From table 1. by interpolation :

$$\sigma_{cr} = 13600 + \frac{1}{2}\,(15600\text{-}13600)\ 0.91 = 14500 \text{ lb. per sq. in.}$$

In the case considered :

$$\sigma_{cr} = 14500.\ \beta.\ 10^4 = 14000 \text{ lb. per sq. in.}$$

In order to show the variation of critical stresses with changes in ratios $\frac{2l}{h}$ and $\frac{h}{b}$ the calculations were made for I beams (fig. 1) with $\frac{\delta}{\delta_1} = 2$ and $\frac{b}{\delta} = 10$. The values of critical stresses as functions of the ratio $\frac{2l}{h}$ for three different

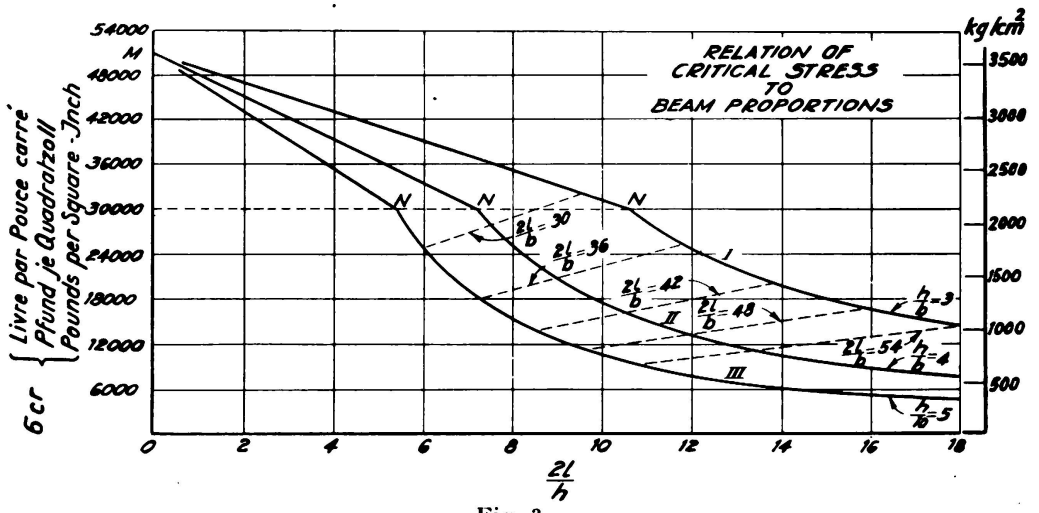


Fig. 3.

Relation of Critical Stress to Beam proportions.

Relation entre l'effort critique et les dimensions de la poutre.

Beziehung zwischen der kritischen Beanspruchung und den Trägerabmessungen.

values of the ratio $\frac{h}{b}$, namely $\frac{h}{b} = 3$; $\frac{h}{b} = 4$ and $\frac{h}{b} = 5$, are shown in fig. 3 by the curves I, II and III. The points corresponding to $\frac{2l}{b} =$ constant, are connected by dotted lines. It will be noted that, for a constant magnitude of the ratio $\frac{2l}{b}$, the critical stress decreases with an increase in the depth of the beam. This fact is not taken into account in usual approximate method, mentioned above, in which the compressed flange is considered as a column. In the table below critical stresses as obtained by the approximate method and from eq. 3 are given for comparison for the case when $\frac{h}{b} = 3$.

$\frac{2l}{b} =$	54	48	42	36
σ_{cr} approximat. =	17800	22700	30300	33500
σ_{cr} exact. =	14400	16800	20000	25100

With an increase in the ratio $\frac{h}{b}$ the discrepancy between the exact and approximate values increases.

5. Stresses beyond the Elastic Limits.

Equation (3) is based on the assumption that the material of the beam follows Hooke's law ; therefore, the critical stresses obtained from table I, or figure 3, represent the true values of these stresses only if they are not greater than the elastic limit of the material. Otherwise, the critical stresses obtained in this manner will be too large. For an approximate calculation of critical stress beyond the elastic limit the straight-line column formula may be used. Assuming, for instance, that the elastic limit for structural steel is 30000 lb. per sq. in., we conclude that curves I, II and III of figure 3 can be used only below the points N. For higher stresses the curves should be replaced by straight lines MN. The crushing compressive stress for the steel is taken in figure 3 equal to 51000 lb. per sq. in.

If the stress-strain curve for the material of the beam beyond the elastic limit is given ; a more accurate determination of critical stresses in the unelastic region is possible. This can be done by taking into account the diminishing of the lateral rigidity B_2 due to the straining of the flanges beyond the elastic limit. Calculations of this kind [1] show that the use of straight lines MN (figure 3) give values on the safe side.

6. Effect of Additional Constraint of Beams.

Any additional constraint of the beam results in an increase of stability, i. e. in an increase of the factor K in equation 3. Take, for instance, a beam with

1. S. Timoshenko. Amer. Soc. of Civil Engineers. Vol. 87, 1924, p. 1247.

built in ends. The deflection curve in the case of sidewise buckling has the shape shown in figure 4 (*a*). The critical value of the uniformly distributed load is given by eq. 3. The values of the factor K and also the critical stresses σ_{cr} calculated on the assumption that $E = 30.10^6$ lb. per sq. in. and $\beta = 10^{-4}$ are given in table 2 below.

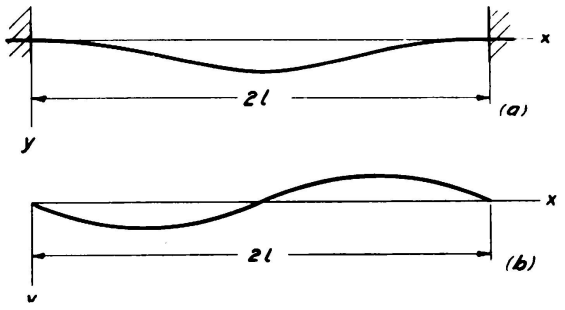


Fig. 4.

Table 2.

Factor K and critical stresses in lb. per sq. in.
($\beta = 10^{-4}$, $E = 30.10^6$) for uniformly loaded beam with fixed ends.

$\alpha =$	1	1	2	4	8	24	32	50	100
K =	488	161	119	91.3	73.0	58.0	55.8	53.5	51.2
$\sigma_{cr} =$	19300	20100	21100	22800	25800	35500	39500	47200	64000

In the calculation of the values in this table it was assumed that the load is distributed along the length of the axis of the beam.

When a beam is laterally supported at the middle of the span in such a manner that the middle cross section cannot move laterally and cannot rotate about the axis of the beam, the deflection curve in the case of sidewise buckling has the form shown in figure 4 (*b*). The values of the coefficient K in equation 3 and the values of critical stresses σ_{cr}, σ'_{cr} and σ''_{cr} produced by uniform load distributed 1) along the axis of the beam, 2) along the upper flange and 3) along the lower flange are given in table 3.

Table 3.

Factor K and critical stresses in lbs. per sq. in. ($\beta = 10^{-4}$, $E = 30.10^6$)
for a uniformly loaded beam with lateral support at the middle.

$\alpha =$	.1	1	2	4	8	24	32	50
K =	673	221	164	126	101	79.5	76.4	72.8
$\sigma_{cr} =$	39900	41600	43500	47000	53300	72900	81000	96600
$\sigma'_{cr} =$	34800	36500	38400	42000	48300	67800	75900	91500
$\sigma''_{cr} =$	45900	47300	49200	52800	59100	78600	86600	102000

7. Concentrated Loads.

Equation (4) holds also true for a concentrated load, Q_{cr} being then the critical value of this load. If the load is applied at the middle of the span

of a simply supported beam, table 4 below gives the values of the factor K and also the critical stresses for the three different loading conditions: 1) load applied at the center of the middle cross section, 2) at the supper flange and 3) at the lower flange.

Table 4.

Factor K and critical stresses in lbs. per sq. in.
($\beta = 10^{-4}$, $E = 30.10^6$) for a load concentrated at the middle of a simply supported beam.

$\alpha =$	.1	1	2	4	6	8	12
$K =$	86.4	31.9	25.6	21.8	20.3	19.6	19.0
$\sigma_{cr} =$	10200	12000	13700	16400	18800	20700	24300
$\sigma'_{cr} =$	6080	7580	9000	11600	13800	15800	19200
$\sigma''_{rc} =$	17300	18800	20300	22800	25100	27000	30500

$\alpha =$	16	20	24	40	60	80	100
$K =$	18.3	18.1	17.9	17 5	17.4	17.2	17.2
$\sigma_{cr} =$	27500	30300	32900	41600	50400	57900	64500
$\sigma'_{cr} =$	22400	25100	27600	36300	45000	52500	59100
$\sigma''_{cr} =$	33600	36300	38700	47400	56100	63600	70200

With the increase of α the factor K approaches the value $K = 16.9$ which we obtain for a beam of a very narrow rectangular cross-section. For such a beam the problem of elastic instability is solved [1] for any position of the concentrated load along the length of the beam. If c is the distance of the load from the nearest support of a simply supported beam, the values of the factor K are given in the table below:

Table 5.

$\frac{c}{2l} =$	.50	.45	.40	.35	.30	.25	.20	.15	.10	.05
$K =$	16.9	17.2	17.8	19.0	21.0	24.1	29.1	37.9	56.0	112

It is seen that the factor K does not change very much if the load remains in the middle third of the span. Hence if we have several loads acting along the middle third of the span we can replace them by one load at the middle and calculate the critical value of this load by using table (4). If concentrated

1. A. Roboroff. Bulletin of the Polytechnical Institute, Kiew, 1911.
A. Dinnik. Bulletin of the Don Polytechnical Institute, 1913.

loads are distributed throughout the span they can be replaced by a uniform load and the critical values of this load will be found by using tables 1, 2 and 3.

II. Stability of the Web of a Plate Girder.

8. Experiments.

The first experiments with buckling of thin webs transmitting shearing and bending stresses were made by Wm. FAIRBAIRN in connection with the construction of the famous Britania and Conway tubular bridges. These classical experiments [1] up to the present time have held great interest for engineers working with thin walled structures. The Britania bridge is of tubular form having a rectangular cross section. The larger tubes have a span of 450 feet and cross sectional dimensions of 27 by 16 feet. At that time this was an unusually large structure and for determining the safe dimensions of the tube and the most favorable distribution of the material it was decided to make experiments with models. After considerable amount of preliminary experimenting it was decided to test large models, one-sixth the lineal dimensions of the intended bridge. The sides of these model tubes consisted of sheets 3′ 9″ deep and only .1 of an inch thick. The first experiments showed that at a comparatively small load undulations in the sides appeared which formed angels of about 45 with the line of the bottom. " It was evident, from these experiments, that the tension throughout the bottom and the compression troughout the top stood in the relation of action and reaction to each other, the diagonal strain in the sides being the medium of communication ". " A diagonal wave of puckering clearly exposed the line of severest strain. It was evident that the sides were exposed to unfair strain from the change of shape consequent on the tendency of the top and bottom to come together, the plates being strong enough, if they could but be kept in shape; and it was therefore determined, in this experiment, to modify the construction of the sides. This was done by the addition of pillars of angle-iron throughout, of the whole height of the sides, riveted to them, having the effect of stiffening them, and at the same time of keeping the top and bottom in place. They were prototypes of the T-iron pillars used in the large tubes ". The further experiments illustrated the importance of the pillars in the sides, as, with a small addition of metal to the weight of the tube, the top and bottom remained precisely the same as before, while the breaking-weight was increased considerably. From these experiments had been learned that " as the depth of a web increased, the precautions requisite for maintaining the sides in shape become very formidable ". The T-irons, gussets and stiffening plates for this purpose in one of the Britannia Tubes, weigh 215 tons, or upwards of one-third of the whole weight of the sides.

The experimental tubes were submitted to a concentrated load at the middle and the shearing force was constant along the length of the span. In the design of the actual bridge it was taken into account that the maximum

1. Wm. FAIRBAIRN. Conway and Britannia Tubular Bridges, 1849.
Edwin CLARK. Britannia and Conway Tubular Bridges, London, 1850.

shearing force diminishes towards the middle, and the web was taken 1/2 inch thick in the middle portion and 5/8 inch thick at the ends.

Some experimental work on plate girders was also made at that time [1]. The tickness of the web of the model girder was one-quarter inch throughout; the over-all depth was 10 feet at the center, and 6 feet at the ends, and the distance between the bearings was 66 feet. The girder failed by buckling of the web. Later on the girder was repaired and the vertical web stiffened by the addition of angle-iron pillars at each joint in the vertical plates of the web. In this way the strength of the girder was considerably increased and finally it failed at a larger load by a simultaneous collapse of the top and the bottom.

