Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Rubrik: I. Stability and strength of structural members subjected to compression and bending

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

B

Séances de travail — *Arbeitssitzungen* — Working Meetings.

I

Première Séance de travail.
Erste Arbeitssitzung.
First Working Meeting.

STABILITÉ ET RÉSISTANCE DES PIÈCES TRAVAILLANT SIMULTANÉMENT A LA COMPRESSION ET A LA FLEXION

STABILITÄT UND FESTIGKEIT VON AUF DRUCK UND BIEGUNG BEANSPRUCHTEN BAUTEILEN

STABILITY AND STRENGTH OF STRUCTURAL MEMBERS SUBJECTED TO COMPRESSION AND BENDING

I1.

STABILITÉ ET RÉSISTANCE DES PIÈCES TRAVAILLANT SIMULTANÉMENT A LA COMPRESSION ET A LA FLEXION. RAPPORT D'INTRODUCTION.

STABILITÄT UND FESTIGKEIT VON AUF DRUCK UND BIEGUNG BEANSPRUCHTEN BAUTEILEN. EINLEITENDES REFERAT.

STABILITY AND STRENGTH OF STRUCTURAL MEMBERS SUBJECTED TO COMPRESSION AND BENDING. INTRODUCTORY REPORT.

Dr. Ing. **L. KARNER**,
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich.

Voir « Publication Préliminaire », p. 17. — *Siehe* » *Vorbericht* », *S. 17.*
See " Prelimininary Publication ", p. 17.

I2

LA STABILITÉ DES BARRES COMPRIMÉES PAR DES FORCES EXCENTRÉES.

KNICKUNG EXZENTRISCH BELASTETER STÄBE

BUCKLING OF ECCENTRICALLY LOADED BARS.

Dr. Ing. h. c. **M. ROŠ**,
Professeur de l'École Polytechnique Fédérale
et Directeur du Laboratoire Fédéral d'Essai des Matériaux, Zurich.

Voir « Publication Préliminaire », p. 57. — *Siehe* « *Vorbericht* », *S. 57.*
See " Preliminary Publication ", p. 57.

Participants à la discussion des questions I_1 et I_2.
Diskussionsteilnehmer an den Fragen I_1 und I_2.
Participants in the discussion of questions I_1 and I_2.

Dr. Friedrich HARTMANN [1],
Professor an der Technischen Hochschule, Wien.

Da im Laufe der letzten Jahre und besonders in jüngster Zeit Bedenken gegen die bestehende Knicktheorie aufgetaucht sind und zuletzt sogar Verbesserungsvorschläge gemacht wurden, ist es notwendig einmal festzustellen, inwieweit man die Ergebnisse der Knicktheorie als gesichert ansehen darf.

1) Dass im elastischen Bereich für den geraden, zentrisch belasteten Stab die Euler'sche Formel die Knicklasten in sehr zuverlässiger Weise darstellt, wurde schon durch zahlreiche Versuche bewiesen.

Die schärfere Fassung der Knicktheorie im elastischen Bereich mit der ungekürzten Differentialgleichung der Biegelinie, die zuerst Lagrange, dann angenähert Grashof und zuletzt in voller Schärfe, auch für den praktischen Gebrauch geeignet, Schneider [2] in Wien gebracht hat, zeigt, dass die Euler'sche Last eigentlich nicht strenge die Knicklast im Sinne der tragbaren Last ist, sondern nur als kritische Last aufzufassen ist, bei deren Erreichung das bisher stabile Gleichgewicht des Stabes aufhört. Die Eulerlast selbst vermag aber noch keine endliche Ausbiegung zu erzeugen, sondern es ist dazu eine kleine Steigerung dieser Last erforderlich. Mit dieser geht der Stab in einen neuen stabilen Gleichgewichtszustand über mit ausgebogener Achse, aber nur solange, als die Randspannungen die Proportionalitätsgrenze σ_p nicht überschreiten. Daraus ergibt sich, dass die Ueberschreitung der Eulerlast für grosse Schlankheiten grösser sein kann als für kleine und an der P-Grenze schliesslich Null wird. Hier ist die Eulerlast nicht nur die kritische sondern gleichzeitig auch die Knicklast. Eine nennenswerte Ueberschreitung der Eulerlast kommt aber nur bei sehr grossen Schlankheiten vor (federartige Stäbe, Reisschiene), während bei den im Bauwesen üblichen Schlankheiten die mögliche Ueberschreitung der Eulerlast sehr geringfügig ist, sodass sie praktisch gar keine Rolle spielt. Für die Praxis darf daher die Euler'sche Last immer auch als Knicklast angesehen werden und die Versuche bestätigen dies.

2) Für den unelastischen Bereich wurde im Jahre 1895 von Engesser die heute geltende Knickformel durch Einführung des Knickmoduls T abgeleitet [3]. Die Formel für T wurde in allgemeinster Form, also für jeden beliebigen Querschnitt gültig, gegeben. Während nämlich im elastischen Bereich die Querschnittform ohne Einfluss auf die Knickspannung ist, ist dies im unelastischen Bereich nicht mehr der Fall. Engesser stand damals leider noch keine richtige Arbeitslinie für Baustahl zur Verfügung, doch hat er schon in einer früheren Veröffentlichung, in der Zeitschrift des Ing. u. Arch.-Vereines Han-

1. Da der Autor verhindert war, am Pariserkongress teilzunehmen, wurde das vorliegende Referat vom Generalsekretär, Hrn. Prof. Dr. L. Karner, vorgetragen.
2. Ztsch. d. österr. Ing. u. Arch. V. 1901.
3. Schweizer. Bauzeitung 1895 vom 27. Juli.

nover 1889, damals allerdings noch mit dem unrichtigen Knickmodul $T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, den Zusammenhang zwischen Arbeitslinie und Linie der Knickspannungen vollkommen einwandfrei dargestellt, die Bedeutung der Stauchgrenze als oberste Grenze der Knickspannungen voll erkannt und überdies in seinem Buche « Zusatzkräfte und Nebenspannungen » 1892 bereits ein Diagramm für den Verlauf der Knickspannungen gegeben, das sich fast vollkommen mit jenem deckt, das heute die deutschen Reichsbahnen ihren Berechnungen zugrunde legen. Diese Arbeiten Engessers wurden scheinbar wenig beachtet und sind erst 1910 durch Kármán zum Leben erweckt worden, der die Herleitung etwas ausführlicher als Engesser wiedergab, aber natürlich genau dasselbe erhielt. Dass die Formeln nunmehr siegreich in die Praxis einzogen, ist auf die Versuche zurückzuführen, die Kármán mit grosser Genauigkeit anstellte und die die Theorie für den gewählten Baustahl bestätigten. Ein besonderes Verdienst Kármáns ist es, zum ersten Mal die Theorie des Einflusses kleiner Exzentrizitäten gegeben zu haben. Er konnte dadurch zeigen, dass der Einfluss selbst sehr kleiner Exzentrizitäten im unelastischen Bereich eine ungleich grössere Rolle spielt als im elastischen Bereich.

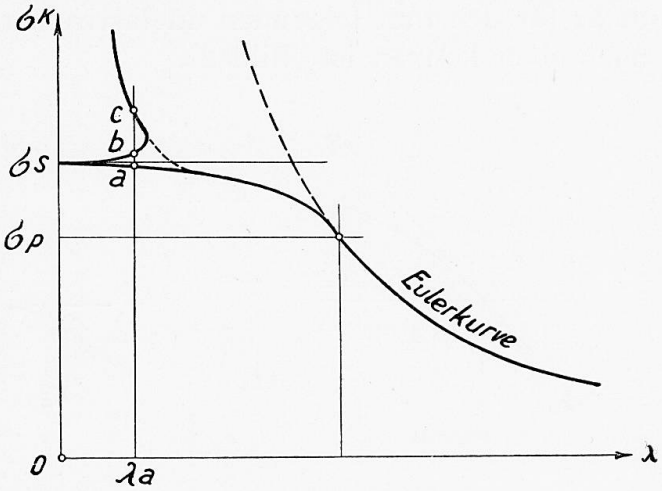

Fig. 1.
Courbe d'Euler = Eulerkurve = Euler curve.

Kármán konnte, nachdem er selbst genaue Arbeitslinien für Druck durch den Versuch ermittelt hatte, den Verlauf der Knickspannungen als Funktion der Schlankheit zum ersten Male theoretisch darstellen.

Seine Darstellung enthält aber eine Unstimmigkeit und das ist die, gegen die sich die Angriffe besonders in jüngster Zeit richteten.

Die Engesser-Kármán'sche Theorie ergibt nämlich bei Annäherung der Knickspannungen an die Stauchgrenze σ_s immer kleiner werdende Knickschlankheiten $\lambda_k = \pi \sqrt{\frac{T}{\sigma_k}}$ und für $\sigma_k = \sigma_s$ schliesslich $\lambda_k = 0$, wofern die Arbeitslinie an der Stauchgrenze in die Wagrechte übergeht ($T = 0$). Nach Durchlaufen des Stauchbereiches steigt aber die Arbeitslinie wieder an und damit auch die Knickschlankheit. Daher ergibt die Linie der Knickspannungen einen oberhalb σ_s liegenden Ast, dessen Verlauf aus Bild 1 zu ersehen ist. Die Folge davon ist die sonderbare Erscheinung, dass für gewisse Schlankheiten λ_a sich dreierlei verschiedene Knickspannungen σ_a, σ_b, σ_c ergeben, was als unmöglich erklärt wird. Kármán hat nun die nach $\lambda = 0$ gehende Spitze im Verlaufe der Linien der Knickspannungen nicht gezeichnet, sondern die Aeste unterhalb und oberhalb der Stauchgrenze durch die im Bild 1 gestrichelt dargestellte Linie verbunden, wodurch er einen stetigen Linienzug erhielt, der jedoch im

Bereich der gestrichelten Linie unrichtig ist. Richtig im Sinne der Theorie kann nur der vollgezeichnete Linienzug mit der Spitze bei $\lambda = 0$ sein. Ich glaube nun aber auch den scheinbaren Widerspruch aufklären zu können, dass man für λ_a drei verschiedene Werte auf der Kurve der σ_k erhält.

Zunächst muss man die Vorstellung verlassen, dass die σ_k Knickspannungen darstellen. Es sind auch wieder nur kritische Spannungen, die die Aenderung des Gleichgewichtszustandes erzeugen, da ja Engesser und Kármán bei der Herleitung der Formeln nur mit unendlich kleinen Ausbiegungen rechneten. Es müssen also endliche Ausbiegungen ausgeschaltet bleiben.

Wir haben gesehen, dass an der P-Grenze die Euler'sche Last auch schon gleich der Knicklast ist, (immer im Sinne der tragbaren Last). Dies gilt um so mehr für den nun folgenden unelastischen Bereich [1], solange die Arbeitslinie nach oben konvex ist (Bild 2).

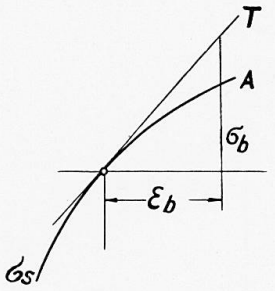

Fig. 2.

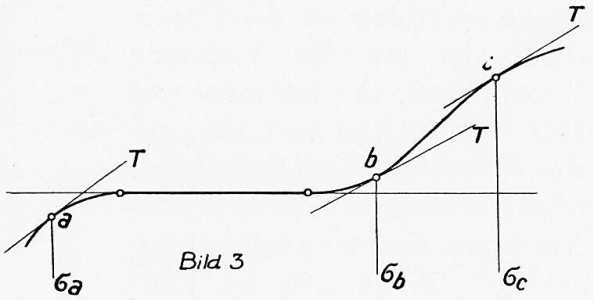

Fig. 3.

Für eine unendlich kleine oder angenähert für eine sehr kleine endliche Ausbiegung des Stabes verlaufen die Biegedruckspannungen σ_b nach der Tangente T an die Arbeitslinie A. Die Biegedehnung ε_b ist dabei auch unendlich klein oder näherungsweise sehr klein zu denken, denn für eine endliche Ausbiegung folgt σ_b nicht der Tangente T sondern der Arbeitslinie A selbst und da die Arbeitslinie unterhalb T verläuft, erhält man sozusagen einen kleineren Knickmodul als für den Spannungsverlauf nach der Tangente und demgemäss auch eine kleinere Knickschlankheit oder für die ursprüngliche Knickschlankheit eine kleinere Tragkraft. Dies lässt sich auch rechnungsmässig unter Annahme einer Sinuslinie als Biegelinie leicht nachweisen.

Wenn hingegen die Arbeitslinie oberhalb der Tangente T liegt, wie am Beginn des Verfestigungsbereiches, dann wird der Knickmodul (in übertragenem Sinne) mit endlicher Ausbiegung grösser als bei unendlich kleiner Ausbiegung, d. h. die Knickschlankheit oder die Tragkraft wächst bei endlicher Ausbiegung mit der Ausbiegung an, erreicht ein Maximum (wirkliche Knicklast und fällt dann wieder ab, ähnlich wie dies im elastischen Bereich streng genommen der Fall ist; nur sind im unelastischen Bereich die Unterschiede zwischen kritischer und Knick-Last wesentlich grösser als im elastischen Bereich, wo sie rechnungsmässig durch die ganz geringfügige Differenz zwischen den Ergebnissen aus der genauen und der abgekürzten Differentialgleichung erhalten werden, während sich hier wesentliche Differenzen auch nach der

1. Siehe den Diskussionsbeitrag von Prof. Chwalla.

gewöhnlichen Rechnungsweise ergeben (Annahme einer Sinuslinie). Im elastischen Bereich ist die Arbeitslinie überhaupt eine Gerade, fällt also mit T zusammen. Somit erhält man hier nach dem eben Gesagten für endliche Ausbiegungen genau dieselbe tragbare Last wie für unendlich kleine Ausbiegungen, also die Eulerlast. Man sollte aber eigentlich eine grössere tragbare Last erhalten. Dass dies nicht der Fall ist, kommt eben daher, dass man bei der Berechnung der tragbaren Last nur die gewöhnliche Biegetheorie mit der abgekürzten Gleichung anwendet.

Nun ist die Dreiheit der Knickspannungen für die Schlankheit λ_a erklärbar. Bild 3 stellt das Stück der Arbeitslinie an der Stauchgrenze σ_s dar. Erreicht die Knickspannung den Wert σ_a, dem die Knickschlankheit λ_a entspricht ($\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_a}{\sigma_a}}$), dann hört der gerade Stab auf stabil zu sein. Er will sich ausbiegen. Da aber die Engesser-Kármán'sche Linie keine endlichen Ausbiegungen berücksichtigt, müssen wir die Ausbiegungen künstlich verhindern. Belasten wir nun weiter, so wird das Bestreben, seitlich auszuweichen, noch zunehmen, da ja wachsenden Knickspannungen eine immer kleinere Knickschankheit entspricht. Bei $\sigma_k = \sigma_s$ wird das Bestreben des Ausweichens am stärksten sein, darüber hinaus aber wieder abnehmen, da nun auch die λ_k wieder wachsen, wie dies Bild 1 zeigte. Endlich kommt man zum Punkt b, dem auch wieder die Knickschlankheit $\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_b}{\sigma_b}}$ entspricht. σ_b ist nun eine kritische Spannung, insoferne als hier das labile Gleichgewicht wieder in ein stabiles Gleichgewicht übergeht. Denn wenn $\sigma_k = \sigma_b$ ist, liegt die Arbeitslinie schon oberhalb der Tangente T und eine Ausbiegung kann jetzt nur durch eine Laststeigerung bewirkt werden. Man kann also hier die seitliche Festhaltung des Stabes entfernen, der Stab ist im stabilen Gleichgewicht! Das ist natürlich auf die inzwischen vollzogene Verfestigung nach Durchlaufen des Stauchbereiches zurückzuführen und auf das darauffolgende Ansteigen der Arbeitslinie.

Nachdem das Gleichgewicht für σ_b stabil ist, muss man offenbar die Belastung weiter steigern können and das ist möglich bis man den Punkt c erreicht mit der Knickspannung σ_c, der abermals die Knickschlankeit $\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_c}{\sigma_c}}$ entspricht. Jetzt aber ist die kritische Last auch Knicklast, weil die Arbeitslinie schon unterhalb T liegt. Jetzt ist das Tragvermögen des Stabes endgültig erschöpft.

Diese Ercheinungen sind übrigens durch Kármáns Versuche erhärtet, bei denen sich bei Erreichung der Stauchgrenze eine Labilität zeigte, die nach der Äusserung Kármáns der Stab aber überwand, um dann eine grössere Belastung aufnehmen zu können. Es ist also bei Kármáns Versuchen nicht einmal die seitliche Festhaltung erforderlich gewesen. Das ist wohl darauf zurückzuführen, dass die verschiedenen Punkte eines Stabes verschieden hohe Stauchgrenzen haben. Es beginnt also an einer Stelle das Fliessen, während an der anderen schon die Verfestigung erfolgt. Der Abstand zwischen a und b im Bild 1 ist in Wirklichkeit so klein, dass die Schwankungen in der Höhe

der Stauchgrenze im Stab wahrscheinlich meist grösser sein werden, was für die Stabilität förderlich ist. Dazu kommt im besonderen Falle der Kármán'schen Versuche, dass der von ihm verwendete Stahl einen ausserordentlich kleinen Stauchbereich hat. Bild 4 zeigt die Arbeitslinie des Kármán'schen Stahles im Vergleich zu der des normalen St. 37. Aus diesem Vergleich ist aber noch etwas anderes zu entnehmen. Bei den Knickversuchen des Deutschen Stahlbau-Verbandes, die bis $\lambda_{min} = 20$ durchgeführt wurden, hat sich kein Anstieg der Knickspannungen oberhalb der Stauchgrenze ergeben, während bei Kármán die Knickspannungen bei $\lambda = 30$ kräftig über σ_s anstiegen. Auch dieser

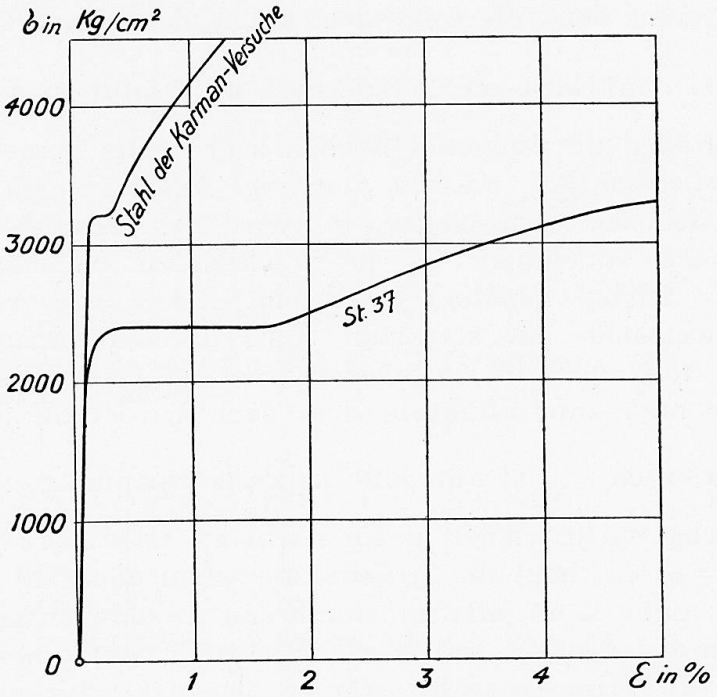

Fig. 4. — Acier employé par Kármán
= Stahl der Kármán-Versuche = Steel of Kármán test.

Umstand ist ein Grund gewesen, die Richtigkeit der Kármán'schen Versuche anzuzweifeln. Nun hängt der Anstieg der Knickspannungen einzig vom Verlauf der Arbeitslinie im Verfestigungsbereich ab. Je steiler die Arbeitslinie dort ansteigt, desto grösser ergeben sich die zugehörigen Knickschlankheiten λ. Aus Bild 4 erkennt man aber, dass bei der Kármán'schen Arbeitslinie der Anstieg nach Erreichen der Stauchgrenze sehr kräftig erfolgt, wie es bei anderen Stahlarten nicht der Fall ist. Bei der hier gezeichneten Arbeitslinie für St. 37 erhält man die ansteigenden Knickspannungen erst für $\lambda = 15$!

Damit glaube ich nun allen Einwürfen gegen den absonderlichen Verlauf der Linie der Knickspannungen begegnet zu haben. Für die Praxis kommen allerdings die oberhalb der Stauchgrenze liegenden Knickspannungen niemals in Frage, da bei den Unregelmässigkeiten, wie sie bei einem Stab in einer Konstruktion immer vorhanden sind, die Labilität bei σ_a wohl kaum jemals überwunden werden wird, sondern immer zum Ausknicken führen dürfte. So wie übrigens ein Zugstab in einem statisch bestimmten Fachwerk sofort ganz unzulässige Formänderungen des Fachwerkes erzeugt, wenn er ins Flies-

sen kommt, gilt dies in gleicher Weise für Druckstäbe beim Erreichen der Stauchgrenze. Diese ist also für die Praxis die grösstmögliche Knickspannung.

In diesem Sinne halte ich die Engesser-Kármán'sche Theorie mit ihren nach $\lambda_k = 0$ verlaufenden Knickspannungen nach wie vor als die einzige für die praktische Berechnung in Frage kommende Theorie für den unelastischen Bereich. Was nun die Sicherheit anbelangt, so sollte diese eher im unelastischen Bereich grösser gewählt werden als im elastischen. Nicht nur, dass im unelastischen Bereich selbst kleinste Exzentrizitäten die Knickspannungen empfindlich herabdrücken, ist auch für manche vom Rechteck abweichende Querschnittsformen die Knickspannung im unelastischen Bereich etwas tiefer gelegen als für den Rechteckquerschnitt, für den allein die Knickspannungen ja berechnet werden. Ferner setzen tiefer liegende Stauchgrenzen die Knickspannungen im plastischen Bereich empfindlich herab.

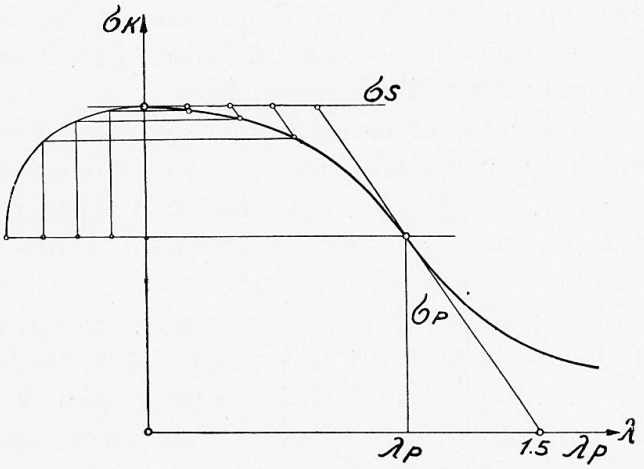

Fig. 5.

Eine andere Frage ist, welchen Verlauf der Arbeitslinie zwischen P- und S-Grenze man annehmen soll, da ja hievon der Verlauf der Knickspannungen sehr abhängig ist. Die Versuche des Deutschen Stahlbau-Verbandes hatten Baustähle zur Grundlage, bei denen die Arbeitslinie fast bis zur Stauchgrenze der Hook'schen Geraden folgte oder nur sehr wenig davon abwich. In einem solchen Falle liegen die Knickspannungen bis in unmittelbare Nähe der Stauchgrenze auf der Eulerkurve oder weichen nur wenig davon ab. Natürlich kommt dies auch bei Anwendung der Engesser-Kármán'schen Theorie zum Ausdruck. Es wäre daher wichtig zu wissen, ob die Arbeitslinie für Druck bei unseren Baustählen tatsächlich immer so verläuft und ob abweichende Ergebnisse, wie man sie bisher sehr häufig fand, nur für den Zugversuch gelten oder auf zu wenig genaue Durchführung des Druckversuches zurückzuführen sind.

Bis dahin würde ich empfehlen, die Linie der Knickspannungen vorsichtigerweise als Ellipse mit geneigt liegenden Hauptachsen einzutragen, die die Eulerkurve an der Stelle σ_P berührt und deren wagrechte Tangente in der Höhe der Stauchgrenze liegt mit der Berührung bei $\lambda = 0$. (Bild 5) Diese Ellipse lässt sich aus einem Viertelkreis sehr rasch entwickeln.

Für die Berührung der Eulerkurve braucht man die Tangente an diese im Punkt σ_P die man sofort ziehen kann, da die Subtangente der Eulerkurve gleich $\frac{\lambda}{2}$ ist.

Die Versuche des deutschen Stahlbau-Verbandes haben für Siliziumstahl höhere Knickspannungen ergeben als man auf Grund der betreffenden Arbeitslinie nach Engesser-Kármán erhalten würde. Dieses Ergebnis scheint mir aber

auf der sehr weit ausgebildeten Anwendung von Hebelarmen zu beruhen, die in günstigster Weise der unvermeidlichen kleinen Krümmung der Stäbe entgegengesetzt wurden und dürfte mindestens vorläufig für die Praxis nicht verwendet werden.

Es sei noch bemerkt, dass die scharfe Abzweigung der Engesser-Kármán-Linie von der Eulerkurve, die man manchmal bei willkürlicher Annahme einer idealen Arbeitslinie erhält, darauf zurückzuführen ist, dass im Knickmodul $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ enthalten ist. Wenn daher in der Arbeitslinie in der zweiten Ableitung (Krümmungshalbmesser) eine Unstetigkeit vorhanden ist, dann ist in der Linie der Knickspannungen die Unstetigkeit schon in der ersten Ableitung gegeben, und man erhält eine Abzweigung mit einem scharfen Knick. Die Abweichung der Arbeitslinie von der Hook'schen Geraden muss also nach einer Kurve angenommen werden, die im Abzweigungspunkt den Krümmungshalbmesser unendlich hat. Nur dann erhält man einen knickfreien Anschluss an die Eulerkurve.

Die Frage der Knickung ist gegenwärtig schon so zugespitzt, dass Versuche mit kleinen Modellstäben, wie sie bisher verwendet wurden, nicht mehr ausreichen. Ich glaube, dass man viel stärkere Querschnitte als bisher verwenden müsste, um die unvermeidlichen Zentrierungsfehler herabzusetzen. Ganz besonders aber wäre es erwünscht, naturgrosse genietete Stäbe zu drücken, wobei auf möglichst gleiche Stauchgrenze aller Teile zu sehen und der Querschnitt mit möglichst grossem Trägheitshalbmesser auszubilden wäre. Träger und U-Eisen sind wegen der starken Ungleichheit der Stauchgrenze in Steg und Flansch nicht zweckmässig.

Kastenquerschnitte, bestehend aus 4 genügend starken Platten und 4 gleichschenkeligen Winkeleisen dürften geeigneter sein, wobei die Nietschwächung unter 10 % bleiben müsste. Das Druck- Stauchungsdiagramm sollte dann nicht nur mit Proben aus den einzelnen Teilen, sondern auch mit 2 Endabschnitten des ganzen Profiles ermittelt werden, wobei es genügt, die Arbeitslinie bis zur Stauchgrenze zu bestimmen.

Traduction [1].

Au cours de ces dernières années et tout particulièrement assez récemment, des objections se sont élevées au sujet de la théorie du flambage telle qu'elle se présente actuellement. Tout dernièrement, certaines modifications ont été proposées. Il paraît donc indispensable de déterminer dans quelle mesure les résultats fournis par cette théorie peuvent être considérés comme sûrs.

1. — La formule d'Euler traduit d'une manière très juste les efforts de flambage, dans le domaine élastique, pour une barre rectiligne chargée axialement; ce point a été confirmé par de nombreux essais.

La conception rigoureuse de la théorie du flambage, appuyée en particulier sur l'équation différentielle du fléchissement, non simplifiée, établie tout

1. L'auteur ayant été empêché de présenter lui-même son Mémoire au Congrès de Paris, celui-ci a été lu par M. le Prof. Dr. L. Karner, Secrétaire général.

d'abord par Lagrange, précisée ensuite par Grasshof et développée enfin dans toute sa rigueur par Schneider [1] qui l'a également adaptée aux besoins d'ordre pratique, montre que la charge d'Euler ne doit pas être considérée à proprement parler comme représentant rigoureusement la charge de flambage, dans le sens d'une charge admissible, mais seulement comme une charge critique telle que lorsqu'elle est atteinte, l'état d'équilibre, qui était jusque là stable, cesse. La charge d'Euler peut très bien encore ne provoquer aucun fléchissement, un petit accroissement de cette charge étant encore nécessaire pour le provoquer. Sous l'influence de cet accroissement, la barre prend une nouvelle position d'équilibre stable, caractérisée par un fléchissement de son axe, ceci pour autant que les efforts dans les fibres périphériques ne dépassent pas la limite de proportionnalité σ_p. Il en résulte que le dépassement de la charge d'Euler peut être plus important pour des degrés de finesse élevés que pour des degrés de finesse plus faibles et qu'il est enfin nul à la limite de proportionnalité. La charge d'Euler constitue alors non seulement une charge critique, mais également la charge de flambage elle-même. On n'aura toutefois à envisager un dépassement notable de la charge d'Euler que pour des degrés de finesse très grands (barres élastiques, tés), tandis que pour les degrés de finesse couramment adoptés dans la construction, les possibilités de dépassement de la charge d'Euler sont très faibles, et cette considération n'intervient pratiquement pas. Dans la pratique, on peut donc toujours considérer la charge d'Euler comme charge de flambage, point de vue que l'expérience confirme.

2. — En ce qui concerne le domaine plastique, Engesser a établi en 1895 une formule toujours valable, en introduisant le module de flambage T [2]. La formule donnant T a été indiquée dans sa forme la plus générale ; elle est valable pour une section quelconque. Si dans le domaine élastique, la forme de la section n'exerce aucune influence sur la charge de flambage, par contre, il n'en est plus de même dans le domaine plastique. Malheureusement, à cette époque, Engesser ne disposait d'aucun diagramme convenable pour l'acier de construction ; il avait toutefois, dans une communication publiée antérieurement à cette date dans « Zeitschrift des Ing. und Arch. Vereines Hannover » de 1889, montré d'une manière parfaitement nette, la relation entre le diagramme et la courbe des contraintes de flambage, quoiqu'il ait d'ailleurs fait intervenir à cette époque la valeur inexacte

$$T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

pour le module de flambage. Il avait parfaitement reconnu l'importance de la limite de compression en tant que limite supérieure des contraintes de flambage et publié, dans son ouvrage « Zusatzkräfte und Nebenspannungen », dès 1892, un diagramme des efforts de flambage ; ce diagramme concorde presque parfaitement avec celui que les chemins de fer allemands emploient actuellement pour leurs calculs. Il semble que ces travaux d'Engesser aient peu attiré l'attention jusqu'à 1910, époque à laquelle Kármán les reprit, conduisant

1. Zeitschrift des österr. Ing. und Arch. Ver., 1901.
2. Schweizer. Bauzeitung, 1895, 27 juillet.

l'étude un peu plus loin ; ses travaux eurent d'ailleurs le même sort. Si ces formules ont toutefois réussi à pénétrer dans le domaine de la pratique, c'est précisément grâce aux essais que Kármán effectua avec une grande précision et qui confirment la théorie, pour les aciers de construction étudiés. Kármán a d'ailleurs eu le mérite de donner le premier la théorie de l'influence des petites excentricités. Il a pu ainsi montrer que, dans le domaine plastique, l'influence d'excentricités même très faibles est incomparablement plus forte que dans le domaine élastique.

Après avoir déterminé lui-même, par des essais, des diagrammes de compression précis, il a pu traduire pour la première fois, d'une manière théorique, la variation des contraintes de flambage considérées comme fonction dela finesse.

Ses travaux contiennent toutefois un point douteux et c'est précisément à ce sujet que des objections se sont élevées en particulier tout récemment (fig. 1).

Lorsque les contraintes de flambage se rapprochent de la limite de compression σ_s, la théorie d'Engesser-Kármán donne des degrés de finesse au flambage $\lambda_k = \pi \sqrt{\frac{T}{\sigma_k}}$ de plus en plus petits et l'on finit par avoir :

$$\lambda = 0 \qquad \text{pour } \sigma_k = \sigma_s$$

en admettant que le diagramme vienne coïncider avec l'horizontale à la limite de compression ($T = 0$). Toutefois, après le dépassement de la zone de compression, le diagramme remonte à nouveau, ainsi que le degré de finesse. La courbe des contraintes de flambage donne donc une branche située au-dessus de σ_s et dont l'allure est indiquée par la figure 1. Il en résulte ce fait singulier que pour certains degrés de finesse λ_a on obtient trois contraintes de flambage différentes, ce qui constitue une impossibilité. Kármán n'a toutefois pas porté, dans le tracé des courbes des contraintes de flambage, la branche conduisant à $\lambda = 0$; il a par contre relié les branches situées au-dessous et au-dessus de la limite de compression par la ligne tracée en traits discontinus sur la figure 1 ; il obtient ainsi un tracé continu, qui n'est cependant pas exact dans la région qui correspond à la ligne en traits discontinus. Dans l'esprit de la théorie, seul peut être exact le tracé en traits pleins, avec la branche correspondant à $\lambda = 0$. Je crois toutefois pouvoir donner une explication de cette contradiction apparente suivant laquelle on obtient pour un λ_a donné trois valeurs différentes sur la courbe de σ_k.

Il importe tout d'abord de se rendre compte exactement de ce que représentent les contraintes de flambage σ_k. Ce ne sont que des charges critiques qui provoquent une modification de l'état d'équilibre, car Engesser et Kármán eux-mêmes en établissant leurs formules n'ont fait intervenir que des fléchissements infiniment petits. Il faut donc écarter tout fléchissement d'ordre fini.