Further experiments with plate girders were made by a Belgian ingenieur Houbotte [2]. Two plate girders, 1.50 mt. span length; 0.5 cm thickness of the web; and 30 cm and 49 cm depth, were tested. Loaded at the middle both these girders failed by buckling of the web, which had no stiffeners. The girder of large depth failed at smaller load although its section modulus was twice as great as that of the girder with smaller depth.

In more recent time some work with plate girders has been done by Professor W. E. Lilly [3]. A plate-girder of the following dimensions was constructed: Depth 9 1/2 in.; length, 5 ft. 3 in. The flanges were made up of two plates 2 in. by 3/8 in.. and two angle-irons, 1 1/4 in. by 1/4 in. The framework of the girder was made in separate halves, and bolted together to the web. This construction allowed different thicknesses of web to be used in the experiments. A large number of tests were then carried out with different thicknesses of the web and spacing of stiffeners.

Applying the load at the middle, the wave formation in the web was obtained. " It was found that the wave-length of the wave formation is nearly independent of the thickness, if the stiffeners are of great strength compared with the web. The angle of incliclination of the waves depends upon the

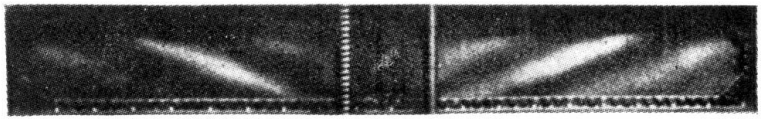


Fig. 5.

distance apart of the stiffeners and the depth of the girder. The stiffeners prevent the formation of the waves, and severe local stresses are set up around the ends of the stiffeners, causing a crumpling up of this part of the web ". Photograph 5 represents the wave formation in the case when the web had been stiffened only at the middle, where the load was applied.

9. Web Thickness and Spacing of Web Stiffeners.

From the experiments made it may be seen that a plate girder can transmit the shearing force to the bearings in two different ways: 1) If the load is not

1. Edwin Clark. Britannia and Conway Tubular Bridges, London, 1850.
2. M. Houbotte. Der Civilingenieur, 1856, vol. 4.
3. W. E. Lilly. The design of plate girders and columns, 1908.
   W. E. Lilly. Engineering, vol. 83, 1907, p. 136.

sufficient to produce wave formation, the web of the girder transmits the shearing force by working in shear. 2) In the case of larger loads, which produce wave formation, one part of the shearing force is transmitted by shearing stresses in the web, as before, and the other part — as in a truss, in which the web plate is working as ties and the stiffeners as struts. The magnitude of the load at which wave formation begins depends on the thickness of the web and on the spacing and dimensions of stiffeners. In the case of a sufficient thickness of the web and a satisfactory stiffening, a plate-girder can carry the total load, for which it is designed, without any buckling in the web. We usually have such proportions in bridges. On the other hand there are constructions with very thin webs which buckle at the very beginning of loading and the total load is practically transmitted as in a truss. We have examples of such girders in aeroplane constructions [1].

Although buckling of the web does not mean an immediate failure of the girder the dimensions in the case of bridges are usually taken so as to eliminate buckling under service condition. The usual procedure is to adopt a certain value for the working stress in shear and on this basis to decide upon the web thickness [2]. Then the spacing of stiffeners is determined so as to enable the web to transmit shearing stresses without buckling.

Observing that in railway girders the total load varies approximately as the span and assuming the ratio of the depth to the span constant, it may be seen that the above procedure would result in nearly the same thickness for all spans. Assuming that this thickness is satisfactory for small bridges it certainly will be insufficient for larger spans and some increase in the thickness for eliminating the possibility of buckling of the web becomes necessary. This is provided for in some specifications. For instance, American Railway Engineering Association specifications [3] require that the thickness of the web shall be not less than $\frac{1}{20}\sqrt{h}$, where h represents the distance between flanges in inches.

Another limitation for thickness is usually obtained from the consideration of corrosion and from the fact that too thin plates, if deep and long, are very awkward to handle. The 3/8 in. thickness is usually considered as the least thickness permissible to provide against corrosion and ascertain a satisfactory handling of material during construction and shipping.

For spacing and dimensioning stiffeners, various specifications give certain rules, which to a large extent are of empirical character. American Specifications mentioned above, require, for instance, that the distance between stiffeners shall not be larger than: 1) six feet, 2) the depth of the web, 3) the distance d given by the formula:

$$d = \frac{t}{40}(12.000 - \tau)$$

1. H. Wagner. Zeitschrift für Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, vol. 20, 1929, p. 200.
H. Rode. Der Eisenbau, vol. 7, 1916, p. 217.
Eng. News, vol. 40, 1899, pp. 154, 399.

2. Sometimes the working stress is obtained by using some variation of Rankine's formula.
American Institute of Steel Construction Specifications, New York, 1928, p. 156.

3. American Railway Engineering Association's Specifications, third edition, 1925.

in which t is the thickness of the web in inches, and τ is the shearing stress in pounds per square inch at the point considered. If the depth of the web between the flange angles is less than 50 times the thickness of the web, intermediate stiffeners may be omitted. Intermediate stiffeners shall be riveted in pairs to the web of the girder. The outstanding leg of each angle shall be not less than 2 inches plus one thirtieth of the depth of the girder, nor more than 16 times its thickness. Sometimes the stiffeners are proportioned to make them to duty as vertical struts in a triangular girder ; in which case it is sufficient to ensure that the stiffeners shall, as struts, be strong enough in the aggregate to take the whole shear force at the section considered [1].

Being the result of a long experience, the rules for determining web thickness and stiffeners spacing usually give satisfactory proportions. At the same time they are flexible enough and leave considerable freedom for individual judgment wich finally results in a variety of dimensions of plate girders designed for the same span and the same load. Comparing, for instance, plate girders with a span 100 ft. and depth 10 ft. we find that the thickness of the web varies from 7/16 in. to 5/8 in [2]. A comparison of two plate girders of 90 ft. span one for an American railway and the other for a British railway [3] shows that in the American type the stiffeners comprise 25 % and in British 40 % of the material in both web and stiffeners.

From the above discussion it is seen that the proportioning of plate girders is based to a great extent on empirical rules. To get a theoretical basis for the design it is necessary to go into a study of the elastic stability of thin webs. In discussing buckling of the web we must consider two extrem cases : 1) Near the supports the shearing force is the most important factor and the part of the web between two stiffeners can be considered as a rectangular plate subjected to the action of uniform shear (fig. 6). 2) At the middle of the span the shearing stresses can be neglected in comparison with normal stresses. Then, the part of the web between two stiffeners will be in the condition of pure bending represented in fig. 7. In the next articles these two cases will now be discussed.

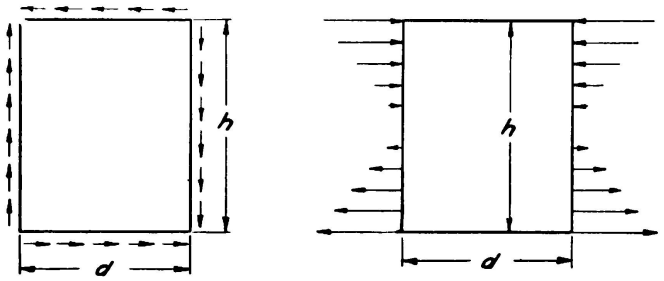


Fig. 6 u. 7.

10. Stability of Rectangular Plates under Pure Shear.

The investigation of the stability of rectangular plates under the action of shearing forces (fig. 6) shows that the critical value of shearing stress at which buckling occurs can be represented in the following form [4] .

1. W. H. Thorpe. Engineering, vol. 78, 1905.
2. H. Rode. Der Eisenbau, vol. 7, 1916, p. 217.
3. H. M. Gibb. Engineering, vol. 90, 1910.
4. S. Timoshenko. Bulletin of the Polytechnical Institute at Kiew, 1910. The translation of this paper in French is in Annales des Ponts et Chaussées, 1913.
S. Timoshenko. Der Eisenbau, vol. 12, 1921, p. 147.

$$\tau_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{d^2 t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

In which K is a numerical factor depending on the manner in which the edges of the plate are fixed and on the ratio $\frac{h}{d}$ between the sides of the rectangle.

$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ is the flexural rigidity of the plate.

If h is very large in comparison with d [1] the factor K depends partically only on boundary conditions along the long sides of the rectangle [2]. If the plate is simply supported along these sides, K = 5.35. If the longitudinal sides are clamped, $k = 8.98$.

If the sides of the rectangle are of the same order, the calculation of K becomes more complicated [3]. Several approximate values of this factor for the case of simply supported edges are given in the table below [4] :

Table 6.

Values of the Factor K in eq. 7 for simply supported rectangular plates.

$\frac{h}{d}$ =	1	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0
K =	9.42	8.0	7.3	7.1	7.0	6.8	6.6	6.3	6.1

From equation (7) it may be seen that the critical values of shearing stress are proportional to $\left(\frac{t}{d}\right)^2$. Hence stability of a plate rapidly diminishes with the diminishing of the thickness of the plate.

Applying the values of K given in table 6 to steel plates ($E = 30.\ 10^6$ lb. per sq. in., $\mu = .3$), and assuming the distance between the stiffeners equal to 5 ft., the critical values of shearing stress for different depths, h, and different thicknesses, t, are given in table 7 below :

Table 7.

Critical Shearing Stresses, in Pounds per Square Inch, for various values of h and t. $d = 60$ in.

t =	3/8 in.	7/16 in.	1/2 in.	9/16 in.
h = 60 in.	9980	13600	17700	22400
72 in.	8450	11500	15000	19000
84 in.	7730	10500	13700	17400
96 in.	7500	10100	13200	16700
108 in.	7200	9800	12800	16200
120 in.	7000	9500	10400	15700

1. Such conditions existed, for instance, in Britannia Tubular bridge mentioned before.
2. R. V. Southwell and S. W. Skan. Proc. of the Royal Society, London, vol. 105, A, 1924.
R. V. Southwell. Phil. Mag. vol. 48, 1924, p. 540.
3. S. Timoshenko. Der Eisenbau, vol. 12, 1921, p. 147.
4. It is assumed that d in equation (7) denoted the smaller side of the rectangle.

It should be noted that a portion of web between the flanges and two adjacent stiffeners is in a more favorable condition than assumed above. The edges are partially fixed and the critical stresses will be somwhat higher than given in table 7.

11. Stability of Rectangular Plates under Pure Bending

If a rectangular plate is in a condition of pure bending in the plane of the plate (Fig. 7), the critical value of the maximum bending stress is found from the equation :

$$\sigma_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{h\ t} \qquad (8)$$

In which K is a numerical factor and the other symbols have the same meaning as in equation (7). For a simply supported plate the values of K are given in the table below [1].

Table 8.

Values of the factor K in eq. 8 for simply supported rectangular plates

$\frac{d}{h}$	.4	.5	.6	.67	.75	.8	.9	1.0	1.5	2	3
K	29.1	25.6	24.1	23.9	24.1	24.4	25.6	25.6	24.1	23.9	24.1

If d is larger than h there is only small variation in K with variation of the ratio $\frac{d}{h}$ and with the increasing of d, K approaches the minimum value 23.9 obtained for the ratio $\frac{d}{h} = .67$. This follows from the fact that a plate with large d buckles in several waves with vertical nodal lines and the ratio of wave length to the depth h approaches the value .67. For instance, in the case of $\frac{d}{h} = 2$ we will have three waves and each wave is in the same condition as the plate with the ratio $\frac{d}{h} = \frac{2}{3}$. When $\frac{d}{h} = 3$ we have four waves with the ratio of waves length to the depth equal to .75.

Taking for K the minimum value 23.9 and assuming $\frac{t}{h} = \frac{1}{100}$ we find, from equation (8), for steel.

$$\sigma_{cr} = 64.800 \text{ lbs. per sq. in.}$$

For any other value of the ration $\frac{t}{h}$ the critical value of stress then is :

$$\sigma_{cr} = 64800.10^4 \frac{t^2}{h^2}$$

Taking, for instance, $t = \frac{1}{2}$ in. h = 120 in. we find.

$$\sigma_{cr} = \frac{64800.10^4}{10^2.(24)^2} = 11200 \text{ lbs. per sq. in.}$$

---

1. S. Timoshenko. Der Eisenbau, vol. 12, 1921, p. 147.
J. Boobnoff. Theory of Structure of Ships, vol. 2, p. 525, 1914, St. Petersburg.

If, instead of a very large d, we take $d = 1/2\ h$. (vertical stiffeners 5 feet apart) then, from the table, $K = 25.6$ and $\sigma_{cr} = 11.200 \frac{25.6}{23.9} = 12.000$ lbs. per sq. in.

It is seen that for the proportions taken the critical stress is smaller than the stress usually considered as a safe bending stress for plate girders. In calculation of the table 8 it was assumed that the edges of the plate were simply supported; in practice they are rigidly connected with flanges. Therefore, the actual critical stresses will be somewhat greater than the theoretical. Nevertheless, it is probable that in the case of thin webs and large depths some buckling of the web may occur under ordinary loading conditions. This buckling is so small that it can remain unnoticed. It does not represent an immediate danger to the girder. It means only that when the load surpasses its critical value and buckling begins the web does not take longer its share in transmitting compressive bending stresses which causes a certain overstressing of the compression flange.

12. Stiffeners.

Considering a portion of the web between two consecutive stiffeners it was assumed on our previous discussion that the stiffeners have a sufficient flexural rigidity and remain straight during the buckling of the web. If this rigidity is not sufficient the inclined waves of buckled webs run accross the stiffeners and buckling of the web is accompanied by bending of the stiffeners. Such bending was evident, for instance, in some of *Fairbairn's* experiments discussed before (article 8). To determine the necessary flexural rigidity, sufficient to prevent the stiffeners from bending during buckling of webs, let us consider the case represented in figure 8 : A rectangular plate of the length $2\ d$ and the width h simply supported at the edges is submitted to pure shear. To prevent lateral buckling the plate is stiffened by a pillar AB. If the flexural rigidity of the pillar is small its effect on the magnitude of the critical shearing stress will also be small. The waves of the buckled plate will cross the pillar and bending of the pillar will be produced. By subsequent increases of the rigidity of the pillar we finally may arrive at the conditions in which each half of the plate will buckle as a rectangular plate of the dimensions $h \times d$ with simply supported edges and the pillar will remain straight. The corresponding limiting value B of the flexural rigidity of the pillar can be found from the consideration of strain energy of bending of the plate and of the pillar [1].

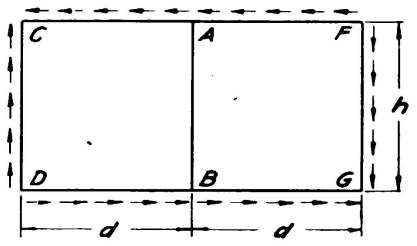


Fig. 8.

Several values of the ratio of this rigidity 2dD of the web, if bent to a cylindrical surface, is given in the table below :

---

1. S. Timoshenko. Der Eisenbau, vol. 12, 1921, p. 147.

Table 9.

$\frac{2d}{h} =$	2	1.5	1.25	1
$\frac{B}{2dD} =$	.83	2.9	6.3	15

In calculation of this table it was assumed that only the pillar AB in figure 8 is flexible and the pillars CD and FG are absolutely rigid. If all three pillars are of the same flexibility, the limiting rigidity B must be larger than would be obtained from table 9. Assuming that it is twice as large as the calculated value, we arrive at the following values of the required moment of inertia J of the cross section of stiffeners for various proportions of plate girders and for $d = 5$ ft :

Table 10.

$h =$	60 in.	80 in.	96 in.	120 in.
$\frac{2d}{h} =$	2	1.5	1.25	1
$\frac{B}{2dD} =$	1.7	5.8	12.6	30
t = 3/8 in.	.99 in.^{4}	3.36 in.^{4}	7.30 in.^{4}	17.4 in^4
t = 7/16 in.	1.56 in.^{4}	5.34 in.^{4}	11.6 in.^{4}	27.6 in^4
t = 1/2 in.	2.35 in.^{4}	8.00 in.^{4}	17.4 in.^{4}	41.4 in^4
t = 9/16 in.	3.36 in.^{4}	11.5 in.^{4}	25.0 in.^{4}	59.4 in^4

It is seen that for smaller depths the calculated cross sectional moment of inertia is much smaller than that which is actually used. For larger depths the calculated values of J are approaching the usual proportions. For instance, in the case of $h = 10$ ft. the stiffner, following the american rule[1] consists of two angles $6'' \times 3\frac{1}{2}'' \times 3/8''$. The moment of inertia for this stiffner for t = 9/16 in is J = 62.5 in^4. which is near to the value 59.4 in^4. given in the table above.

In the above discussion we considered a plate submitted to the action of shear, as we have in the web, near the supports, of a plate girder. At the middle of the girder the web stresses are principally bending stresses and from the discussion of article 11 it can be concluded that vertical stiffeners do not increase substantially the stability of the web at this place. A much greater stiffening effect may be achieved by using in the compressed zone of the web a stiffener parallel to the compressed flange of the plate girder.

Conclusions.

The results regarding elastic stability of plates obtained in the previous articles may be used for proportioning in plate girders as follows : In determining the thickness of the web consider not only shearing stresses at

1. See H. A. L. Waddell. Bridge Engineering, New-York, 1916, p. 1670.

supports and the minimum thickness permissible to provide against corrosion but also elastic stability of the web. In discussing buckling of plates under pure bending (article 11) it was shown that vertical stiffeners do not affect substantially the stability of the web and it seems logical to choose the thickness of the web so as to eliminate the possibility of buckling due to bending under service conditions. For this purpose equation (8) can be used. Substituting for σ_{cr} the maximum permissible compressive stress, say 15000 lbs. per sq. in., and taking for K the minimum value 23.9 from table 8 we find for steel ($E = 30.10^6$ and $\mu = .3$) :

$$\frac{h}{t} = 208. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Hence to provide against buckling of webs at the middle of girders the ratio of the depth to the thickness of the web must not excede the value (9). It is not necessary to provide in this case for an extra factor of safety, because some additional safety is realized by fixing the edges of the web at the flanges.

When the thickness of the web is decided upon, spacing of stiffners must be determined so as to enable the web to transmit shearing stresses without buckling. For this purpose the results of article 10 may be used. These results can be represented as shown in figure (9). By using equation (7) and table 6 for each value of critical shearing stress a curve is constructed the ordinates of which are the ratios $\frac{h}{d}$ of the depth of the girder to the stiffener spacing and abscissae the corresponding ratios $\frac{d}{t}$ of the stiffener spacing to the thickness of the web. By using such curves the necessary distance d between the stiffeners can be obtained if the critical value of the shearing stress is chosen.

Considering the curve for critical stress $\sigma_{cr} = 20.000$ lbs per sq. in., we see that for large values of the ratio $\frac{h}{d}$, i. e. when the stiffener spacing is small in comparison with the depth of the girder, the ratio $\frac{d}{t}$ approaches 90. When $\frac{h}{d}$ is small then h takes the place of d in the previous discussion and the ratio $\frac{h}{t}$ approaches the same numerical value 90. From this a practical conclusion can be made : Shearing stress 20000 lbs. per sq. in. can be considered as yield point for shearing stress in the case of usual structural steel. Hence if $\frac{h}{t}$ is not larger than 90, the resistance of the web to buckling is not smaller than the resistance to yielding in shear and stiffeners are necessary only at places of application of concentrated loads.

In choosing the critical stress in fig. 9 a certain factor of safety must be introduced because in this case 1) the fixity of the edges of the web at the flanges does not effect much the critical value of shearing stress if $\frac{h}{d} > 2.$ and 2) the buckling changes the condition of the work of the web (see article 9) which results in additional tensile stresses in the web and undesirable overstressing

of certain rivets. It is suggested to take .6 of critical stresses as safe stresses[1]. These stresses are given in figure (9) in parenthesis.

Let us apply now the curves of fig. 9 in determining stiffener spacing for girders of the depth 6' and 10'. In the case of $h = 6$ ft., applying equation (9), we conclude that the thickness t can be taken 3/8 in. Assuming working stress equal to 9000 lbs. per sq. in. we find then, from fig. 9, $\frac{d}{t} = 112$; $d = 42$ in. $= 3\frac{1}{2}$ ft. By taking working stress 6000 lbs. per sq. in. we find in the same manner $d = 45$ in. $= 4\frac{1}{2}$ ft.

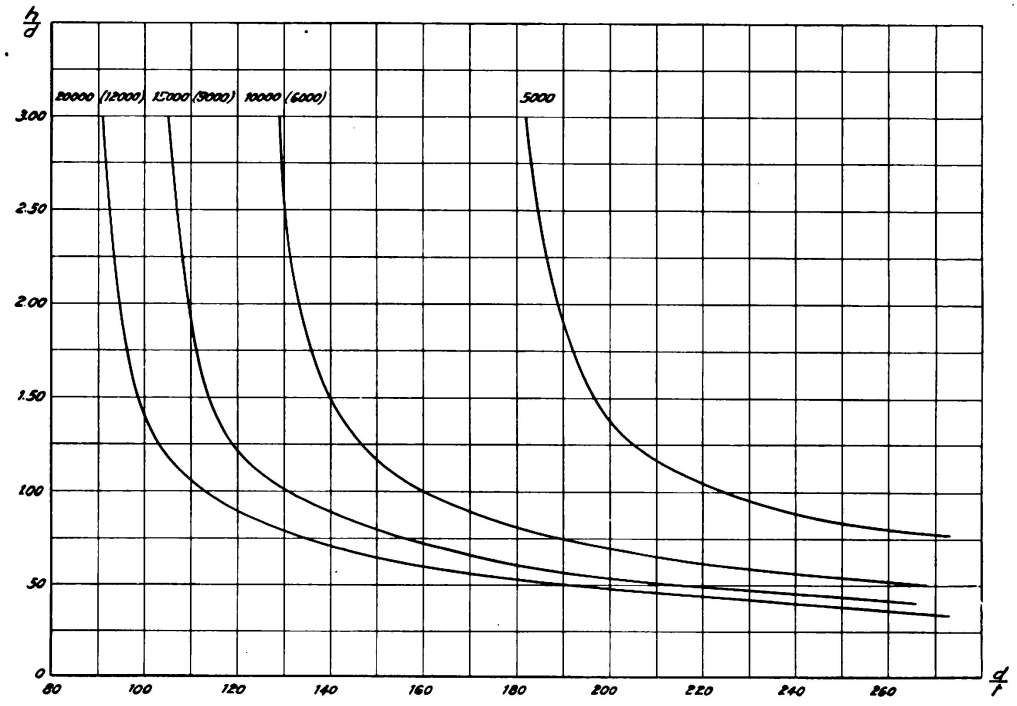


Fig. 9.

Applying to the same case the rules of American specifications (article 9), we find $t = \frac{1}{20}\sqrt{h} = .424$ in. or 7/16 in. The distance between stiffeners for working stress 9000 lbs. per sq. in. $d. = \frac{t}{40}(12000 - \tau) = 75\,t = 33$ in. For working stress 6000 lbs per sq. in. $d = 150\,t = 66$ in.

The suggested manner of proportioning plate girders gives in this case a smaller stickness of the web. The stiffening is also somewhat lighter for the working stress 9000 lbs, per sq. in. For the 6000 lbs, per sq. in. stress the proposed stiffening is somewhat heavier than that obtained by using American specification.

In the case of $h = 10$ ft. we find, from eq. (9), $t = .575$ in. a little more

1. This means the same factor of safety as if using a working stress in shear of 12000 lbs. per sq. in. when yield point in shear is 20000 lbs. per sq. in.

than 9/16 in. and the thickness t = 5/8 in. should be used. The American specification for the same depth gives $t = .548$ in. and 9/16 in. thickness should be used. The distance of stiffeners, for $\tau = 9000$ lbs per sq. in., is, from figure 9, $d = 112t = 70$ in. For $\tau = 6000$ lbs. per sq. in. $d = 144t = 90$ in. The American specifications give in this case 42 in. and 72 in. respectively. In this case the suggested manner of proportioning plate girders gives slightly larger stickness of the web, but the stiffening is lighter for both values of working stress. The distance between the stiffeners determined above for the maximum shearing stress can be increased with increasing distance from the supports. In this changing of stiffeners figure 9 also can be used, although the web stresses at intermediate cross sections are different from pure shear and for a more satisfactory solution of the problem the stability of the plate under combined bending and shearing stress should be considered.

In proportioning stiffeners table 10 may be used. From practical considerations the cross-sectional moment of inertia J will be taken, for smaller depths, larger than it is given in the table.

For further improvement of the design of plate girders from the point of view of elastic stability it is desirable: 1) To develop the theory of buckling of rectangular plates with fixed edges. 2) To consider buckling of rectangular plates under combined bending and shearing stress. 3) To investigate in more detail the question of required flexural rigidity of stiffeners.