Nous avons vu qu'à la limite de proportionnalité, la charge d'Euler est déjà égale à la charge de flambage (toujours dans le sens d'une charge admissible). Ce point est d'autant plus valable pour le domaine plastique, qui vient immédiatement après [1], tant que le diagramme présente une convexité vers le haut(fig. 2).

1. Voir Contribution du Professeur Chwalla à la Discussion.

Pour des fléchissements infiniment petits de la barre, ou à titre d'approximation, pour des fléchissements très petits, les contraintes de compression et flexion simultanées se confondent avec la tangente T au diagramme A. L'allongement de flexion ε_b doit donc être considéré également comme infiniment petit ou à titre d'approximation comme très petit ; en effet, pour un fléchissement fini, σ_b ne suit plus la tangente T, mais bien le diagramme A lui-même et comme ce diagramme passe au-dessous de la tangente T, on obtient, pour ainsi dire, un module de flambage plus petit que si la courbe suivait la tangente et par suite également un degré de finesse au flambage plus faible, ou, pour le degré initial de finesse au flambage, une charge admissible plus faible. On peut d'ailleurs arriver à ce même résultat par le calcul en partant d'une sinusoïde comme courbe de déformation.

Si, par contre, le diagramme se trouve au-dessus de la tangente T, comme c'est le cas au commencement de la zone d'écoulement, le module de flambage (dans le sens considéré) est plus élevé pour un fléchissement fini que pour un fléchissement infiniment petit, c'est-à-dire que le degré de finesse ou la charge admissible croît, pour un fléchissement fini, avec ce fléchissement, pour passer par un maximum (charge de flambage effective) et décroît à nouveau, ainsi que c'est le cas, rigoureusement, dans le domaine élastique ; toutefois, dans le domaine plastique, les différences entre la charge critique et la charge de flambage sont sensiblement plus importantes que dans le domaine élastique ; dans ce dernier domaine, en effet, on assimile ces différences aux différences très faibles entre les résultats tirés des équations différentielles exacte et simplifiée, tandis que dans le cas qui nous occupe on obtient des différences notables même avec la méthode courante de calcul (hypothèse d'une courbe sinusoïdale). Dans le domaine élastique, le diagramme est presque une droite et il se confond donc avec T. D'après ce que nous venons de voir, on obtient donc alors, pour des fléchissements finis, exactement la même charge admissible que pour des fléchissements infiniment petits, c'est-à-dire la charge d'Euler. On devrait toutefois, en toute rigueur, obtenir une charge admissible plus élevée. Ceci provient du fait que pour le calcul de la charge admissible, on a eu recours à la théorie courante de la flexion en adoptant l'équation simplifiée (fig. 3).

On peut maintenant expliquer le fait que l'on obtient trois valeurs de la charge de flambage pour un λ_a donné. La figure 3 représente la partie du diagramme qui se trouve à la limite de compression σ_s. Si la contrainte de flambage atteint la valeur σ_a, à laquelle correspond un degré de finesse au flambage $\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_a}{\sigma_a}}$ la barre rectiligne ne conserve plus sa stabilité : elle fléchit. Comme toutefois le tracé d'Engesser-Kármán n'envisage pas les fléchissements finis, nous sommes dans l'obligation de les empêcher artificiellement. Si nous continuons à charger la barre, la tendance au déversement latéral augmentera encore, car effectivement à des charges de flambage croissantes correspond un degré de finesse de flambage de plus en plus petit. Pour $\sigma_k = \sigma_s$ la tendance au déversement latéral est maximum, pour diminuer toutefois ensuite, car à partir de ce moment, les λ_k croissent à nouveau, ainsi que le

montre la figure 1. On arrive finalement au point b, auquel correspond à nouveau le degré de finesse au flambage

$$\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_b}{\sigma_b}}$$

σ_b devient alors une tension critique, en ce sens que, ici, l'équilibre instable se transforme à nouveau en un équilibre stable. Mais si $\sigma_k = \sigma_b$, le diagramme se trouve déjà au-dessus de la tangente T et le fléchissement ne peut être maintenant provoqué que par une augmentation de la charge. On peut donc alors supprimer le dispositif de soutien de la barre, car cette dernière se trouve en état d'équilibre stable. Ce fait doit être évidemment attribué au fait que la barre a cédé dans l'intervalle, après avoir traversé la zone de compression et au mouvement vers le haut qui en est résulté pour le diagramme.

L'équilibre étant devenu stable pour σ_b, on doit évidemment pouvoir faire croître à nouveau la charge ; ceci est possible jusqu'à ce que l'on atteigne le point c avec une contrainte de flambage σ_c, à laquelle correspond à nouveau le degré de finesse au flambage $\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_c}{\sigma_c}}$

Maintenant, toutefois, la charge critique est également charge de flambage, car le diagramme passe au-dessous de la tangente T. La possibilité de résistance de la barre est maintenant définitivement épuisée.

Ces considérations ont été confirmées par les essais de Kármán, essais dans lesquels se manifeste une instabilité lorsque la limite de compression est atteinte ; suivant la propre expression de Kármán, d'ailleurs, la barre domine cette instabilité et arrive à pouvoir supporter une charge plus élevée. Donc, dans les essais de Kármán, l'appui latéral de soutien de la barre ne s'est nullement montré nécessaire. Ceci doit être attribué au fait que les différents points d'une barre accusent des limites de compression différentes. A un endroit donné, le phénomène d'écoulement commence donc à se manifester, tandis qu'en un autre point, on en arrive déjà à la période de reprise des possibilités de charge. L'écartement entre a et b dans la figure 1 est en réalité si faible que les variations du niveau atteint par la limite de compression sont vraisemblablement, dans la plupart des cas, supérieures aux nécessités de la stabilité. Dans le cas particulier que constituent les essais de Kármán, il convient en outre de remarquer que l'acier employé par lui possédait une zone de compression extrêmement faible. On trouvera dans la figure 4 le diagramme de l'acier de Kármán comparé avec le diagramme de l'acier de construction normal St. 37. De cette comparaison on peut encore tirer une autre conclusion. Au cours des essais qui ont été effectués par le Deutscher Stahlbau-Verband, et qui se sont étendus jusqu'à $\lambda_{min} = 20$, aucun accroissement des contraintes de flambage ne s'est produit au-dessus de la limite de compression, alors que dans les essais de Kármán, pour $\lambda = 30$, les contraintes de flambage étaient montées substantiellement au-dessus de σ_s. Ce fait constitue également une raison pour avoir quelque doute au sujet de l'exactitude des essais de Kármán. L'accroissement des contraintes de flambage dépend uniquement de l'allure du diagramme dans la zone de reprise des possibilités

de charge. Plus la montée du diagramme est rapide, plus les degrés d'élancement λ (finesse) correspondants sont élevés. On constate toutefois, sur la figure 4, que dans le diagramme de Kármán, la montée de la courbe, après passage à la limite de compression, est très rapide, ce qui n'est pas le cas pour les autres sortes d'aciers. Sur le diagramme ici tracé pour l'acier St. 37, on n'obtient des contraintes de flambage croissantes que pour $\lambda = 15$.

Je crois avoir ainsi exposé toutes les objections qui s'élèvent contre les singularités d'allure du diagramme des contraintes de flambage. Dans la pratique, par ailleurs, on n'a jamais à prendre en considération les contraintes de flambage qui se trouvent au-dessus de la limite de compression ; étant donné le manque d'homogénéité que l'on rencontre toujours dans les éléments utilisés dans la construction, on n'arrive presque jamais à surmonter l'instabilité correspondant à σ_a mais toujours au flambage. Dans un treillis statiquement déterminé, il se produit immédiatement des déformations absolument inadmissibles, dès qu'un élément travaillant à la traction atteint l'état d'écoulement ; il en est de même pour les éléments travaillant à la compression lorsqu'ils atteignent la limite de compression. Cette dernière constitue donc, dans la pratique, la limite extrême des contraintes de flambage.

Dans cet esprit, je considère toujours la théorie de Kármán-Engesser, avec les contraintes de flambage tendant vers $\lambda_k = \infty 0$, comme la seule théorie dont l'emploi puisse être envisagé pour les calculs de la pratique, dans le domaine plastique. En ce qui concerne la sécurité, il convient d'adopter une valeur plutôt plus élevée, dans ce domaine plastique, que dans le domaine élastique. D'une part, en effet, dans le domaine plastique, les plus petites excentricités diminuent d'une manière sensible les charges de flambage ; il en résulte que pour de nombreuses formes de sections qui s'écartent du rectangle, la charge de flambage est quelque peu inférieure à celle qui correspond à la section rectangulaire elle-même, pour laquelle seule les calculs de flambage ont été effectués. D'autre part, les limites de compression plus faibles réduisent également les charges de flambage dans le domaine plastique.

Une question se pose encore ; c'est de savoir quel tracé il convient d'admettre pour le diagramme, entre la limite de proportionnalité et la limite de compression, car de ce tracé dépend étroitement celui de la courbe des charges de flambage. Les essais du Deutscher Stahlbau-Verband ont porté sur les aciers de construction dans lesquels le diagramme suit la loi de Hook presque jusqu'à la limite de compression, ou tout au moins ne s'en écarte que très peu. Dans ces conditions, les charges de flambage se trouvent sur la courbe d'Euler jusqu'au voisinage immédiat de la limite de compression, ou ne s'en écartent également que très peu. Ces considérations s'appliquent évidemment aussi lorsque l'on fait appel à la théorie d'Engesser-Kármán. Il serait donc intéressant de savoir si le diagramme de compression de nos aciers de construction a un tracé semblable ou si les écarts que l'on a pu constater très fréquemment jusqu'à maintenant ne sont à prendre en considération que pour l'essai de traction, à moins qu'il ne faille les attribuer à un manque de précision dans l'exécution des essais de compression.

Dans l'expectative, j'estime qu'il conviendrait de considérer la courbe des charges de flambage comme une ellipse ayant ses axes principaux inclinés,

tangente à la courbe d'Euler au point σ_p et dont la tangente horizontale se trouve au niveau de la limite de compression, le point de tangence correspondant à $\lambda_k = \infty$ O (figure 5). Cette ellipse peut être déduite très rapidement d'un quart de cercle (figure 5).

Pour déterminer la tangence à la courbe d'Euler, on part de la tangente à cette courbe au point σ_p, tangente que l'on peut tracer immédiatement, puisque la sous-tangente est égale à $\lambda/2$.

Les essais effectués par le Deutscher Stahlbau-Verband pour l'acier au silicium ont conduit à des charges de flambage plus élevées que celles que l'on aurait pu déduire du diagramme correspondant d'après Engesser-Kármán. Ce résultat me semble toutefois devoir être attribué à l'emploi très large de bras de levier s'opposant dans les conditions les plus favorables aux petites courbures inévitables dans les barres; il conviendrait donc de ne pas en tenir compte dans la pratiqne, tout au moins provisoirement.

Il faut encore remarquer que l'écart important entre le diagramme d'Engesser-Kármán et la courbe d'Euler, que l'on obtient souvent, en partant d'un diagramme théorique, est dû à l'introduction de $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ dans le module de flambage. Par suite, s'il existe une scission dans la deuxième partie du diagramme (rayon de courbure), cette scission existe déjà dans la première partie de la courbe des charges de flambage et la bifurcation présente un coude brusque. Cette scission entre le diagramme et la loi de Hook doit donc être considérée comme une courbe ayant un rayon de courbure infini au point de raccordement. Dans ces conditions seulement, on obtient un raccordement sans coude brusque sur la courbe d'Euler.

La question du flambage a fait l'objet d'études déjà assez poussées pour que les essais que l'on a effectués jusqu'à maintenant avec des barres d'essai de dimensions réduites soient devenus insuffisants. Je pense que l'on devrait faire porter les essais sur des sections beaucoup plus importantes si l'on veut pouvoir réduire l'importance des erreurs de centrage que l'on ne peut pas éviter. Il serait particulièrement désirable que l'on fasse subir des essais de compression à des éléments rivés en grandeur naturelle, dans lesquels on s'efforcerait, dans toute la mesure du possible, d'avoir des limites de compression identiques pour toutes les pièces et des sections possédant un rayon d'inertie aussi élevé que possible. Il ne serait pas judicieux de choisir pour ces essais des poutres ou des fers à U, à cause des inégalités très marquées de la limite de compression dans les âmes et dans les ailes. Des sections en caisson, constituées par quatre éléments suffisamment résistants et quatre cornières à ailes égales seraient plus indiquées, l'affaiblissement dû au rivetage devant toutefois rester inférieur à 10 %. La détermination du diagramme de compression devrait d'ailleurs être effectuée non seulement sur des éprouvettes prélevées sur les pièces des assemblages mais également sur deux assemblages complets, étant entendu qu'il suffit de pousser le tracé de ce diagramme jusqu'à la limite de compression.

Dr. Ing. E. CHWALLA [1],
Professor an der Deutschen Technischen Hochschule, Brünn.

Im Anschluss an die theoretisch und baupraktisch bedeutungsvollen Referate der Herren Prof. Karner und Prof. Roš seien mir einige ergänzende Bemerkungen gestattet. Den Inhalt dieser Ausführungen entnehme ich meinem druckfertigen Manuskript « Druckstäbe aus Baustahl, Theorie ihres Tragverhaltens und Tragvermögens », das die theoretisch strengen

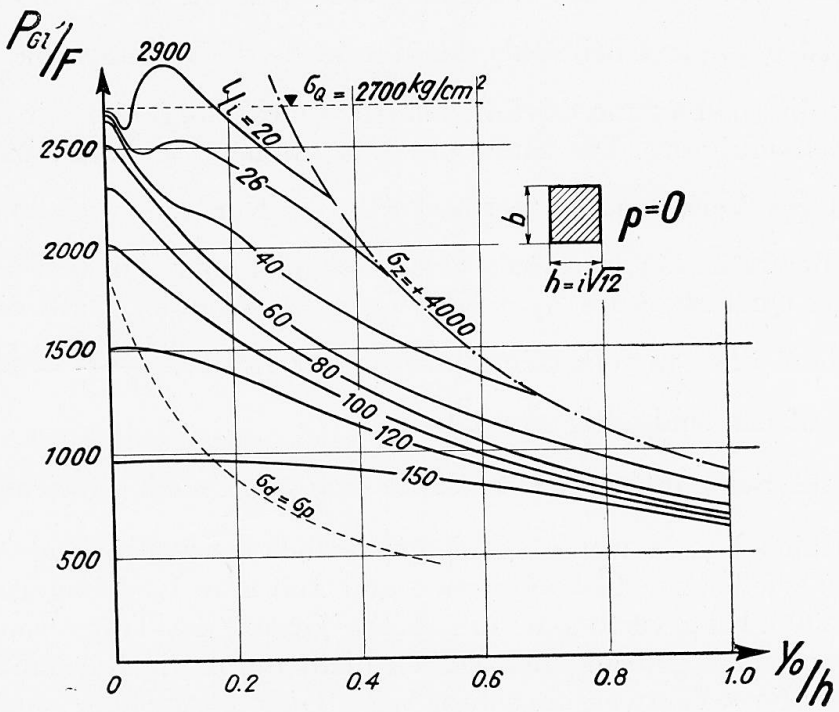

Fig. 1.

Lösungen der verschiedenen Gleichgewichtsprobleme gedrückter Stäbe aus Baustahl enthält. Die im folgenden erwähnten Ergebnisse sind unter der Voraussetzung ermittelt worden, dass der Stabquerschnitt ein Rechteck ist und das Spannungs-Dehnungsdiagramm mit dem von Roš-Brunner verwendeten übereinstimmt [2].

I) Greift die Druckkraft P eines beiderseits gelenkig gelagerten, geraden Stabes zentrisch an und werden die idealisierenden Voraussetzungen der Stabilitätstheorie zugrunde gelegt, dann biegt sich der Stab erst nach Erreichen der Euler-Kármán'schen Knicklast aus. Die in Fig. 1 dargestellten Kurven lassen erkennen, wie sich der in Richtung der Sehne ausgeübte Stabwiderstand (oder anders ausgedrückt, wie sich die zur

1. Da der Autor verhindert war, am Pariserkongress teilzunehmen, wurde das vorliegende Referat vom Generalsekretär, Hrn. Prof. Dr. L. Karner vorgetragen.

2. Roš-Brunner legten die Proportionalitätsgrenze in ihren früheren Veröffentlichungen durch die Koordinaten $\sigma_P = 1900$ kg/cm², $\varepsilon_P = 0,86$ ‰ fest; der damit bestimmte Elastizitätsmodul des Materials $E = 1,9 : 0,00086 = 2210$ t/cm² stimmt mit dem im Referate erwähnten Wert $E = 2150$ t/cm² nicht überein.

Erzielung des Gleichgewichtes jeweils erforderliche Druckkraft « P_{Gl} ») im Zuge der Ausbiegung verändert. Jede dieser Kurven bezieht sich auf den beigeschriebenen Wert der Stabschlankheit $\frac{l}{i}$; auf der Abszissenachse sind die auf die Querschnittshöhe h bezogenen seitlichen Ausbiegungen y_0 des Stabmittelpunktes aufgetragen, während die Ordinaten der Kurvenpunkte die durch die Querschnittsfläche $F = b.\,h$ dividierten Werte des Stabwiderstandes angeben. Wir sehen, dass die Euler-Kármán'sche Knicklast, unter der die Ausbiegung beginnt, bei allen nicht sehr stark gedrungenen Stäben die theoretisch oberste Grenze der Tragfähigkeit vorstellt. Der Abfall des Tragvermögens ist besonders bei Schlankheiten in der Umgebung von $\frac{l}{i} = 60$ sehr ausgeprägt; die Ausbiegung des knickenden Stabes erfolgt hier mit stark zunehmender Beschleunigung. Die Stäbe mit sehr kleinem Schlankheitsgrad zeigen ein eigenartiges Verhalten. So verlässt z. B. die Kurve für $\frac{l}{i} = 20$ die Ordinatenachse in der Höhe der Kármán'schen Knickspannung, (die hier schon knapp unterhalb der Quetschgrenze $\sigma_Q = 2700$ kg/cm² gelegen ist), fällt ein wenig ab und steigt dann über die Quetschgrenze bis zur Höhe $\frac{\max P_{Gl}}{F} = 2900$ kg/cm² an, um hierauf erst endgültig abzufallen.

Ein Stab der Schlankheit $\frac{l}{i} = 20$ würde sich somit nach Erreichen der Kármán'schen Knicklast ein wenig ausbiegen, jedoch schon bei einer Ausbiegung $y_0 = 0,04.\,h$ wieder zur Ruhe kommen und nun eine Laststeigerung bis auf $\max P_{Gl} = 2900.\,F$ kg vertragen; die oberste Grenze des Tragvermögens wird also bei diesen stark gedrungenen Stäben nicht durch die Kármán'sche Stabilitäts grenze (die « Verzweigungsstelle » des Gleichgewichtes) sondern durch die Grösse des sogenannten « sekundären Maximums » des Stabwiderstandes festgelegt, das im geringfügig ausgebogenen Zustand erreicht wird und hier oberhalb der Quetschgrenze des Materials und damit auch oberhalb des Verzweigungspunktes gelegen ist. Wir bezeichnen den Gleichgewichtszustand an dieser obersten Grenze der Tragfähigkeit als « kritischen Zustand » und nennen $\sigma_{kr} = \frac{\max P_{Gl}}{F}$ die « kritische » mittlere Druckspannung des zentrisch gedrückten, stark gedrungenen Stabes.

II) Greift die Druckkraft P exzentrisch mit dem sehr kleinen Hebelsarm $p = \frac{k}{8} = 0,021\,h$ an, dann erfährt der Stab unter der anwachsenden Last eine Ausbiegung und bildet Gleichgewichtszustände aus, die durch die Kurven Fig. 2 festgelegt werden. Diese (durch den beigeschriebenen Schlankheitsgrad gekennzeichneten) Kurven weisen Extreme auf, deren Ordinaten wieder die « kritischen » mittleren Druckspannungen $\sigma_{kr} = \frac{\max P_{Gl}}{F}$ liefern und die grössten vom Stabe getragenen Lasten festlegen. Wir unterscheiden nach der Ausbildungsweise zwei Arten von Extremen, die Maxima « erster » und

« zweiter » Ordnung, die in Fig. 2 bei der Kurve $\frac{l}{i} = 24,5$ in der gleichen Höhe liegen. Alle dargestellten Kurven für $\frac{l}{i} = 40$ bis $\frac{l}{i} = 180$ zeigen ausschliesslich Maxima erster Ordnung, während bei den Kurven für $\frac{l}{i} < 24,5$ das Maximum erster Ordnung rückgebildet und das Maximum zweiter Ordnung als das höher liegende für die Grenze der Tragfähigkeit massgebend wird; das Auftreten dieser Maxima « zweiter » Ordnung hängt mit der rela-

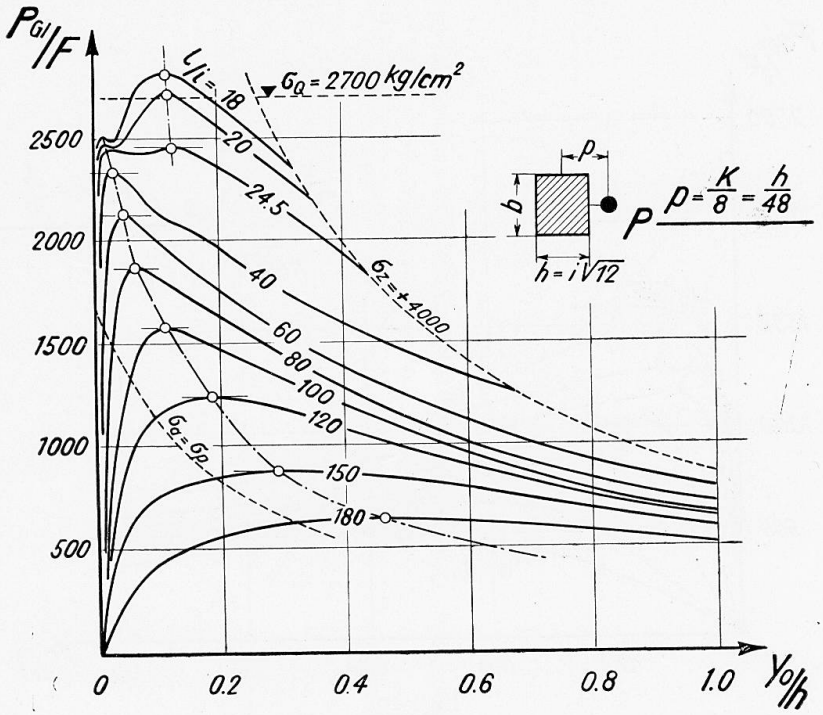

Fig. 2.

tiven Schwächung des Stabwiderstandes zusammen, die sich bemerkbar macht, wenn die Zugspannungen am Aussenrande des Stabscheitels den Streckbereich durchlaufen, während die Druckspannungen am Innenrande schon tief im Verfestigungsbereich gelegen sind. Untersuchen wir z. B. das Tragverhalten eines Stabes der sehr kleinen Schlankheit $\frac{l}{i} = 18$, dann ersehen wir aus dem Verlaufe der zugeordneten Kurve in Fig. 2., dass der Stab unter der Belastungsstufe $\frac{P_G}{F} = 2510$ kg/cm² (Maximum erster Ordnung) zwar eine geringfügige Vermehrung seiner Ausbiegung erfährt, dass er sich jedoch sofort wieder « erholt » und nun eine Laststeigerung bis zur Höhe $\sigma_{kr} = \frac{\max P_{Gl}}{F} = 2820$ kg/cm² ertragen kann. Erst unter dieser grossen Last, die schon oberhalb der « Quetschlast » F. σ_Q gelegen ist, wird das Tragvermögen des Stabes endgültig erschöpft; die Ausbiegung beträgt in diesem kritischen Zustande bloss $y_0 = 0,12\ h$.

Fig. 3 zeigt in gleicher Weise das Tragverhalten von Stäben, deren Druckkraft mit dem grossen Hebelarm $p = 2\,k = \frac{h}{3}$ exzentrisch angreift. Wir können auch hier die Kurven-Extreme « erster » und « zweiter » Ordnung scharf unterscheiden; die ersteren liefern das Tragvermögen aller Stäbe mit der Schlankheit $\frac{l}{i} \geqq 28$, während durch die letzteren wieder die Tragfähigkeit der stark gedrungenen Stäbe bestimmt wird. Die gestrichelte Linie, bis zu der alle dargestellten Kurven gezeichnet wurden, legt die « Grenze des Untersuchungsbereiches » fest und ist jenen Gleichgewichtszuständen zugeordnet,

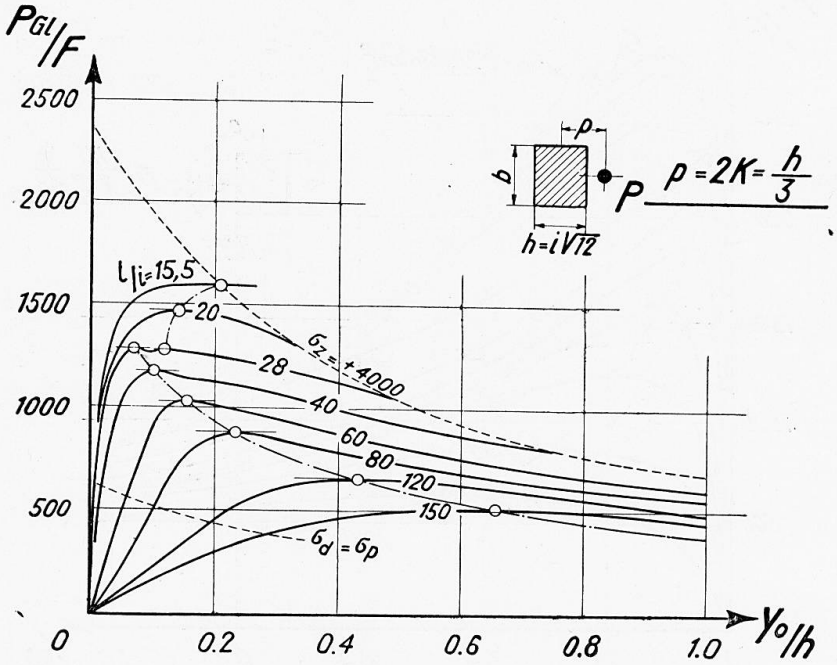

Fig. 3.

in denen die grösste am Aussenrande des Stabes auftretende Zugspannung den Wert $\sigma_z = +4000$ kg/cm² (d. i. nahezu die statische Zugfestigkeit des zugrundegelegten Materials) erreicht. Ausserhalb dieser Grenzlinie würden die Kurven stark abfallen und die Dehnungen auf der Aussenseite sich rasch den grossen Werten der Bruchdehnung nähern; das Tragverhalten der Stäbe in diesem Stadium ist praktisch und theoretisch ohne Bedeutung.

III) Fig. 4 zeigt das Diagramm, das die gefundenen strengen Lösungen für das Tragvermögen exzentrisch gedrückter Baustahlstäbe zur Darstellung bringt und mit dem Ergebnis der guten Näherungstheorie von Roš-Brunner (Fig. 6 des Referates) zu vergleichen ist. Die eingetragenen Kurven beziehen sich auf die beigeschriebenen Exzentrizitätsmasse $\frac{p}{k}$ des Kraftangriffes und legen den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Grösstwert $\sigma_{kr} = \frac{\max P_{Gl}}{F}$ der aufgenommenen mittleren Druckspannung und dem Schlankheitsgrade $\frac{l}{i}$ des Stabes fest. Jede dieser Kurven besteht aus zwei Aesten, die auf

der gestrichelt gezeichneten Linie eine Ecke bilden ; der längere, schwach geneigte Ast ist jenen kritischen Zuständen zugeordnet, die durch das Erreichen eines Maximums « erster » Ordnung bedingt sind, während der kurze, steil aufwärts strebende Kurvenast den Maxima « zweiter » Ordnung zugehört. Der Punktbereich dieser Maxima zweiter Ordnung durchbricht, wie wir sehen, das Niveau der Quetschgrenze $\sigma_{kr} = \sigma_Q = 2700$ kg/cm² und legt daher auch kritische Zustände fest, die bei Laststufen oberhalb der Quetschlast ausgebildet werden. Je mehr sich diese steil verlaufenden Kurvenäste der strichpunktiert eingezeichneten Grenzlinie des Untersuchungsbereiches

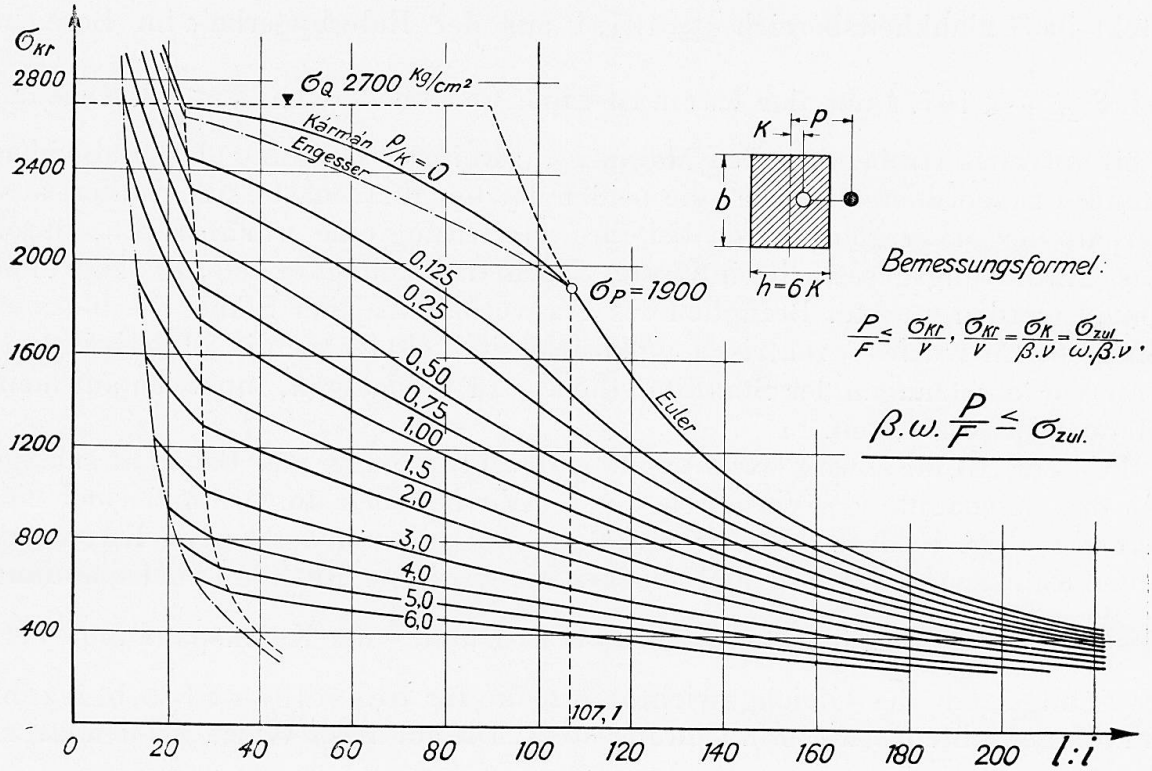

Fig. 4.

nähern, umso schwächer sind die Extreme des Stabwiderstandes ausgeprägt und umso grösser werden die im kritischen Zustand auftretenden Biegespannungen ; alle Punkte links ausserhalb dieser Grenzlinie sind Stäben zugeordnet, die unter der anwachsenden exzentrischen Belastung bis zur Erreichung einer Zugspannung $\sigma_z = +\ 4000$ kg/cm² am Aussenrand des Stabes keinen kritischen Zustand, also kein ausgeprägtes Maximum des Widerstandes zeigen und daher hinsichtlich ihres Tragverhaltens einem durch Querlasten gebogenen Baustahlstab ähneln.

Die in Fig. 4 für die verschiedenen Exzentrizitätsmasse dargestellten Kurven sind unter Voraussetzung von Normalspannungsverteilungen entwickelt worden, die affin verwandt sind mit der Formänderungskurve des Baustahls. Es lässt sich nachweisen, dass diese Spannungsverteilungen bis zum Erreichen des kritischen Zustandes vom linearen « Entlastungsgesetz » unbeeinflusst blei-

ben [1], wenn das Exzentrizitätsmass nicht kleiner ist als $\frac{p}{k} \sim \frac{1}{8}$ und die Druckkraft in ihrer exzentrischen Lage von Null anwächst. Werden diese entlastungsfreien Spannungsverteilungen rein formell auch im Falle $\frac{p}{k} = 0$ in Rechnung gestellt, dann wird die strichpunktiert gezeichnete, den Namen « Engesser » tragende Kurve erhalten, die bloss als obere Grenzkurve der Schar von Bedeutung ist. Die theoretisch in Geltung stehende, dem zentrischen Kraftangriff $\frac{p}{k} = 0$ zugeordnete Kurve wurde in Fig. 4 voll ausgezogen und besteht im Schlankheitsbereich $\frac{l}{i} \geqq 107,1$ aus der Eulerhyperbel, im Bereiche $23,8 \leqq \frac{l}{i} < 107,1$ aus der Kármán-Linie und im Bereiche $\frac{l}{i} < 23,8$ aus der steil aufwärts strebenden, den Maxima « zweiter » Ordnung des Stabwiderstandes zugeordneten Kurve; die beiden letzten Kurvenäste sind isoliert ausserhalb der Schar gelegen, da bei ihrer Herleitung eine veränderte, durch das Entlastungsgesetz beeinflusste Normalspannungsverteilung zugrunde gelegt werden musste. Bezüglich des Tragverhaltens jener Stäbe, die bloss im Sinn des Entwurfes « zentrisch » gedrückt sind, ohne aber die idealisierenden Voraussetzungen der Stabilitätstheorie zu befriedigen, muss ich auf mein Manuskript verweisen.