Experiments with large size model girders will give a chance to check the theory and to investigate such important points as stress distribution in the web and in the rivets after buckling begins.

TRADUCTION,

par M. Gossieaux, Ing., Paris.

Introduction.

Pour le calcul d'une poutre composée, il faut prendre en considération non seulement les charges, mais également la stabilité élastique du système. On sait [1] qu'une poutre en I qui subit un fléchissement dans le plan de l'âme peut accuser une stabilité insuffisante et subir un flambage latéral. La valeur critique de la charge pour laquelle ce flambage peut se produire dépend non seulement de la rigidité latérale des ailes, mais également de la rigidité à la torsion de la poutre, ainsi que du rapport entre la longueur de la portée et la hauteur de cette poutre. Pour éliminer cette cause d'instabilité, il est nécessaire de prévoir un dispositif approprié réalisant un renforcement latéral [2].

Un autre problème lié à la stabilité élastique se pose pour le calcul des poutres composées : c'est la détermination de l'épaisseur de l'âme et de l'écartement des pièces de renforcement de cette âme. On pourra constater souvent qu'il est nécessaire de pousser l'épaisseur de l'âme au delà d'une valeur cor-

1. L. Prandtl. Le phénomène du flambage. Thèse, Nuremberg, 1899.

2. L'accident survenu à un pont situé près de Tarbes fournit un exemple de la rupture d'une poutre à la suite d'un flambage latéral (La Revue Technique, 15 novembre 1897).

respondant au cisaillement simple, par suite précisément de cette tendance au flambage. Au lieu d'augmenter l'épaisseur de l'âme, et pour répondre à la même nécessité d'assurer la stabilité de cette âme, on peut prévoir des pièces de renforcement spéciales disposées à des endroits judicieusement choisis.

Le but de la présente étude est d'étudier les problèmes que pose le flambage latéral d'une poutre en I et le flambage d'une poutre composée.

I. Stabilité latérale d'une poutre.

1. Notations adoptées.

Les notations qui suivent ont été adoptées dans cette étude :

$2l$ portée de la poutre composée ;

h hauteur de la poutre composée ;

$B_1 = E I_1$ rigidité à la flexion dans le plan de l'âme ;

$B_2 = E I_2$ rigidité à la flexion dans la direction perpendiculaire au plan de l'âme ;

Q_{cr} charge totale à partir de laquelle la poutre commence à devenir instable et le flambage latéral s'amorce ;

σ_{cr} effort de flexion maximum correspondant à la charge Q_{cr} ;

C rigidité de la poutre à la torsion ;

$$\alpha = \frac{C}{B_2}\left(\frac{2l}{h}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\beta = \frac{B_2}{B_1}\left(\frac{h}{2l}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

2. Charge critique.

Dans tous les cas, la charge critique peut être représentée par l'équation [1] :

$$Q_{cr} = K\frac{\sqrt{B_2 . C}}{(2l)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

expression dans laquelle K est un coefficient numérique qui dépend :

a) de la grandeur de la quantité α telle qu'elle est définie ci-dessus par l'équation (1) ;

b) de la nature de la charge ;

c) du dispositif de fixation des extrémités de la poutre.

On voit que Q_{cr} peut être facilement déterminé si l'on connaît le coefficient K. Il faut remarquer qu'une modification dans la valeur de C n'exerce qu'une influence relativement faible sur la charge critique ; il en résulte que pour le calcul de C, on peut employer des formules approximatives. Dans le cas d'une section droite en I, telle que celle qui est représentée sur la figure 1, on peut admettre que la rigidité à la torsion de la poutre est approximativement égale à la somme des rigidités à la torsion des trois éléments rectangulaires dans lesquelles on peut décomposer cette poutre, et l'on peut écrire :

$$C = G\left(\frac{2}{3} l \delta^3 + \frac{1}{3} h \delta_1^3\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

expression dans laquelle G désigne le module de rigidité.

1. S. Timoshenko. Zeitschrift f. Math. u. Phys. Vol. 58, 1910 ; S. Timoshenko. Annales des Ponts et Chaussées, 1913-IV.

D'une manière plus générale, C peut être déterminé en employant l'équation approchée de SAINT-VENANT :

$$C = \frac{1}{40} \cdot \frac{A^4}{J_p} \cdot G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

expression dans laquelle A désigne la valeur de la section droite et

$$J_p = \frac{B_1 + B_2}{E}$$

le moment polaire d'inertie de la section droite.

3. Poutre uniformément chargée et posée librement à ses extrémités.

Dans ce cas, on suppose que les extrémités peuvent subir librement un mouvement de rotation par rapport à l'axe de symétrie des sections d'extrémités, mais qu'elles ne peuvent pas subir un mouvement de rotation autour de l'axe coïncidant avec l'axe de la poutre. Le processus de flambage de la poutre est indiqué sur la figure 2. On remarquera que, par suite du mode de fixation des extrémités, le flambage latéral de la poutre est accompagné d'une torsion. Ceci explique pourquoi la stabilité de la poutre ne dépend pas seulement de la rigidité latérale à la flexion B_2 mais également de la rigidité à la torsion C ainsi que le fait ressortir l'équation (3).

Tableau 1.

Facteur K et charges critiques en kg par mm²
pour une poutre uniformément chargée et posée simplement à ses extrémités

α	0,1	1	2	4	6	8	12
K	143	53	42,6	36,3	33,8	32,6	31,5
σ_{cr}	6	7	7,9	9,5	10,9	12,1	14,2
σ'_{cr}	3,85	4,75	5,65	7,2	8,55	9,7	11,75
σ''_{cr}	9,25	10,1	11	12,6	14	15	17,2
α	16	20	32	50	70	90	100
K	30,5	30,1	29,4	29	28,8	28,6	28,6
σ_{cr}	16,1	17,6	21,8	27	31,7	35,7	37,6
σ'_{cr}	13,6	15,1	19,6	24,5	29,1	33,2	35
σ''_{cr}	19	20,6	24,7	29,8	34,4	38,6	40,3

Les valeurs du coefficient K de l'équation (3), calculées pour ce cas (1), sont indiquées dans le tableau 1 en fonction de la quantité α telle qu'elle est définie par l'équation (1). Si l'on connaît les dimensions de la poutre composée, on peut calculer facilement les valeurs de C et de B_2. On déduira ensuite α de

l'équation (1) et on tirera du tableau la valeur correspondante de K. En reportant cette valeur dans l'équation (3), on obtiendra la charge critique Q_{cr}.

La valeur correspondante de l'effort critique est :

$$\sigma_{cr} = \frac{Q_{cr} E h l}{8 B_1}$$

ou, en faisant intervenir les équations (1) et (2) :

$$\sigma_{cr} = \frac{K E}{16} \beta \sqrt{\alpha} \tag{6}$$

A partir de cette équation, on peut facilement calculer les valeurs de σ_{cr} à condition de connaître K. La troisième ligne du tableau 1 donne les valeurs de σ_{cr} calculées à partir de l'équation (6) en supposant :

$$\beta = 10^{-4} \quad \text{et} \quad E = 21 . 10^3 \text{ kg. par mm}^2.$$

Les efforts critiques correspondant à une poutre admettant toute autre valeur de β et un module E_1 peuvent être obtenus en multipliant le nombre correspondant du tableau 1 par

$$10^4 \beta \frac{E_1}{E} .$$

Il y a lieu de remarquer que la stabilité latérale d'une poutre composée varie avec la position de la charge. Les valeurs de K que donne le tableau 1 ont été calculées en supposant que la charge est répartie le long de l'axe de la poutre. Si l'on suppose une charge uniformément répartie le long de l'aile supérieure de cette poutre, la stabilité se trouve réduite et il en résulte corrélativement que les valeurs du coefficient K deviennent plus faibles. Les valeurs correspondantes des efforts critiques, désignées par σ'_{cr} sont données dans la quatrième ligne du tableau 1. La ligne 5 de ce même tableau donne les valeurs des efforts critiques σ''_{cr} lorsque l'on suppose une charge uniformément répartie le long de l'aile inférieure de la poutre.

4. Exemples numériques.

Considérons, à titre de premier exemple, un profilé en I ayant les dimensions suivantes :

Portée	$2l = 20$	ft. = 6,096 m.
Hauteur	$h = 24$	in. = 609,6 mm.
Largeur d'aile	$b = 7$	in. = 177,8 mm.
Épaisseur d'âme	$\delta_1 = 0,5$	in. = 12,7 mm.
Épaisseur moyenne des ailes... $\delta = 1/2(0,6 + 1,14)$ in.	$\delta = 0,87$	in. = 22,1 mm.
Section droite	$A = 23,3$ sq. in.	$= 150,3$ cm^2
Rigidité à la flexion	$B_1 = 2.087\ E$	
	$B_2 = 42,7\ E$	

La rigidité à la torsion, déduite de l'équation (5), est :

$$C = \frac{23,3^4 G}{40(2.087 + 42,7)} = 3,46 G.$$

Des équations (1) et (2), on déduit :

$$\alpha = 3.24 \qquad \beta = 205.10^{-6}.$$

Le tableau donne pour $\alpha = 3{,}24$, par interpolation :

$$\sigma_{cr} = 11.300 + 1/2\,(13.600 - 11.300).\,1{,}24 = 12.700 \text{ lb/sq. in.}$$
$$= 8{,}9 \text{ kg. par mm}^2.$$

Cette valeur correspond à l'effort critique pour $\beta = 10^{-4}$; dans le cas qui nous occupe, l'effort critique est :

$$\sigma_{cr} = 12.700.\beta.10^4 = 26.000 \text{ lb/sq. in.} = 18{,}2 \text{ kg. par mm}^2.$$

Si, au lieu de partir de l'équation (5), on part de l'équation (4) pour déterminer la rigidité à la torsion, on trouve :

$$C = 4{,}07\,G.$$

On a alors : $\alpha = 3{,}80$ et le tableau 1 donne :

$$\sigma_{cr} = 11.300 + 1/2\,(13.600 - 11.300).\,1{,}80 = 13.400 \text{ lb/sq. in.}$$
$$= 9{,}4 \text{ kg. par mm}^2.$$

Pour le cas qui nous occupe, l'effort critique est :

$$\sigma_{cr} = 13.400.\beta.10^4 = 27.400 \text{ lb/sq. in.} = 19{,}2 \text{ kg. par mm}^2,$$

valeur supérieure d'environ 5,5 % à l'effort trouvé précédemment.

La méthode approchée ordinaire pour le calcul des efforts critiques dans les poutres non munies d'appuis latéraux consiste à considérer l'aile supérieure comprimée de la poutre comme un poteau. Étant donné que l'effort de compression qui s'exerce dans l'aile est proportionnel au moment de flexion et suit la loi parabolique, il y a lieu de substituer la longueur réduite

$$L = 0{,}694.20.12 = 167 \text{ in.} = 4{,}242 \text{ m.}$$

à la longueur effective. Le rayon de giration de la section droite de l'aile est :

$$r = \frac{7}{2\sqrt{3}} = 2{,}02 \text{ in.} = 51{,}4 \text{ mm.}$$

Par suite, on a :

$$\frac{L}{r} = 83.$$

Pour de telles conditions, la formule d'Euler donne un effort critique qui se trouve au delà de la limite d'élasticité de l'acier de construction ordinaire. Si l'on prend la formule linéaire courante, on trouve :

$$\sigma_{cr} = 52.500 - 220\,\frac{L}{r} = 34.300 \text{ lb/sq. in.} = 24 \text{ kg. par mm}^2,$$

effort supérieur de 32 % à celui que l'on avait obtenu ci-dessus en employant l'équation (3).