IV) Zur Bemessung exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl schlage ich das sogenannte « β-Verfahren » vor. Wir beziehen die Ordinaten der einzelnen in Fig. 4 dargestellten Kurven auf die Ordinaten der Euler-Kármán'schen Knickspannungslinie und drücken die kritische mittlere Druckspannung des exzentrisch gedrückten Stabes als Bruchteil $\frac{1}{\beta}$ der Knickspannung (Verzweigungsstelle des Gleichgewichts) aus, die für denselben Stab bei zentrisch gedachtem Angriff in Geltung steht. Die auf diese Weise aus den strengen Lösungen abgeleiteten Verhältniszahlen $\beta = \frac{\sigma_k}{\sigma_{kr}}$ sind in der im Anschluss gezeigten Tabelle zusammengestellt worden. Wird nun der Bemessung des exzentrisch gedrückten Stabes eine ν-fache Sicherheit zugrunde gelegt, dann unterliegt die grösste im Stab auftretende Druckkraft der Bedingung $\frac{P}{F} \leqq \frac{\sigma_{kr}}{\nu}$ oder $\frac{P}{F} \leqq \frac{\sigma_k}{\beta . \nu}$, die nach Einführung der bekannten sog. « Knickzahl » $\omega = \frac{\nu . \sigma_{zul}}{\sigma_k}$ die einfache Form $\beta . \omega . \frac{P}{F} \leqq \sigma_{zul}$ annimmt. Der Beiwert « β » bringt hier die Abminderung zum Ausdruck, die die Tragfähigkeit zufolge der Exzentrizität des Kraftangriffes erfährt; wenn für $l/i \geqq 24$ das Exzen-

1. Bei der von Prof. Roš im Bericht der II. Int. Brückenbautagung in Wien (S. 344, Abb. 48) gemachten Feststellung dürfte ein Versehen unterlaufen sein; die Druckspannungen am Aussenrand des Stabes werden im angeführten Beispiel schon abgebaut, bevor sie noch die Elastizitätsgrenze erreicht haben, so dass wohl eine Spannungsumkehr, jedoch keine Entlastung unelastisch gestauchter Fasern eintritt.

TABELLE DER WERTE : $\beta = \frac{\sigma_k}{\sigma_{kr}}$

$\frac{L}{i}$ \ $\frac{p}{k}$	0.125	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
20	0.99	1.04	1.14	1.25	1.36	1.47	1.59	1.70	1.82	2.06	2.32	2.60	2.89
25	1.09	1.14	1.26	1.38	1.50	1.62	1.74	1.86	1.98	2.22	2.50	2.81	3.12
30	1.11	1.17	1.30	1.43	1.57	1.71	1.85	1.98	2.11	2.38	2.70	3.02	3.35
35	1.12	1.19	1.33	1.47	1.62	1.77	1.91	2.04	2.17	2.45	2.78	3.11	3.44
40	1.13	1.21	1.36	1.51	1.67	1.82	1.96	2.09	2.23	2.52	2.85	3.18	3.52
45	1.14	1.23	1.40	1.55	1.71	1.87	2.01	2.15	2.29	2.58	2.91	3.24	3.59
50	1.16	1.25	1.43	1.59	1.75	1.91	2.06	2.20	2.35	2.64	2.97	3.30	3.65
55	1.17	1.27	1.46	1.63	1.80	1.96	2.11	2.25	2.40	2.70	3.03	3.35	3.70
60	1.18	1.29	1.49	1.67	1.84	2.00	2.15	2.30	2.45	2.75	3.08	3.40	3.74
65	1.20	1.31	1.52	1.71	1.88	2.04	2.20	2.35	2.50	2.80	3.13	2.44	3.78
70	1.21	1.33	1.55	1.75	1.92	2.08	2.24	2.39	2.54	2.84	3.17	3.48	3.81
75	1.22	1.35	1.58	1.78	1.96	2.12	2.27	2.42	2.58	2.88	3.20	3.51	3.83
80	1.24	1.37	1.61	1.81	1.99	2.15	2.30	2.45	2.61	2.91	3.22	3.53	3.85
85	1.25	1.39	1.63	1.83	2.01	2.17	2.33	2.48	2.63	2.93	3.24	3.55	3.86
90	1.26	1.41	1.65	1.85	2.03	2.19	2.34	2.49	2.64	2.94	3.25	3.56	3.87
95	1.27	1.43	1.67	1.86	2.04	2.19	2.34	2.49	2.64	2.94	3.25	3.56	3.85
100	1.29	1.45	1.68	1.87	2.04	2.19	2.34	2.49	2.64	2.94	3.24	3.54	3.81
105	1.30	1.46	1.69	1.87	2.03	2.18	2.33	2.48	2.63	2.92	3.21	3.49	3.76
110	1.29	1.44	1.65	1.81	1.97	2.11	2.26	2.40	2.54	2.81	3.09	3.35	3.59
115	1.26	1.39	1.58	1.74	1.88	2.01	2.15	2.28	2.42	2.67	2.92	3.16	3.38
120	1.23	1.35	1.52	1.67	1.80	1.93	2.06	2.18	2.31	2.54	2.76	2.98	3.19
125	1.20	1.31	1.47	1.60	1.73	1.85	1.97	2.09	2.21	2.42	2.62	2.82	3.02
130	1.18	1.27	1.42	1.55	1.67	1.78	1.89	2.00	2.12	2.31	2.50	2.69	2.88
135	1.16	1.24	1.38	1.50	1.61	1.72	1.83	1.93	2.04	2.23	2.41	2.58	2.75
140	1.14	1.21	1.34	1.46	1.57	1.67	1.77	1.87	1.97	2.15	2.32	2.48	2.64
145	1.12	1.19	1.31	1.42	1.53	1.63	1.73	1.82	1.91	2.07	2.23	2.39	2.54
150	1.11	1.18	1.29	1.39	1.49	1.59	1.69	1.78	1.86	2.00	2.15	2.30	2.45

trizitätsmass verschwindet, wird $\beta \rightarrow 1$. Die Sicherheitszahl ν stimmt bei diesem Bemessungsverfahren mit der Knicksicherheitszahl überein und kommt ziffernmässig nicht zur Geltung ; sie ist ebenso wie die dem Verfahren zugrundegelegte Knickspannung σ_k in der amtlich vorgeschriebenen Knickzahl ω enthalten. Die β-Tabellen sind wie die ω-Tabellen für alle genormten Baustahlsorten festzulegen ; für den St 37 und etwas vergütete Sorten darf unmittelbar die angegebene Tabelle Verwendung finden. Soll das Bemessungsverfahren, wie Prof. Karner in seinem einleitenden Referate (Vorbericht S. 34) mit Recht fordert, einen formell befriedigenden Uebergang zu der bei gedrungenen Stäben üblichen Randspannungsbedingung $\frac{P}{F} + \frac{M}{W} \leq \sigma_{zul}$ gewährleisten, dann dürfen die amtlich vorgeschriebenen β-Werte im Bereiche kleiner Schlankheitsgrade die Grösse min $\beta = \left(1 + \frac{p}{k}\right) : \omega$ nicht unterschreiten. Bei Zugrundelegung der deutschen ω-Werte müssten dann beispielsweise die in unserer Tabelle für $\frac{p}{k} = 0{,}5$, $2{,}0$ und $4{,}0$ angegebenen β-Werte im Schlank-

heitsbereich $\frac{l}{i} < 40$ bezw. $\frac{l}{i} < 57{,}5$ bezw. $\frac{l}{i} < 65$ durch dieses min β ersetzt werden.

V) Die in Fig. 4 niedergelegte « Standardlösung » des Problems setzt einen rechteckigen Stabquerschnitt, beiderseits gleich grosse Hebelarme und eine Lagerung der Stabenden in reibungsfreien Gelenken voraus. Um den Einfluss der Querschnittsform auf die Grösse der kritischen Last zu untersuchen, habe ich die wichtigsten im Stahlbau vorkommenden Stabquerschnitte in

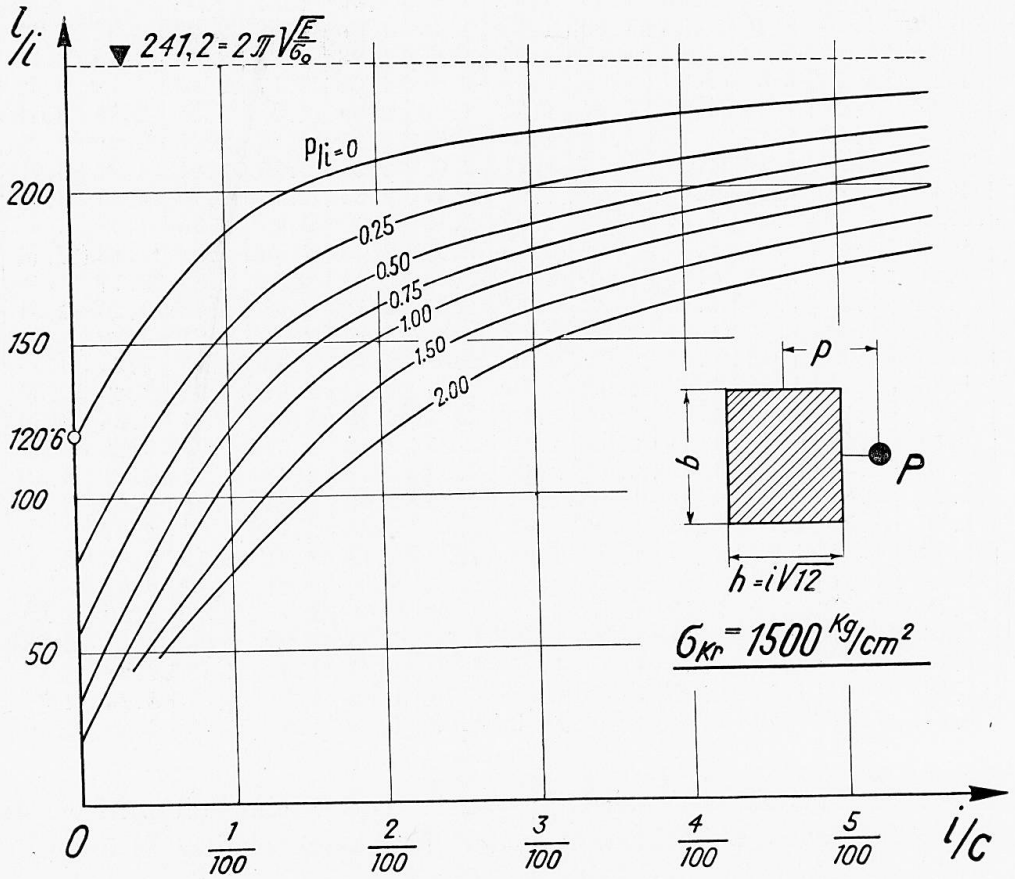

Fig. 5.

fünf « Profilklassen » zusammengefasst und für jede dieser Klassen die strenge Lösung des Problems für die Laststufen $\sigma_{kr} = 1000$ und 1900 kg/cm² entwikkelt. Es zeigte sich, dass wir unsere « Standardlösung » mit guter Annäherung auch bei der Berechnung von Stäben beliebiger Querschnittsform verwerten dürfen, wenn wir als Bezugsgrösse für den Angriffshebel p nicht ausschliesslich die « verschränkt » gemessene Kernweite k, sondern je nach der Profilklasse k oder i oder $a = \frac{i + k}{2}$ verwenden. Lassen wir grössere, praktisch aber noch erträgliche Abweichungen zu, dann können wir einheitlich $\frac{p}{k}$ als Exzentrizitätsmass für Vollstäbe aller Querschnittsformen verwenden. Auch die Fälle verschieden grosser oder wechselseitig liegender Angriffshebel wurden einer strengen Lösung zugeführt; sofern $p_2 \neq -p_1$ ist, dürfen wir derar-

tige Stäbe näherungsweise so wie Druckstäbe mit den beiderseits gleich grossen Hebelarmen $p_m = \frac{p_1 + p_2}{2}$ behandeln. Weiters habe ich die strenge Theorie exzentrisch gedrückter Baustahlstäbe entwickelt, deren Enden eine elastische Einspannung erfahren. Wir denken uns den gegebenen Stab beiderseits verlängert und als dreifeldrigen Durchlaufträger gelagert; die Länge c der so entstehenden lastfreien Seitenfelder gibt dann in der Form $\frac{1}{c/i}$ ein baupraktisch leicht abschätzbares Mass für den Grad der elastischen Einspannung eines im Tragwerk eingebauten Druckstabes. In Fig. 5 wird gezeigt, wie der Schlankheitsgrad $\frac{l}{i}$ des Stabes bei wachsendem Einspannungsgrad $\frac{i}{c}$ zunehmen darf, wenn der Stab unter der Laststufe $\sigma_{kr} = \frac{\max P_{Gl}}{F} = 1500$ kg/cm² sein Tragvermögen einbüssen soll; die einzelnen Kurven beziehen sich auf das beigeschriebene, in der Form p/i eingeführte Exzentrizitätsmass.

VI) Ist die Achse eines zentrisch gedrückten Stabes im spannungslosen Anfangszustand angenähert nach einer Sinushalbwelle mit der Pfeilhöhe η_0 gekrümmt, dann unterliegt der Stab gleichfalls einem « kritischen » Zustand ; das Problem ist streng behandelbar, wenn wir hinsichtlich des genauen

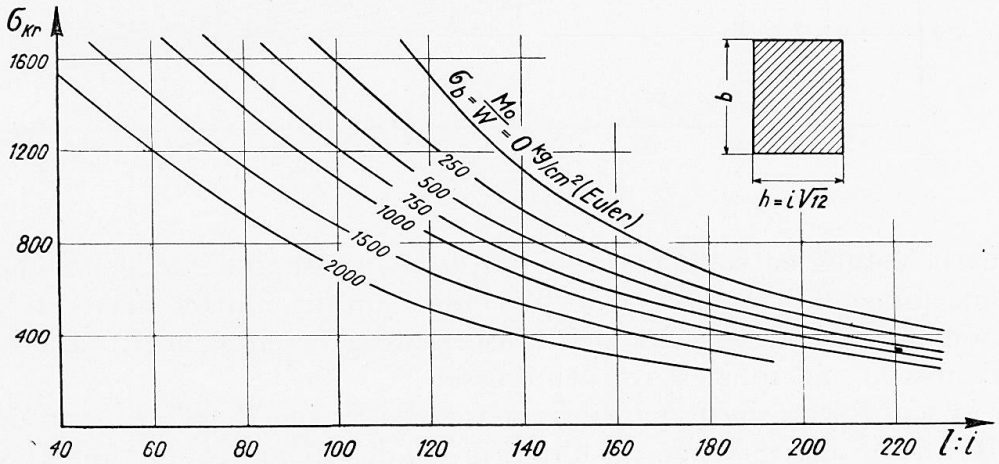

Fig. 6.

Verlaufes der primären Achsenform eine einschränkende, praktisch jedoch bedeutungslose Voraussetzung zulassen. In Fig. 6 ist die gefundene Lösung dargestellt worden; die einzelnen Kurven, die ebenso wie in Fig. 4 den Zusammenhang zwischen dem Schlankheitsgrad des Stabes und der grösstmöglichen (kritischen) mittleren Druckspannung festlegen, beziehen sich auf die beigeschriebenen Werte der primär vorhandenen Scheitelausbiegung $\frac{\eta_0}{h}$. Wenden wir diese Lösung bei der Berechnung der Tragfähigkeit schlanker, stählerner Dreigelenk-Bogenträger mit kleiner Pfeilhöhe an, dann zeigt sich, dass die Einhaltung der zulässigen Inanspruchnahme bei der üblichen Bemessung des Bogens nicht ausreicht, um auch die geforderte Sicherheit gegen Erreichen des

« kritischen Zustandes » unter halbseitiger Belastung zu gewährleisten.

VII) Wird ein prismatischer Baustahlstab untersucht, der ausser einer zentrischen Druckkraft noch eine angenähert sinusförmig verteilte Querbelastung von der Gesamtgrösse Q zu tragen hat, dann kann das Gleichgewichtsproblem, soferne über die genaue Intensitätsverteilung dieser Querbelastung eine einschränkende Voraussetzung zugelassen wird, einer strengen Lösung zugeführt werden. In Fig. 7 sind, ähnlich wie in Fig, 4 und 6, die Kurven dargestellt, die den gefundenen Zusammenhang zwischen der kritischen Druckspannung und dem Schlankheitsgrad festlegen ; die Grösse der Querbelastung Q wird hiebei durch die ideelle, nach Navier berechnete Biegerandspannung $\sigma_b = \frac{M_o}{W}$ zum Ausdruck gebracht, die in der Stabmitte bei ausschliesslicher Wirkung

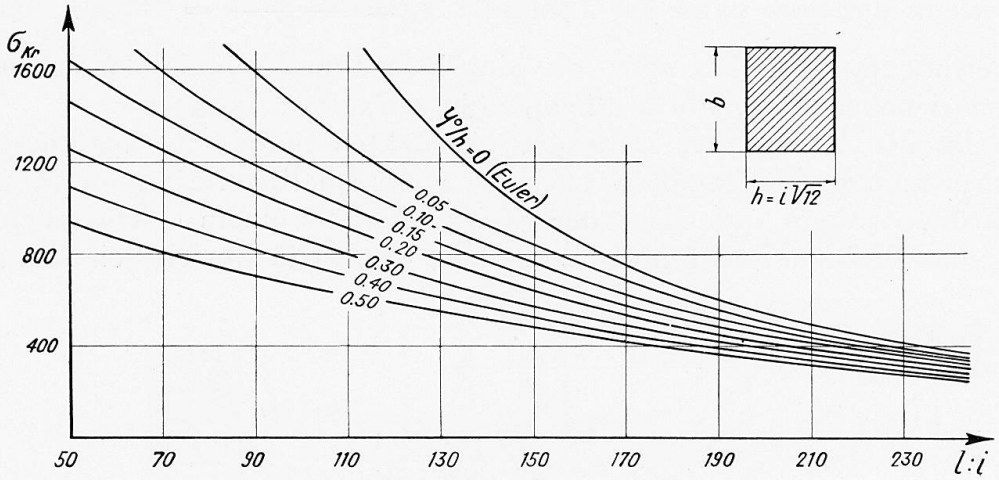

Fig. 7.

der Querbelastung entstehen würde. Bei der Bemessung derartiger Stäbe muss in jedem Einzelfalle wohl erwogen werden, ob die auftretende Achsialkraft oder die Querbelastung oder beide Wirkungsgrössen gemeinsam mit der Sicherheitszahl multipliziert werden müssen.

Im Anschluss an diese Ausführungen sei mir eine Bemerkung zu der von Roš-Brunner angegebenen Lösung (Fig. 30 des Referates) erlaubt. Das Roš-Brunner'sche Verfahren setzt hier implicite voraus, dass die Querbelastung die gleiche Momentenverteilung hervorruft wie die achsiale Druckkraft, dass somit der Biegemomentenverlauf der Querbelastung Q ein sinusförmiger ist. Das ideelle, bei der Herleitung der Lösung als Parameter dienende Biegemoment in Stabmitte beträgt dann $M = \frac{Q\,l}{2\,\pi}$, so dass sich die gefundenen Ergebnisse, genau genommen, nicht auf den Fall einer Einzellast $H = \frac{4\,M}{l}$, sondern auf den Fall einer sinusförmig verteilten Querbelastung der Grösse $Q = \frac{2\,\pi\,M}{l}$ beziehen. Die in Fig. 30 des Referates eingezeichneten Kurven sind dann der Reihe nach mit $Q = \frac{P_k}{127{,}3}, \frac{P_k}{63{,}7}, \frac{P_k}{31{,}8}, \frac{P_k}{15{,}9}$ zu beschreiben und die Kur-

ven, die den Querlasten $Q = \frac{P_k}{200}, \frac{P_k}{100}, \frac{P_k}{50}$ und $\frac{P_k}{25}$ zugeordnet sind, liegen dementsprechend höher.

VIII) Das durch die Kurven Fig. 1-3 dargestellte Tragverhalten gedrückter Baustahlstäbe kann die Grösse der Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Baustahl grundlegend beeinflussen. Die wertvollen Ergebnisse, auf die die theoretische Untersuchung derartiger Systeme bei Berücksichtigung der Plastizität des Werkstoffes führte, sind an die Voraussetzung gebunden, dass der Widerstand der im Tragwerk vorkommenden Druckstäbe nach Erreichen der Knicklast konstant bleibt, wie dies bei einem gezogenen oder gebogenen Stab aus ideal-plastischem Material der Fall ist. Demgegenüber zeigen jedoch die Baustahlstäbe der üblichen Schlankheitsgrade schon bei geringfügigen Verkürzungen der Stabsehne einen ungemein starken Abfall des achsialen Widerstandes, der eine ganz erhebliche Ueberbeanspruchung des « stützenden Grundsystems » und damit in der Mehrzahl der praktischen Fälle ein vorzeitiges Versagen des letzteren zur Folge hat. Die im Rahmen der angeführten Theorie ermittelten « tragbaren » Lasten können aus diesem Grunde u. U. um 40 % zu gross sein.

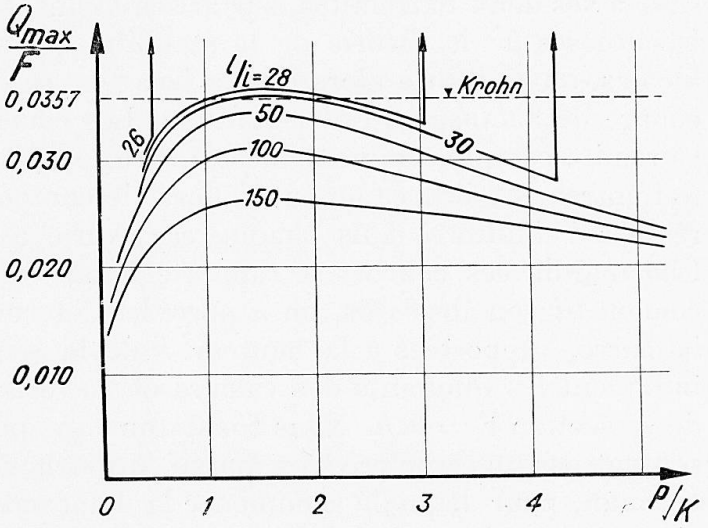

Fig. 8.

Abschliessend sei noch erwähnt, dass ich im angeführten Manuskript auch das Stabilitätsproblem des Rahmenstabes einer exakten, (die Nachgiebigkeit der Querverbindungen berücksichtigenden) Lösung zugeführt und ein Verfahren zur Bemessung der Querverbindungen entwickelt habe, das im Wesen dem von Prof. Roš geschilderten Verfahren gleicht.

In Fig. 8 ist der gefundene Zusammenhang zwischen der grössten, vor dem Zusammenbruch des Stabes auftretenden Querkraft, dem Schlankheitsgrad und dem Exzentrizitätsmass für Stäbe mit Rechtecksquerschnitt dargestellt. Wir erkennen, dass Q_{max} nur bei Stäben, deren Tragvermögen durch ein « Maximum zweiter Ordnung » begrenzt ist, wesentlich über den Krohn'schen Wert ansteigt. Um von der Baustahlsorte unabhängig zu sein, können wir (da Q_{max} im allg. nicht mehr als im Mass der Quetschgrenze σ_Q wächst) anstelle der Krohnformel allgemeiner z. B. $Q_{max} = \frac{\sigma_Q}{75} \cdot F$ schreiben und die Querverbindungen, sofern für sie nicht die Bruch- sondern die Fliessgrenze als massgebend angesehen wird, unmittelbar für $Q_{max} = \frac{\sigma_{zul}}{75} \cdot F$ auf « zulässige Spannung » bemessen.

Traduction [1].

Qu'il me soit permis d'ajouter quelques remarques complémentaires aux rapports de MM. les Professeurs Karner et Roš, rapports d'ailleurs si importants, tant du point de vue théorique que du point de vue pratique. Ces considérations sont extraites du manuscrit, actuellement prêt à être imprimé, que je consacre aux « Barres comprimées en acier de construction, Théorie de leur comportement en charge et de leurs possibilités », ce manuscrit contenant les solutions théoriques rigoureuses des différents problèmes d'équilibre que posent les barres comprimées en acier de construction. Les résultats qui sont indiqués dans les lignes qui suivent ont été déterminés en partant de cette hypothèse que la section de la barre est rectangulaire et que le diagramme tensions-allongements concorde avec celui qui a été employé par Roš-Brunner [2].

I. — Si l'effort de compression P est appliquée axialement à une barre reposant à ses deux extrémités, sur articulations, sur des appuis et si l'on part des hypothèses de la théorie de la stabilité, qui nous ramènent à des conditions idéales, on peut dire alors que la barre ne se déforme qu'après avoir atteint la charge de flambage d'Euler-Kármán. Les courbes de la figure 1 permettent de se rendre compte comment la résistance de la barre dans la direction axiale (ou autrement dit, comment l'effort de compression « P_{Gl} » nécessaire pour réaliser l'équilibre, dans chaque cas) varie avec la déformation de la barre. Chacune de ces courbes se rapporte à une valeur indiquée du degré d'élancement l/i; en abscisses, on a porté les déformations latérales y_0 du milieu de la barre, rapportées à la hauteur h de la section, tandis que les ordonnées indiquent les quotients des valeurs de la résistance de la barre par la surface de sa section $F = b.h$. Nous constatons que pour toutes les barres qui ne présentent pas un caractère trop massif, trop trapu, la charge de flambage d'Euler-Kármán, pour laquelle commence la déformation, représente la limite supérieure théorique de la capacité de charge. La chute de la capacité de charge est tout particulièrement accusée pour les degrés de finesse voisins de $l/i = 60$; le fléchissement de la barre en cours de flambage se produit ici avec une accélération nettement croissante. Les barres qui accusent un degré d'élancement très petit se comportent d'une manière particulière. C'est ainsi que la courbe correspondant, par exemple, à $l/i = 20$ quitte l'axe des ordonnées à la hauteur de la tension de flambage de Kármán (qui se trouve déjà ici juste au-dessous de la limite d'écoulement $\sigma_Q = -2700$ kg/cm²); elle descend quelque peu, puis monte au-dessus de la limite de compression jusqu'à la valeur :

$$\frac{\max P_{Gl}}{F} = 2900 \text{ kg/cm}^2$$

pour retomber ensuite définitivement.

1. L'auteur ayant été empêché de présenter lui-même son Mémoire au Congrès de Paris, celui-ci a été lu par M. le Prof. Dr. L. Karner, Secrétaire général.

2. Dans les travaux qu'ils ont déjà publiés antérieurement, Roš-Brunner définissent la limite de proportionnalité par les coordonnées $\sigma_p = 1900$ kg/cm², $\varepsilon_p = 0{,}086$ %. Le module d'élasticité ainsi déterminé pour le matériau considéré $E = 1{,}9/0{,}00086 = 2210$ t/cm² ne concorde pas avec la valeur $E = 2150$ t/cm² indiquée dans le rapport.

Une barre ayant un degré de finesse $l/i = 20$ accuserait donc une légère déformation après avoir atteint la charge de flambage de Kármán, pour revenir toutefois à un état de repos après une déformation $y_0 = 0,04\ h$; elle supporterait alors une augmentation de charge pouvant aller jusqu'à

$$\max P_{Gl} = 2900\ F$$

Pour des barres présentant un caractère trapu aussi nettement prononcé, la limite supérieure de la capacité de charge n'est donc pas définie par la limite de stabilité de Kármán (point de bifurcation de l'état d'équilibre), mais par la valeur de la résistance de la barre ainsi désignée sous le terme de « maximum secondaire », qui est atteinte pour un état de déformation peu accusée et qui se trouve ici au-dessus de la limite d'écoulement du matériau et par suite également au-dessus du point de bifurcation. Nous désignerons l'état d'équilibre pour cette limite supérieure de capacité de charge comme « état critique » et la valeur

$$\sigma_{kr} = \frac{\max P_{Gl}}{F}$$

comme tension de compression moyenne « critique » pour la barre trapue soumise à une compression axiale.

II. — Si l'effort de compression P est appliqué excentriquement avec une excentricité très faible

$$p = \frac{k}{8} = 0,021\ h$$

la barre subit un fléchissement sous l'action de la charge croissante et constitue un état d'équilibre que traduisent les courbes de la figure 2. Ces courbes, qui sont caractérisées par le degré de finesse indiqué, accusent des maxima dont les ordonnées donnent les contraintes de compression moyennes critiques

$$\sigma_{kr} = \frac{\max P_{Gl}}{F}$$

et permettent de déterminer les valeurs maxima des contraintes supportées par la barre. Suivant l'allure de ces courbes, nous distinguons deux sortes de maxima, que nous désignons comme de « premier ordre » et de « second ordre » et qui, pour la courbe correspondant à $l/i = 24,5$, sur la fig. 2, se trouvent au même niveau. Toutes les courbes tracées pour $\frac{l}{i} = 40$ à $\frac{l}{i} = 180$ accusent exclusivement des maxima de premier ordre, tandis que sur les courbes qui correspondent à $\frac{l}{i} < 24,5$ le maximum de premier ordre accuse un recul ; le maximum de second ordre, étant le plus élevé, intervient principalement pour la détermination de la limite de capacité de charge ; ce maximum de second ordre coïncide avec l'affaiblissement relatif de la résistance de la barre, affaiblissement qui se manifeste lorsque les contraintes de tension dans les fibres périphériques au sommet de la barre traversent la zone d'écoulement, tandis que les contraintes de compression sur les fibres internes se trouvent déjà largement engagées dans la zone de reprise des possibilités de résistance. Si nous recherchons, par exemple, de quelle manière se comporte

une barre accusant le très faible degré de finesse de $l/i = 18$, nous constatons, sur la courbe correspondante de la figure 2, que pour le régime de charge :

$$\frac{P_{GI}}{F} = 2510 \text{ kg/cm}^2$$

(maximum de premier ordre), la barre subit un faible accroissement de fléchissement, mais qu'elle se rétablit immédiatement et est alors susceptible de supporter un accroissement de charge allant jusqu'à

$$\sigma_{kr} = \frac{\max P_{GI}}{F} = 2820 \text{ kg/cm}^2$$

Ce n'est que sous l'influence de cette charge élevée, qui se trouve déjà au-dessus de la charge de compression F. σ_Q que la capacité de charge de la barre s'effondre définitivement ; la déformation atteint seulement, à cet instant critique, la valeur de $y_o = 0,12\ h$.

La figure 3 représente de même la manière dont se comportent les barres lorsque l'effort de compression est appliqué par l'intermédiaire d'un bras de levier important $p = 2\ k = h/3$. Nous pouvons, ici encore, distinguer nettement les maxima de « premier » et de « second » ordre ; les premiers indiquent les possibilités de charge pour toutes les barres dont le degré de finesse est $\frac{l}{i} \geqq 28$ tandis que les deuxièmes donnent les capacités de charge des barres très massives ou trapues. La courbe en traits discontinus, jusqu'à laquelle toutes les courbes indiquées ont été tracées, définit la limite des recherches effectuées et correspond à tous les états d'équilibre pour lesquels la contrainte de tension maximum à la périphérie de la barre atteint la valeur de $\sigma_z = +4000$ kg/cm² (on se trouve alors au voisinage de la résistance statique à la traction pour le matériau étudié). En dehors de la limite ainsi définie, les courbes accuseraient une chute très accentuée et les allongements sur le côté extérieur arrivent rapidement au voisinage des valeurs correspondant à la rupture ; la manière dont les barres se comportent dans cette région est pratiquement et théoriquement sans intérêt.

III. — Le diagramme de la figure 4 indique les possibilités de charge, telles qu'elles ont été déterminées rigoureusement, pour les barres en acier de construction soumises à une compression excentrique ; il est à comparer avec le résultat que donne l'excellente théorie d'approximation de Roš-Brunner (figure 6 de leur rapport). Les courbes qu'il comporte se rapportent au degré d'excentricité indiqué p/k de l'application de l'effort et déterminent la relation fonctionnelle entre la valeur maximum $\sigma_{kr} = \frac{\max P_{GI}}{F}$ de la contrainte moyenne de compression supportée et le degré de finesse l/i de la barre. Chacune des courbes se compose de deux branches, qui se raccordent sur la courbe tracée en traits discontinus ; la branche la plus longue, qui est faiblement inclinée, correspond à tous les états critiques qui sont conditionnés par l'arrivée à un maximum de premier ordre, tandis que la branche courte, se relevant très rapidement, correspond aux maxima de second ordre. La zone ainsi définie par ces maxima de second ordre coupe, ainsi qu'on le voit, le niveau correspondant

à la limite d'écoulement $\sigma_{kr} = \sigma_Q = -2700$ kg/cm² et définit donc également des états critiques correspondant à des régimes de charge qui se trouvent au-dessus de la charge limite de compression. Plus ces branches inclinées se rapprochent de la ligne de démarcation des essais effectués, plus faibles sont les valeurs extrêmes de la résistance de la barre et plus élevées sont les contraintes se manifestant à l'état critique ; tous les points situés à gauche et en dehors de cette ligne de démarcation correspondent à des barres qui ne manifestent aucun état critique, c'est-à-dire aucun maximum accusé de résistance, sous l'influence de charges appliquées excentriquement et croissantes jusqu'à une contrainte de traction $\sigma_z = +4000$ kg/cm² sur la périphérie de la barre ; ces barres se rapprochent, en ce qui concerne la manière dont elles se comportent, de barres en acier de construction qui seraient soumises à des flexions par charges transversales.

Les courbes de la figure 4, qui correspondent à différents degrés d'excentricité, ont été établies en supposant une répartition des tensions, parallèlement à la courbe de déformation de l'acier de construction. On peut remarquer que ces répartitions des contraintes restent non influencées par la loi de décharge linéaire jusqu'à ce que l'on arrive à l'état critique [1] lorsque le degré d'excentricité n'est pas plus faible que $\frac{p}{k} =$ env. 1/8 et que la force de compression croît, à sa position d'excentricité, à partir de zéro. Si l'on reporte ces conditions de répartition de contraintes sans décharge, purement et simplement, dans le cas de $\frac{p}{k} = 0$ on obtient la courbe tracée en traits discontinus, qui porte le nom de courbe d'Engesser et qui ne présente une importance qu'autant qu'elle constitue la courbe limite supérieure de la famille. La courbe valable du point de vue théorique et correspondant à une application axiale de la charge $p/k = 0$ a été tracée en entier sur la figure 4 ; elle se compose, dans la zone $l/i \geqq 107,1$ de l'hyperbole d'Euler, dans la zone $23,8 \leqq l/i < 107,1$ de la courbe de Kármán et dans la zone $l/i < 23,8$ de la courbe correspondant aux maxima de deuxième ordre de la résistance de la barre, qui possède une allure ascendante rapide ; les deux dernières branches de la courbe se trouvent d'ailleurs isolées de la famille elle-même, car pour leur détermination, il faut partir d'une répartition modifiée des contraintes, répartition influencée par la loi de décharge. En ce qui concerne la manière dont se comportent les barres qui sont seulement chargées axialement dans l'acception proposée, sans toutefois satisfaire aux conditions idéales de la théorie de la stabilité, je renverrai à mon manuscrit.

IV. — Pour le calcul des barres soumises à une charge de compression excentrique, en acier de construction, je propose l'adoption de la méthode dite « méthode β ». On rapporte les ordonnées des différentes courbes représentées

---

1. Dans son Rapport à la deuxième Réunion Internationale de Vienne (page 344, fig. 48) le Professeur Roš arrive à une conclusion opposée, probablement par suite d'une erreur ; les contraintes de compression à la périphérie de la barre sont déjà déchargées, avant que la limite d'élasticité soit atteinte, de sorte qu'il se produit bien une inversion des contraintes, mais aucune « décharge des fibres » après passage à l'état plastique.

sur la figure 4 aux ordonnées de la courbe des contraintes de flambage d'Euler-Kármán et on exprime la contrainte de compression critique moyenne de la barre comprimée excentriquement comme constituant une fraction $1/\beta$ de la contrainte de flambage (point de bifurcation de l'état d'équilibre), valable pour la même barre en supposant une application axiale de la charge. Les valeurs du rapport $\beta = \frac{\sigma_k}{\sigma_{kr}}$ ainsi déterminées à partir de la solution rigoureuse ont été rassemblées dans le tableau annexé au présent Rapport. Si maintenant on applique au calcul de la barre comprimée excentriquement un coefficient ν de sécurité, l'effort de compression maximum qui se manifeste dans la barre répond à la condition :

$$\frac{P}{F} \leqslant \frac{\sigma_{kr}}{\nu} \qquad \text{ou} \qquad \frac{P}{F} \leqslant \frac{\sigma_k}{\beta\,\nu}$$

relation qui prend la forme simple suivante, après introduction du coefficient de flambage bien connu $\omega = \frac{\nu \cdot \sigma_{zul}}{\sigma_k}$:

$$\beta \cdot \omega \cdot \frac{P}{F} \leqslant \sigma_{zul}$$

Le coefficient β exprime alors la diminution que subit la capacité de la barre par suite de l'application excentrée de la charge ; si pour $l/i \geqq 24$, le degré d'excentricité de l'application de la charge disparaît, β tend vers 1. Le coefficient de sécurité ν concorde, dans cette méthode de calcul, avec le coefficient de sécurité au flambage et ne s'exprime pas directement par un chiffre ; de même que la contrainte de flambage σ_k qui sert de base à l'application de la méthode, il est compris implicitement dans la valeur du coefficient de flambage ω qui répond aux prescriptions officielles. Les tables donnant β doivent, de même que celles qui donnent ω, être établies pour toutes les sortes d'aciers de construction normalisés ; pour l'acier St. 37 et pour les sortes quelque peu supérieures, on peut se servir directement de la table ci-jointe. Si, ainsi que le Professeur Karner le préconise à juste titre dans son Rapport d'Introduction (Voir Publication Préliminaire, page 51) la méthode de calcul doit permettre de satisfaire dans les conditions rigoureuses aux conditions de contrainte périphérique courantes des barres trapues :

$$\frac{P}{F} + \frac{M}{W} \leqslant \sigma_{zul}$$

les valeurs officiellement prescrites pour β ne doivent alors pas descendre au-dessous de la valeur suivante :

$$\min \beta = \left(1 + \frac{p}{k}\right) : \omega$$

dans la zone des faibles degrés de finesse. Dans la détermination des valeurs de ω prévues en Allemagne, les valeurs de β indiquées dans notre tableau pour $\frac{p}{k} = 0,5 - 2,0 -$ et $4,0$ dans la zone des degrés de finesse $l/i < 40$ ou $l/i < 57,5$ ou $l/i < 65$ doivent être remplacées par ce minimum de β.

V. — La solution « standard » du problème, telle qu'elle fait l'objet de la figure 4, suppose une section rectangulaire de la barre, des bras de levier égaux des deux côtés et une articulation libre de frottement aux deux extrémités de la barre. Afin d'étudier l'influence de la forme de la section sur la valeur de la charge critique, j'ai rassemblé les sections que l'on peut considérer comme les plus intéressantes en construction métallique en 5 groupes et pour chacun de ces groupes, j'ai développé la solution rigoureuse du problème pour les cas de charge $\sigma_{kr} = 1000$ et 1900 kg/cm². J'ai pu constater que notre solution « standard » pouvait être appliquée avec une bonne approximation, même dans le calcul des barres ayant une section de forme arbitraire, à condition de prendre comme terme de comparaison pour le bras de levier d'application de la charge non pas exclusivement l'inverse du rayon mesuré du noyau k mais, suivant le groupe auquel appartient la section, k, i, ou $a = \frac{i+k}{2}$. Si nous admettons une tolérance plus large et à condition qu'elle soit encore acceptable du point de vue pratique, nous pourrons adopter uniformément la valeur $\frac{p}{k}$ comme mesure du degré d'excentricité pour des barres pleines de toutes sections. Il a été également apporté une solution rigoureuse au cas comportant l'application de la charge par l'intermédiaire de bras de levier différents soit en grandeur soit en direction ; pour $p_2 \neq -p_1$ nous pouvons considérer, à titre d'approximation, les barres correspondantes comme des barres comprimées comportant deux bras de levier de même valeur des deux côtés avec $p_m = \frac{p_1 + p_2}{2}$ En outre, j'ai étendu la théorie rigoureuse aux barres d'acier soumises à une compression excentrée et dont les extrémités comportent un encastrement élastique. Nous supposons la barre prolongée des deux côtés et répondant aux conditions d'appui d'une poutre continue à trois panneaux ; la longueur c du panneau latéral exempt de charge donne alors, sous forme du rapport $\frac{1}{c/i}$ une mesure, facile à évaluer dans la pratique de la construction, du degré d'encastrement élastique d'une barre comprimée formant un élément de la charpente. La figure 5 montre dans quelle mesure peut augmenter le degré de finesse de la barre l/i, lorsque le degré d'encastrement i/c croît, si la barre doit perdre sa capacité de charge pour le degré de charge

$$\sigma_{kr} = \frac{\max P_{Gl}}{F} = 1.500 \text{ kg/cm}^2$$

Les courbes particulières se rapportent au degré d'excentricité indiqué, introduit sous la forme $\frac{p}{i}$.

VI. — Si l'axe d'une barre soumise à une compression centrée est déjà courbé, à l'état initial, en l'absence de toute charge, suivant une forme se rapprochant d'une demi-sinusoïde admettant une flèche η_0, la barre peut former alors également un état « critique » ; le problème peut être résolu d'une manière rigoureuse, grâce à une hypothèse limitative, ne tirant toutefois pas à conséquence du point de vue pratique, en ce qui concerne

l'allure exacte de la forme initiale de cet axe. La solution obtenue est représentée sur la figure 6, les courbes particulières, de même que dans la figure 4, traduisent la relation entre le degré de finesse de la barre et la contrainte de compression moyenne la plus élevée possible (critique) ; ces courbes se rapportent aux valeurs indiquées pour la déformation initiale au sommet $\frac{\eta_0}{h}$. Si nous appliquons cette solution au calcul de la capacité de charge des poutres en arc en acier, élancées, à trois articulations et comportant de faibles flèches, nous constatons que l'observation des exigences normales dans le cas du calcul des arcs ne suffit pas à assurer la sécurité voulue contre les possibilités d'arriver à « l'état critique » sous l'influence d'une charge s'exerçant sur un demi-côté.

VII. — Considérons maintenant une barre en acier de construction de forme prismatique, ayant à supporter outre une charge de compression centrée, une charge transversale répartie d'une manière à peu près sinusoïdale et ayant une valeur totale Q ; le problème d'équilibre correspondant peut recevoir une solution rigoureuse, pour autant que la répartition exacte de l'intensité de la charge transversale est susceptible de se prêter à une hypothèse initiale limitative. De même que dans les figures 4 et 6, on a représenté sur la fig. 7, les courbes qui déterminent la relation établie entre la contrainte de compression critique et le degré de finesse ; l'importance de la charge transversale Q est exprimée par la contrainte de flexion idéale périphérique, calculée d'après Navier :

$$\sigma_b = \frac{M_o}{W}$$

et qui existerait effectivement au milieu de la barre si cette influence transversale agissait seule. Dans le calcul de ce type de barres, il importe de déterminer avec certitude, dans chaque cas particulier, si la contrainte axiale seule, ou bien la charge transversale seule doit être multipliée par le coefficient de sécurité, ou éventuellement les deux grandeurs ensemble.

Qu'il me soit permis d'ajouter ici une remarque au sujet de la solution indiquée par Roš-Brunner (figure 30 de leur rapport). La méthode de Roš-Brunner suppose ici implicitement que la charge transversale provoque une même répartition des moments que la contrainte de compression axiale, de telle sorte que la courbe des moments de flexion, de même que la courbe de répartition de la charge transversale Q, sont toutes deux des sinusoïdes. Le moment fléchissant idéal au milieu de la barre, intervenant dans la solution comme paramètre, atteint alors $M = \frac{Ql}{2\pi}$ de telle sorte que, rigoureusement parlant, les résultats obtenus ne se rapportent pas au cas d'une charge unique $H = \frac{4M}{l}$ mais au cas d'une charge sinusoïdalement répartie et ayant la valeur $Q = \frac{2\pi M}{l}$. Les courbes de la figure 30 du rapport correspondent donc, dans l'ordre, à

$$Q = \frac{P_k}{127,3} \quad \frac{P_k}{63,7} \quad \frac{P_k}{31,8} \quad \frac{P_k}{15,9}$$

et les courbes correspondant aux charges transversales :

$$Q = \frac{P_k}{200} \quad \frac{P_k}{100} \quad \frac{P_k}{50} \quad \frac{P_k}{25}$$

sont respectivement situées au-dessus.

VIII. — La manière dont se comportent les barres d'acier de construction comprimées, qui est représentée par les figures 1 à 3, peut exercer une influence primordiale sur la valeur de la capacité de charge des charpentes statiquement indéterminées en acier de construction. Les résultats remarquables auxquels conduisit l'étude théorique de ces systèmes en faisant intervenir la plasticité du matériau, sont basés sur cette hypothèse que la résistance des barres comprimées de la charpente reste constante lorsque l'on a atteint la charge de flambage, ainsi que c'est le cas pour une barre tendue qui serait constituée par un matériau idéalement plastique. Par contre, les barres en aciers de construction présentant les degrés de finesse courants accusent une diminution considérable de la résistance axiale, même pour de faibles raccourcissements de la corde de la barre, ce qui a pour conséquence une majoration très notable de la contrainte du système de « renforcement », et, en pratique, dans la majoration des cas, une mise hors service prématurée de ce dernier. Les charges « possibles » telles qu'elles sont déterminées dans le cadre de la théorie proposée peuvent donc, pour cette raison, être dans certains cas trop fortes de plus de 40 %.

Signalons encore pour terminer que dans le manuscrit auquel j'ai fait allusion, j'ai apporté également au problème de la stabilité des barres en châssis une solution exacte, tenant compte de la flexibilité des assemblages transversaux ; j'ai également développé une méthode de calcul des assemblages transversaux, qui présente une similitude de principe avec celle qui a été indiquée par le Professeur Roš.

La figure 8 indique la relation trouvée entre la charge transversale maximum mise en jeu avant la mise hors service de la barre, le degré de finesse et le degré d'excentricité, pour des barres de section rectangulaire. Nous remarquons que Q_{max} ne s'élève au-dessus de la valeur de Krohn d'une manière sensible que pour les barres dont la capacité de charge est limitée par un « maximum de second ordre ». Pour rendre la question indépendante de la catégorie d'acier de construction (et comme en général, Q_{max} ne subit pas un accroissement relatif plus important que la limite d'écoulement à la compression σ_Q) nous pouvons substituer d'une manière générale à la formule de Krohn, par exemple, la relation $Q_{max} = \frac{\sigma_Q}{75} \cdot F$ et calculer les conditions transversales directement pour $Q_{max} = \frac{\sigma_{zul}}{75} \cdot F$ d'après la « contrainte admissible ».

M. BROSZKO,
Professor an der Technischen Hochschule, Warschau.

1. — Der vom Generalsekretariat der Internationalen Vereinigung für Brükkenbau und Hochbau anlässlich der Pariser Tagung herausgegebene Vorbericht [1] enthält zwei Referate [2], in denen auf das Knicken prismatischer Stäbe bei zentrischem Lastangriff näher eingegangen wird. Das gleiche Thema bildete bekanntlich auch auf dem vor vier Jahren in Wien abgehaltenen Brückenbaukongress den Gegenstand der Verhandlungen. Mit Rücksicht auf die sehr erheblichen Meinungsverschiedenheiten, die im Verlaufe dieser Verhandlungen zu Tage getreten, und im Wiener Kongressbericht [3] zum Ausdruck gekommen sind, musste die Einstellung der beiden vorangeführten Referate zu den in Wien aufgerollten strittigen Fragen von vornherein ein ganz besonderes Interesse erwecken. Eine klare Stellungnahme zu den letzterwähnten Fragen durfte dabei umso mehr erwartet werden, als die Wiener Diskussion über das Knickproblem von dem damaligen Referenten mit einem Gutachten [4] über die erzielten Diskussionsergebnisse abgeschlossen wurde, dessen Inhalt kaum geeignet ist zur Klärung des umstrittenen Problems beizutragen. Denn die, den Kernpunkt dieses Gutachtens bildende mathematische Begründung [5] der Engesser-v. Kármán'schen Knicktheorie [6] ist infolge eines offenkundigen Versehens, mit Rechenfehlern behaftet [7] und weist überdies die Eigentümlichkeit auf, dass nach der Beseitigung der Rechenfehler ein Ergebnis erhalten wird, welches sich in direktem Widerspruch mit der zu beweisenden These befindet.

In dem Pariser Vorbericht vermisst man indessen eine Berichtigung der vorerwähnten, unbestreitbar unrichtigen Beweisführung, sowie der Folgerungen, welche aus der letzteren von dem Wiener Referenten gezogen wurden. Diese Unterlassung, im Verein mit der Nichtberücksichtigung der neuesten Ergebnisse der experimentellen [8] und der theoretischen [9] Forschung,

---

1. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Erster Kongress. Paris, 1932. 19. Mai-25. Mai. Vorbericht.

2. L. Karner, « Stabilität und Festigkeit von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen ». Einleitendes Referat. Vorbericht S. 17/39.

M. Roš, « La stabilité des barres comprimées par des forces excentrées ». Vorbericht S. 57/93.

3. Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau. Wien, J. Springer, 1929. S. 282/346.

4. Ebenda. S. 338/346.

5. Ebenda. S. 338/340.

6. Th. v. Kármán, Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitt. üb. Forschungsarbeiten a. d. Geb. d. Ingenieurwesens. Heft 81. Berlin, 1910.

7. Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau. Wien, J. Springer, 1929. S. 340. Zeile 11. sowie Zeile 17. von oben. Der Fehler besteht in der irrtümlichen Einführung des Kármánschen Knickmoduls T_k an Stelle des von ihm stets verschiedenen Engesserschen Knickmoduls T.

8. W. Rein, Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle. Berlin, J. Springer, 1930.

9 a. M. Broszko, « Ueber die allgemeine Lösung des grundlegenden Knickproblems ».

kann irreführend wirken. Denn der Leser des Pariser Vorberichtes könnte unter den gegebenen Umständen den Eindruck gewinnen, dass sämtliche gegen die Engesser-v. Kármán'sche Theorie vorgebrachten Einwände durch die Darlegungen des Wiener Referenten widerlegt worden seien[1]. Ein erneutes Eingehen auf diese Einwände erscheint daher durchaus erforderlich, zumal die letzteren einer genaueren und ausführlicheren Begründung bedürfen [2].

2. — Der Engesser-v. Kármán'schen Knicktheorie liegen drei physikalische Annahmen zugrunde, und die Unhaltbarkeit dieser Theorie ist dadurch bedingt, dass eine von den vorerwähnten Grundannahmen sich im Widerspruch mit den gesichertsten Erfahrungstatsachen befindet.

In den beiden ersten Engesser-v. Kármán'schen Grundannahmen wird die Behauptung ausgesprochen, dass sowohl im Gebiet der elastischen, als auch in demjenigen der plastischen Formänderungen

I) die ebenen Querschnitte des nicht ausgebogenen Druckstabes nach dessen unendlich schwacher Ausbiegung eben bleiben,

II) der funktionale Zusammenhang zwischen den durch Biegung verursachten spezifischen Längenänderungen der Stabfaserelemente und den zugehörigen Spannungen der gleiche ist wie beim reinen Druck-Zugversuch.

Das Zutreffen dieser Annahmen unterliegt keinem Zweifel [3]. Zur eindeutigen Lösung des Problems reichen aber dieselben nicht aus, weil die zweite Grundannahme keine eindeutige Angaben über die Form des funktionalen Zusammenhanges enthält, der zwischen den spezifischen Längenänderungen und den zugehörigen Spannungen im Querschnitt eines ausgebogenen Druckstabes besteht. Zwecks Herstellung einer eindeutigen Form des letzterwähnten funktionalen Zusammenhanges wurde von Engesser zuerst angenommen [4], dass dieselbe durch den Verlauf des Druckstauchungsdiagramms gegeben sei. Auf einen diesbezüglichen Einwand Jasinski's [5] wurde aber von

---

Verhandlungen des 3. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik. Stockholm, 1930. Band III. S. 51/59.

9 B. M. Broszko, « Beitrag zur allgemeinen Lösung des Knickproblems ». Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Zürich, 1932. Erster Band. S. 1/8.

1. Von der Ueberzeugung geleitet. dass die Richtigkeit der Engesser-v. Kármánschen Theorie durch den letzterwähnten Beweis erwiesen sei, hat Prof. F. Hartmann, Wien unlängst an mehreren Beispielen darzulegen versucht, dass die mit den Vorstellungen dieser Theorie unverträglichen Forschungsergebnisse eo ipso unrichtig sein müssen (s. Z. d. Oesterr. Ing.- u. Arch.-Ver. 84, 1932, S. 165.). Die kleine Schrift Hartmanns gewährt einen so klaren Einblick in den Ideenkreis und in die Gedankengänge eines überzeugten Verfechters der Engesser-v. Kármánschen Theorie, dass das Durchlesen derselben allen sich mit dem Knickproblem näher befassenden Ingenieuren wärmstens empfohlen werden kann. (Anm. b. d. Drucklegung).

2. Diese Einwände sollen ausserdem dadurch eingeschränkt werden, dass die formelle Richtigkeit der mathematischen Herleitung der Kármánschen Knickformel vorbehaltslos zugegeben wird.

3. Das genaue Zutreffen der ersten Grundannahme auch im Falle der plastischen Verformung ist von Grüning und Domke auf theoretischem Wege exakt bewiesen worden. Die zweite Grundannahme ist aber an und für sich einleuchtend.

4. Z. d. Hannoverschen Ing.- u. Arch.-Ver. 35/1889/S. 455.

5. Schweiz. Bauztg. 25/1895/S. 172.

Engesser seine ursprüngliche dritte Grundannahme später durch den folgenden Ansatz ersetzt [1], der daraufhin auch von v. Kármán übernommen wurde :

III) Die Form des funktionalen Zusammenhanges $\sigma = F(\varepsilon)$, welcher während der Ausbiegung des Druckstabes zwischen der in einem Querschnittspunkte wirkenden Spannung σ und der zugehörigen spezifischen Verkürzung ε besteht, ist an der Biegedruckseite durch den Ast *ca* des Druckstauchungsdiagrammes Abb. 1, an der Biegezugseite dagegen durch die Gerade *cb* gegeben, die zu dem geradlinigen Teil O*p* des vorerwähnten Diagramms parallel verläuft. Der funktionale Zusammenhang $\sigma = \Phi(\varepsilon)$, welcher die

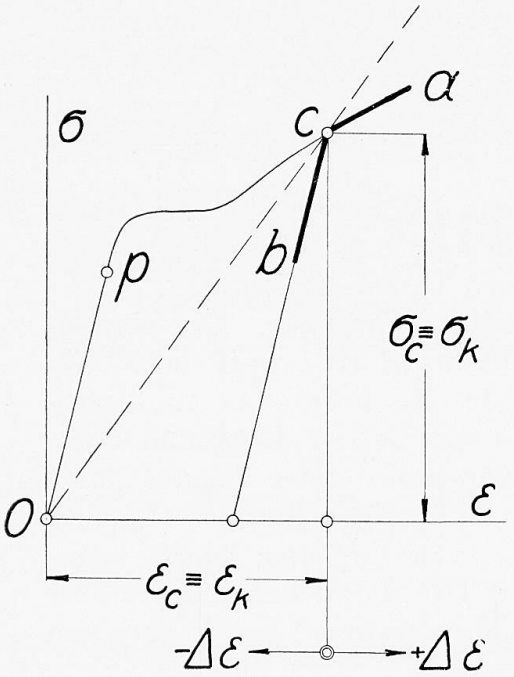

Fig. 1.

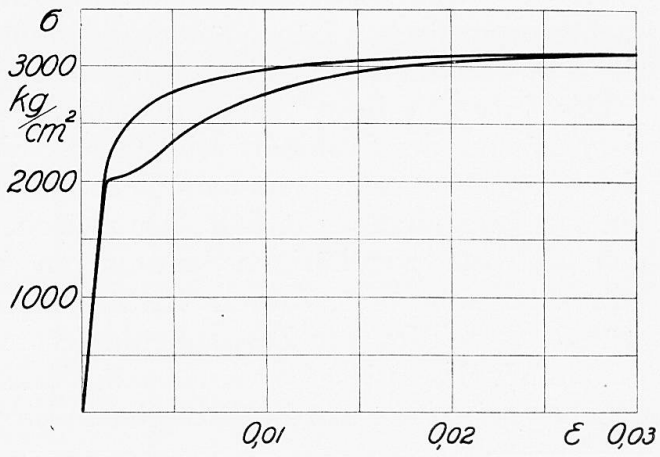

Fig. 2.

Abhängigkeit der in verschiedenen Querschnittspunkten gleichzeitig wirkenden Spannungen σ von den zugehörigen spezifischen Verkürzungen ε angibt, ist infolgedessen während der Ausbiegung des Druckstabes jederzeit durch den Linienzug *bca* bestimmt.

Durch die Einführung dieses Ansatzes wurde zwar das den Urhebern der Engesser-v. Kármánschen Theorie [2] vorschwebende Ziel erreicht. Denn der ergänzende Ansatz (III) reicht im Verein mit der Grundannahme (I) zur eindeutigen Bestimmung der Spannungsverteilung vollkommen aus. Es wurde aber von Engesser und v. Kármán bei der Einführung dieses Ansatzes ausser Acht gelassen, dass er mit der richtigen Annahme (II) unvereinbar ist.

Die Ursache der Unvereinbarkeit des Ansatzes (III) mit der Grundannahme (II) wird sofort klar, wenn man die in der Abb. 2 dargestellten Ewingschen Versuchsergebnisse [3] ins Auge fasst. Denn aus dieser Abbildung ist ersicht-

1. Schweiz. Bauztg. 26/1895/S. 26.
2. Als eigentlicher Urheber der Engesser-v. Kármánschen Knicktheorie ist neben Engesser in erster Linie Jasinski zu nennen.
3. I. A. Ewing, The strength of materials. Cambridge, 1914. S. 42.

lich, dass die Form des funktionalen Zusammenhanges, welcher zwischen der Spannung und der spezifischen Längenänderung eines achsial belasteten Stabes besteht, in hohem Grade von dem Werte der spezifischen Verformungsgeschwindigkeit abhängt [1]. Die letztere nimmt nun, bei der Ausbiegung des Druckstabes, im Bereiche einer Querschnittsebene für jede zur Biegungsebene senkrechte Faserschicht, gemäss der ersten Grundannahme, einen anderen Wert an. Infolgedessen muss die Form des funktionalen Zusammenhanges $\sigma = F(\varepsilon)$ im Bereiche einer Querschnittsebene des ausgebogenen Stabes für jede zur Biegungsebene senkrechte Faserschicht, gemäss der zweiten Grundannahme, verschieden sein. Die den Zusammenhang $\sigma = F(\varepsilon)$ darstellenden Diagrammlinien müssen daher für verschiedene Faserschichten

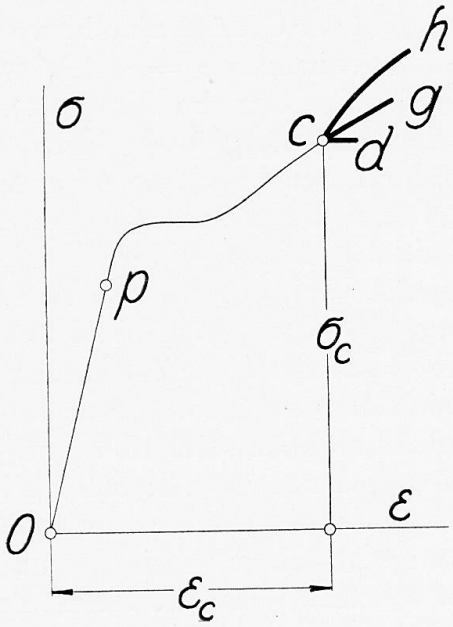

Fig. 3.

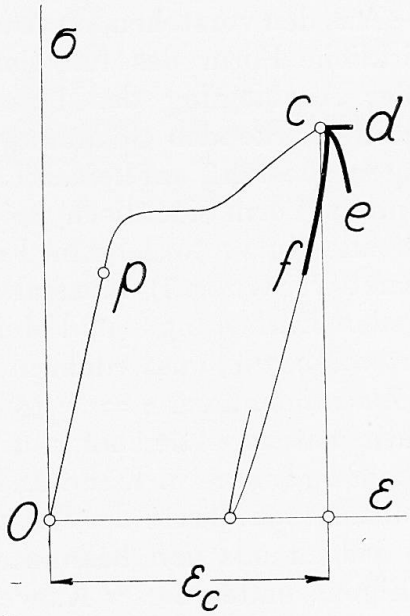

Fig. 4.

einen verschiedenen Verlauf aufweisen, und ihre Form muss sich beim Uebergang von einer Faserschicht zu der benachbarten in stetiger Weise ändern, weil ja die Verformungsgeschwindigkeit bei einem derartigen Uebergang sich in stetiger Weise ändert. An der Biegedruckseite verlaufen diese Diagrammlinien, Abb. 3. zwischen dem Diagramm *ch* der äussersten Faserschicht des Biegedruckraumes und dem Diagramm *cd* der neutralen Schicht, d. h. derjenigen Faserschicht, deren Belastungsänderung bei der Ausbiegung des Druckstabes mit der Geschwindigkeit Null vor sich geht. Diejenigen Diagrammlinien, welche den an der Biegezugseite liegenden Faserschichten zugeordnet sind, verlaufen dagegen, Abb. 4, zwischen dem Diagramm *cd* der neutralen Schicht und dem durch den abfallenden Zweig *cf* einer Hysteresisschleife gegebenen Diagramm der an der konvexen Stabseite liegenden äussersten Faserschicht. Die Gesamtheit der, den einzelnen Faserschichten im Bereich einer Querschnittsebene zugeordneten Diagrammlinien bildet daher

1. Das Verhältnis der mittleren spezifischen Verformungsgeschwindigkeiten betrug bei den Ewingschen Versuchen 1 : 5000.

eine Schar unendlich vieler, in Bezug auf ihren Verlauf unter einander verschiedener Kurven, welche den durch die Linienzüge *ch* und *cf*, s. Abb. 3 und 4, begrenzten Flächenausschnitt in stetiger Reihenfolge ausfüllen. Diese aus den Grundannahmen (I) und (II) sich ergebende Folgerung ist aber mit dem Inhalt des Ansatzes (III) unvereinbar, weil in dem letzteren nur von zwei verschiedenen Formen des funktionalen Zusammenhanges $\sigma = F(\varepsilon)$ die Rede ist, und zwar von einer an der Biegedruckseite und von einer an der Biegezugseite geltenden Form. Infolge der Unverträglichkeit mit der zutreffenden Grundannahme (II) muss daher der Ansatz (III) undebingt unrichtig sein [1]. Das gleiche gilt naturgemäss auch von der Knicktheorie, die aus der richtigen Grundannahme (I) und aus dem unrichtigen Ansatz (III) abgeleitet wurde.

3. — Aus den vorstehenden Ausführungen geht zur Genüge klar hervor, dass die wirkliche Form des funktionalen Zusammenhanges $\sigma = \Phi(\varepsilon)$, welcher nach der Ausbiegung des Druckstabes zwischen den im Stabquerschnitt gleichzeitig wirkenden Spannungen σ und den zugehörigen spezifischen Verkürzungen ε besteht, auf keinen Fall mit der durch den Linienzug *b c a*, Abb. 1, bestimmten Form identisch sein kann. Denn die diesen Zusammenhang darstellende Kurve (welche im Folgenden mit dem Namen einer « Isochrone » bezeichnet werden soll) muss allenfalls in jedem Zeitmoment je einen Punkt einer jeden Entlastungs- und Mehrbelastungscharakteristik, Abb. 4 und 3, in sich enthalten, und ausserdem muss sie ihre Gestalt mit der Zeit ändern.

Der Zusammenhang $\sigma = \Phi(\varepsilon)$ entzieht sich der exakten Wiedergabe durch eine mathematische Gleichung, und es ist nicht möglich seinen Verlauf durch eine dem Engesser-v. Kármánschen Linienzug *b c a*, Abb. 1, analoge Kurve genau abzubilden. Trotz der Unkenntnis des genauen Verlaufes der Isochrone können jedoch aus den bekannten Erfahrungstatsachen gewisse ganz allgemeine Eigenschaften dieser Kurve abgeleitet werden [9 B, Seite 73]), deren Kenntnis eine hinreichende Grundlage für die eindeutige allgemeine Lösung des grundlegenden Knickproblems abgibt. Diese Eigenschaften lassen sich zu den folgenden beiden Aussagen zusammenfassen :

III a) Im Gegensatz zu dem Engesser-v. Kármánschen gebrochenen Linienzug *b c a*, Abb. 1, weist die Isochrone keine Unstetigkeitsstelle ihrer Krümmung auf.

III b) Im Einklang mit dem Verlauf des Engesser-v. Kármánschen Linienzuges *b c a* zeichnet sich der Verlauf der Isochrone dadurch aus, dass die den einzelnen Querschnittspunkten im Augenblick des Ausknickens zugeordneten Werte der Grösse $\tilde{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ ihr Maximum $\tilde{E}_K = \frac{\sigma_K}{\varepsilon_K}$ in der neutralen Schicht aufweisen, und mit der wachsenden Entfernung von der letzteren abnehmen [2].

Die auf Grund der Annahmen (I), (III a) und (III b) für den Fall der

1. Die Unrichtigkeit des Ansatzes (III) macht sich schon im Verlauf des Linienzuges *b c a*. Abb. 1, bemerkbar, welch letzterer im Punkte c einen unwahrscheinlichen, dem Stetigkeitsgefühl widersprechenden Knick aufweist.