Comme deuxième exemple, considérons une poutre composée constituée par une tôle d'âme de 26 × 3/8 in. (660,4 × 9,5 mm.) avec ailes constituées par des cornières de 5 × 3 1/2 × 1/2 in. (127 × 88,9 × 12,7 mm.). Les dimensions de la poutre sont :

$$2l = 480 \text{ in.} = 12{,}20 \text{ m.}$$
$$h = 26\,1/2 \text{ in.} = 673 \text{ mm.}$$
$$A = 25{,}75 \text{ sq. in.} = 166 \text{ cm}^2$$
$$B_1 = 3.000\,E \qquad B_2 = 95\,E.$$

La rigidité à la torsion, déduite de l'équation (4), est :

$$C = 3{,}55\,G.$$

Des équations (1) et (2), on déduit :

$$\alpha = 4{,}91 \qquad \beta = 0{,}967.10^{-4}.$$

Du tableau 1, on déduit par interpolation :

$$\sigma_{cr} = 13.600 + 1/2(15.600 - 13.600).0{,}91 = 14.500 \text{ lb/sq. in.}$$
$$= 10{,}2 \text{ kg. par mm}^2.$$

Dans le cas considéré :

$$\sigma_{cr} = 14.500.\beta.10^4 = 14.000 \text{ lb/sq. in.} = 9{,}8 \text{ kg. par mm}^2.$$

Afin de mettre en évidence les variations des efforts critiques en fonction des rapports $\frac{2l}{h}$ et $\frac{h}{b}$ on a fait les calculs pour des poutres en I (figure 1), avec :

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{\delta} = 10.$$

Les valeurs des efforts critiques considérés en fonction du rapport $\frac{2l}{h}$ pour trois différentes valeurs du rapport $\frac{h}{b}$, à savoir : 3, 4 et 5, sont indiquées sur la figure 3, au moyen des courbes I, II et III. On a tracé en pointillé la courbe reliant les points correspondant à $\frac{2l}{b} = \text{Cte}$.

On remarquera que, pour une valeur constante du rapport $\frac{2l}{b}$, l'effort critique diminue lorsque la hauteur de la poutre augmente. On ne tient pas compte de ce fait dans la méthode approchée courante, qui a été mentionnée ci-dessus et dans laquelle l'aile comprimée est considérée comme un poteau. Dans le tableau ci-dessous, on trouvera les efforts critiques obtenus par la méthode approchée d'une part et à partir de l'équation (3) d'autre part, à titre de comparaison et dans le cas où

$$\frac{h}{b} = 3$$

$\frac{2l}{b}$	54	48	42	36
σ_{cr} approché	12,5	15,9	21,2	23,5
σ_{cr} exact	10,1	11,8	14	17,6

Lorsque le rapport $\frac{h}{b}$ augmente, l'écart entre la valeur exacte et la valeur approchée augmente également.

5. Efforts dépassant la limite d'élasticité.

L'équation (3) est basée sur cette hypothèse que le métal de la poutre suit la loi de Hooke. Par suite, les efforts critiques déterminés d'après le tableau 1, ou d'après la figure 3, ne représentent les vraies valeurs de ces efforts que s'ils ne sont pas supérieurs à la limite élastique du métal. Dans le cas contraire, les efforts critiques ainsi déterminés sont trop élevés. Pour un calcul approché des efforts critiques au delà de la limite d'élasticité, on peut employer la formule linéaire des poteaux. Si l'on suppose, par exemple, que la limite d'élasticité de l'acier de construction est de 21 kg. par mm², on pourra en conclure que les courbes I, II et III de la figure 3 ne peuvent être utilisées qu'au-dessous des points N. Pour des efforts plus considérables, ces courbes doivent être remplacées par les lignes droites MN. On a pris, pour la résistance de l'acier à l'écrasement dans la figure 3, la valeur de 35,7 kg. par mm².

Si l'on possède la courbe d'essai de traction du métal constituant la poutre, pour des efforts supérieurs à la limite d'élasticité, on pourra effectuer une détermination plus précise des efforts critiques en dehors de la zone élastique. Pour ce faire, on tiendra compte de la diminution de la rigidité latérale B_2 provoquée par le chargement des ailes au delà de la limite d'élasticité. Des calculs de cette nature [1] montrent que l'emploi des droites MN (figure 3) donne des valeurs de sécurité.

6. Influence des contraintes additionnelles imposées aux poutres.

Toute contrainte additionnelle imposée à une poutre provoque un accroissement de sa stabilité, c'est-à-dire une augmentation du facteur K dans l'équation (3). Supposons, par exemple, une poutre ayant ses extrémités encastrées. Dans le cas d'un flambage latéral, la courbe élastique prend la forme indiquée sur la figure 4 (a). La valeur critique de la charge uniformément répartie est donnée par l'équation (3). Les valeurs du facteur K, ainsi que les efforts critiques σ_{cr} calculés d'après l'hypothèse correspondant à :

$$E = 21.10^3 \text{ kg. par mm}^2 \text{ et } \beta = 10^{-4}$$

sont donnés par le tableau ci-dessous.

Tableau 2.

Facteur K et efforts critiques en kg. par mm², pour une poutre supportant une charge uniformément répartie et encastrée à ses deux extrémités, avec :

$E = 21.10^3$ kg. par mm² et $\beta = 10^{-4}$

α	0,1	1	2	4	8	24	32	50	100
K	488	161	119	91,3	73	58	55,8	53,5	51,2
σ_{cr}	13,5	14,1	14,8	16	18,1	24,9	27,6	33	44,8

1. S. Timoshenko. Amer. Soc. of Civil Engineers, Volume 87, 1924, page 1247.

Pour le calcul des valeurs indiquées dans ce tableau, on a supposé que la charge est répartie sur la longueur de l'axe de la poutre.

Si la poutre est entretoisée latéralement, au milieu de sa portée, de telle manière que sa section médiane ne puisse pas subir un déplacement latéral, ou une rotation autour de l'axe de la poutre, la courbe élastique résultant de la déformation latérale prendra la forme de la figure 4 (*b*). Le tableau 3 donne les valeurs du coefficient K dans l'équation (3) ainsi que les valeurs des efforts critiques σ_{cr}, σ_{cr}' et σ''_{cr} correspondant à une charge uniformément répartie :

1. Le long de l'axe de la poutre ;
2. Le long de l'aile supérieure ;
3. Le long de l'aile inférieure.

Tableau 3.

Facteur K et efforts critiques en kg. par mm², pour une poutre supportant une charge uniformément répartie avec appui latéral en son milieu, avec : $E = 21.10^3$ kg. par mm² et $\beta = 10^{-4}$

α	0,1	1	2	4	8	24	32	50
K	673	221	164	126	101	79,5	76,4	72,8
σ_{cr}	27,9	29,1	30,5	32,9	37,3	51	56,6	67,6
σ'_{cr}	24,4	25,5	26,9	29,4	33,8	47,5	53,2	64
σ''_{cr}	32,1	33,2	34,4	37	41,3	55	60,6	71,4

7. Charges concentrées en un point.

L'équation (3) est également valable pour une charge concentrée, Q_{cr} étant alors la valeur critique de cette charge. Si la charge est appliquée au milieu de la portée d'une poutre posée simplement sur ses appuis, le tableau 4 ci-dessous donne les valeurs du facteur K, ainsi que celles des efforts critiques dans les trois différentes conditions de charge ci-dessous :

1. Charge appliquée au milieu de la section ;
2. Charge appliquée sur l'aile supérieure ;
3. Charge appliquée sur l'aile inférieure.

Lorsque α augmente, la valeur du facteur K se rapproche de la valeur 16,9 que nous avons obtenue pour une poutre ayant une section rectangulaire très étroite. Pour une telle poutre, le problème de l'instabilité élastique est résolu[1] pour toute position de la charge concentrée sur la longueur de la poutre. Si on désigne par *c* la distance entre le point d'application de la charge et le support le plus proche, dans le cas d'une poutre simplement posée, les valeurs du facteur K sont indiquées dans le tableau 5 ci-après.

1. A. Koboroff. Bulletin de l'Institut Polytechnique, Kiew, 1911;
A. Dinnik. Bulletin de l'Institut Polytechnique du Don, 1913.

Tableau 4.

Facteur K et efforts critiques en kg. par mm², pour une charge concentrée au milieu d'une poutre simplement posée, avec : $E = 21.\ 10^3$ kg. par mm² et $\beta = 10^{-4}$

α	0,1	1	2	4	6	8	12
K	86,4	31,9	25,6	21,8	20,3	19,6	19
σ_{cr}	7,14	8,4	9,6	11,5	13,1	14,5	17
σ'_{cr}	4,25	5,3	6,3	8,1	9,7	11	13,4
σ''_{cr}	12,1	13,1	14,2	15,9	17,6	25,9	21,3
α	16	20	24	40	60	80	100
K	18,3	18,1	17,9	17,5	17,4	17,2	17,2
σ_{cr}	19,3	21,2	23	29,1	35,2	40,5	45,2
σ'_{cr}	15,7	17,6	19,3	25,4	31,5	36,7	41,4
σ''_{cr}	23,5	25,4	27,1	33,2	39,3	44,5	49,2

Tableau 5.

$\frac{c}{2l}$ =	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25
K =	16,9	17,2	17,8	19,0	21,0	24,1

$\frac{c}{2l}$ =	0,20	0,15	0,10	0,05
K =	29,1	37,9	56	112

On constate que le facteur K ne varie pas considérablement tant que le point d'application de la charge reste dans le tiers médian de la poutre. Par suite, si nous nous trouvons en présence de plusieurs charges agissant tout le long de ce tiers médian, nous pouvons les remplacer par une charge unique appliquée au milieu de la poutre et calculer la valeur critique de cette charge en partant du tableau 4. Si des charges concentrées sont réparties sur toute la longueur de la poutre, on peut les remplacer par une charge uniforme et ses valeurs critiques pourront être déterminées en faisant emploi des tableaux 1, 2 et 3.

II. Stabilité de l'âme d'une poutre composée.

8. Essais.

Les premiers essais de flambage sur des âmes minces supportant des efforts de cisaillement et de flexion ont été exécutés par Wm. Fairbairn, à propos de la construction des célèbres ponts tubulaires Britannia et Conway. Ces essais,

devenus classiques [1], ont, jusqu'à nos jours, présenté le plus grand intérêt pour les ingénieurs ayant à s'occuper de constructions comportant des parois minces. Le pont Britannia, qui est tubulaire, a une section transversale rectangulaire. Les plus grands éléments ont une portée de 137 mètres et leurs sections ont des dimensions de $8{,}23 \times 4{,}88$ mètres. A cette époque, de telles dimensions sortaient nettement de la normale. Pour déterminer des dimensions susceptibles de donner toutes garanties de sécurité, et pour fixer la meilleure répartition à adopter pour le métal, on décida de procéder à des essais sur des modèles. Après de nombreuses expériences préliminaires, on fut amené à étudier des modèles d'assez grandes dimensions, soit environ le sixième des dimensions effectives du pont projeté. Les parois latérales des tubes utilisés comme modèles se composaient de tôles de 1,15 mètre ayant une épaisseur de 2,5 millimètres seulement. Les premiers essais montrèrent que, pour une charge relativement faible, il se produisait sur les côtés des ondulations de la tôle, allant jusqu'à former des angles de 45° avec le plan du fond. « Il était évident, d'après ces expériences, que les efforts de tension qui s'exerçaient sur toute la surface du fond et les efforts de compression sur toute la partie supérieure se combinaient en une action et une réaction, par l'intermédiaire des parois latérales, qui avaient ainsi à supporter des efforts diversement orientés. » « Une ligne d'ondulation oblique mettait nettement en évidence la direction de l'effort maximum. Il était évident que les parois latérales se trouvaient exposées à des efforts sévères par suite de la modification de forme qui résultait de la tendance au rapprochement entre les parois supérieure et inférieure ; la résistance des tôles aurait été suffisante, si elles avaient pu seulement conserver leur forme initiale. On décida, par suite, de modifier la construction des parois latérales. Ceci fut réalisé par l'addition, sur toute la hauteur des parois, de montants en cornières rivés, jouant le rôle de pièces de renforcement pour les tôles des parois latérales et maintenant en même temps l'écartement des parois supérieure et inférieure. Ces pièces constituèrent les prototypes des montants en profilés en T qui furent employés sur les ponts eux-mêmes. » Les essais ultérieurs montrèrent l'importance du rôle de ces montants, étant donné que pour une faible addition au poids du métal du tube, les parois supérieure et inférieure étaient exactement maintenues en place, tandis que la charge de rupture de l'ensemble était considérablement augmentée. C'est par ces expériences que l'on apprit que « lorsque la hauteur de l'âme augmente, les précautions nécessaires pour maintenir les parois de la tôle deviennent extrêmement importantes ». Les fers à T, goussets et plaques de renforcement employés à cet effet pour l'un des tubes du pont Britannia pèsent 215 tonnes, soit plus du tiers du poids total des parois latérales.

Les tubes d'essai ont été soumis à une charge concentrée placée au milieu, l'effort tranchant étant constant sur toute la longueur de la portée. Pour l'étude du pont lui-même, on a tenu compte du fait que l'effort tranchant maximum diminue vers le milieu ; on a adopté une épaisseur d'âme de 12,7 millimètres au milieu et de 16 millimètres aux extrémités.

---

1. Wm. Fairbairn. Conway and Britannia Tubular Bridges, 1849 ;
Edwin Clark. Brit. and Conway Tub. Bridges, Londres, 1850.