2. Mit σ_k und ε_k wurden die der Knicklast P_k zugeordneten Werte der Spannung, bezw. der spezifischen Verkürzung bezeichnet.

drehbar gelagerten Stabenden abgeleitete [1], sowohl im elastischen als auch im plastischen Bereich gültige Knickbedingung wird durch die Gleichung

$$P_K = \pi^2 \frac{(1 - \varepsilon_K)\,\tilde{E}_K\,J}{l_K^2} \tag{1}$$

ausgedrückt, in welcher J_K das kleinste Trägheitsmoment der Querschnittsfläche im Augenblick des Ausknickens und l_K die Stablänge im gleichen Augenblick bezeichnet. Diese Gleichung kann nach Einführung des auf den vorerwähnten Augenblick bezogenen Schlankheitsgrades λ_K auf die viel einfachere Form

$$\varepsilon_K = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \lambda_K^2} \tag{2}$$

gebracht werden. Wird aber die durch die Knicklast verursachte Aenderung der Stababmessungen in der üblichen Weise vernachlässigt, so nehmen die vorstehenden Gleichungen die Form

$$P_K = \pi^2 \frac{E_K\,J}{l^2} \tag{1 a}$$

bezw.

$$\varepsilon_K = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \tag{2 a}$$

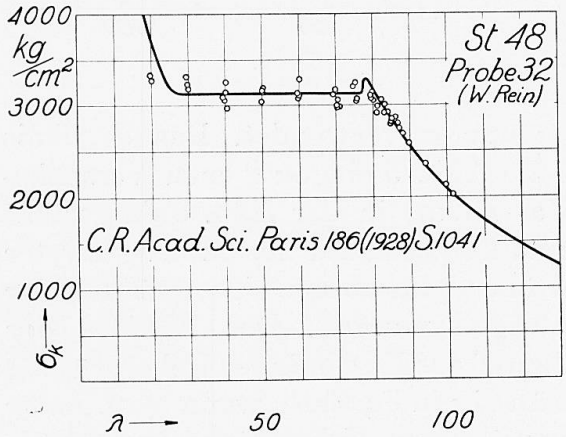

Fig. 5. — Essai = Probe = Test.

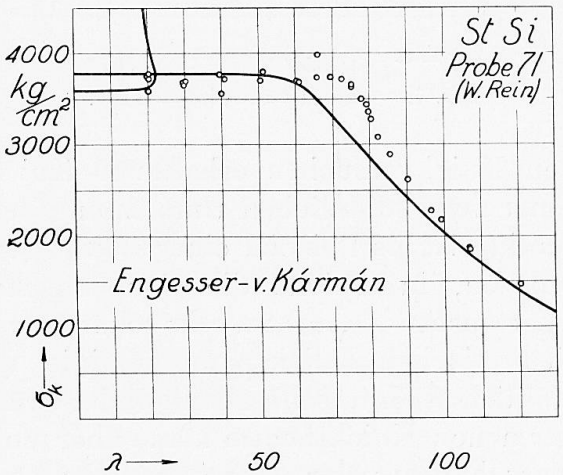

Fig. 6. — Essai = Probe = Test.

an, wobei l die Länge des nicht belasteten Stabes bezeichnet, und die Grössen J und λ dem unbelasteten Zustand des letzteren zugeordnet sind.

4. — Die überaus gute Uebereinstimmung der auf Grund der Gleichung (2 a) ermittelten theoretischen Knickspannungslinie mit den Ergebnissen der z. Zt. zuverlässigsten Dahlemer Knickversuche [2] kann aus der Abb. 5 ersehen werden, wogegen aus den Abbildungen 6 und 7 ersichtlich ist, dass die aus der Engesser-v. Kármánschen [3], und in noch höherem Grade die aus der

1. M. Broszko, « Sur le flambage des barres prismatiques comprimées axialement ». C. R. Acad. Sci. Paris 186/1928/S. 1041.
2. Siehe Fussnote 8, Seite 72.
3. » » 6, » 72.

ursprünglichen Engesserschen[1] Knicktheorie abgeleiteten Knickspannungslinien mit den vorerwähnten Versuchsresultaten sich im augenfälligen Widerspruch befinden. Die nicht unbeträchtliche Streuung der in diese Abbildungen zwecks Ueberprüfung der einschl. Knickformeln eingetragenen Versuchspunkte ist dadurch bedingt, dass Prüfstäbe aus nominell gleichartigem Material in Bezug auf ihre elastomechanischen Eigenschaften untereinander stets differieren. Der nachteilige, die Ueberprüfungsschärfe stark herabsetzende Einfluss der letzterwähnten Unterschiedlichkeit der Prüfstäbe kann einigermassen dadurch abgeschwächt werden, dass man zur Ueberprüfung des Verlaufes der theoretischen Knickspannungslinien die Mittelwerte der aus mehre-

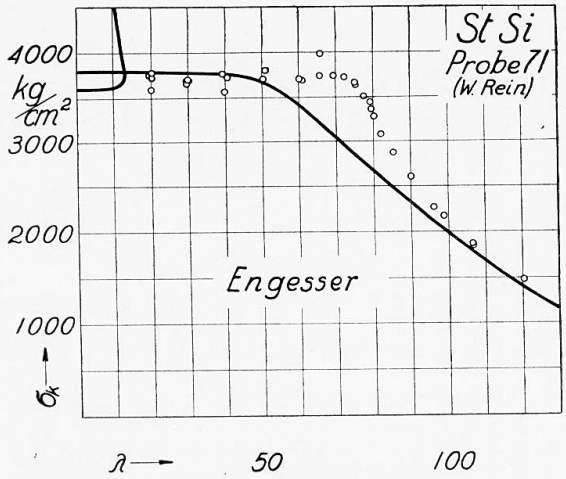

Fig. 7. — Essai = Probe = Test.

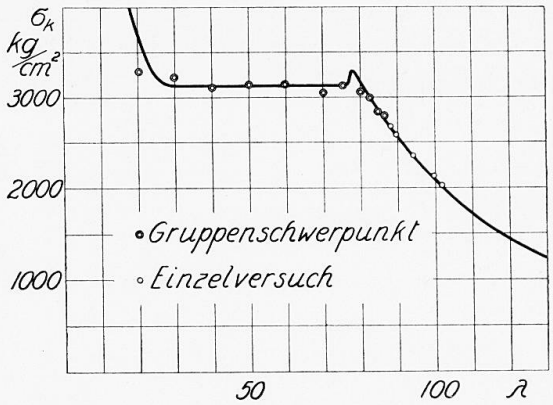

Fig. 8.

ren Knickversuchen erhaltenen Knickspannungen verwendet. Das Ergebnis einer zweckdienlichen Umordnung der in die Abb. 5 eingetragenen Versuchspunkte ist als Beispiel einer derartigen Massnahme in der Abb. 8 dargestellt worden, in welche die Gruppenschwerpunkte geeignet zusammengefasster Wertepaare (λ, σ_K) zwecks schärferer und übersichtlicherer Ueberprüfung der theoretischen Knickspannungslinie eingetragen wurden. Der Einfluss der stofflichen Unterschiedlichkeit der Prüfstäbe auf das Ergebnis der Ueberprüfung der neuen Knicktheorie käme aber vollständig in Fortfall, wenn man, unter Ausschaltung der Druckversuche, das unmittelbare Ueberprüfungsverfahren anwenden, d. h. die Werte der in die Gleichung (2) eingehenden Grössen ε_K und λ_K an Probestäben verschiedenen Schlankheitsgrades unmittelbar durch Messung bestimmen würde. Eine unmittelbare Ueberprüfung der durch die Gleichung (2) ausgedrückten Knickbedingung an Hand der vorhandenen Versuchsergebnisse ist indessen z. Zt. nicht durchführbar, weil die bisherigen genaueren Versuche durchgängig auf den von Engesser und v. Kármán gegebenen Grundlagen aufgebaut waren und in den Berichten über diese Versuche, infolge deren Einstellung, die zur unmittelbaren Ueberprüfung der Gleichung (2) erforderlichen Zahlenangaben leider nicht zu finden sind[2].

1. Siehe Fussnote 5, Seite 73.
2. Umfangreiche, auf die unmittelbare Ueberprüfung der Gleichung (2) abzielenden Versuche dürften im nächsten Jahre zum Abschlusse gelangen.

In den Abbildungen 9, 10 und 11 ist schliesslich gezeigt worden, dass bei gegebenem Druckstauchungsdiagramm, Abb. 10, die Knickspannungs-Schlankheitslinie, Abb. 11, ohne jede Rechnung aus dem letzterwähnten Diagramm auf Grund der Gleichung (2 a) abgeleitet werden kann, sofern nur die durch

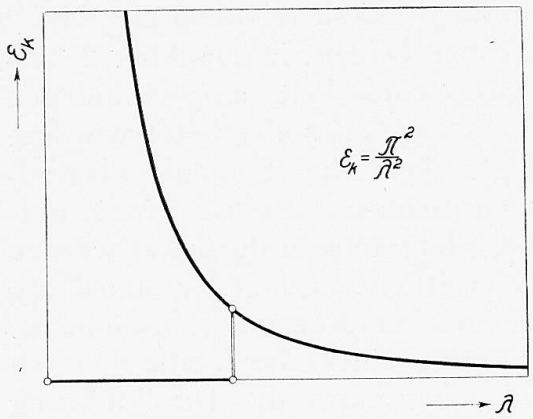

Fig. 9.

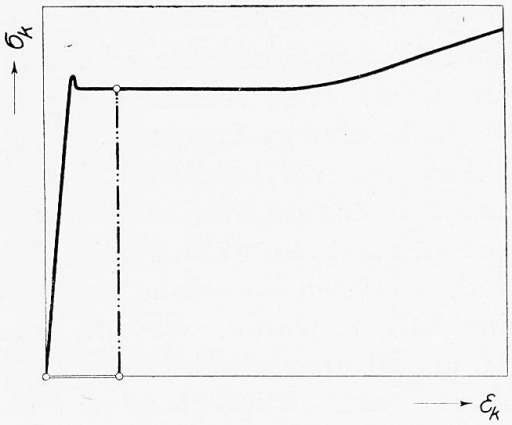

Fig. 10.

diese Gleichung bestimmte funktionale Abhängigkeit in graphischer masstäblicher Darstellung, Abb. 9 gegeben vorliegt.

5. — Für die Anwendung einer Knicktheorie ist die Kenntnis mehrerer Schlankheitsgrad-Knickspannungscharakteristiken erforderlich, die aus den Druckstauchungsdiagrammen der in Betracht kommenden Baustoffe abzuleiten sind. Es ist dabei einleuchtend, dass für einen Ingenieur, der eine in bestimmter Weise (z. B. statisch) belastete Konstruktion zu berechnen hat, die letzterwähnten Charakteristiken von einem recht problematischen Wert wären, wenn

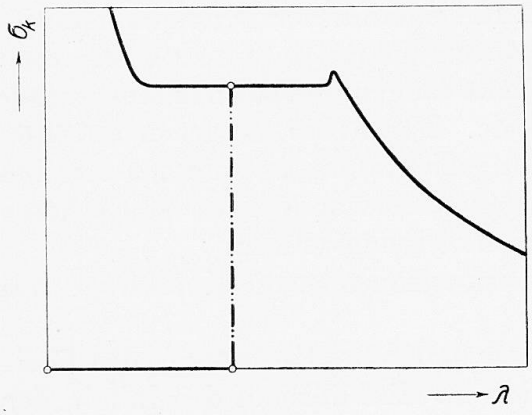

Fig. 11.

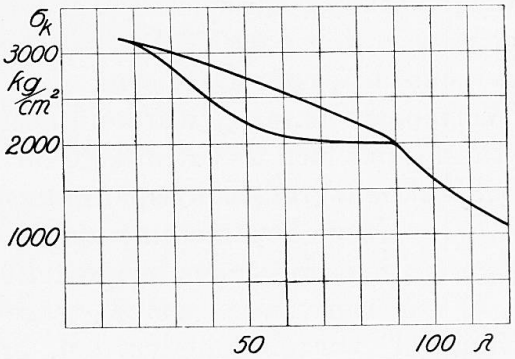

Fig. 12.

man dieselben, der bisherigen Gepflogenheit folgend, aus mit der üblichen, verhältnismässig grossen Belastungsgeschwindigkeit aufgenommenen Druckstauchungsdiagrammen ableiten würde. Denn der geometrische Verlauf des Druckstauchungsdiagramms, und daher auch der aus ihm abgeleiteten Schlankheitsgrad-Knickspannungscharakteristik hängt in hohem Grade von dem zeitlichen Verlauf der Lastaufbringung beim einschlägigen Druckversuch ab. Und zwar äussert sich der Einfluss der Zeit bei den üblichen Druckversuchen

in der Weise, dass den kleineren Belastungsgeschwindigkeiten tiefer verlaufende Druckstauchungsdiagramme entsprechen. Den tiefer verlaufenden Druckstauchungsdiagrammen sind aber tiefer verlaufende Schlankheitsgrad-Knickspannungscharakteristiken zugeordnet. Dass der Einfluss der Zeit auf den Verlauf der letzteren recht erheblich sein kann, ist aus der Abb. 12 ersichtlich, in welcher zwei Schlankheitsgrad-Knickspannungscharakteristiken abgebildet sind, die auf Grund der Gleichung (2 a) aus den beiden, in der Abb. 2 dargestellten, mit verschiedener Belastungsgeschwindigkeit aufgenommenen Druckstauchungsdiagrammen des gleichen Versuchsstoffes abgeleitet wurden.

Aus den vorstehenden Erörterungen folgt, dass die Schlankheitsgrad-Knickspannungscharakteristiken nur dann den Bedürfnissen der Praxis entsprechen können, wenn sie aus Druckstauchungsdiagrammen abgeleitet worden sind, bei deren Aufnahme ungefähr der gleiche zeitliche Verlauf der Stauchung eingehalten wurde, wie in dem zu berechnenden Konstruktionselement. Daraus ist aber ersichtlich, dass zur Gewinnung eines der letzterwähnten Anforderung entsprechenden Druckstauchungsdiagramms die Durchführung eines normalen Druckversuchs im Allgemeinen selbst dann nicht hinreichen würde, wenn dieser Druckversuch ein Dauerversuch wäre. Um zu einem funktionalen Zusammenhange $\sigma = F(\varepsilon)$ zu gelangen, der sich als Grundlage zur Ableitung einer für die Berechnung der statischen Konstruktionen brauchbaren Schlankheitsgrad-Knickspannungscharakteristik eignen würde, müsste vielmehr für jeden Baustoff eine ganze Reihe von Druckdauerversuchen an Druckstäben von gleichen Abmessungen und aus möglichst gleichartigem Material durchgeführt werden. Jeder dieser Druckstäbe würde dabei einer anderen, mit der normalen Geschwindigkeit aufgebrachten, und in der Folge konstant zu haltenden Dauerbelastung zu unterwerfen sein. Nach versuchsmässiger Ermittelung des zeitlichen Verlaufes der Stauchung während eines genügend langen Zeitintervalls würde dann für jeden dieser Druckstäbe derjenige Wert ε_{max} der spezifischen Verkürzung durch Extrapolation zu bestimmen sein, der sich nach Ablauf einer unbeschränkt langen Belastungsdauer unter der einschlägigen Belastung einstellen würde. Durch die derart ermittelten Wertepaare $(\sigma, \varepsilon_{max})$ wäre ein Druckstauchungsdiagramm besonderer Art bestimmt, das sich als Grundlage zur Ableitung einer einwandfreien « statischen » Schlankheitsgrad-Knickspannungscharakteristik eignen würde.

6. — Unter Bezugnahme auf die Wiener Diskussion über die Knickfrage soll zum Schluss folgendes festgestellt werden :

a) Die Einwände, welche gegen die mathematische Herleitung der Gleichung (1) vorgebracht wurden, erweisen sich im Hinblick auf den Inhalt der Annahmen (III a) und (III b) als unhaltbar.

b) Diese Einwände sind wohl der Ueberzeugung entsprungen, dass die Annahme eines geknickten Verlaufes der Isochrone ein unantastbares Axiom bilde [1].

---

1. Der Glaube an das strenge Zutreffen der v. Kármánschen Grundannahme (III) erscheint umso sonderbarer, als selbst von den Verfechtern der Engesser-v. Kármánschen Theorie der Geraden *b c*, Abb. 1, die Bedeutung einer nur angenäherten Abbildung des unteren Teiles der Spannungsverteilungskurve zugesprochen wird. Denn es ist nicht einzusehen, weshalb diese angenäherte Abbildung eben in der unmittelbaren Umgebung des

c) Das Unzutreffen der v. Kármánschen Grundannahme (III) ist an mehreren Stellen meines Wiener Diskussionsbeitrags mit Nachdruck hervorgehoben worden.

Traduction.

1. — La Publication Préliminaire [1] publiée par le Secrétariat Général de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, à l'occasion du Congrès de Paris, renferme deux Rapports [2] qui traitent d'une manière détaillée de la question du flambage des barres prismatiques sous l'influence d'une charge centrée. Le même sujet a été, comme on le sait, également traité, il y a quatre ans, au cours du Congrès de Vienne. De très notables divergences d'opinion se sont manifestées au cours des discussions et ont été exprimées d'ailleurs dans le Compte Rendu du Congrès de Vienne [3]. Les points de vue exprimés dans ces deux Rapports relativement aux questions litigieuses, traitées à Vienne, devaient ainsi éveiller un intérêt particulier. On devait d'ailleurs d'autant plus s'attendre à une attitude nette par rapport à ces questions, que le Rapporteur de ce problème à Vienne a clos les débats sur la question du flambage par un résumé des résultats de la discussion [4] qu'on ne saurait considérer comme pouvant élucider le problème litigieux. En effet, la démonstration mathématique [5] du Rapporteur sur la théorie de flambage d'Engesser-Kármán [6], qui forme la partie essentielle de ce Résumé, contient, par mégarde évidente, des erreurs de calcul [7] ; elle présente d'ailleurs, en outre, ce caractère particulier que même en éliminant ces erreurs de calcul on arrive à un résultat qui se trouve en opposition directe avec la thèse à confirmer.

Cependant dans la Publication Préliminaire au Congrès de Paris on ne trouve de rectification ni de la démonstration en question, indiscutablement erronée, ni des conclusions que le Rapporteur à Vienne a tirées de cette démonstration. Cette omission, à laquelle s'ajoute la non-considération des plus récents résul-

---

Punktes C die Spannungsverteilung genau darstellen sollte, wie dies in der Engesser-v. Kármánschen Theorie vorausgesetzt wird. (Anm. : Man beachte die in das Figurenmaterial des Roš 'schen Referates eingetragene Bezeichnung : « Cours approximatif de la courbe tension-allongement à la décharge »).

1. Association Internationale des Ponts et Charpentes, Premier Congrès, Paris, 1932, 19-25 mai. Publication Préliminaire.

2. L. Karner, « Stabilität und Festigkeit von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen ». Rapport d'Introduction, Publication Préliminaire, pages 17-39.

M. Roš, « La stabilité des barres comprimées par des forces excentrées ». Publication Préliminaire, pages 57-93.

3. Compte Rendu du 2e Congrès International de Construction des Ponts et Charpentes. Vienne, Julius Springer, éditeur, 1929, pages 282-346.

4. Ib., pages 338-346.

5. Ib., pages 338-340.

6. Th. v. Kármán, « Untersuchungen über Knickfestigkeit ». Mitteil. üb. Forschungsarbeiten a. d. Geb. d. Ingenieurwesens, nº 81, Berlin, 1910.

7. Compte Rendu du 2e Congrès International de Construction des Ponts et Charpentes. Vienne, Julius Springer, éditeur, 1929, page 340, ligne 11 et 17. L'erreur consiste dans l'introduction du module de flambage T_k de Kármán, au lieu du module T d'Engesser, qui est toujours différent du précédent.

tats qu'ont donnés la recherche expérimentale [1] et l'étude théorique [2-3], peut donner une impression erronée. En effet, le Lecteur de la Publication Préliminaire au Congrès de Paris pourrait, en l'état actuel des choses, avoir l'impression que toutes les objections soulevées contre la théorie d'Engesser-Kármán ont été réfutées dans l'exposé du Rapporteur à Vienne [4]. Il semble donc absolument indispensable de revenir encore une fois sur ces objections, d'autant plus qu'il est désirable de les asseoir sur une base plus précise et plus développée [5].

2. — La théorie du flambage d'Engesser-Kármán repose sur trois hypothèses d'ordre physique, et le caractère non défendable de cette théorie résulte nécessairement du fait que l'une de ces hypothèses de base se trouve en contradiction avec les faits d'ordre expérimental les plus certains.

Dans les deux premières hypothèses de base d'Engesser-Kármán, sont exprimées, aussi bien pour le domaine des déformations élastiques, que pour le domaine des déformations plastiques, les conceptions suivantes :

I. — Les sections planes de la barre comprimée non fléchie restent planes après une flexion infiniment faible de cette barre ;

II. — La relation fonctionnelle entre les modifications de longueur spécifiques provoquées dans les fibres élémentaires de la barre par la flexion et les contraintes correspondantes est la même que lors de l'essai de traction-compression pure.

La légitimité de ces hypothèses ne fait aucun doute [6]. Elles ne suffisent toutefois pas à permettre une solution nettement déterminée, car la deuxième hypothèse ne contient aucune indication parfaitement définie en ce qui concerne la forme de la relation fonctionnelle qui existe entre les modifications spécifiques de longueur et les contraintes correspondantes dans la section d'une barre comprimée fléchie. Dans le but d'arriver à une forme nettement déterminée pour cette relation fonctionnelle, Engesser a tout d'abord supposé [7] qu'elle

---

1. W. Rein, « Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle ». Berlin, Julius Springer, éditeur, 1930.

2. M. Broszko, « Ueber die allgemeine Lösung des grundlegenden Knickproblems ». Comptes Rendus du 3e Congrès International de Mécanique Appliquée, Stockholm, 1930, vol. III, pages 51-59.

3. M. Broszko, « Beitrag zur allgemeinen Lösung des Knickproblems ». Mémoires de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, Zurich, 1932, 1er volume, pages 1-8.

4. Convaincu que l'exactitude de la théorie d'Engesser-Kármán était confirmée par la démonstration mathématique ci-dessus apportée, le Professeur F. Hartmann, de Vienne, a tenté récemment de montrer, sur plusieurs exemples, que les résultats des recherches qui se trouvaient en désaccord avec les conceptions de cette théorie étaient ipso facto inexacts (voir Zeit. d. Oesterr. Ing.- u. Arch.-Ver., 84, 1932, page 165). La courte étude de Hartmann permet de se rendre compte d'une manière si nette des idées et des raisonnements d'un protagoniste convaincu de la théorie d'Engesser-Kármán que l'on ne peut qu'en recommander chaudement la lecture complète à tous les Ingénieurs qui s'intéressent au problème du flambage. Remarque faite sur épreuve).

5. Ces objections doivent être d'ailleurs limitées en tenant compte de ce fait que l'exactitude de l'exposé mathématique de la formule du flambage de Kármán ne peut faire l'objet d'aucune contestation.

6. La validité de la première hypothèse, même dans le cas de la déformation plastique, a été démontrée par des voies théoriques, par Grüning et Domke. La deuxième hypothèse est évidente par elle-même.

7. Zeit. d. Hannoverschen Ing.-u. Arch.-Ver., 35, 1889, page 455.

était donnée par l'allure du diagramme de compression-contraction. Sur une objection formulée à ce sujet par Jasinski[1], Engesser substitua à sa troisième hypothèse initiale de base la conception suivante[2] qui fut également adoptée par Kármán.

III. — La forme de la relation fonctionnelle $\sigma = f(\varepsilon)$, qui existe, pendant la flexion de la barre comprimée, entre la contrainte σ se manifestant en un point de la section transversale et le raccourcissement ε spécifique correspondant, est donnée, pour le côté correspondant à la compression par flexion, par la branche *ca* du diagramme de compression-contraction (fig. 1), et pour le côté correspondant à la traction par flexion, par la droite *cb*, qui est parallèle à la partie rectiligne *op* de ce même diagramme. La relation fonctionnelle $\sigma = \Phi(\varepsilon)$, qui exprime la dépendance entre les contraintes σ qui se manifestent simultanément en différents points de la section transversale et les raccourcissements ε spécifiques correspondants est par suite déterminée, à tout moment, par le tracé *bca*.

Par suite de l'introduction de cette conception, le but que se proposaient les promoteurs de la théorie d'Engesser-Kármán[3] était atteint. En effet, la proposition complémentaire III permet d'arriver parfaitement, en liaison avec l'hypothèse de base I, à une détermination sans ambiguïté de la répartition des contraintes. Par contre, Engesser et Kármán ne se sont pas rendu compte que l'introduction de cette conception est incompatible avec l'hypothèse exacte II.

La cause de cette incompatibilité de la proposition III avec l'hypothèse de base II devient très nette si l'on considère les résultats expérimentaux[4] d'Ewing, que représente la figure 2 ; on voit en effet nettement sur cette figure que la forme de la relation fonctionnelle qui existe entre la contrainte et la modification de longueur spécifique d'une barre soumise à une charge axiale dépend, dans une large mesure, de la vitesse de déformation spécifique[5]. Suivant la première hypothèse, cette dernière admet une valeur différente, sur un même plan de la section transversale, pour chaque couche de fibres perpendiculaire au plan de flexion. Par suite, la forme de la relation fonctionnelle $\sigma = f(\varepsilon)$, dans le domaine de la section transversale de la barre fléchie et pour chaque couche de fibres perpendiculaire au plan de flexion, doit être différente, d'après la deuxième hypothèse. Les courbes qui traduisent la relation $\sigma = f(\varepsilon)$ pour différentes couches de fibres doivent donc suivre des parcours différents et leur allure doit subir une modification continue, au passage d'une couche de fibres à la couche voisine, étant donné que la vitesse de déformation varie elle-même d'une manière continue d'une couche à l'autre. Du côté surchargé par flexion, ces courbes (figure 3) passent entre le diagramme *ch* du plan le plus extrême de la zone surchargée et le diagramme

---

1. Schweizerische Bauzeitung, 25, 1895, page 172.
2. Schweizerische Bauzeitung, 26, 1895, page 26.
3. Il faut citer Jasinski, en tout premier lieu, à côté d'Engesser, comme promoteur de la théorie d'Engesser-Kármán.
4. J. A. Ewing, The strength of materials. Cambridge, 1914, p. 42.
5. Au cours des essais d'Ewing, le rapport entre les vitesses de déformation spécifiques moyennes était de 1/5000.

cd de la région neutre, c'est-à-dire de la couche de fibres sur lequel la variation de charge au cours de la déformation de la barre se produit suivant une vitesse nulle. Les courbes qui correspondent aux couches de fibres qui se trouvent du côté souschargé par flexion (fig. 4), passent par contre entre le diagramme *cd* des fibres neutres et le diagramme constitué par la branche tombante *cf* d'un cycle d'hystérésis et qui correspond à la couche de fibres extrêmes du côté convexe de la barre. L'ensemble des courbes correspondantes aux différentes couches de fibres constitue par suite une famille de courbes différentes les unes des autres, en nombre infini et qui remplissent d'une manière continue l'espace délimité par les lignes *ch* et *cf* (figures 3 et 4). Cette conclusion déduite des hypothèses I et II est toutefois incompatible avec l'énoncé de la proposition III, car dans cette dernière, il n'est question, pour la relation fonctionnelle $\sigma = f(\varepsilon)$, que de deux formes différentes, l'une d'elles étant applicable au côté comprimé par flexion, l'autre au côté tendu par flexion. Par suite de cette incompatibilité avec l'hypothèse légitime II, il faut donc nécessairement que la proposition III soit inexacte[1]. Il en est naturellement de même en ce qui concerne la théorie du flambage qui a été déduite de l'hypothèse exacte I et de la proposition inexacte III.

3. — Il résulte suffisamment nettement des indications qui précèdent que la forme réelle de la relation fonctionnelle $\sigma = \Phi(\varepsilon)$, qui existe entre les contraintes σ qui se manifestent simultanément dans la section de la barre comprimée après sa flexion et les contractions ε spécifiques correspondantes, ne peut en aucun cas être identique à la forme déterminée par le tracé *bca* (figure 1). En effet, la courbe qui représente cette relation (et qui, dans ce qui suit, sera désignée sous le nom d' « isochrone ») doit dans tous les cas et à tout moment contenir un point de chaque caractéristique d'augmentation et de diminution de charge (figures 4 et 3) ; en outre, sa forme doit varier avec le temps.

La relation $\sigma = \Phi(\varepsilon)$ se déduit de l'expression exacte au moyen d'une équation mathématique et il n'est pas possible de représenter exactement sa variation par une courbe analogue au tracé *bca* d'Engesser-Kármán (figure 1). Quoique l'on ne connaisse pas d'une manière exacte l'allure précise de l'isochrone, on peut toutefois déterminer d'après les faits expérimentaux connus les caractéristiques tout à fait générales de cette courbe ([3] page 82). Leur connaissance donne une base suffisante pour résoudre d'une manière générale et sans ambiguïté le problème du flambage. Ces caractéristiques peuvent se résumer dans les deux énoncés suivants :

III a. — Contrairement au tracé *bca* brisé d'Engesser-Kármán (figure 1), l'isochrone n'accuse aucune discontinuité dans sa courbure.

III b. — En conformité avec le tracé *bca* d'Engesser-Kármán, l'allure de l'isochrone est caractérisée par ce fait que les valeurs de la grandeur $\tilde{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ qui correspondent aux différents points de la section transversale au moment

1. L'inexactitude de la proposition III se remarque déjà dans l'allure du tracé *bca*, figure 1, ce tracé accusant au point C un coude invraisemblable, contraire à toute conception de continuité.

du flambage atteignent leur maximum $\tilde{E}_k = \frac{\sigma_k}{\varepsilon_k}$ dans la couche neutre et diminuent lorsque l'on s'éloigne de cette dernière [1].

La condition de flambage déterminée sur la base des hypothèses I, III a et III b dans le cas où les extrémités de la barre comportent un appui mobile [2], valable aussi bien dans le domaine élastique que dans le domaine plastique, est exprimée par l'équation suivante :

$$P_k = \pi^2 \frac{(1 - \varepsilon_k)\, \tilde{E}_k\, J_k}{l_k^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

relation dans laquelle on désigne par :

J_k le plus petit moment d'inertie de la surface de la section transversale au moment du flambage,

l_k la longueur de la barre au même moment.

Cette équation peut être ramenée à la forme plus simple ci-après, en introduisant le degré de finesse λ_k rapporté au moment considéré :

$$\varepsilon_k = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \lambda_k^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Si toutefois la modification des dimensions de la barre sous l'action de la charge de flambage est négligée comme on le fait généralement, les équations qui précèdent prennent alors les formes suivantes :

$$P_k = \pi^2 \frac{\tilde{E}_k\, J}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1a)$$

et :

$$\varepsilon_k = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2a)$$

dans lesquelles l désigne la longueur de la barre non chargée, les valeurs de J et λ correspondant à l'état non chargé de cette barre.

4. — La concordance très satisfaisante entre la courbe théorique des contraintes de flambage déterminée à partir de l'équation (2 a) et les résultats des essais de flambage extrêmement sérieux de Dahlem ([1] page 82) peut être constatée sur la figure 5 ; par contre, les figures 6 et 7 montrent que les courbes des contraintes de flambage déduites de la théorie du flambage d'Engesser-Kármán ([6] page 81) et, plus encore, celles qui avaient été déduites de la théorie initiale du flambage d'Engesser ([2] page 83) sont nettement en discordance avec les résultats expérimentaux mentionnés. La dispersion non négligeable des points expérimentaux introduits dans ces figures, dans un but de contrôle des formules de flambage correspondantes, résulte du fait que des éprouvettes qui sont censées être constituées par le même métal ont des caractéristiques élastiques et platiques qui accusent toujours quelques écarts. On peut remédier dans une certaine mesure à l'influence défavorable des écarts ci-dessus signalés, qui ne vont pas sans nuire à la rigueur du contrôle, en ayant recours, pour ce contrôle de l'allure des courbes théoriques de contraintes de flam-

1. σ_k et ε_k désignent respectivement les valeurs de la contrainte et de la contraction spécifique qui correspondent à la charge de flambage P_k.

2. M. Broszko, « Sur le flambage des barres prismatiques comprimées axialement ». Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 186, 1928, page 1041.

bage, à des valeurs moyennes de contraintes de flambage obtenues au cours de nombreux essais. Le résultat obtenu par un regroupement motivé des points d'origine expérimentale portés sur la figure 5 est mis en évidence, à titre d'exemple, sur la figure 8, dans laquelle on a porté les points moyens de couples de valeurs (λ, σ_k) afin de permettre un contrôle plus précis et plus aisé de la courbe théorique des contraintes de flambage. L'influence des écarts entre les caractéristiques des matériaux constituant les différentes éprouvettes d'essai, sur le résultat de ce contrôle de la nouvelle théorie du flambage, serait toutefois complètement éliminée en ayant recours non plus aux essais de compression, mais à la méthode directe de contrôle, c'est-à-dire en déterminant par la mesure directe les valeurs des grandeurs ε_k et λ_k dans l'équation (2) sur des éprouvettes accusant différents degrés de finesse. Le contrôle direct de la condition de flambage exprimée par l'équation (2), par les résultats des essais dont on dispose actuellement, n'est toutefois pas possible, car les essais précis qui ont été effectués jusqu'à maintenant ont été basés sur les principes établis par Engesser et Kármán et l'on ne peut, par suite, pas trouver, dans les compte rendus de ces essais, les indications numériques qui seraient précisément nécessaires pour le contrôle direct de l'équation (2)[1].

Les figures 9, 10 et 11 montrent enfin que pour un diagramme de compression-contraction donné, figure 10, la courbe degré de finesse-contrainte de flambage, figure 11, peut être déduite sans aucun calcul de ce dernier diagramme, en se basant sur l'équation (2a), à condition de disposer d'une représentation graphique, à l'échelle, de la relation fonctionnelle déterminée par cette équation (figure 9).