Différentes études expérimentales furent également effectuées à cette époque sur des poutres composées [1]. L'épaisseur de l'âme de la poutre d'étude était de 6,35 mm. d'un bout à l'autre ; la hauteur totale était de 3 mètres au centre et de 1,80 m. aux extrémités, la distance entre appuis étant de 19,8 m. La poutre céda par flambage sur l'âme. Elle fut réparée ultérieurement, l'âme étant renforcée par adjonction de montants en cornières à chaque assemblage vertical des tôles. La résistance de l'ensemble fut ainsi considérablement augmentée ; la rupture se produisit en définitive pour une charge beaucoup plus élevée et par écrasement sur toute la hauteur.

Des essais furent effectués ultérieurement par un ingénieur belge, M. Houbotte [2], sur deux poutres composées ayant une portée de 1,50 m., une épaisseur d'âme de 5 mm., et des hauteurs respectives de 0,30 et 0,40 m. Ces deux poutres ont été chargées en leur milieu ; toutes les deux ont cédé par flambage de l'âme, cette dernière ne comportant aucun renforcement. La poutre ayant la plus forte hauteur a cédé pour une charge plus faible que l'autre, quoique son module soit deux fois plus élevé que celui de la poutre ayant la plus petite hauteur.

Plus récemment, le professeur W. E. Lilly [3] a effectué quelques travaux sur les poutres composées. Il a construit une poutre ayant les dimensions suivantes :

Hauteur : 241,3 mm. ; longueur : 1,60 m. Les ailes étaient constituées par deux tôles de 50,8 × 9,5 mm. et par deux cornières de 31,75 × 6,35 mm. Les semelles de cette poutre ont été montées par moitiés séparées et boulonnées sur l'âme. Ce montage a permis d'adopter successivement différentes épaisseurs d'âme dans le cours des essais. Un grand nombre d'essais ont été ainsi effectués avec différentes épaisseurs d'âme, et avec des écartements divers des pièces de renforcement.

On a obtenu la déformation ondulatoire de la tôle d'âme en appliquant la charge au milieu. « On a constaté que la longueur d'onde de la déformation ondulatoire est à peu près indépendante de l'épaisseur de cette tôle, lorsque les pièces de renforcement présentent une résistance très élevée par rapport à celle de l'âme. L'obliquité de la direction des ondulations dépend de la distance qui sépare entre eux les éléments de renforcement, ainsi que de la hauteur de la poutre. Les pièces de renforcement entravent la formation des ondulations et des efforts locaux sévères prennent naissance près des extrémités de ces renforcements, provoquant un froissement dans cette région de l'âme. La photographie de la figure 5 représente la formation ondulatoire qui s'est produite sur une poutre renforcée seulement en son milieu, la charge ayant été appliquée à cet endroit.

9. Épaisseur d'âme et écartement des éléments de renforcement.

Des essais qui ont été effectués, il résulte qu'une poutre composée peut transmettre les efforts tranchants à ses appuis de deux manières différentes :

1. Edwin Clark. Britannia and Conway Tubular Bridges, Londres, 1850.
2. M. Houbotte. Der Civilingenieur, 1856, volume 4.
3. W. E. Lilly. Calcul des poutres composées et des poteaux, 1908 ;
   W. E. Lilly. Engineering, volume 83, 1907, page 136.

1. Si la charge n'est pas suffisante pour produire une déformation ondulatoire, l'âme de la poutre transmet l'effort de cisaillement en travaillant au cisaillement.

2. Pour des charges plus fortes, et produisant la déformation ondulatoire, une fraction de l'effort tranchant est transmise à l'âme sous forme d'efforts tranchants, comme précédemment, tandis que l'autre fraction se comporte comme dans une ferme, dans laquelle l'âme jouerait le rôle d'entrait et les éléments de renforcement le rôle de contrefiches. La valeur de la charge à partir de laquelle commence à se produire la déformation ondulatoire dépend de l'épaisseur de l'âme, ainsi que de l'écartement et des dimensions des éléments de renforcement. Si l'épaisseur de l'âme est suffisante et si le renforcement est satisfaisant, une poutre composée peut supporter la totalité de la charge pour laquelle elle est conçue, sans qu'il se produise aucun flambage dans l'âme. On réalise normalement de telles proportions dans les ponts. Il existe d'autre part des exemples de construction dans lesquelles des âmes très minces ont tendance à subir le flambage dès le début de la charge de sorte que la charge totale se trouve agir pratiquement comme dans une ferme. On trouve ces exemples dans la construction aéronautique[1].

Quoique le flambage de l'âme n'implique pas la mise hors service immédiate de la poutre, on adopte généralement dans la construction des ponts des dimensions qui permettent de l'éviter dans les conditions normales de service. La méthode habituelle consiste à adopter une certaine valeur pour l'effort de cisaillement et à déterminer l'épaisseur de l'âme en partant de cette base[2]. L'écartement des éléments de renforcement est ensuite déterminé de manière à permettre à l'âme de transmettre les efforts tranchants sans flamblage.

Si l'on remarque que dans les poutres de ponts de chemins de fer, la charge totale varie approximativement comme la portée, et si l'on admet que le rapport entre la hauteur de la poutre et la portée est constant, on peut se rendre compte que le point de vue ci-dessus aboutit à peu près à la même épaisseur pour toutes les portées. Si l'on peut admettre que cette épaisseur est suffisante pour les petits ponts, elle sera toutefois certainement insuffisante pour les ponts de plus grande portée et il deviendra nécessaire d'augmenter l'épaisseur pour parer à la tendance de l'âme au flambage. Quelques cahiers des charges tiennent compte de ce fait. Par exemple, les cahiers des charges de l'American Railway Engineering Association[3] imposent que l'épaisseur de l'âme ne soit pas inférieure à

$$\frac{1}{20}\sqrt{h}$$

h désignant dans cette expression la distance entre les ailes, exprimée en pouces (1 pouce = 25,4 millimètres).

D'autres raisons pratiques limitent l'épaisseur, à savoir la corrosion et le

1. H. Wagner. Zeitschrift für Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, volume 20, 1929, page 200; H. Rode. Der Eisenbau, volume 7, 1916, page 217; Engineering News, volume 40, 1899, pages 154, 399.

2. L'effort en service est parfois déterminé au moyen d'une variante de la formule de Rankine. — American Institute of Steel Construction Specifications, New-York, 1928, p. 156.

3. Troisième édition, 1925.

fait que les tôles trop minces sont très difficiles à transporter, lorqu'elles sont hautes et longues. L'épaisseur de 9,5 millimètres est généralement considérée comme le minimum admissible pour assurer contre la corrosion et pour permettre une manutention facile pour la construction et l'expédition.

En ce qui concerne l'écartement et les dimensions des éléments de renforcement, diverses spécifications prévoient certaines règles qui sont, dans une large mesure, d'un caractère empirique. Les spécifications américaines indiquées ci-dessus, par exemple, prévoient que la distance entre les éléments de renforcement ne doit pas dépasser :

1. six pieds (1,83 mètre);
2. la hauteur de l'âme;
3. une valeur d donnée par la formule :

$$d = \frac{t}{40}(12.000 - \tau)$$

expression dans laquelle t désigne l'épaisseur de l'âme en pouces (1 pouce = 25,4 mm) et τ l'effort tranchant en lb. par sq. in. au point considéré (1 livre par pouce carré = 0,0007 kg. par mm^2). Si la hauteur de l'âme entre les cornières d'ailes est inférieure à 50 fois l'épaisseur de l'âme, on peut supprimer une pièce de renforcement sur deux. Ces pièces de renforcement doivent être rivées par paires sur l'âme de la poutre. L'aile saillante de chaque cornière ne doit pas être inférieure à 2 pouces (51 mm.) plus 1/30 de la hauteur de la poutre, et ne doit pas dépasser 16 fois son épaisseur. Les éléments de renforcement sont parfois calculés de manière à leur faire jouer le même rôle que les montants verticaux d'une poutre triangulaire ; en pareil cas, il suffit de s'assurer que ces éléments seront, en fin de compte, assez résistants pour supporter la totalité des efforts tranchants sur la section considérée [1].

Les règles concernant la détermination des épaisseurs des âmes et l'écartement des éléments de renforcement aboutissent généralement à des proportions satisfaisantes, étant donné qu'elles sont le résultat d'une longue expérience. Elles sont en même temps assez souples et laissent une assez grande part à l'appréciation individuelle pour permettre d'obtenir toute une gamme de dimensions dans le calcul des poutres composées, pour une même portée et une même charge. Si l'on considère, par exemple, des poutres composées ayant une portée de 30 mètres, et une hauteur de 3 mètres, on constate que l'épaisseur de l'âme peut varier de 11 à 16 millimètres [2]. La comparaison de deux poutres composées d'une portée de 27 mètres pour un réseau américain d'une part et pour un réseau anglais d'autre part, montre que les éléments de renforcement rentrent, dans le poids total de métal correspondant à l'ensemble de l'âme et des renforcements, pour 25 % dans le type américain et pour 40 % dans le type anglais [3].

De la discussion qui précède, il résulte que la détermination des dimensions des poutres composées est basée, dans une large mesure, sur des règles empiriques. Pour baser leur calcul sur des considérations théoriques, il est néces-

1. W. H. Thorpe. Engineering, volume 78, 1905.
2. H. Rode. Der Eisenbau, volume 7, 1916, page 217.
3. H. M. Gibb. Engineering, volume 90, 1910.

saire de procéder à l'étude de la stabilité élastique des âmes en tôle mince. La discussion du flambage de l'âme doit être faite en considérant deux cas extrêmes :

1. Près des appuis, l'effort tranchant constitue le facteur le plus important, et la partie de l'âme qui se trouve entre deux éléments de renforcement peut être considérée comme une plaque rectangulaire soumise à une action uniforme de cisaillement (figure 6).

2. Au milieu de la portée, les efforts tranchants peuvent être négligés par rapport aux efforts normaux. La partie de l'âme qui se trouve entre deux éléments de renforcement sera alors considérée comme soumise à une flexion simple, ainsi qu'il est indiqué sur la figure 7.

La discussion de ces deux cas fait l'objet des lignes qui suivent.

10. Stabilité de plaques rectangulaires soumises à un cisaillement simple.

L'étude de la stabilité des plaques rectangulaires sous l'action d'efforts de cisaillement (figure 6) montre que les valeurs de l'effort critique de cisaillement pour lesquelles le flambage se produit peuvent être représentées par la formule suivante[1] :

$$\tau_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{d^2 t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

formule dans laquelle K désigne un coefficient dépendant de la manière dont sont montées les arêtes de la plaque et du rapport $\frac{h}{d}$ entre les côtés du rectangle.

La rigidité de la plaque à la flexion est donnée par :

$$D = \frac{E t^3}{12(1 - \mu^2)} .$$

Si h est très grand en comparaison de d[2], le facteur K ne dépendra pratiquement que des conditions régnant en bordure des côtés de la plaque rectangulaire[3]. Si la plaque est simplement appuyée sur ses bords, $K = 5{,}35$. Si les bords longitudinaux sont fixés par serrage, $K = 8{,}98$.

Si les côtés de la plaque ont à peu près les mêmes dimensions, le calcul de K devient plus compliqué[4]. Le tableau ci-après donne quelques valeurs approchées de ce facteur dans le cas où les bords de la plaque sont simplement posés[5].

---

1. S. Timoshenko. Bulletin de l'Institut Polytechnique de Kiew, 1910, dont on trouvera la traduction française dans les Annales des Ponts et Chaussées, 1913; S. Timoshenko. Der Eisenbau, volume 12, 1921, page 147.

2. Le cas s'est produit, en particulier, pour le pont tubulaire Britannia dont il est parlé plus haut.

3. R. V. Southwell et S. W. Skan. Proceedings of the Royal Society, Londres, volume 105, A, 1924; R. V. Southwell. Phil. Mag. volume 48, 1924, page 540.

4. S. Timoshenko. Der Eisenbau, volume 12, 1921, page 147.

5. On admet que d dans l'équation (7) désigne le plus petit côté du rectangle.

De l'équation (7), et en tenant compte de la valeur de D en fonction de t, on déduit que les valeurs critiques de l'effort tranchant sont proportionnelles à

$$\left(\frac{t}{d}\right)^2$$

Par suite, la stabilité d'une plaque diminue rapidement lorsque l'épaisseur de cette plaque diminue.

Tableau 6.

Valeurs du facteur K, de l'équation (7), pour des plaques rectangulaires simplement posées.