5. — L'application d'une théorie du flambage nécessite la connaissance de plusieurs caractéristiques degré de finesse-contrainte de flambage, ces caractéristiques devant être déduites du diagramme de compression-contraction des matériaux envisagés. Il est par suite évident que pour un ingénieur qui a à calculer un ouvrage ayant à supporter une charge déterminée (statique par exemple), ces caractéristiques seraient d'une valeur tout à fait problématique si on les déduisait, suivant l'habitude antérieure, des diagrammes de compression-contraction relevés avec des vitesses de mise en charge ordinaires, qui sont relativement très fortes. En effet, le parcours géométrique du diagramme de compression-contraction et par suite également celui de la caractéristique finesse-contrainte de flambage qui en est déduite, dépendent, dans une large mesure, de l'allure dans le temps de la mise en charge au cours des essais de compression correspondants. Et en fait, l'influence du temps dans les essais de compression courants se manifeste dans ce sens, que pour de plus faibles vitesses de mise en charge, les diagrammes de compression-contraction descendent plus bas. Aux diagrammes inférieurs de compression-contraction correspondent pourtant les diagrammes inférieurs de la contrainte de flambage en fonction du degré de finesse. La figure 12 montre que l'influence du temps sur l'allure de ces derniers diagrammes peut être notable ; cette figure représente deux caractéristiques degré de finesse-contrainte de flambage qui

1. Des essais très étendus, ayant pour but la vérification directe de l'équation (2), doivent se terminer l'année prochaine.

ont été déterminées, d'après l'équation (2 a), et pour le même matériau d'épreuve, à partir des deux diagrammes compression-contraction qui sont représentés sur la figure 2 et qui ont été relevés avec des vitesses de mise en charge différentes.

Des considérations qui précèdent, il résulte que les caractéristiques degré de finesse-contrainte de flambage ne peuvent répondre aux nécessités de la pratique que si elles sont déduites de diagrammes de compression-contraction qui ont été relevés à peu près avec les mêmes vitesses de contraction que celles avec lesquelles il faut compter lorsqu'il s'agit d'éléments de construction effectifs. Il est clair, par suite, que pour obtenir un diagramme de compression-contraction répondant à cette dernière exigence, il ne suffirait pas d'un diagramme de compression normal, même si l'essai de compression consistait en un essai de durée. Pour aboutir à une relation fonctionnelle $\sigma = f(\varepsilon)$ qui soit susceptible de servir de point de départ pour l'obtention d'une caractéristique degré de finesse-contrainte de flambage qui soit elle-même utilisable pour le calcul statique d'un ouvrage, il est nécessaire de procéder, pour chaque matériau, à toute une série d'essais de compression de durée, sur des éprouvettes de mêmes dimensions, constitués avec un métal accusant des caractéristiques aussi uniformes que possible. Chacune de ces éprouvettes devrait être soumise à une charge permanente, appliquée à la vitesse normale puis maintenue constante. Après détermination expérimentale de l'allure de la variation de la contraction en fonction du temps, pendant un temps suffisamment long, il y aurait alors lieu de déterminer, pour chacune de ces éprouvettes, la valeur correspondante de ε_{max} de la contraction spécifique obtenue par extrapolation pour une durée d'application indéfinie de la charge correspondante. Au moyen des couples de valeurs $(\sigma, \varepsilon_{max})$ ainsi déterminés, on obtiendrait un diagramme de compression-contraction particulier qui serait susceptible de servir de point de départ à la détermination d'une caractéristique « statique » parfaite degré de finesse-contrainte de flambage.

6. — En ce qui concerne la discussion de Vienne au sujet de la question du flambage, on en arrive en résumé aux conclusions suivantes :

a. — Les objections qui ont été faites à la déduction mathématique de l'équation (1) se montrent insoutenables, du point de vue des hypothèses III a et III b.

b. — Ces objections sont nées de la conviction que le tracé brisé de l'isochrone constituait un dogme intangible [1].

c. — L'inexactitude de l'hypothèse de base de Kármán a été mise très nettement en évidence à plusieurs reprises au cours de ma contribution à la discussion de Vienne.

---

1. Le crédit accordé à la validité de l'hypothèse III de Kármán paraît d'autant plus surprenant que les protagonistes de la théorie d'Engesser-Kármán eux-mêmes n'accordent à la droite *bc*, figure 1, que la valeur d'une représentation approchée de la partie inférieure de la courbe de répartition des efforts. Il est de fait que l'on ne voit pas pourquoi cette représentation approchée pourrait représenter la répartition des efforts avec exactitude uniquement aux environs du point c, ainsi que le suppose la théorie d'Engesser-Kármán. (Noter à ce sujet l'indication introduite sur les diagrammes dans le Rapport du Professeur Roš : « Cours approximatif de la courbe tension-allongement à la décharge »).

Dr. G. SPIEGEL,
Wien-Prag.

1. — Die verschiedenen Auffassungen in der Stabilitätsuntersuchung zentrisch belasteter Bauteile legen den Versuch einer prinzipiellen Klärung dringend nahe. Die Schwierigkeit liegt in der Verwickeltheit des Problems im unelastischen Bereich. Den Bauingenieur interessiert jedoch letzten Endes nicht der genaue Verlauf der Knickspannungen um dessen selbst willen, sondern nur als Grundlage zur Ermittlung einer gleichmässigen Sicherheit gegen Knickgefahr. Dass dieser Gesichtspunkt bisher nicht genügend beachtet wurde und die Einheitlichkeit der Behandlung damit verloren gegangen ist, hat seinen besonderen Grund darin, dass die im allgemeinen grundverschiedenen Werte für die theoretisch genaue Knicklast (im erweiterten Sinne) einerseits und den dieser Last unendlich benachbarten Lastangriff andrerseits in den am weitesten ausgebauten Stabilitätsproblemen der Elastizitätstheorie infolge der Unveränderlichkeit des E-Moduls mit dem Eulerfall der betreffenden Stabschlankheit zusammenfallen.

2. — Theoretisch ist der Fall der zentrischen Knickung durch die Berechnungsformeln von Euler und Engesser-Kármán im elastischen bzw. unelastischen Bereich in einwandfreier Weise gegeben. Handelt es sich aber in der Untersuchung auf Knickung um den konkreten Fall der Wirklichkeit, dann darf wegen der ausserordentlichen Empfindlichkeit bei Labilitätserscheinungen gegen die geringsten, praktisch kaum zu vermeidenden störenden Einflüsse die zentrische Knickung (im strengsten Sinne des Wortes), bei welcher es sich lediglich um die Untersuchung der möglichen Gleichgewichtslagen handelt, nicht in den Mittelpunkt der Betrachtung gestellt werden, wie dies gewöhnlich geschieht. Denn diese ist nur ein (rein geometrischer, nicht technisch-physikalischer) Sonderfall des viel weiter gefassten Begriffes der « ideellen » Knickbelastung.

Bei schlanken Stäben ($\sigma_K < \sigma_P$) ist die kritische Last auf alle Fälle durch die Eulerlast ($K = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$ bzw. $\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$) gegeben, welche — wie Zimmermann[1] eingehend nachgewiesen hat — auch bei schwacher Anfangskrümmung immer erreicht wird, wenn die Last an entsprechenden Fehlerhebeln (« ideelle » Belastung) angreift. Erfolgt aber der Uebergang in den labilen Zustand im unelastischen Bereich, dann muss erst die Grösse der Höchstlast gesucht werden, die ein wirklicher, d. h. im Sinne der neueren Knicktheorie « möglichst » gerader Stab ertragen kann.

Vom baustatischen Standpunkte ist aber auch die beim Stabilitätswechsel durch eine ausgesprochene Unstetigkeitsstelle gekennzeichnete ideelle Knickbelastung selbst (Fig. 1) als eine praktisch kaum zu erreichende Grenzlage noch auseinanderzuhalten von der unendlich benachbarten Gleich-

1. Sitzungsberichte d. preuss. Akad. d. Wissensch. phys. math. Klasse 1923, H. XXIII u. XXV ; ferner : « Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage », Berlin, 1930, W. Verlag, Ernst u. Sohn.

gewichtslinie mit einem noch allmählichen Uebergang in den labilen Zustand; diese erscheint zur Beurteilung eines zentrisch gedrückten Bauteiles massgebender und muss deshalb den weiteren Untersuchungen zugrunde gelegt werden.

Von der Richtigkeit dieses Sachverhaltes kann schon eine einfache Rechnung auf Grund der bestehenden Formeln für den vollkommen geraden und gleichbeschaffenen Stab Aufschluss geben. Bei einer unendlich kleinen Abweichung vom zentrischen Lastangriff gilt für die kritische Last der ursprüngliche Engessersche Modul vom J. 1889 : $T = E'_n = \left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_n$, und dieser ist wesentlich geringer als der Knickmodul für rein zentrische Belastung. Z. B. ergibt sich für den rechteckigen Querschnitt bei $E' = 0,6$ und gleichem λ schon eine über 20 % ige Verringerung des letzteren.

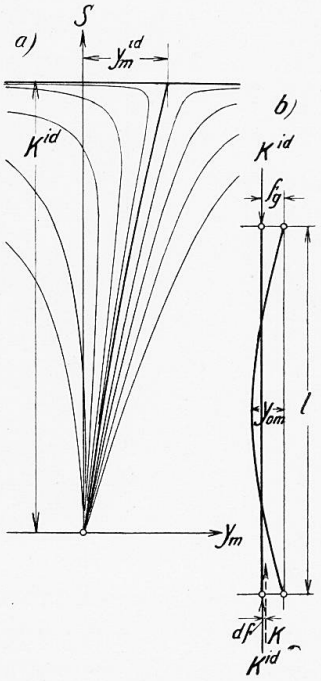

Fig. 1.

3. — Diese ausserordentliche, namentlich im unelastischen Bereich sich geltend machende Empfindlichkeit wird sich in der Grösse der Knicklasten dahin auswirken, dass im Sinne der von Zimmermann erstmalig in exakter Weise formulierten Aufgabe (Nr. 2) der durch seitliche Ausbiegungen und damit verbundenen zusätzlichen Biegungsspannungen allmählich sich vorbereitende kritische Zustand wesentlich durch die allmähliche Abnahme des veränderlichen E' — Moduls bedingt ist. Für die ideelle Knicklast ist demnach nicht nur die unmittelbare Umgebung von σ_K sondern der gesamte Verlauf der σ-ε Linie bis zu dieser Grenze von Einfluss.

Unter Zugrundelegung einer der vollkommenen Geradheit nahekommenden Systemlinie des Stabes und unter Berücksichtigung der in gemeinsamer Wirkung erfolgenden Zusammendrückung und Verbiegung ergibt sich in der allg. Gl. $\sigma_K = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2}$ in dem nach Nr. 2 für uns in Betracht kommenden Belastungsfall der Modul

$$T = E'_n + \frac{\nu}{\varepsilon_n} \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{2} (\varepsilon_r + \varepsilon_{r+1}) \; (E'_r - E'_{r+1}) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

der auf Grund der abgeleiteten Formänderungslinie (E' — ε — Linie) des betreffenden Werkstoffes zu berechnen ist. (Fig. 2) ν ist ein mit ε_r veränderlicher Beiwert.

Durch Uebergang zum Integral folgt aus 1) die unmittelbare Berechnung der Knickschlankheiten λ_K und der dazu gehörigen σ_K -Werte mittels der einfachen Beziehung :

$$\lambda_K = \varkappa_K \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_K}}$$

Der Beiwert $\varkappa$ ist aus der im allgemeinen ohne Schwierigkeit analytisch

annäherungsweise bis nahe zur oberen Fliessgrenze festlegbaren E'-Linie in einfacher Weise zu bestimmen [1].

Der weitere Verlauf von σ_K, namentlich im Bereich der kürzeren Schlankheiten hat vorwiegend theoretisches Interesse und ist nur auf Grund hypothetischer Annahmen zu ermitteln.

4. — Die praktische Bedeutung der hier gestreiften Fragen liegt in der Erfassung und Bemessung des Sicherheitsgrades gegen Knicken auf rationeller Grundlage. Auch hierin bestehen noch vielfach irrige Vorstellungen, so dass diese Frage eine nähere Erörterung angezeigt macht. Beim Knicken selbst handelt es sich um eine Labilitätserscheinung, bei der Bemessung jedoch um

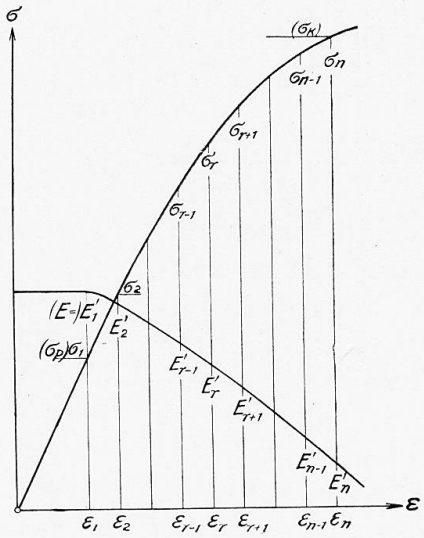

Fig. 2.

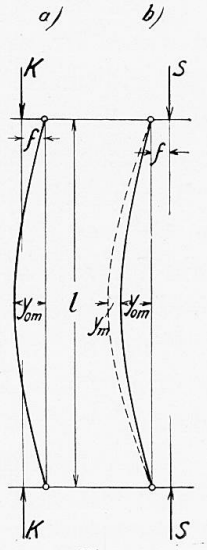

Fig. 3.

eine Inanspruchnahme auf Druck und Biegung [2]. Soweit die Aufgabe einer exakten Fassung zugänglich ist, gibt die erweiterte Knicktheorie die Anhaltspunkte zu ihrer vollständigen Behandlung, die in der Hauptsache folgendermassen liegt : Bei einem zentrisch belasteten Bauteil ist der günstigste Fall durch die in Nr. 2 näher definierte massgebende Last K mit der kritischen Spannung gegeben (Fig. 3 a). Vom praktisch erreichbaren Standpunkt wird aber auch die dadurch erhaltene σ_K-Linie mit der Annäherung an den Fliessbereich noch eine entsprechende Abrückung erfahren, wobei als massgebende Grenzlage für den Bereich der mittleren und kürzeren Schlankheiten die obere Fliessgrenze anzunehmen ist. Der ungünstigste Belastungsfall ist durch eine Verschiebung des Fehlerhebels f (Fig. 3 b) gekennzeichnet. wobei f und y_{om} entsprechend einzuschätzen sind, etwa am einfachsten in der linearen Abhängigkeit $f = \gamma . h$ und $y_{om} = \beta . l$. Diese Belastung ergibt für eine bestimmte Laststufe S als höchste Randspannung σ_{max}. Der Sicherheitsgrad ist dann gegeben durch $n = \frac{K}{S}$.

1. Die nähere Begründung dieser Rechnungsergebnisse soll in einem demnächst erscheinenden Aufsatz nachfolgen. Desgl. auch in einer anderen Arbeit der im folgenden nur angedeutete Weg zur Ermittlung der Knicksicherheit.

2. Vgl. hiezu auch die Ausführungen von M. T. Huber, Warschau : Bericht der II. Brückenbautagung, Wien, 1928, S. 310 ff. Wien, 1930 : J. Springer.

Die Berechnung im besonderen geht von der durch Zimmermann[1] (Seite 88) um den Einfluss des Biegungspfeils y_{om} ergänzten Durchbiegungsgl. $y_m = \varphi\,(f, y_{om})$ der Stabilitätstheorie aus, die mit Rücksicht darauf, dass σ_{max} noch im elastischen Bereich liegen muss, auch im Falle der unelastischen Knickung anwendbar ist. Mit Hilfe der obigen Ansätze für f und y_m und der Momentengl. $M_{max} = S.\,(f + y_{om} + y_m)$ gewinnt man eine allgemeine Beziehung zwischen λ und n von der Form :

$$n^2 - 2pn - \varkappa q$$

Welche die unmittelbare und bequeme Berechnung von n für jede Stabschlankheit ermöglicht.

Durch vergleichende Gegenüberstellung der Ergebnisse für verschiedene Stabquerschnittsformen und ursprüngliche Stabmittellinien kann der richtige Mittelwert von n festgelegt werden, wobei noch ein prozentualer Zuschlag für rechnerisch nicht erfassbare Einflüsse zu berücksichtigen ist.

5. — Mehr als auf irgend einem anderen Gebiete hat sich in der Knicktheorie die vielfach gewonnene Erfahrung bestätigt, dass die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen der Wirklichkeit auf deduktivem oder spekulativem Wege allein nicht geklärt werden kann. Es mag uns heute selbstverständlich erscheinen, dass die Euler-Formel vom J. 1744 nur so lange zutreffen kann, als die ihr zugrunde liegenden Voraussetzungen (konstanter E-Modul) erfüllt sind, und doch waren es erst die bahnbrechenden Versuche Tetmajers, welche der bereits überhaupt in Abrede gestellten Formel die Grenze ihres Geltungsbereichs zuwiesen. Auf der nun endgültig geschaffenen Grundlage fanden die Arbeiten Engessers[1] ihre weitere Ergänzung durch die späteren Versuche Kármáns[2], die wieder eine Reihe theoretischer Erkenntnisse zeitigten, aber auch deren Mängel und die Notwendigkeit ihrer Weiterbildung erkennen liessen. Dies ergab sich einerseits in einer Erweiterung dieser Versuche auf die Fälle exzentrischen Lastangriffs durch die Schweizer Versuche[3], die ausser den unmittelbaren Ergebnissen noch als weitere Frucht das « T.-K.-V.-S.-B.-Verfahren » von Roš und Brunner zur Bemessung exzentrisch gedrückter Stäbe brachten. Es fussen aber auch überdies darauf die grundlegenden Untersuchungen von E. Chwalla[4], die zum ersten Male das Gleichgewichtsproblem gedrückter Stäbe aus Baustahl in seinem Zusammenhang erfassten. Anderseits stellte sich aber auch die Notwendigkeit heraus, die Versuche Kármáns, namentlich in Anbetracht der grösseren Streuungen ausserhalb des Eulerbereichs zu vervollkommnen, um über den genaueren Verlauf der Knickspannungen in diesem, gerade für die Baupraxis so wichtigen Gebiet Klarheit zu erlangen. Hier setzten die Versuche des Deutschen Stahlbau-Ver-

---

1. Zeitschrift d. hann. Arch. u. Ing. Verein 1889, S. 455; Schweiz. Bauztg, 1895, S. 24
2. Untersuchungen über Knickfestigkeit, Forschungsheft 81 des V.D.I. Berlin, 1910.
3. M. Roš und J. Brunner : Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl. Bericht Nr. 13 d. Eidg. Materialprüfungsanstalt Zürich, 1926.
4. Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Sitzungsberichte d. Akad. d. Wissensch. math. naturw. Klasse, S. 469 ff., Wien, 1928.

bandes (W. Rein)[1] ein, und in den höher als bei Kármán erreichten Knicklasten war auch der Anstoss zur weiteren Klärung des Knickproblems gewiesen. Die richtige Deutung des Beobachtungsmaterials ergab die erweiterte Knicktheorie Zimmermanns[1] (Seite 88) und als deren weitere Folge die in der vorliegenden Abhandlung angeschnittenen Fragen in ihrer Anwendung im unelastischen Bereich.

Man ersieht, dass es immer der richtig eingeleitete Versuch ist, der gleichzeitig auch berufen ist, neues Licht in unsere theoretischen Erkenntnisse zu bringen, und so dürften auch die letztgenannten Versuche[1] zum weiteren Ausbau der Knicktheorie in einer Weise beitragen, wie es auf anderem Wege kaum möglich wäre.

Traduction.

1. — Les différentes interprétations auxquelles donnent lieu les recherches concernant la stabilité conduisent à la nécessité impérieuse de tenter une mise au point de principe. La difficulté de la question réside dans la complexité que prend le problème dans le domaine plastique. En fin de compte, l'ingénieur chargé d'une construction ne se préoccupe pas de l'allure de la variation des contraintes de flambage, en elles-mêmes, mais uniquement à titre de point de départ pour la détermination d'un degré de sécurité uniforme contre les risques de flambage. Cette manière de voir n'a pas été suffisamment prise en considération jusqu'à maintenant et il en est résulté une certaine divergence dans les conceptions. La raison en est tout particulièrement que les valeurs foncièrement différentes, en général, pour la charge de flambage théorique exacte (dans son sens large), d'une part, et pour les contraintes pratiques infiniment voisines de cette charge, d'autre part, arrivent à coïncider dans les problèmes de stabilité les plus étendus que pose la théorie de l'élasticité, par suite du caractère invariable du module E suivant Euler pour le degré de finesse considéré.

2. — Théoriquement, la question du flambage sous l'action des charges axiales se trouve traitée d'une manière parfaite, dans les domaines élastique et plastique, avec les formules d'Euler et d'Engesser. Lorsqu'il s'agit toutefois d'étudier le flambage dans un cas concret correspondant à la réalité, et étant donnée l'extrême sensibilité des phénomènes d'instabilité vis-à-vis des influences perturbatrices les plus faibles, qu'il est d'ailleurs presqu'impossible d'éviter dans la pratique, il ne faut pas considérer le flambage axial (au sens le plus rigoureux de terme), dans l'étude duquel on n'envisage que la recherche des positions d'équilibre possibles, comme constituant le cœur de la question, ainsi qu'on le fait couramment. Il ne constitue en effet qu'un cas particulier (purement géométrique et non pas physique) de la question beaucoup plus large que pose la notion de la charge de flambage dans son sens intégral (idéal).

---

1. Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für versch. Baustähle, Ausg. B H. 4 d. Berichte d. Ausschusses f. Versuche im Stahlbau. Berlin, 1930, J. Springer.

Pour les barres de finesse élevée ($\sigma_K < \sigma_P$), la charge critique correspond, dans tous les cas, à la charge d'Euler

$$K = \frac{\pi^2 E I}{l^2} \quad \text{ou} \quad \sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

qui, ainsi que Zimmermann[1] l'a montré d'une manière très appronfondie, se trouve toujours atteinte, même en cas de faibles courbures initiales, lorsque la charge est appliquée avec intervention du bras de levier correspondant (charge de flambage dans son sens intégral). S'il en résulte toutefois un passage à l'état d'instabilité dans le domaine plastique, il faut alors chercher la valeur de la charge maximum que peut supporter une barre réelle, c'est-à-dire « aussi rectiligne que possible », dans l'esprit de la nouvelle théorie du flambage.

Du point de vue de la statique de la construction, cependant, la charge idéale de flambage, caractérisée, pour le changement de stabilité, par une discontinuité très nette, doit elle-même être considérée comme une limite qu'il est pratiquement impossible d'atteindre (figure 1) et doit être distinguée de la ligne d'équilibre infiniment voisine, que caractérise un passage progressif à l'état instable. Cette dernière semble jouer un rôle prépondérant dans la manière dont se comporte un élément de construction soumis à une compression axiale et il importe par suite qu'elle fasse l'objet de recherches ultérieures.

Un calcul simple, basé sur les formules existantes, peut déjà donner quelques indications sur la légitimité de cette manière de voir en ce qui concerne une barre parfaitement rectiligne et de constitution homogène. Lorsque le mode d'application de la charge cesse, à un degré infiniment petit, d'être axial, le module initial d'Engesser (1889) est applicable à la charge critique :

$$T = E'_n = \left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_n$$

ce module est sensiblement plus faible que le module de flambage correspondant à une charge purement axiale. Par exemple, pour un même λ et pour une section rectangulaire telle que $E' = 0,6$ on constate déjà une réduction de plus de 20 %.

3. — Cette sensibilité extrême, qui se fait sentir tout particulièrement dans le domaine plastique, se manifeste, en ce qui concerne la valeur des charges de flambage, dans le sens indiqué pour la première fois, avec exactitude, par Zimmermann (voir 2) : l'état critique qui s'établit progressivement par suite du fléchissement latéral et de l'apparition corrélative de contraintes de flexion additionnelles est largement conditionné par la diminution progressive du module variable E'. En ce qui concerne la charge de flambage idéale, interviennent donc, non seulement le voisinage immédiat de σ_K mais également le parcours tout entier de la courbe σ-ε jusqu'à cette limite.

En se basant, pour la barre, sur une ligne voisine de la rectitude parfaite et

---

1. Rapports de Séance de la Preuss. Akad. d. Wissensch. phys. math. Klasse 1923, fasc. XXIII et XXV ; en outre « Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage », Berlin, 1930, Verlag W. Ernst u. Sohn, éditeur.

en faisant intervenir la compression et la flexion combinées, qui se traduisent par une action d'ensemble, on obtient, pour le module T de l'équation générale

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2}$$

dans le cas de charge correspondant au n° 2 ci-dessus, qui nous occupe :

$$T = E'_n + \frac{\nu}{\varepsilon_n} \sum_{n}^{n-1} \frac{1}{2} (\varepsilon_r + \varepsilon_{r+1}) (E'_r - E'_{r+1}) \qquad (1)$$

qui doit être déterminé sur la base de la courbe de déformation (E'-ε) du matériau correspondant (figure 2). ν désigne un coefficient variable avec ε_r.

En passant à l'intégrale, on peut calculer directement à partir de l'équation (1) les degrés de finesse de flambage λ_K et les valeurs correspondantes de σ_K au moyen de la relation simple :

$$\lambda_K = \varkappa_K \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_K}}$$

Le coefficient $\varkappa$ peut être déterminé d'une manière simple à partir de la courbe de E', courbe qui peut être tracée analytiquement et généralement sans difficulté, d'une manière suffisamment approximative, jusqu'au voisinage de la limite supérieure d'écoulement [1].

L'allure ultérieure de σ_K en particulier dans la zone des plus petits degrés de finesse, présente surtout intérêt du point de vue théorique et ne peut être déterminée que sur la base de données hypothétiques.

4. — Les questions qui viennent d'être exposées trouvent toute leur importance pratique dans l'étude et la détermination, sur des bases rationnelles, du degré de sécurité contre le flambage. Dans cet ordre d'idées également, on se trouve encore fréquemment en face de conceptions erronées ; il n'est donc pas inutile d'entrer dans le vif du sujet. Dans le flambage lui-même, il s'agit d'une question d'instabilité, tandis que le calcul des pièces proprement dit pose une question de contrainte à la compression et à la flexion [2]. Pour autant que la question du flambage elle-même soit accessible à une conception exacte, la théorie du flambage élargie constitue un point d'appui pour son étude complète, sur la base suivante : Dans un élément de construction soumis à une charge axiale, le cas le plus favorable correspond à une charge K, telle qu'elle est définie dans le n° 2 ci-dessus et correspondant à la contrainte critique (fig. 3 *a*). Du point de vue pratique, toutefois, la courbe de σ_K ainsi obtenue subit encore un certain décalage, par suite de l'approximation sur la limite d'écoulement ; il en résulte qu'il faut adopter comme limite de base, pour la gamme des degrés de finesse moyens et faibles, la limite supérieure d'écoulement. Le cas le plus défavorable est caractérisé par une déformation du bras

1. Une justification plus détaillée de ces calculs sera publiée dans une prochaine étude. La sécurité au flambage, dont la détermination n'est qu'indiquée dans ce qui suit, fera également l'objet d'un prochain travail.

2. Voir également à ce sujet les conclusions de M. T. Huber, Varsovie : Bericht der II. Brückenbautagung, Vienne, 1928, pages 310 et suivantes, Vienne, 1930, J. Springer, éditeur.

de levier f (figure 3 b), f et y_{om} étant définis parallèlement par une relation linéaire simple telle que :

$$f = \gamma h \qquad\qquad y_{om} = \beta l$$

Pour un degré de charge S déterminé, cette disposition conduit à une contrainte périphérique maximum σ_{max}. Le degré de sécurité est alors donné par la relation :

$$n = \frac{K}{S}$$

Le calcul se fait, en particulier, à partir de l'équation du fléchissement $y_m = \varphi\,(f, y_{om})$ de la théorie de la stabilité, équation complétée par Zimmermann [1] (page 93) pour tenir compte de l'influence de la flèche y_{om}, et que l'on emploiera en tenant compte de ce que σ_{max} doit se trouver encore dans le domaine élastique, même dans le cas de flambage inélastique. A l'aide des relations précédentes concernant f et y_m et de l'équation des moments :

$$M_{max} = S\,(f + y_{om} + y_m)$$

on obtient une relation entre λ et n. On arrive ainsi à une équation ayant la forme générale suivante :

$$n^2 - 2pn = \varkappa q$$

En comparant les résultats obtenus pour différentes formes de section de la barre et pour différentes positions de la fibre moyenne, on peut déterminer la valeur moyenne exacte de n ; il faut en outre tenir compte d'une certaine marge en pourcent correspondant aux influences dans lesquelles il n'est pas possible de faire intervenir le calcul.

5. — La multiplicité des phénomènes qui se présentent dans la réalité effective ne peut pas être expliquée uniquement par des moyens déductifs ou spéculatifs purs ; c'est là un fait d'expérience fréquente que l'on constate d'ailleurs encore plus nettement qu'ailleurs dans le domaine du flambage. Il peut nous paraître parfaitement naturel aujourd'hui que la formule d'Euler, qui date de 1744, ne puisse se trouver justifiée que lorsque les hypothèses sur lesquelles elle est basée sont effectivement remplies (constance du module E) ; et cependant ce n'est qu'à la suite des essais de Tetmajer que cette formule, déjà généralement contestée, put recevoir une limite de validité effective. Sur cette base définitivement acquise, Engesser [1] publia ses travaux, qui furent complétés ultérieurement par Kármán [2] ; les travaux de Kárman, d'ailleurs, tout en élargissant largement le champ de nos connaissances théoriques, étaient encore insuffisants, la nécessité d'un développement ultérieur se faisant nettement sentir. A cette nécessité, répondirent les travaux suisses [3] concernant les charges excentrées, ces derniers travaux aboutissant, outre les résultats directs qu'ils purent fournir, à la méthode du T. K. V. S. B., de Roš et Brunner, pour le calcul des barres soumises à des charges excentrées. Sur ces

1. Zeitschrift d. hann. Arch. u. Ing. Verein 1889, page 455, Schweiz. Bauztg., 1895, page 24.
2. Untersuchungen über Knickfestigkeit, Forschungsheft n° 81 du V. D. I., Berlin, 1910.
3. M. Roš et J. Brunner, Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl, Rapport n° 13, Laboratoire Fédéral d'Essai des Matériaux, Zurich, 1926.

recherches, se greffèrent également les travaux de base d'E. Chwalla [1] qui aborda, pour la première fois, dans son ensemble, le problème de l'équilibre des barres comprimées en acier de construction. Par ailleurs, la nécessité se fit sentir de pousser les essais de Kármán, particulièrement en ce qui concerne les grandes divergences constatées en dehors du domaine d'Euler, afin d'obtenir des données plus précises sur l'allure des contraintes de flambage dans cette région, qui présente une telle importance pour la pratique. C'est ici que viennent se placer les essais effectués par le Deutscher Stahlbau-Verband (W. Rein) [2], les efforts pour arriver à une meilleure compréhension du problème du flambage portant même sur des charges de flambage plus élevées que celles qu'avait atteintes Kármán. L'importance du rôle que joue le matériau soumis à l'observation conduisit Zimmermann à publier sa théorie développée du flambage [1] (v. p. 93), puis à pousser l'étude des questions abordées par cette étude dans le domaine plastique.

On voit que les essais judicieusement entrepris nous permettent toujours de développer nos connaissances dans le domaine théorique et c'est ainsi que les dernières séries de travaux expérimentaux que nous venons de citer [2] doivent contribuer eux aussi à faire progresser la théorie du flambage dans des conditions qu'il aurait été à peine possible de réaliser différemment.

Zusammenfassung.

Auf Grund der Versuchsergebnisse des Deutschen Stahlbau-Verbandes und der daraus hervorgegangenen erweiterten Knicktheorie Zimmermanns wird die Frage einer prinzipiellen Klärung unserer bisherigen Berechnungsgrundlagen aufgeworfen.

Die gewöhnlich in den Mittelpunkt der Betrachtung gestellte zentrische Knickbelastung (Euler und Engesser-Kármán) ist nur ein Sonderfall des weiter gefassten Begriffes der « ideellen » Knickbelastung ; die der letzteren unendlich benachbarte Belastung K mit noch stetigem Uebergang in den labilen Zustand ist massgebend zur Ermittlung einer gleichmässigen Sicherheit und im allgemeinen vom ganzen Verlauf der Arbeitslinie unterhalb σ_K abhängig. Der Sicherheitsgrad $n = \frac{K}{S}$ ist durch die Randspannung σ_{max} infolge der entsprechend einzulegenden Last S bedingt ; $n = f(\lambda)$ kann analytisch festgelegt werden.

Résumé.

L'auteur pose la question d'une justification de principe des bases de calcul adoptées jusqu'à maintenant, justification s'appuyant sur les résultats des essais effectués par le Deutscher Stahlbau-Verband et sur la théorie du flambage telle qu'elle a été étendue par Zimmermann.

1. Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl, Rapports de Séance, Akad. d. Wissensch. math. naturw. Klasse, page 469, Vienne, 1928.

2. Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für versch. Baustähle, Ausg. B H. 4 d. Ausschusses f. Versuche im Stahlbau. Berlin, 1930, J. Springer, éditeur.

La charge de flambage axiale, généralement considérée comme constituant le cœur de la question (Euler et Engesser-Kármán) n'est qu'un cas particulier de la notion plus générale de la charge de flambage idéale; la charge K, infiniment voisine de cette dernière joue, avec le passage encore continu à l'état labile, un rôle capital pour l'obtention d'un degré de sécurité uniforme ; elle dépend, en général, de l'allure de toute la courbe elle-même au-dessous de σ_K. Le degré de sécurité $n = \frac{K}{S}$ est conditionné par les contraintes périphériques σ_{max} résultant de la charge S , la fonction $n = f(\lambda)$ peut être étudiée analytiquement.

Summary.

Based on the results of tests by the German Stahlbau Verband and the extended buckling theory of Zimmermann resulting from them, the question is raised of a clearing-up in principle of the bases hitherto used for our calculations.