$\frac{h}{d}$	1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2	2,5	3
K	9,42	8	7,3	7,1	7	6,8	6,6	6,3	6,1

Si l'on applique les valeurs de K telles qu'elles sont données par le tableau 6 à des plaques d'acier, pour lesquelles $E = 21.10^3$ et $\mu = 0,3$, et si l'on suppose que l'écartement entre les éléments de renforcement est égal à 1,50 mètre, les valeurs critiques de l'effort de cisaillement pour différentes hauteurs h et différentes épaisseurs t sont celles que donne le tableau 7 ci-après.

Tableau 7.

Efforts tranchants critiques, en kg. par mm², pour différentes valeurs de h et de t et pour $d = 1,525$ m.

t. mm. h. m.	9,5	11,1	12 7	14,3
1,525	7	9,5	12,4	15,7
1,83	5,9	8,05	10,5	13,3
2,133	5,4	7,35	9,6	12,2
2,44	5,25	7	9,25	11,8
2,743	5	6,85	8,95	11,3
3,048	4,9	6,65	7,3	11

Il faut remarquer que la partie de l'âme située entre les ailes et deux renforcements successifs se trouve dans de meilleures conditions que précédemment. Les bords sont en effet partiellement fixés et les efforts critiques seront par suite quelque peu supérieurs aux valeurs indiquées dans le tableau 7.

11. Stabilité des plaques rectangulaires soumises à une simple flexion

Si une plaque rectangulaire est soumise à une simple flexion dans le plan

de la plaque (figure 7), la valeur critique de l'effort maximum de flexion est donnée par l'expression :

$$\sigma_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{h t} \tag{8}$$

expression dans laquelle K est un facteur numérique ; les autres symboles ayant les mêmes significations que dans l'équation (7). Pour une plaque simplement posée, les valeurs de K sont indiquées dans le tableau 8 ci-dessous [1].

Tableau 8.

Valeurs du coefficient K de l'équation (8), pour des plaques rectangulaires simplement posées.

$\frac{d}{h}$	0,4	0,5	0,6	0,67	0,75	0,8	0,9	1	1,5	2	3
K	29,1	25,6	24,1	23,9	24,1	24,4	25,6	25,6	24,1	23,9	24,1

Si d est plus grand que h, K ne varie que faiblement lorsque le rapport $\frac{d}{h}$ varie, et lorsque d augmente, la valeur de K se rapproche du minimum de 23,9 qu'elle atteint pour $\frac{d}{h} = 0{,}67$. Ceci résulte du fait qu'une plaque ayant une dimension d importante subit un flambage en plusieurs ondulations avec lignes nodales orientées verticalement et le rapport de la longueur d'onde à la hauteur h se rapproche de la valeur 0,67. Par exemple, pour $\frac{d}{h} = 2$, on aura trois ondulations, chacune d'elles se trouvant dans la même condition qu'une plaque pour laquelle le rapport $\frac{d}{h}$ serait égal à 2/3. Pour $\frac{d}{h} = 3$, on aura quatre ondulations, avec un rapport entre la longueur d'onde et la hauteur égal à 0,75.

Si l'on prend pour K la valeur minimum de 23,9 et si l'on suppose que

$$\frac{t}{h} = \frac{1}{100}$$

on tire de l'équation (8), pour l'acier :

$$\sigma_{cr} = 45{,}5 \text{ kg. par mm}^2.$$

Pour toute autre valeur du rapport $\frac{t}{h}$, la valeur critique de l'effort sera alors :

$$\sigma_{cr} = 45{,}5 \cdot 10^4 \frac{t^2}{h^2}.$$

Si on a, par exemple : $t = 12{,}7$ mm. $h = 3{,}05$ m., on aura :

$$\sigma_{cr} = 45{,}5 \cdot 10^4 \frac{1}{240^2} = 7{,}84 \text{ kg. par mm}^2.$$

1. S. Timoshenko. Der Eisenbau, volume 12, 1921, page 147 ; J. Boobnoff. Théorie de la construction des navires, volume 2, page 525, 1914, Saint-Pétersbourg.

Si, au lieu de considérer d comme très important, on se place dans un cas où $d = 1/2\ h$ (éléments verticaux de renforcement écartés de 1,50 mètre), on déduit du tableau : $K = 25{,}6$ et

$$\sigma_{cr} = 7{,}84\ \frac{25{,}6}{23{,}9} = 8{,}4 \text{ kg. par mm}^2.$$

On constate que, pour les proportions considérées, l'effort critique est plus faible que celui qui est considéré normalement comme un effort de flexion sans danger pour les poutres composées. Dans le calcul du tableau 8, on a supposé que les bords de la plaque étaient simplement posés ; en pratique, ils sont montés d'une manière rigide avec des ailes. Par suite, les efforts critiques effectifs seront plus élevés que les valeurs théoriques. Néanmoins, il est probable que dans le cas d'âmes minces de grande largeur, il pourra se produire un certain flambage dans les conditions ordinaires de charge. Ce flambage est si faible qu'il peut passer inaperçu. Il ne représente pas, pour la poutre, un danger immédiat. Il indique seulement que lorsque la charge dépasse la valeur critique et que le flambage commence, l'âme de la poutre ne participe plus suivant la proportion qui lui incombe à la transmission des efforts de flexion qui se traduisent par une compression, ce qui provoque une certaine surcharge dans l'aile comprimée.

12. Les éléments de renforcement.

Considérons maintenant une fraction de l'âme comprise entre deux éléments de renforcement consécutifs. Nous avons supposé, dans la discussion qui précède, que les éléments de renforcement ont une rigidité de flexion suffisante et qu'ils restent droits pendant le flambage de l'âme elle-même. Si cette rigidité n'est pas suffisante, les ondulations obliques de l'âme en cours de flambage s'étendent au travers des éléments de renforcement et le flambage de l'âme s'accompagne d'une flexion de ces éléments. Il était évident que l'on se trouvait en présence d'une telle déformation dans quelques-uns des essais de Fairbairn discutés précédemment (chapitre 8). Pour déterminer la rigidité de flexion nécessaire pour prévenir les déformations des éléments de renforcement pendant le flambage des âmes, considérons le cas que représente la figure 8 : une plaque rectangulaire de longueur $2\ d$ et de largeur h, simplement posée sur ses bords, est soumise à un simple cisaillement. Pour prévenir le flambage latéral, la plaque est renforcée au moyen d'un montant. Si la rigidité de flexion de ce montant est faible, son influence sur la valeur de l'effort tranchant critique sera également faible. Les déformations ondulatoires de la plaque au cours du flambage se transmettront au montant, qui subira un fléchissement. En augmentant progressivement la rigidité du montant, nous arriverons finalement à des conditions telles que chaque moitié de la plaque flambera comme une plaque rectangulaire ayant les dimensions de $h \times d$ avec bords simplement posés, et le poteau restera rectiligne. La valeur limite correspondante B de la rigidité du montant à la flexion peut être déterminée en considérant l'énergie nécessaire à la déformation par flexion de la plaque et du montant [1].

1. S. Timoshenko. Der Eisenbau, volume 12, page 147.

Le tableau 9 ci-après donne plusieurs valeurs du rapport entre cette rigidité et la rigidité $2\,d\,D$ de l'âme, déformée jusqu'à prendre la forme d'une surface cylindrique.

Tableau 9.

$\frac{2d}{h}$	2	1,5	1,25	1
$\frac{B}{2dD}$	0,83	2,9	6,3	15

Pour calculer les chiffres ci-dessus, on a supposé que seul le montant AB de la figure 8 était flexible et que les montants CD et FG étaient absolument rigides. Si les trois montants ont tous la même flexibilité, la rigidité limite B doit être plus élevée que ne l'indiquerait le tableau 9. Supposons que cette valeur soit deux fois plus élevée que la valeur calculée, nous obtenons alors les valeurs indiquées dans le tableau 10 pour le moment d'inertie que doit posséder la section droite des éléments de renforcement, pour différentes dimensions des poutres composées et pour $d = 1{,}50$ mètre.

Tableau 10.

Valeurs des moments d'inertie des éléments de renforcement, pour les dimensions de poutres indiquées ci-dessous et pour $d = 1{,}50$ mètre (en cm4).

h. m.	1,525	2,032	2,44	3,048
$\frac{2d}{h}$	2	1,5	1,25	1
$\frac{B}{2dD}$	1,7	5,8	12,6	30
t. mm.				
9,5	41,2	140	304	725
11,1	65	222	483	1.145
12,7	98	333	725	1.720
14,3	140	480	1.040	2.470

On constate que pour les plus faibles hauteurs, le moment d'inertie calculé, de la section droite, est beaucoup plus faible que celui que l'on adopte effectivement. Pour de plus grandes hauteurs, les valeurs calculées de J se rapprochent des valeurs courantes. Par exemple, dans le cas où $h = 3$ mètres, l'élément de renforcement, suivant le règlement américain [1], se compose de deux cornières de $152{,}4 \times 88{,}9 \times 9{,}5$ mm. Le moment d'inertie de cet élé-

1. H. A. L. Waddell. Construction des ponts, New York, 1916, page 1670.

ment pour $t = 14{,}3$ mm., est $J = 2.600$ cm^4, valeur voisine de celle de 2.470 que donne le tableau ci-dessus.

Dans la discussion qui précède, nous avons considéré une plaque soumise à une action de cisaillement, telle que celle qui s'exerce dans l'âme d'une poutre composée, près des appuis. Au milieu de la poutre, les efforts dans l'âme consistent principalement en efforts de flexion ; de la discussion du chapitre 11, on peut conclure que les éléments verticaux de renforcement n'augmentent pas d'une manière notable la stabilité de l'âme à cet endroit. Un effet de renforcement beaucoup plus sensible peut être obtenu en prévoyant dans la zone comprimée de l'âme un élément de renforcement disposé parallèlement à l'aile comprimée de la poutre composée.

Conclusions.

Les résultats obtenus dans les études précédentes, en ce qui concerne la stabilité élastique des plaques, peuvent être utilisés comme suit, pour le calcul des poutres composées.

Dans la détermination de l'épaisseur de l'âme, considérer non seulement les efforts tranchants aux appuis et l'épaisseur minimum admissible pour assurer la sécurité contre la corrosion, mais également la stabilité élastique de l'âme. Dans la discussion sur le flambage des plaques, sous l'influence d'une simple flexion (chapitre 11), on a montré que les éléments de renforcement verticaux n'avaient pas une influence notable sur la stabilité de l'âme ; et il paraît logique de choisir l'épaisseur de cette âme de manière à éliminer les possibilités de flambage résultant de la flexion dans les conditions normales de service. On peut dans ce but, utiliser l'équation (8).

En remplaçant σ_{cr} par l'effort maximum admissible de compression, soit 10,50 kg. par mm^2 et en adoptant pour K la valeur minimum de 23,9 déduite du tableau 8, nous trouvons pour l'acier, pour lequel $E = 21.10^3$ et $\mu = 0{,}3$:

$$\frac{h}{t} = 208. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Par suite, pour éliminer les risques de flambage au milieu des poutres, le rapport entre la hauteur et l'épaisseur de l'âme ne doit pas dépasser la valeur indiquée en (9). Il n'est pas nécessaire, en ce cas, de prévoir un facteur de sécurité supplémentaire ; on obtient en effet une marge de sécurité supplémentaire en fixant les bords de l'âme sur les ailes.

Lorsque l'on a décidé de la valeur à adopter pour l'épaisseur de l'âme, l'écartement des éléments de renforcement doit être déterminé de manière à permettre à l'âme de transmettre les efforts tranchants sans flambage. Pour ce faire, on peut utiliser les résultats du chapitre 10. Ces résultats peuvent être mis en évidence ainsi qu'il est indiqué sur la figure (9). En partant de l'équation (7) et du tableau 6, pour chaque valeur de l'effort tranchant critique, on trace une courbe admettant pour ordonnées les rapports $\frac{h}{d}$ de la hauteur de la poutre à l'écartement des éléments de renforcement et admettant pour abscisses

les rapports correspondants $\frac{d}{t}$ de l'écartement des éléments de renforcement à l'épaisseur de l'âme. En utilisant ces courbes, on peut obtenir la distance nécessaire d entre les éléments de renforcement, si l'on a fixé la valeur critique de l'effort tranchant.