The central buckling loading, usually regarded as the most important to be considered (Euler and Engesser-Kármán), is only a special case of the extended conception of the « ideal » buckling loading ; the loading K, infinitely close to the latter, still steadily passing over into the instabile state, is decisive for determining a uniform safety and depends in general on the whole run of the line of work below σ_K . The factor of safety $n = \frac{K}{S}$ conditioned by the stress at the edge, σ_{max}, in consequence of the corresponding load S that has to be applied ; $n = f(\lambda)$ can be found analytically.

Dr. Ing. K. HOOST,

Reg.- und Baurat, Dozent der Technischen Hochschule, Danzig.

In seinem einleitenden Referat über Stabilität und Festigkeit von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen sucht Herr Professor Dr. L. Karner u. a. das sehr schwierige, unelastische Gebiet des Knickvorganges tiefer zu erforschen. Wie er ganz richtig angibt, kann dieser Teil des Knickproblems nur allein auf die Prüfungsergebnisse von Druckversuchen der verschiedenen Materialien aufgebaut werden. Dadurch, dass er die gekrümmte Druckstauchungslinie für Stahl geradlinig verlaufen lässt, ergeben sich mit den für diesen Zweck abgeänderten Querschnittsgrössen F^r und J_s^r sehr einfache Beziehungen für die Spannungsermittlung. Die Flächenwerte werden ohne Schwierigkeiten aus der Beziehung der geraden Druckstauchungslinie zum wirklichen Kurvenverlauf erhalten. Hierbei ergibt sich für die abgeänderte Querschnittsgrösse F^r eine Lage des Schwerpunktes, die um eine Exzentrizität e^r von der normalen Lage entfernt ist. Die statische Stabachse weicht um den Betrag e^r von der geometrischen ab. Eine gleiche Exzentrizität ist bereits in

den Ableitungen zu der exakten Knickgleichung von Krohn in seiner Abhandlung « Knickfestigkeit » enthalten. Er kommt zu folgendem Wert :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{P.k + M}{J.K}$$

Hierin bedeutet ρ den Krümmungshalbmesser P und M die äusseren Kräfte, k die Exzentrizität, welche infolge der variablen Stauchungszahl in jedem Querschnitt verschieden gross auftritt, J das Trägheitsmoment des Querschnittes bezogen auf seine Schwerpunktsachse und K eine mittlere Stauchungszahl.

Nach der Integration der Gleichung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P(k+y)}{J.K}$$

unter der Annahme, dass k und K unveränderlich sind und weiteren Vereinfachungen erhält Krohn folgenden Wert :

$$\frac{\cos\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{D_k}}}{1-\cos\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{D_k}}} = \frac{\sigma_k}{D_k}\left(\frac{dD}{d\sigma}\right)_k$$

Diese Lösung stellt die Knickgleichung für den allgemeinen Fall dar unter Berücksichtigung, dass die Stauchungszahl D mit der Spannung veränderlich ist.

Da die Formänderungs- und Spannungsverhältnisse eines Stabes im mittleren, dem meist gefährdeten Querschnitt fast stets massgebend sind, halte ich es für zulässig, in der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P(k+y)}{J.K}$$

für die beiden Grössen k und K diejenigen Werte einzusetzen, die dem mittleren Querschnitt entsprechen und dann diese Grössen für den ganzen Stab als unveränderlich anzunehmen. Unter Berücksichtigung dieser Annahmen habe ich die allgemeine Knickgleichung auf einem anderen Wege ermittelt. Ein Stab, der in der Entfernung k exzentrisch belastet wird, biegt sich um die Grösse δ aus. Durch Auflösung einer Differentialgleichung und verschiedene Vereinfachungen erhalte ich :

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma}{D}}}\arccos\frac{k}{\delta+k} = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma}{D}}}\arccos\frac{\frac{k}{\delta}}{1+\frac{k}{\delta}}$$

Die exakte Lösung nach Krohn zeigt hingegen folgendes Ergebnis :

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma_k}{D_k}}}\arccos\frac{\frac{\sigma_k}{D_k}\left(\frac{dD}{d\sigma}\right)_k}{1+\frac{\sigma_k}{D_k}\left(\frac{dD}{d\sigma}\right)_k}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist zu folgern :

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{\sigma_k}{D_k}\left(\frac{dD}{d\sigma}\right)_k$$

Setze ich D = E, dem Elastizitätsmodul, so wird $\left(\frac{dD}{d\sigma}\right)_k = 0$ und damit $k = 0$.

Dann ergibt sich arccos $0 = \frac{\pi}{2}$ und $\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}}}$ oder $\sigma = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

Bei konstanter Stauchungszahl D = E oder einem Exzentrizitätsmass $k = 0$ erhält man somit die Euler'sche Gleichung.

Setze ich $\sigma = \frac{P}{F}$ und $\frac{k}{\delta + k} = \gamma$ so wird :

$$P = \frac{4\,D.J}{l^2}\,(\arccos\,\gamma)^2$$

$$= \frac{4\,D.J}{l^2}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma - \frac{1}{6}\,\gamma^3 \ldots\right)^2$$

Das erste Glied dieser Reihenbildung ist die Kármán'sche Formel :

$$P = \frac{\pi^2\,D.J}{l^2}$$

Demnach liefert dieser Näherungsausdruck zu grosse Werte, wie auch ein Vergleich mit den Versuchsergebnissen zeigt.

Bezeichne ich in der Gleichung

$$\sigma = \frac{4\,D}{\lambda^2}\left(\arccos\,\frac{k}{\delta + k}\right)^2$$

den Wert arccos $\frac{k}{\delta + k}$ mit dem Ausdrucke α, so wird die Knickspannung allgemein :

$$\sigma = \frac{4\,D}{\lambda^2}\,\alpha^2$$

Im elastischen Bereich ergibt sich mit $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin\,\frac{k}{\delta + k}$ für $k = 0$ der Wert $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und D dem Stauchungsmass gleich dem Elastizitätsmodul E die Euler'sche Gleichung

$$\sigma_{Euler} = \frac{4\,E}{\lambda^2}\cdot\frac{\pi^2}{4} = \frac{E\,\pi^2}{\lambda^2} = \sigma_E$$

Nehme ich diese Gleichung als Grundlage des Knickspannungswertes, so kann ich schreiben :

$$\sigma = \sigma_E.\,\frac{D}{E}\cdot\frac{\alpha^2.\,4}{\pi^2} = \sigma_E.\,0{,}4053\,\frac{D}{E}\cdot\alpha^2 = \sigma_E.\,\beta$$

Setze ich die Werte für D, $\alpha = \frac{\sigma}{D} \cdot \frac{dD}{d\sigma}$ und λ in die Gleichung ein, so ergeben sich die Werte β der Knickspannungsgleichung.

Trage ich diese Werte als Ordinaten der zugehörigen λ Werte auf s. Fig., so erhalte ich zwischen $\lambda = 35{,}5$ und $\lambda = 92{,}6$ d. h. bis zum Anschluss an die Eulerhyperbel angenähert eine gerade Linie, ebenso zwischen $\lambda = 3{,}7$ und $\lambda = 16{,}5$. Dazwischen d. h. zwischen $\lambda = 16{,}5$ und $\lambda = 35{,}5$ ist die β Linie eine Kurve vom n^{ten} Grad, wobei n ermittelt werden muss.

Als Knickspannungsgleichungen habe ich nunmehr für den elastischen und unelastischen Bereich folgende Werte errechnet :

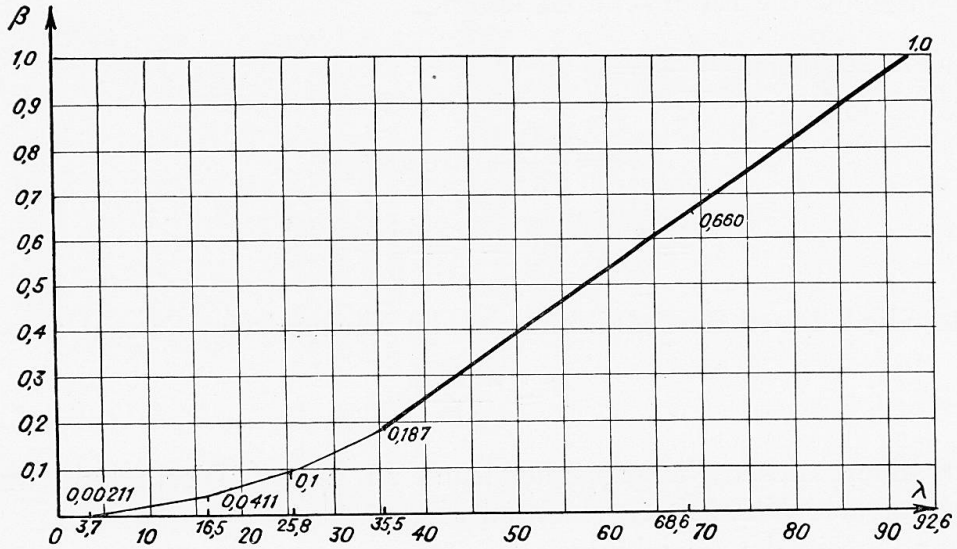

Fig. 1.

$$\sigma = \sigma_E = \frac{E\pi^2}{\lambda^2} \text{ für } \lambda > 92{,}6$$

$$\sigma = \sigma_E [0{,}0142\,\lambda - 0{,}318] \text{ für } \lambda = 92{,}6 \text{ bis } 35{,}5$$

$$\sigma = \sigma_E [0{,}00393\,(\lambda - 16{,}5) \cdot 1{,}22 - 0{,}0411] \text{ für } \lambda = 35{,}5 \text{ bis } 16{,}5$$

$$\sigma = \sigma_E [0{,}00305\,\lambda - 0{,}00918] \text{ für } \lambda = 16{,}5 \text{ bis } 3{,}7$$

Da in der Stahlbautechnik Stabglieder unter einem Schlankheitsgrad von $\lambda = 35{,}5$ nur sehr selten oder garnicht vorkommen, kann ich folgenden Wert als die genaueste und einfachste Knickgleichung im unelastischen Bereich bezeichnen :

$$\sigma = \sigma_E [0{,}0142\,\lambda - 0{,}318]$$

Diese Funktion vom ersten Grade ist für die Anwendung in der Praxis unbedingt zu empfehlen.

Traduction.

Dans son Rapport d'Introduction sur la stabilité et la résistance des pièces travaillant à la compression et à la flexion, M. le Professeur Dr. L. Karner a étudié le processus du flambage en s'efforçant de pénétrer plus avant dans le

domaine, très difficilement accessible, de la plasticité. Ainsi qu'il l'indique très judicieusement, cette partie du problème du flambage ne peut être explorée avec succès qu'en se basant sur des résultats d'essais de compression effectués sur des matériaux divers. Le fait qu'il assimile à une droite, pour l'acier, le diagramme incurvé de la compression, permet, avec les valeurs modifiées de F^r et de J_s^r pour la section, d'arriver à des relations très simples en ce qui concerne la détermination des efforts. Les valeurs de la section peuvent être déduites sans difficulté de la relation entre le diagramme rectiligne et le diagramme incurvé effectif. On obtient ainsi, pour la section F^r modifiée, une position du centre de gravité qui présente par rapport à la position normale un écart d'excentricité e^r. L'axe statique de la barre s'écarte de cette valeur e^r de son axe géométrique. On retrouve déjà une même excentricité dans les travaux de Krohn à partir de l'équation exacte du flambage, dans son traité sur la « Résistance au Flambage ». Il arrive à la valeur suivante :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{P.k + M}{J.K}$$

dans laquelle il désigne par :

ρ le rayon de courbure,

P et M les charges extérieures,

k l'excentricité, qui présente d'ailleurs des valeurs variables, par suite des variations du coefficient de compression d'une section à l'autre,

J le moment d'inertie de la section rapporté à son axe de gravité,

K un coefficient de compression moyen.

Après intégration de l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P(k+y)}{J.K}$$

en admettant que k et K soient invariables et en introduisant différentes simplifications, Krohn arrive au résultat suivant :

$$\frac{\cos\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{D_k}}}{1-\cos\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{D_k}}} = \frac{\sigma_k}{D_k}\left(\frac{d\,D}{d\,\sigma}\right)_k$$

Cette solution représente l'équation du flambage dans le cas général, en tenant compte de ce fait que le coefficient de compression D est variable avec la contrainte.

Comme ce sont toujours les conditions de déformation et de contrainte dans la section du milieu, la plus exposée, qui jouent le rôle capital, j'estime qu'il convient, dans l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P(k+y)}{J.K}$$

d'introduire pour k et K les deux valeurs qui correspondent précisément à cette section du milieu de la barre et d'admettre que ces valeurs sont invariables pour toute la barre. En partant de cette hypothèse, j'ai déterminé d'une autre manière l'équation générale du flambage.

Une barre qui est soumise à une charge appliquée avec une excentricité k, fléchit de la quantité δ. Par résolution d'une équation différentielle et au prix de différentes simplifications, j'obtiens le résultat suivant :

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma}{D}}} \text{ arc cos } \frac{k}{\delta + k} = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma}{D}}} \text{ arc cos } \frac{\frac{k}{\delta}}{1 + \frac{k}{\delta}}$$

La résolution exacte suivant Krohn aboutit au résultat suivant :

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma_k}{D_k}}} \text{ arc cos } \frac{\frac{\sigma_k}{D_k}\left(\frac{dD}{d\sigma}\right)_k}{1 + \frac{\sigma_k}{D_k}\left(\frac{dD}{d\sigma}\right)_k}$$

De ces deux équations, on peut déduire :

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{\sigma_k}{D_k}\left(\frac{dD}{d\sigma}\right)_k$$

Si je pose D = E module d'élasticité, j'obtiens :

$$\left(\frac{D\,d}{d\,\sigma}\right)_k = 0 \text{ et } k = 0$$

on en déduit : $(\text{arc cos } 0 = \frac{\pi}{2})$

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \text{ ou } \sigma = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Pour un coefficient de compression constant D = E, ou un degré d'excentricité $k = 0$ on obtient l'équation d'Euler.

Si l'on pose $\sigma = \frac{P}{F}$ et $\frac{k}{\delta + k} = \gamma$

on obtient :

$$P = \frac{4\,D.J}{l^2} (\text{arc cos } \gamma)^2$$

$$= \frac{4\,D.J}{l^2}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma - \frac{1}{6}\gamma^3 \ldots\right)^2$$

Le premier terme de ce développement en série donne la formule de Kármán :

$$P = \frac{\pi^2 D.J}{l^2}$$

Par suite cette valeur approchée donne donc des chiffres trop forts, ainsi que l'on peut d'ailleurs s'en rendre compte par comparaison avec les résultats fournis par les essais.

Si dans l'équation :

$$\sigma = \frac{4\,D}{l^2}\left(\text{arc cos } \frac{k}{\delta + k}\right)^2$$

on désigne par α la valeur $\arccos \frac{k}{\delta + k}$

on obtient d'une manière générale pour la contrainte de flambage l'expression :

$$\sigma = \frac{4\,D}{\lambda^2} \cdot \alpha^2$$

Dans la zone élastique, avec

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{k}{\delta + k}$$

pour $k = 0$, on obtient $\alpha = \frac{\pi}{2}$

D coefficient de compression étant égal à E module d'élasticité, on retombe sur l'équation d'Euler :

$$\sigma_{\text{Euler}} = \frac{4\,E}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{E\pi^2}{\lambda^2} = \sigma_E$$

Si j'adopte cette équation comme équation de base de la valeur de la contrainte de flambage, je puis écrire :

$$\sigma = \sigma_E \cdot \frac{D}{E} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot 4}{\pi^2} = \sigma_E \cdot 0{,}4053 \frac{E}{D} \cdot \alpha^2 = \sigma_E \cdot \beta$$

Si j'introduis les valeurs de D, $\alpha = \frac{\sigma}{D} \cdot \frac{dD}{d\sigma}$ et λ dans l'équation, j'obtiendrai la valeur de β de l'équation de la contrainte de flambage.

Si l'on considère ces valeurs comme ordonnées en fonction des valeurs correspondantes de λ (voir figure), on obtient entre $\lambda = 35{,}5$ et $\lambda = 92{,}6$, c'est-à-dire jusqu'au raccordement avec l'hyperbole d'Euler, approximativement une ligne droite; il en est de même entre $\lambda = 3{,}7$ et $\lambda = 16{,}5$. Dans l'intervalle, c'est-à-dire entre $\lambda = 16{,}5$ et $\lambda = 35{,}5$ la courbe de β est une courbe de degré n, n devant être à déterminer.

Comme équations de la contrainte de flambage, j'ai ensuite établi les relations suivantes, pour les domaines élastique et plastique :

$$\sigma = \sigma_E = \frac{E\pi^2}{\lambda^2} \text{ pour } \lambda > 92{,}6$$

$$\sigma = \sigma_E (0{,}0142\lambda - 0{,}318) \text{ pour } \lambda \text{ compris entre } 92{,}6 \text{ et } 35{,}5$$

$$\sigma = \sigma_E [0{,}00393 (\lambda - 16{,}5) \cdot 1{,}22 - 0{,}0411] \text{ pour } \lambda \text{ compris entre } 35{,}5 \text{ et } 16{,}5$$

$$\sigma = \sigma_E (0{,}00305\,\lambda - 0{,}00918) \text{ pour } \lambda \text{ compris entre } 16{,}5 \text{ et } 3{,}7$$

En construction métallique, les barres ne présentent que très rarement, ou même jamais, un degré de finesse inférieur à $\lambda = 35{,}5$; on peut donc considérer que dans le domaine plastique, la forme la plus simple et la plus exacte de l'équation du flambage est la suivante :

$$\sigma = \sigma_E (0{,}0142\lambda - 0{,}318)$$

Cette relation du premier degré est à recommander le plus largement pour les besoins de la pratique.

Zusammenfassung.

Der variable Druck-Elastizitätsmodul wird durch eine variable Exzentrizität der äusseren Kraft ersetzt (angenähert die Exzentrizität in bezug auf den Schwerpunkt der reduzierten Fläche F_r im Bericht von Herrn Prof. Dr. Karner). Dank der Einführung dieser Exzentrizität erhalte ich durch einfache Rechnung die allgemeine Gleichung des Knickzustandes, und als Spezialfall den Wert von Euler und Kármán. Schliesslich stelle ich eine Knickgleichung auf, die sich auf die genaue Gleichung stützt und die eine einfache, aber in den praktischen Grenzen des Schlankheitsgrades genaue Form annimmt.

Summary.

The variable coefficient of compression is replaced by a variable eccentricity of the external force (approximately the eccentricity of the centre of gravity of the modified section F_r in Prof. Karner's report). Owing to the introduction of this eccentricity, the general equation of buckling is obtained by a simple calculation and, as a particular case, the value of Euler and Kármán. Finally an equation of buckling is established, based on the exact equation and presuming a shape wich is simple but accurate within the practical limits of slenderness λ.

Dr. Ing. F. SCHLEICHER,

Professor an der Technischen Hochschule Hannover.

Bei exzentrisch gedrückten Stäben entspricht im allgemeinen jeder Belastung ein bestimmter Gleichgewichtsfall und Instabilität kommt nicht in Frage. Auf den Ausnahmefall haben Zimmermann[1] und Chwalla[2] unabhängig voneinander hingewiesen.

Ein im spannungslosen Zustand prismatischer Stab werde in der Ebene der kleinsten Steifigkeit mit $P = \psi\ P_E$ exzentrisch gedrückt (P_E = Eulerknicklast). Die Exzentrizitäten an den beiden Stabenden seien gleich gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Der Mittelpunkt des Stabes liegt auf der Kraftangriffsgeraden und erleidet keine Ausbiegung. Die Biegungslinien sind für $\psi < 1$ bezüglich dieses Punktes spiegelsymmetrisch und stabil. Wird $\psi = 1$, dann ist das Gleichgewicht labil und $w\ (\zeta) = w_1 \cos \pi\zeta + C \sin \pi\zeta$, wo C beliebige Werte besitzen kann. Vgl. Fig. 1.

Für ungleiche Exzentrizitäten w_1 bezw. w_2 ist die Durchbiegung in Stabmitte

$$w_M = \frac{w_1 + w_2}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\psi}\right)}$$

1. H. Zimmermann, Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage. Berlin, 1930, S. 41.
2. E. Chwalla, Eine Grenze elastischer Stabilität unter exzentrischem Druck. Z. angew., Math. Mech. 10 (1930) und Lösungstypen elastostaticher Probleme. Desgl. 11 (1931).

Der Zusammenhang zwischen w_M und ψ ist in Fig. 2 für verschiedene Verhältnisse $w_2 : w_1$ dargestellt. Für $w_2 = - w_1$ ist $w_M = o$, solange ψ kleiner als 1 bleibt. Mit $\psi = 1$ ergibt sich nach der ersten Stufe der Genauigkeit der

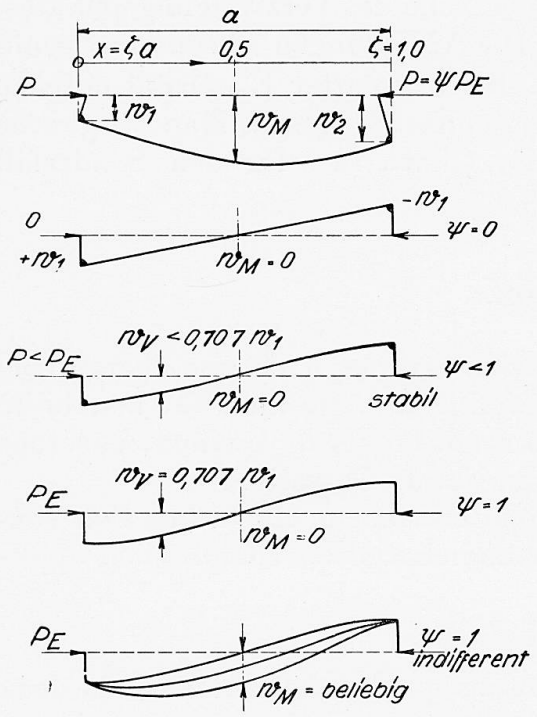

Fig. 1. — Désignations et figures d'équilibre.
Bezeichnungen und Gleichgewichtsfiguren.
Symbols and figures of equilibrium.
Stabil = Stabil = Stable.
Arbitraire = Beliebig = Arbitrary.

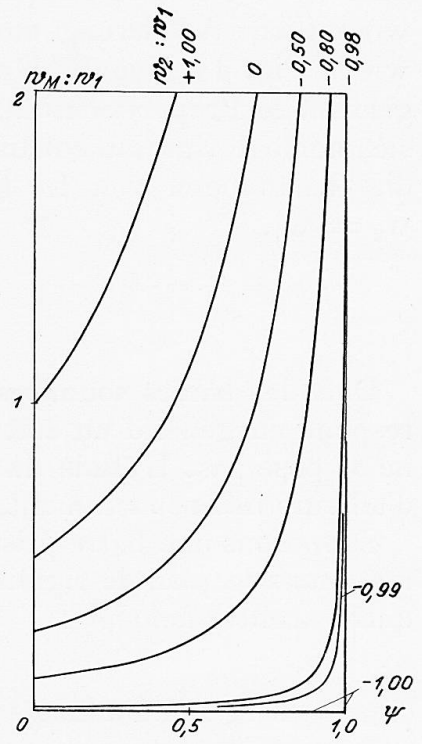

Fig. 2.
Déformation au milieu de la barre
Ausbiegung im Mittelpunkt.
Bending at middle of bar.

Rechnung ein indifferenter Gleichgewichtszustand. In diesem Fall ist w_M kein Mass der Verbiegung. In Fig. 3 ist die Ausbiegung im Viertelpunkt des Stabes w_V dargestellt, und zwar für $w_2 = - 0{,}99\ w_1$ und für den Grenzfall

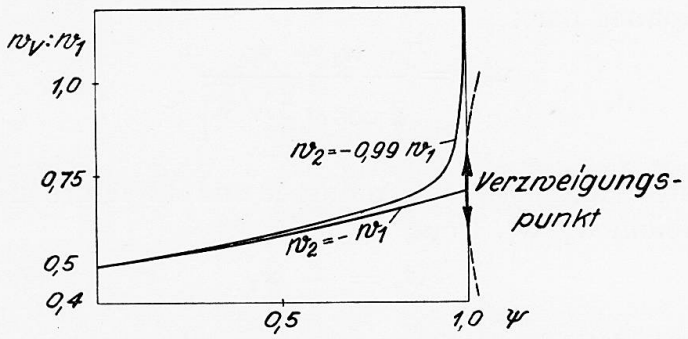

Fig. 3. — Déformation au quart de la barre.
Ausbiegung im Viertelpunkt.
Bending at quarter length of bar.

$w_2 = - w_1$. Sie nähert sich mit steigender Belastung $\psi \rightarrow 1$ dem Grenzwert $w_V = 0{,}707\ w_1$. Für die Eulerlast hat man einen Verzweigungspunkt des elastischen Gleichgewichts. Es ist demnach eine Grenze der Stabilität vorhan-

den, im Gegensatz zu dem Fall der Biegung durch Druckkräfte von verschiedener Exzentrizität.

Fig. 2 gilt für die erste Annäherung, d. h. wenn die Steigung der Biegungslinie im Vergleich zu 1 vernachlässigt wird [1]. Die genauere Rechnung gibt keine wesentliche Aenderung, ausgenommen in der Nähe des Verzweigungspunktes, wie in Fig. 3 schematisch angedeutet ist. Die Abbildungen setzen eine genügend hohe Proportionalitätsgrenze voraus. Bei begrenzter Elastizität ergeben sich analoge Zusammenhänge von weniger einfacher Form. Man vergleiche die Rechnungen von L. Karner [2] und E. Chwalla [3] für den Sonderfall $w_2 = w_1$.

Traduction.

Dans les barres soumises à une compression centrée, à chaque charge correspond en général un état d'équilibre déterminé et la question de l'instabilité ne se pose pas. L'étude du cas d'exception a fait l'objet de travaux, effectués d'ailleurs indépendamment, de Zimmermann [4] et de Chwalla [5].

Supposons une barre prismatique, ne supportant aucun effort, que l'on soumet, dans le plan de rigidité minimum, à une charge de compression appliquée excentriquement ;

$$P = \psi P_E$$

(P_E = charge de flamblage d'Euler). Supposons que les excentricités aux deux extrémités de la barre soient de même importance, mais de signes contraires. Le milieu de la barre se trouve sur la droite qui joint les points d'application des efforts et ne subit aucune flexion. Les courbes de déformation par flexion pour $\psi < 1$ sont symétriques par rapport à ce point et stables. Si $\psi = 1$, l'équilibre est alors labile et l'on a :

$$w(\zeta) = w_1 \cos \pi\zeta + C \sin \pi\zeta$$

le coefficient C pouvant prendre des valeurs arbitraires (Voir figure 1).

Pour des excentricités inégales w_1 et w_2 la déformation par flexion au milieu de la barre est donnée par :

$$w_M = \frac{w_1 + w_2}{2 \cos \left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\psi}\right)}$$

La relation entre w_M et ψ est indiquée sur la figure 2 pour différentes valeurs du coefficient w_2/w_1. Pour

$$w_2 = - w_1$$

1. K. von Sanden und F. Tölke, Ueber Stabilitätsprobleme dünner, kreiszylindrischer Schalen. Ingenieur-Archiv 3 (1932).
2. L. Karner, Vorbericht S. 20.
3. E. Chwalla, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Wien, 1928.
4. H. Zimmermann, Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage, Berlin, 1930, page 41.
5. E. Chwalla, Eine Grenze elastischer Stabilität unter exzentrischem Druck. Z. angew., Math. Mech. 10 (1930) et : Lösungstypen elastostatischer Probleme. Dito 11 (1931).

on a :

$$w_M = 0$$

tant que ψ reste inférieur à 1. Pour $\psi = 1$, on obtient, suivant la première approximation du calcul, un état d'équilibre indifférent. Dans ce cas, w_M ne peut nullement constituer une mesure de la déformation. La figure 3 représente la déformation au quart de la barre w_V, en fait pour

$$w_2 = -0{,}99\ w_1$$

et pour le cas limite :

$$w_2 = -w_1$$

Cette déformation tend vers la valeur limite $w_V = 0{,}707\ w_1$ lorsque la charge augmente, $\psi \rightarrow 1$.

Pour la charge d'Euler elle-même, on arrive à un point de bifurcation des conditions d'équilibre élastique. Il existe par suite une limite de stabilité, par opposition au cas de la flexion par suite de contraintes de compression suivant des excentricités différentes.

La figure 2 se rapporte à la première approximation, suivant laquelle on néglige l'accentuation de la courbe de flexion par rapport à 1 [1]. Un calcul plus précis n'accuse aucune modification sensible, si ce n'est au voisinage du point de bifurcation, ainsi qu'il est représenté d'une manière schématique sur la figure 3. Ces figures sont établies en supposant une limite de proportionnalité suffisamment élevée. Lorsque l'élasticité est limitée, on obtient des relations analogues sous une forme moins simple. Voir à ce sujet les calculs de L. Karner [2] et de Chwalla [3] pour le cas particulier correspondant à $w_2 = w_1$.

Dr. Ing. h. c. M. ROŠ,

Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule und Direktor der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt, Zürich.

Zu den Diskussionsbeiträgen der Herren Professoren M. Broszko (Warschau), F. Hartmann (Wien), E. Chwalla (Brno), L. Baes (Bruxelles) und A. Mesnager (Paris) beehre ich mich, auch namens der wissenschaftlichen Mitarbeiter der E.M.P.A., Dr. Ing. J. Brunner und Dipl. Ing. A. Eichinger, mich wie folgt zu äussern.

Zu Prof. M. Broszko. Alle bisherigen Veröffentlichungen des Herrn Broszko die « Allgemeine Lösung des Knickproblems » betreffend, sowie die Behauptungen in den Diskussionsbeiträgen der Kongresse Wien (1928) und Paris (1932) beruhen auf mathematisch unrichtigen Ableitungen und physikalisch nicht zutreffenden Annahmen.

Im Schlusswort des Wiener Berichtes (Verlag Julius Springer Wien, 1929),

---

1. K. von Sanden et F. Tölke, Über Stabilitätsprobleme dünner kreiszylindrischer Schalen. — Ingenieur-Archiv 3, 1932.
2. L. Karner, Premier Congrès, Rapport Préliminaire, 1932.
3. E. Chwalla, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl Wien. Akad. Vienne, 1928.

Seiten 338-343, ist die Unrichtigkeit der mathematischen Ableitung Broszkos, welcher damals die genau gleichen physikalischen Ansätze zugrunde lagen, wie der Knicktheorie von Engesser-Jasinski-Kármán, nachgewiesen. Im Mai 1931 überreichten wir Herrn Mesnager, Membre de l'Institut de France, die mathematisch genaue Integration der Broszko'schen Grundgleichung (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1928, vol. 186, p. 1041), auf welche er seine Theorie stützt, und erbrachten den Beweis, dass Broszkos Lösung infolge eines mathematischen Fehlers unrichtig ist und dass die richtige Lösung mit derjenigen von Engesser-Jasinski-Kármán genau übereinstimmt. Die mathematische Unrichtigkeit der von Broszko gegebenen Auflösung der Grundgleichung wurde auch von Dr. J. Fritsche, Prag, nachgewiesen. — Siehe « Der Bauingenieur » 1930, Heft 17, Seiten 298-300 « Zur Berechnung der Knicklast eines geraden Stabes ausserhalb des Gültigkeitsbereiches der Euler-Formel ». Ebenso wurde die Theorie Broszko's von Prof. Dr. E. Chwalla und Prof. Ing. Dr. P. Fillunger abgelehnt (Bericht über die II. Inter. Tagung für Brückenbau und Hochbau, Wien, 1928, S. 613 & 330).

Die ursprünglichen physikalischen Annahmen von Broszko in der Pariser Veröffentlichung sind mit denjenigen von Engesser-Jasinski-Kármán identisch. Aber bereits im Diskussionsbeitrage zum Wiener Kongress (1929) bemängelt Broszko den physikalischen Ansatz der Engesser-Jasinski-Kármán'schen Knickungstheorie, indem er die Gültigkeit des E-Gesetzes für die entlastete Zone der dem Knickzustande entsprechenden Spannungsverteilung des virtuell ausgebogenen Stabes als fehlerhaft bezeichnete und später am Pariser Kongress (1932) auch die Betrachtungen über die Abhängigkeit der Grösse der Verformung von der Geschwindigkeit der Verformung anstellt. Broszko stützt sich dabei auf die an sich richtigen Ewingschen Versuchsergebnisse, zieht jedoch für die Beweisführung der Richtigkeit seiner Knicktheorie Grenzwerte der Verformungsgeschwindigkeiten heran, welche bei der statischen Knickstabilität, von welcher allein die Rede ist und welche die Konstruktionspraxis in erster Linie interessiert, weder für die Belastungs- noch Entlastungszonen in Frage kommen. Zur ersten Bemängelung ist zu sagen, dass das Verformungs-Spannungs-Gesetz für wirklich eintretende Entlastungen, welche sich mit den in Frage stehenden Verformungsgeschwindigkeiten vollziehen, in Wirklichkeit dem E-Gesetz folgt. Das Material behält seinen elastischen Kern, wie dies Versuche einwandfrei beweisen.

Die Einflüsse der Dauer und Geschwindigkeit von Verformungen sind nachträglich hineingelegte Interpretationen von Broszko, die auch in seinen mathematischen Ansätzen in keiner Weise enthalten sind.