Considérons la courbe correspondant à l'effort critique :

$$\sigma_{cr} = 20000 \text{ lb./sq. in.} = 14 \text{ kg par mm}^2$$

on voit que pour les valeurs élevées du rapport $\frac{h}{d}$, c'est-à-dire lorsque l'écartement des éléments de renforcement est faible par comparaison avec la hauteur de la poutre, le rapport $\frac{d}{t}$ approche de 90. Lorsque le rapport $\frac{h}{d}$ est faible, h prend la place de d dans la discussion qui précède et le rapport $\frac{h}{t}$ approche de la même valeur numérique de 90. On peut en déduire la conclusion pratique suivante : des efforts de cisaillement de 14 kg par mm² peuvent être considérés comme limites pratiques des efforts de cisaillement dans le cas de l'acier de construction ordinaire. Par suite, si $\frac{h}{t}$ n'est pas supérieur à 90, la résistance de l'âme au flambage n'est pas inférieure à la résistance au cisaillement et les éléments de renforcement ne sont nécessaires qu'aux endroits où se trouvent appliquées des charges concentrées.

En choisissant l'effort critique sur la figure 9, il y a lieu de tenir compte d'un certain facteur de sécurité, parce que, dans ce cas :

1. l'immobilisation des bords de l'âme aux ailes n'influe pas considérablement sur la valeur critique de l'effort tranchant pour $\frac{h}{d} > 2$;

2. le flambage modifie les conditions de travail de l'âme (voir chapitre 9) ; il en résulte des efforts supplémentaires de traction dans cette âme et la surcharge inopportune de certains rivets. Il serait bon d'adopter, comme efforts « de sécurité » une fraction de 0,6 des efforts critiques[1]. Les efforts correspondants sont indiqués entre parenthèses dans la figure 9.

Si maintenant on applique les courbes de la figure 9 à la détermination des écartements des éléments de renforcement pour des poutres ayant des hauteurs de 1,80 et de 3 mètres, dans le cas de $h = 1{,}80$ et d'après l'équation (9), on trouve que l'épaisseur t doit être égale à 9,5 mm. Si l'on admet un taux de travail de 9000 lb./sq. in., soit 6,3 kg. par mm², on trouve alors, sur la figure 9 :

$$\frac{d}{t} = 112 \qquad \text{et} \qquad d = 42'' = 1{,}07 \text{ mètres.}$$

Si l'on prend un taux de travail de 6000 lb./sq. in., soit 4,2 kg par mm², on trouve de la même manière :

$$\frac{d}{t} = 144 \qquad \text{et} \qquad d = 45'' = 1{,}37 \text{ mètres.}$$

1. Ce qui donnerait le même coeff. de sécurité qu'en travaillant au cisaillement à 12 pour une limite d'élast. de 20 kg./mm².

Si l'on applique à ce même exemple les prescriptions prévues dans les spécifications américaines (chapitre 9), on trouve :

$$t = \frac{1}{20}\sqrt{h} = 0{,}424'' = \text{env. } 7/16'' = 11{,}1 \text{ mm.}$$

La distance entre les éléments de renforcement, pour le taux de travail de 9000 lb./sq. in., soit 6,3 kg. par mm², est :

$$\frac{d}{t} = 75 \qquad \text{et} \qquad d = 33'' = 0{,}84 \text{ mètre.}$$

Pour le taux de travail de 6000 lb./sq. in., soit 4,2 kg. par mm², on a

$$\frac{d}{t} = 150 \qquad \text{et} \qquad d = 66'' = 1{,}68 \text{ mètre.}$$

La méthode qui a été proposée pour établir les proportions des poutres composées donne dans ce cas une épaisseur d'âme plus faible. Le renforcement est également un peu plus léger pour le taux de travail de 9000 lb./sq. in. Pour 6000 lb./sq. in., le renforcement proposé est un peu plus fort que celui que l'on obtient en partant des spécifications américaines.

Dans le cas de $h = 3$ mètres, on trouve, à partir de l'équation (9), $t = 0{,}575''$, soit un peu plus de 9/16 et il faudra prendre 5/8″, soit 15,6 mm. Pour la même hauteur, les prescriptions américaines donnent $t = 0{,}548''$ et il faudra prendre 9/16″ soit 14,3 mm. En ce qui concerne l'écartement des éléments de renforcement, pour $\tau = 9000$ lb./sq. in. soit 6,3 kg. par mm², on trouve, d'après la figure 9, $d = 112\ t$ soit $d = 70'' = 1{,}78$ mètre ; pour $\tau = 6000$ lb./sq. in., soit 4,2 kg. par mm², on trouve $d = 145\ t = 90'' = 2{,}28$ mètres.

Les prescriptions américaines donnent respectivement 42″ et 72″, soit 1,067 et 1,83 mètres.

Pour le cas considéré, la méthode proposée pour établir les proportions des poutres composées donne donc une épaisseur légèrement plus forte, mais le renforcement est plus léger, pour les deux conditions de travail. L'écartement déterminé ci-dessus entre les éléments de renforcement pour l'effort tranchant maximum peut être augmenté lorsque leur éloignement des appuis augmente. Pour cette modification du renforcement, on peut également employer la figure 9, quoique les efforts dans l'âme dans les sections intermédiaires ne consistent pas en un simple cisaillement ; pour résoudre le problème d'une manière plus satisfaisante, il faut faire intervenir la stabilité de l'âme pour des efforts de flexion et de cisaillement combinés.

Pour établir les proportions du renforcement, on peut employer le tableau 10. Pour des considérations pratiques, on prendra pour les sections droites, et pour les faibles hauteurs de poutres, un moment d'inertie J plus important que celui que donne le tableau.

Pour améliorer le calcul des poutres composées, en ce qui concerne leur stabilité élastique, il serait désirable :

1. d'étudier d'une manière plus approfondie la théorie du flambage des plaques rectangulaires dont les bords font l'objet d'une fixation ;

2. d'étudier le flambage des plaques rectangulaires sous l'action d'efforts combinés de flexion et de cisaillement ;

3. de faire des recherches plus appronfondies sur la rigidité à la flexion qu'il est nécessaire de demander aux éléments de renforcement.

Des essais sur des modèles de poutres de grandes dimensions donneront l'opportunité de contrôler la théorie mise en avant et d'élucider des points importants, tels que la distribution des efforts dans l'âme et dans les rivets lorsque le flambage commence.

Summary.

In dimensioning the webs of plate girders not only must the shearing stress at the supports and the danger from rust be considered, but also the elastic equilibrium of the webs.

If only pure bending stresses come into consideration, vertical stiffening angles will have no essential influence on the buckling of the stiffened web and it is more preferable to choose the thickness of the stiffened web in such a way that buckling is quite impossible under the working load. For instance, in the middle of the beam the proportion should be

$$\frac{h = \text{ height of the web}}{t = \text{ thickness of the web}} < 208.$$

When the thickness of the stiffened web has been determined, the distance of its stiffening angles are to be dimensioned so that the stiffened web may also be able to withstand shearing stresses without bulging. With $h/t < 90$, there is the same security against bulging and reaching the elastic limit in consequence of shearing stresses, so that stiffenings are only necessary at those places where single loads act.

In selecting the critical stresses, the factor of safety 0.6 must be introduced, since the holding of the edges of the stiffened web in the flange angle will have little influence on the critical shearing stress, as soon as the height of the stiffened web is greater than twice the distance between the stiffening angles, and since at the commencement of bulging additional tensile stresses in the plate and overstraining of individual rivets are caused.

For a stiffened web 6ft. high, the thickness is 3/8 in. With a stress of 9.000 lbs per sq. in. the distance between the stiffening angles is 42 in. with a stress of 6000 lbs. per sq. in. it is 54 in.

In order to throw further light on the question of stability of the stiffened web, it would be desirable to carry out further tests to determine the resistance to buckling of rectangular plates with supported edges, especially when submitted simultaneously to bending and shearing stresses, and also for detailed determination of the required resistance to bending of the stiffening angles.

Résumé.

Pour la détermination des dimensions des tôles de l'âme des poutres composées, il faut tenir compte non seulement des efforts tranchants aux appuis,

ainsi que des risques de corrosion, mais également des conditions élastiques d'équilibre des tôles minces.

Même s'il s'agit uniquement d'un simple effort de flexion, des cornières verticales de renforcement ne suffisent pas pour éviter le flambage de l'âme en tôle ; il est préférable de choisir des épaisseurs de tôle telles qu'elles éliminent tout risque de flambage sous la charge correspondant au service normal.

En désignant par h la hauteur de l'âme et par t son épaisseur, on devra avoir dans le milieu de la poutre la relation :

$$\frac{b = \text{ hauteur de l'âme}}{t = \text{ épaisseur de l'âme}} < 208.$$

Si l'épaisseur des tôles d'âme est déterminée à l'avance, il y aura lieu d'adopter entre les cornières de renforcement un écartement tel que l'âme puisse supporter également, sans se voiler, les efforts tranchants.

Si le rapport $\frac{h}{t}$ est inférieur à 90, on réalise la même marge de sécurité d'une part, par rapport au taux de charge qui correspond au flambage, d'autre part, par rapport à la limite d'écoulement, de sorte que la présence des éléments de renforcement n'est nécessaire qu'aux endroits qui correspondent aux points d'application des charges isolées.

En ce qui concerne le choix des efforts critiques, il faut adopter le facteur de sécurité de 0,6 ; car l'encastrement des bords des tôles sur les membrures d'ailes n'a que peu d'influence sur la valeur critique des efforts tranchants dès que la hauteur de l'âme est supérieure au double de l'écartement entre les cornières de renforcement et parce que, lorsque le flambage commence à se manifester dans la tôle de l'âme, les rivets se trouvent soumis à des efforts additionnels de traction et à des surcharges.

Pour une hauteur d'âme de 1,80 mètre, on arrive à une épaisseur de tôle de 9,5 mm. Pour un taux de travail de 6,3 kg. par mm^2, on obtient un écartement de 1,1 m. pour les cornières de renforcement. Pour un taux de travail de 4,2 kg. par mm^2, on arrive à 1,65 m.

Pour élucider plus complètement la question de la stabilité des âmes en tôle des poutres composées, il serait désirable de faire porter les investigations sur la détermination de la sécurité au flambage des plaques rectangulaires dont les bords sont encastrés, particulièrement lorsqu'il s'agit simultanément d'efforts tranchants et d'efforts de flexion, et d'étudier d'une manière plus poussée la rigidité de flexion que doivent posséder les cornières de renforcement.

Zusammenfassung.

Bei der Bemessung von Stehblechen ist nicht nur die Schubbeanspruchung an den Auflagern zu berücksichtigen sowie die Rostgefahr, sondern auch das elastische Gleichgewicht der Blechplatten.

Wenn es sich nur um reine Biegungsbeanspruchung handelt, vermögen vertikale Aussteifungswinkel das Knicken der Stehbleche nicht wesentlich zu beeinflussen, und es ist zweckmässiger, die Stehblechstärke so zu wählen, dass

Knicken unter der Betriebslast ausgeschlossen ist. So soll z. B. in der Balkenmitte das Verhältnis :

$$\frac{h = \text{ Stehblechhöhe}}{t = \text{ Stehblechstärke}} < 208 \text{ sein.}$$

Wenn die Stehblechstärke festgelegt worden ist, ist die Entfernung der Stehblechversteifungswinkel so zu bestimmen, dass das Stehblech ohne Ausbeulung auch die Schubspannungen zu übertragen vermag. Wenn das Verhältnis $h/t < 90$ ist, so ergibt sich gleiche Sicherheit gegen Ausbeulen und Erreichen der Fliessgrenze infolge Schubbeanspruchung, sodass Stehblechversteifungen nur an denjenigen Stellen nötig sind, wo Einzellasten angreifen.

Bei der Wahl der kritischen Spannungen muss der Sicherheitsfaktor 0,6 eingeführt werden, da die Einspannung der Stehblechränder in den Gurtwinkeln die kritische Schubspannung wenig beeinflusst, sobald die Stehblechhöhe grösser als die doppelte Entfernung der Aussteifungswinkel ist, und weil bei beginnendem Ausbeulen im Stehblech zusätzliche Zugspannungen und Ueberbeanspruchungen einzelner Niete entstehen.

Für eine Stehblechhöhe von 1,8 m ergibt sich eine Stehblechstärke von 10 mm. Bei einer vorhandenen Spannung von 630 kg/cm^2 ergibt sich ein Abstand der Versteifungswinkel von 1,1 m, bei einer Spannung von 420 kg/cm^2 ein solcher von 1,65 m.

Zwecks weiterer Abklärung der Frage der Stabilität der Stehbleche von Blechträgen wären Versuche wünschenswert zur Feststellung der Knicksicherheit rechteckiger Platten mit eingespannten Rändern, besonders bei gleichzeitiger Biegungs- und Schubbeanspruchung, sowie zur einlässlichen Feststellung der erforderlichen Biegungssteifigkeit der Versteifungswinkel.