Die Ableitung der Broszko'schen Knicklast P_k für zentrisches Knicken

$$P_k = \pi^2 \frac{(1 - \varepsilon_k)\, \tilde{E}_k . J_k}{l_k^2}$$

beruht auf einer mathematisch falschen Ableitung und physikalisch unzutreffenden Annahme. Diese Theorie liefert für Eisen zufällig zahlenmässig brauchbare Werte ; für andere Baustoffe, z.B. Leichtmetalle steht sie auch mit den Versuchsergebnissen in Widerspruch. — Abb. 1.

*
* *

Prof. M. Broszko zieht zur Beweisführung der Richtigkeit seiner Knicktheorie die Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle (Bericht des Ausschusses für Versuche im Stahlbau des D.St.V., Verlag Julius Springer, Berlin 1930) heran, über welche Prof. W. Rein Bericht erstattet. Wir haben uns bereits in der Wiener Diskussion — Seite 345 — zu den damaligen Ausführungen von Prof. Memmler geäussert und denselben zugestimmt. Die Berliner Versuchsergebnisse stimmen, bei sinngemässer Auslegung, mit den Zürcher theoretischen Ableitungen und Ergebnissen gut überein.

Nicht ganz einverstanden sind wir mit den theoretischen Ableitungen von Prof. Rein. Die Zimmermann'sche Fehlerhebel-Theorie für Stäbe schwacher anfänglicher Krümmung ist für den elastischen Bereich einwandfrei, für den plastischen Bereich bietet die genaue Lösung Schwierigkeiten, welche nur durch streng nicht zutreffende Annahmen überwunden werden können.

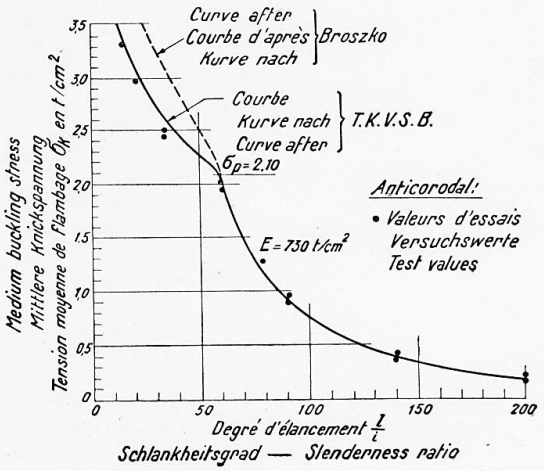

Fig. 1. — Essais avec des barres d'anticorodal. Valeurs d'essais. Courbes de flambage d'après Broszko et T. K. V. S. B.
Versuche mit Stäben aus Anticorodal. Versuchswerte. Knickspannungskurven nach Broszko und nach T. K. V. S. B.
Tests with bars of Anticorodal. Test results. Buckling stress curves according to Broszko and T.K.V.S.B.

Die Berichtigung, welche Rein der Knicktheorie angedeihen lässt und schliesslich in Form eines Zusatzgliedes Δ T zu dem Knickmodul T nach Engesser-Jasinski-Kármán zusammenfasst :

$$\Delta T = \sum_{1}^{n-1} \frac{\rho_n}{\rho_r} \left(T_r - T_{r+1} \right)$$

bei der « genaueren Entwicklung des Spannungs- und Verformungsbildes beim Knickvorgang » — Abb. 8 seines Berichtes — beruht auf unzutreffender Annahme der Entlastungszonen an der konvexen Seite anfänglich schwach gekrümmter, mit Zimmermann'schen Fehlerhebeln behafteter Stäbe, was bei nicht zu krummen Stäben bis zur Knicklast nicht erfolgt. Für den Grenzfall z.B. der Rein'schen Betrachtung, für den genau geraden, zentrisch belasteten Stab treten bis zum Erreichen der Knicklast offensichtlich keine solchen Rein'schen Spannungsentwicklungen auf, sondern die Spannungen lagern sich für die verschiedenen Spannungsstufen über den Querschnitt gleichmässig und linear. Wird dies berücksichtigt, so ergibt sich, dass auch im Sinne Zimmermanns die Knicklast nach Engesser-Jasinski-Kármán einem Maximum entspricht, somit Δ T kleiner als Null oder im Grenzfall = O sein muss, im Gegensatz zu Rein, welcher im unelastichen Bereich Δ T grösser als Null findet.

Die Knicktheorie nach Engesser-Jasinski-Kármán setzt ideale Verhältnisse

voraus. Zweck der Versuche ist, die Richtigkeit dieser idealen Voraussetzungen zu überprüfen.

Die Nichtbeachtung der angeführten Umstände führte zur nicht zutreffenden

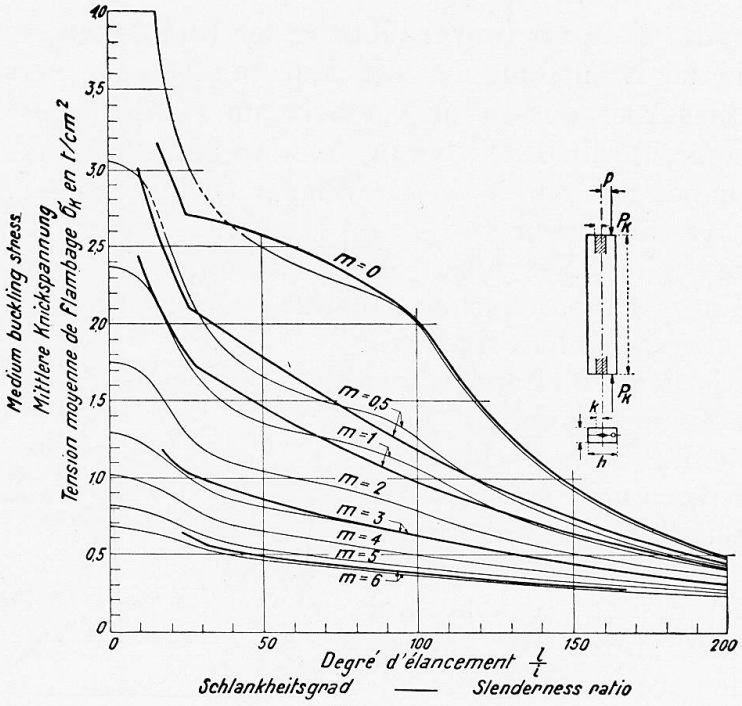

Fig. 2.

Comparaison des courbes de E. Chwalla (lignes grosse) et de Roš-Brunner (lignes fines)
Vergleich der Kurven nach E. Chwalla (dicke Linien) und nach Roš-Brunner (dünne Linien)
Comparison of curves according to E. Chwalla (thick lines) and Roš-Brunner (thin lines).

Verallgemeinerung der Korrektur des Knickmoduls T für zentrisches Knicken — Abb. 42 des Rein'schen Berichtes.

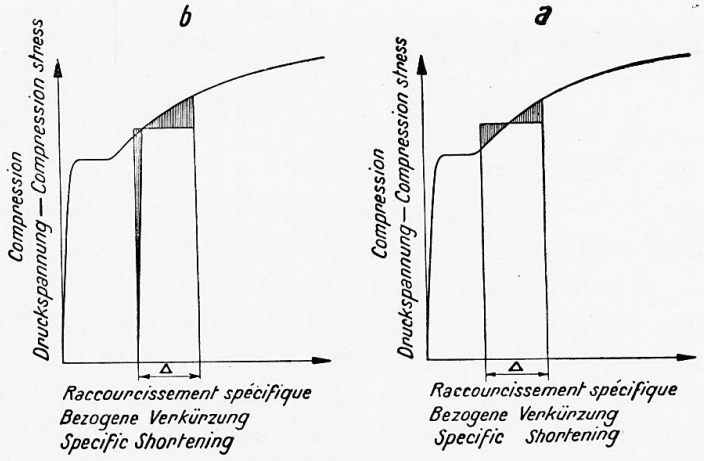

Fig. 3. — Δ = Différence des raccourcissements des fibres extrêmes.
Δ = Unterschied der Verkürzungen der Randfasern.
Δ = Difference in shortening of the outer fibres.

Zu Prof. Dr. F. Hartmann.

Dem von Herrn Prof. F. Hartmann bezogenen Standpunkte zu den Ausführungen von Prof. M. Broszko und Prof. W. Rein, das Knickproblem betreffend, stimmen wir zu, da sich seine grundsätzliche Stellungnahme mit

der von uns zuerst im Jahre 1922 schriftlich niedergelegten Auffassung in dem an die Technische Kommission des Verbandes Schweiz. Brückenbau- und Eisenhochbau-Fabriken unterbreiteten Berichte « Ueber das Problem der Knickung », sowie in den Ausführungen der späteren, an den Internationalen Kongressen in Wien (1928) und Paris (1932) unterbreiteten Berichte deckt.

Zu Prof. Dr. E. Chwalla.

Das für die Praxis wichtigste Ergebnis der sehr eingehenden theoretischen Untersuchungen von Chwalla, welche auf Grund des Zürcher Druck-Stauchungsdiagrammes für normalen Baustahl abgeleitet wurden, sind in der Abb. 2 graphisch zur Darstellung gebracht. Die von Chwalla abgeleiteten Knickspannungslinien für zentrisches und exzentrisches Knicken stimmen mit den von Roš-Brunner zugeordneten, theoretisch abgeleiteten und versuchstechnisch überprüften Kurven sehr gut überein. — Abb. 2 — Auch beim Näherungsverfahren nach Roš-Brunner ist diese Uebereinstimmung eine gute.

Chwalla legt seinen Ableitungen den jeweiligen Zweig des Druck-Stauchungs-Diagrammes, ohne Entlastungsbereich zugrunde — Fall a — Abb. 3, während wir für die Aufstellung unserer Knickspannungslinien für exzentrisches Knicken zuerst das Anwachsen der zentrisch wirkenden Knickkraft mit nachträglichem Hinzutritt der Exzentrizität (Biegungsmoment) voraussetzten, Fall b — Abb. 3 —.

Beide Annahmen sind nicht streng richtig. Ueber den sich daraus ergebenden Unterschied wurde anlässlich der Wiener Diskussion berichtet. Für Grundspannungen (Schwerpunktspannungen) bis zur Proportionalitätsgrenze sind die Knickspannungen für beide Fälle a und b einander genau gleich ; für Grundspannungen zwischen der Proportionalitäts- und Fliessgrenze sind die Unterschiede belanglos und erst beim Ueberschreiten des Fliessbereiches wird dieser Unterschied merklich. Für geringere Exzentrizitäten ist dem Verfahren von Roš-Brunner (T.K.V.S.B.-Verfahren) der Vorzug einzuräumen. Im Sonderfall des zentrischen Knickens eines ursprünglich geraden Stabes ist das Verfahren Engesser-Jasinski-Kármán genau. Für grössere Exzentrizitäten dagegen ist die Annahme von Chwalla zutreffender. Zwischen diesen beiden Grenzfällen liegt die Wirklichkeit.

Zu Prof. L. Baes.

Die Ausführungen von Prof. L. Baes betreffend den logischen Zusammenhang zwischen der Unstetigkeit der Engesser-Jasinski-Kármán'schen Knickspannungslinie und der Labilität des Druck-Stauchungsdiagrammes beim Erreichen der Fliessgrenze sowie beim Durchschreiten des Fliessbereiches bei Konstruktionsstählen, fanden unsere Zustimmung bereits durch das Schlusswort an der Wiener Diskussion — Seite 342 —.

Herr Prof. Mesnager lenkt die Aufmerksamkeit auf die theoretische Studie von R. Chambaud, Paris « Le flambement des pièces rectilignes à charge excentrée » Congrès international de Liége 1930. Die theoretischen Werte der Knicklasten von I-Trägern No 22 und 32 nach Chambaud für drei ver-

schiedene Schlankheitsgrade $\frac{l}{i} = 65$, 120 und 160 stimmen mit den Versuchswerten von Zürich sehr gut überein. Für den Bereich der Proportionalität $\sigma_p = 1{,}9$ t/cm², für welchen die Betrachtungen von Chambaud gelten, ist diese Uebereinstimmung eine sehr gute. Die Abweichungen zwischen Theorie und Versuch bewegen sich zwischen 3 % und 8 %.

Durch die theoretischen Untersuchungen von Chambaud haben die theoretischen T.K.V.S.B. Kurven eine weitere Bestätigung ihrer technischen Richtigkeit erhalten.

Abschliessend seien die Grundlagen des T.K.V.S.B. — Verfahrens von Roš-Brunner zusammengefasst.

Die Voraussetzungen, welche den theoretischen Ableitungen zugrunde liegen, sind im Pariser Vorbericht ausdrücklich hervorgehoben — Seiten 57 und 58 —. Nicht berücksichtigt wurden der Grasshof'sche Effekt und der Einfluss

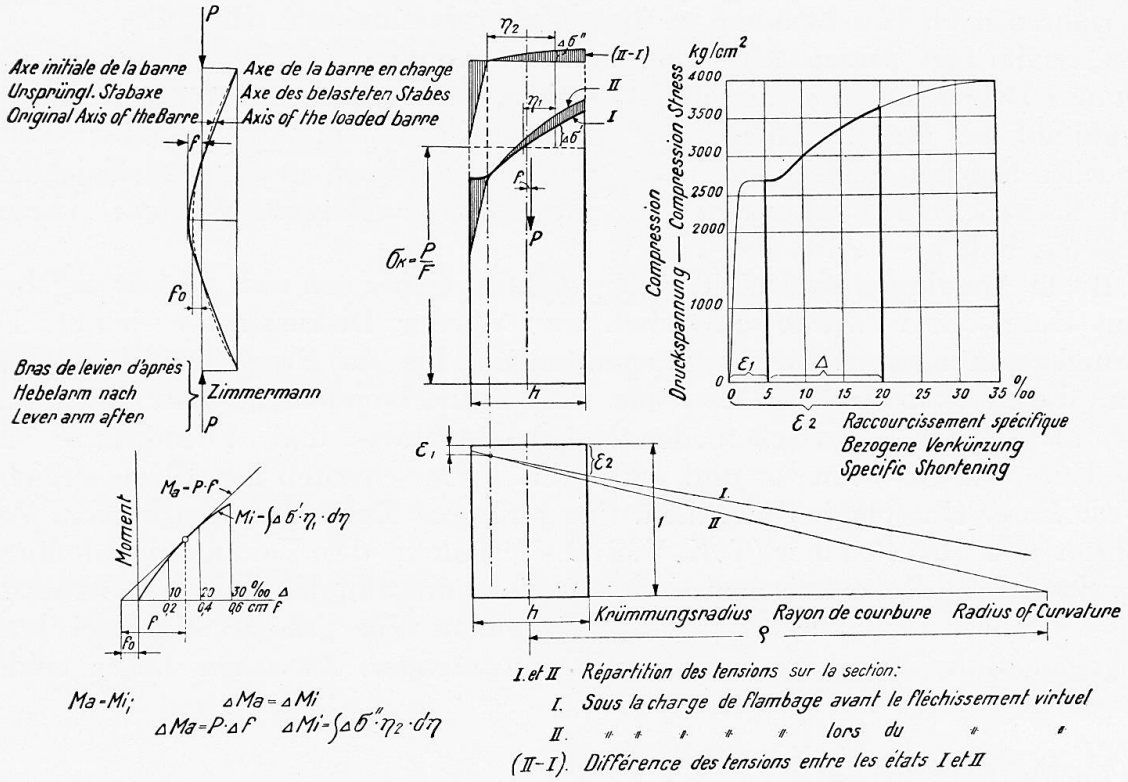

Fig. 4. — Equilibre entre les moments extérieurs et intérieurs. Labilité.
Gleichgewicht zwischen den äussern und innern Momenten. Labilität.
Equilibrium between external and internal moments. Instability.

der Querkräfte, in klarer Erkenntnis deren praktischer Belanglosigkeit auf die Endergebnisse für Stäbe der Konstruktionspraxis.

Die unter diesen Voraussetzungen abgeleiteten theoretischen Ergebnisse sind nicht als die mathematisch strenge, genaue Lösung des Knickproblems zu werten. Es kommt ihnen die Bedeutung eines für die Zwecke der Technik ausreichend genauen, in seinem Aufbau klaren Näherungsverfahrens zu.

Eine strengere Lösung des Knickproblems, in weitestem Sinne, wurde von uns bereits im ersten Berichte « Ueber das Problem der Knickung » der T.K.V.S.B. Kommission im Jahre 1926 unterbreitet, angewandt und in

den Kongressberichten von Zürich (1926) und Paris (1932) nochmals hervorgehoben. Die Integration der Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{T_k . J}$$

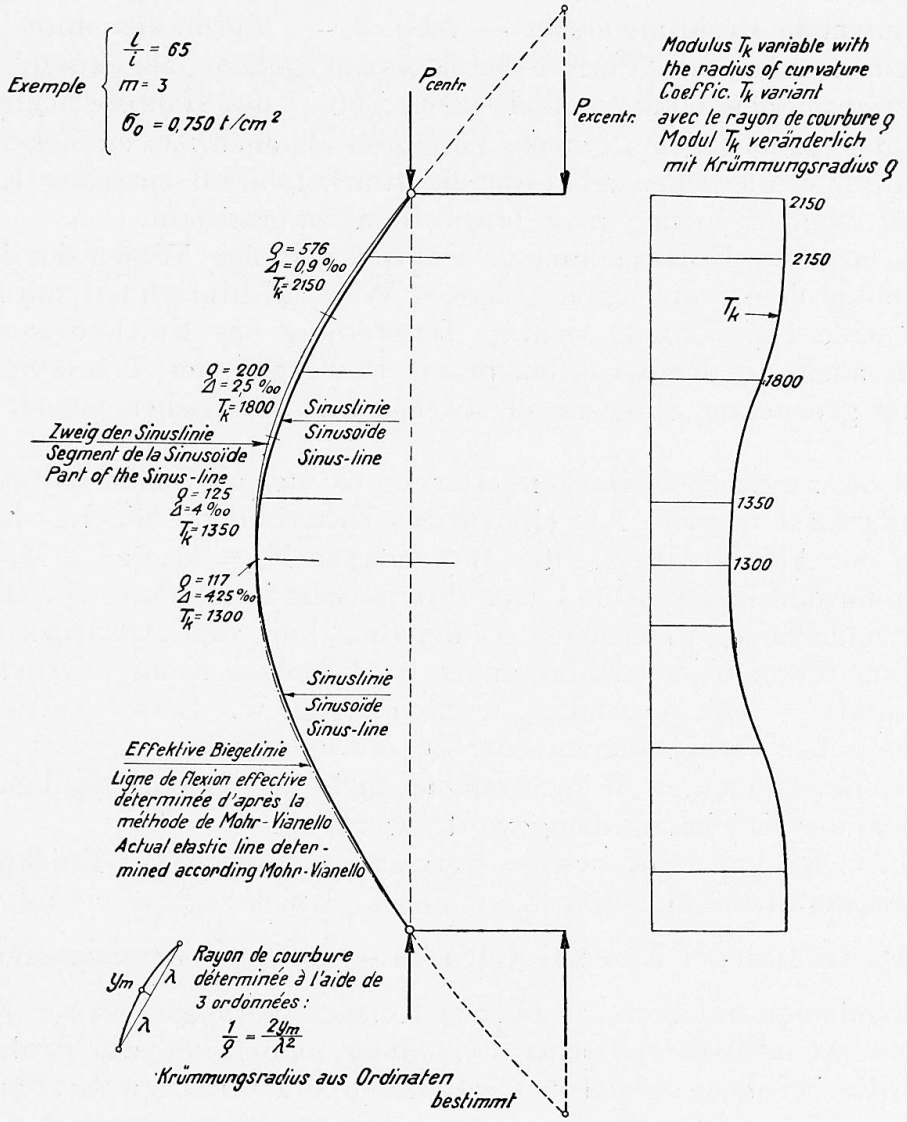

Fig. 5. — Comparaison des trois courbes : sinusoïde, segment de la sinusoïde et ligne de flexion effective déterminée d'après la méthode de Mohr-Vianello.

Vergleich der drei Kurven : Sinuslinie, Zweig der Sinuslinie und effektive Biegelinie, bestimmt nach dem Verfahren von Mohr-Vianello.

Comparison of the three curves : sine curve, part of sine curve and actual bending curve, determined by the method of Mohr-Vianello.

nach dem Verfahren von Mohr-Vianello, d. h. die Erfüllung der durch die Differentialgleichung ausgedrückten Gleichgewichts- und Verformungsbedingungen, gibt die strenge Lösung des Knickproblems. Dieses genauere Verfahren ist nur auf dem Wege der graphischen Integration, wie sie auch Kármán für den Fall sehr geringer Exzentrizität (Exzentrizitätsmass $m = \sim \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{170}$) durchführte, möglich. In klarer Erkenntnis der Umständ-

lichkeit, mit welcher das genaue Verfahren behaftet ist, wurden die vorerwähnten, die Lösung des Problems vereinfachenden, technisch zulässigen Annahmen gemacht, insbesondere die Biegelinie als Sinuslinie vorausgesetzt.

Auf Grund der nach diesem Näherungsverfahren (T.K.V.S.B. - Verfahren) gewonnenen Ergebnisse, welches mit dem genaueren Verfahren sehr gur übereinstimmende Resultate ergibt — Abb. 2 —, wurde das unter Punkt 5 der Schlussfolgerungen des Pariser-Berichtes angegebene, abgekürzte, vereinfachte Verfahren abgeleitet. — Siehe auch Abb. 7 des Hauptberichtes.

Sowohl das umständliche, genaue Verfahren als auch das einfachere Näherungsverfahren ermöglichen nicht nur die Knickstabilität einzelner Konstruktionsglieder, sondern auch ganzer Tragsysteme zu ermitteln.

Bei allen unseren Untersuchungen wahrten wir das Wesen des Knickens als Stabilitätsproblem und legten grössten Wert auf Einfachheit und Klarheit, sowie auf eine physikalisch richtige Darstellung des Knickvorganges, um namentlich auch der Konstruktionspraxis in Fragen der Tragfähigkeit und Verformung gedrückter Stäbe im elastischen und plastischen Gebiet nützlich zu dienen.

Der Fall des zentrischen Knickens ist von uns auch als Sonderfall des exzentrischen aufgefasst worden. Als eindeutiges Kriterium für die Knicklast gelten die auf der Abb. 4 dargestellten Beziehungen $M_a = M_i$ und $\Delta M_a = \Delta M_i$, welche das für den Knickzustand charakteristische indifferente Gleichgewicht für sehr kleine Pfeilveränderungen Δf der Biegelinie zum Ausdruck bringen. Die Erfüllung dieser beiden Bedingungen ist das einzig richtige Kriterium der Knickstabilität. — Abb. 4. Andere Erscheinungen, wie Erstes Auftreten bleibender plastischer Verformungen, oder Beginn von Entlastungen an der konvexen Stabseite, können, weil unzutreffend, nicht als Charakteristiken für den Grenzzustand der Knickstabilität gewertet werden.

Prof. Th. v. Kármán gab wohl als erster die Lösung des Knickproblems bei exzentrischem Kraftangriff, wobei er den die Knicktragkraft vermindernden Einfluss äusserst geringer Exzentrizitäten ($m \sim \frac{1}{17}$ bis $\frac{1}{170}$ der Stab-Kernweite) im Zusammenhange mit dem zentrischen Knicken verfolgte. Unser Ziel war aber, neben erkenntnistheoretischer Forschung namentlich das Problem der Knickstabilität bei ausgesprochenen, stärkeren exzentrischen Kraftangriffen, wie sie in der Konstruktionspraxis vorkommen, zu lösen, angeregt durch die in der Schweiz. Bauzeitung bereits im Jahre 1899 — Bd. XXXIII, Seite 159 — erfolgte Veröffentlichung über die « Berechnung eines auf exzentrischen Druck beanspruchten Stabes » von René Koechlin (Paris), sowie durch die Einführung der Koechlin'schen Graphikons in die Konstruktionspraxis durch Herrn Oberingenieur F. Ackermann, Kriens-Luzern.

Traduction.

En réponse aux observations de MM. M. Broszko (Varsovie), F. Hartmann (Vienne), E. Chwalla (Brno), L. Baes (Bruxelles) et A. Mesnager (Paris), concernant la discussion de notre mémoire, j'ai l'honneur de présenter, en mon nom personnel ainsi qu'au nom des collaborateurs scientifiques du L. F. E. M., MM. J. Brunner et A. Eichinger, les remarques suivantes :

Prof. M. Broszko.

Toutes les publications de M. Broszko parues jusqu'à ce jour sur la « Solution générale du problème du flambage », ainsi que ses affirmations lors des discussions des congrès de Vienne (1928) et Paris (1932), se basent sur des déductions mathématiques erronées et sur des suppositions fausses au point de vue physique.

Dans la conclusion de notre rapport pour le congrès de Vienne (Édition Julius Springer, Vienne 1929), aux pages 338-343, nous avons prouvé l'erreur des déductions mathématiques de M. Broszko, qui se basaient alors sur les mêmes principes physiques de la théorie d'Engesser-Jasinski-Kármán. En mai 1931, nous remettions à M. Mesnager, membre de l'Institut de France, l'intégration mathématique exacte de l'équation initiale de Broszko sur laquelle repose sa théorie (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences 1928 — vol. 186, page 1041 —), et nous apportions la preuve que la solution de Broszko, du fait d'une erreur mathématique, était fausse, tandis que la solution exacte correspondait parfaitement à celle d'Engesser-Jasinski-Kármán. L'inexactitude de la résolution que donne Broszko de l'équation initiale a été également prouvée par le Dr J. Fritsche de Prague — voir le « Bauingenieur » 1930, cahier 17, pages 298-300 —. « Le calcul de la charge de flambage d'une barre rectiligne dans le cas où la formule d'Euler n'est pas valable ». D'autre part la théorie de Broszko a été réfutée par les prof. E. Chwalla et P. Fillunger (Rapport du 2e Congrès international des Ponts et Charpentes, Vienne 1928, pages 613 et 630). Les principes physiques sur lesquels s'appuie Broszko dans sa publication de Paris sont identiques à ceux d'Engesser-Jasinski-Kármán, mais Broszko critique déjà dans sa contribution à la discussion du Congrès de Vienne (1929) les principes physiques de la théorie du flambage d'Engesser-Jasinski-Kármán en déclarant que la loi du module d'élasticité n'est pas valable pour la répartition des tensions dans la zone allégée (au moment du flambage) de la barre subissant un fléchissement virtuel; il fait de même plus tard au Congrès de Paris (1932), en présentant ses considérations sur la dépendance entre la grandeur des déformations et leur vitesse. Broszko s'appuie pour cela sur les résultats expérimentaux, d'ailleurs exacts, d'Ewing, en prenant, pour prouver la justesse de sa théorie, les valeurs limites des vitesses de déformation qui n'entrent absolument pas en considération, ni pour les zones chargées, ni pour les zones allégées, dans la stabilité statique du flambage dont il est uniquement question ici et qui intéresse en tout premier lieu la pratique de la construction. En réponse à la première critique, on peut dire qu'en réalité la loi des déformations et tensions suit la loi de l'élasticité pour les allégements réels qui se produisent avec les vitesses de déformation en question. Le matériau conserve son noyau élastique, comme le prouvent les essais d'une façon indubitable.

L'influence de la durée et de la vitesse des déformations n'a été introduite que postérieurement par Broszko et n'est renfermée en aucune façon dans ses équations mathématiques fondamentales.

La formule de Broszko donnant la charge de flambage P_k pour la compression centrée :

$$P_k = \pi^2 \frac{(1 - \varepsilon_k) . \tilde{E}_k . J_k}{l_k^2}$$

repose sur des déductions mathématiques fausses et sur des principes physiques inexacts. Cette théorie donne, par hasard, pour le fer, des valeurs utilisables ; pour d'autres matériaux, par exemple les métaux légers, elle est en contradiction avec les résultats des essais (fig. 1).

Le prof. Broszko, pour prouver l'exactitude de sa théorie du flambage, cite les essais faits pour déterminer les tensions de flambage pour différents aciers de construction, essais sur la base desquels le prof. W. Rein a rédigé un mémoire (Rapport de la Commission des essais de constructions métalliques du D. St. V., édition J. Springer, Berlin, 1930). Nous avons déjà, dans le livre du Congrès de Vienne, page 345, exprimé notre opinion à propos des observations du prof. Memmler en nous déclarant d'accord avec elles. Les résultats des essais de Berlin s'accordent bien, lorsqu'on les interprète logiquement, avec les déductions théoriques et les essais de Zurich.

Nous ne sommes par contre pas tout à fait d'accord avec les déductions théoriques du prof. Rein. La théorie du bras de levier compensateur (théorie de Zimmermann) pour les barres à faible courbure initiale, est exacte dans le domaine élastique ; dans le domaine plastique, la solution exacte offre des difficultés qui ne peuvent être surmontées qu'à l'aide de suppositions qui ne sont pas rigoureusement justes.

La correction que Rein apporte à la théorie du flambage et qu'il exprime sous forme d'un terme additionnel ΔT pour le coefficient de flambage d'Engesser-Jasinski-Kármán (correction appliquée lors du « développement exact des figures de tension-déformation dans le processus de flambage », page 8 de son rapport),

$$\Delta T = \sum_{1}^{n-1} \frac{\rho_n}{r\rho} (T_r - T_{r+1})$$

repose sur la supposition inexacte des zones allégées sur le côté convexe de barres à faible courbure initiale et pourvues de leviers-compensateurs selon Zimmermann ; pour les barres dont la courbure n'est pas trop prononcée, cette supposition ne répond pas à une réalité jusqu'au moment où on atteint la charge de flambage. Par exemple, pour le cas limite, c'est-à-dire pour la barre parfaitement rectiligne comprimée par des forces centrées, on ne constate, jusqu'au moment où la charge de flambage est atteinte, aucune répartition des tensions d'après Rein, mais pour tous les degrés de charge les tensions se répartissent uniformément et linéairement sur la section. En tenant compte de ces faits, il résulte, que même dans le sens où le comprend Zimmermann, la charge de flambage déterminée d'après Engesser-Jasinski-Kármán correspond à un maximum, c'est-à-dire que ΔT est plus petit que 0 ou, au plus, égal à 0, contrairement à ce qu'indique Rein, qui trouve que ΔT est plus grand que 0 dans le domaine inélastique.

La théorie du flambage d'Engesser-Jasinski-Kármán suppose l'existence de conditions idéales. Le but des essais doit être de contrôler l'exactitude de ces suppositions.

L'inobservation des conditions indiquées conduisit à une généralisation non fondée de la correction du module de flambement T pour des charges centrées. Fig. 42 du mémoire de Rein.

Prof. F. Hartmann.

Nous approuvons le point de vue que prend le prof. F. Hartmann vis-à-vis des théories du prof. M. Broszko et du prof. W. Rein concernant le flambage, étant donné que le principe adopté par M. Hartmann correspond à la conception que nous avons déjà exprimée par écrit en 1922 dans notre rapport à la Commission Technique de l'Association Suisse des Ponts et des Charpentes Métalliques, « Contribution à l'Étude du Problème du Flambage », puis, plus tard, dans nos mémoires présentés aux Congrès internationaux de Vienne (1928) et de Paris (1932).

Prof. E. Chwalla.

Les résultats si importants des recherches théoriques très complètes de Chwalla, découlant du diagramme compression-déformation proposé par Zurich pour l'acier doux de construction, sont reportés graphiquement sur la fig. 2. Les tensions de flambage que Chwalla a trouvées pour le flambage sous charge centrée et excentrée, correspondent très bien aux courbes théoriques de Roš-Brunner, contrôlées expérimentalement (fig. 2). En utilisant la méthode d'approximation de Roš-Brunner, la concordance des résultats est aussi satisfaisante. Chwalla base ses calculs sur le segment correspondant du diagramme compression-déformation, sans tenir compte de l'allègement — cas a, fig. 3 —; nous supposons par contre, lors de l'établissement des courbes des tensions de flambage sous charge excentrée, que l'accroissement de la force de flambage agissant centriquement intervient d'abord, tandis que l'apparition de l'excentricité (moment de flexion) n'a lieu que plus tard — cas b, fig. 3 —.

Aucune des deux suppositions n'est parfaitement exacte; nous avons examiné, lors de la discussion du Congrès de Vienne, les différences qui en résultent. Pour les tensions initiales (tensions au centre de gravité) jusqu'à la limite de proportionnalité, les tensions de flambage sont exactement les mêmes dans les deux cas a) et b); pour les tensions initiales comprises entre la limite de proportionnalité et la limite d'écoulement, les différences sont sans importance; ce n'est qu'après avoir dépassé la limite d'écoulement que les différences deviennent sensibles. Pour de faibles excentricités, on donnera la préférence à la méthode de Roš-Brunner (Méthode T. K. V. S. B.). Dans le cas particulier du flambage par charge centrée d'une barre rectiligne, la méthode d'Engesser-Jasinski-Kármán est exacte. Pour des excentricités plus grandes, la supposition de Chwalla est, par contre, plus juste. Entre ces deux cas limites se trouve la réalité.

Prof. L. Baes.

Les remarques du prof. L. Baes, concernant la corrélation logique entre la discontinuité de la courbe des tensions de flambage d'Engesser-Jasinski-Kár-

mán et l'instabilité du diagramme compression-déformation lorsqu'on atteint ou qu'on dépasse la limite d'écoulement des aciers de construction, ont déjà trouvé notre approbation dans les conclusions de la discussion de Vienne — page 342.

M. Mesnager a attiré notre attention sur l'étude théorique de R. Chambaud, Paris, « Le flambement des pièces rectilignes à charge excentrée », Congrès international de Liége, 1930. Les valeurs théoriques des charges de flambage des poutres I NP 22 et 32 selon Chambaud, pour les degrés d'élancement $\frac{l}{i} =$ 65, 120 et 160, correspondent parfaitement aux valeurs expérimentales de Zurich. Jusqu'à la limite de proportionalité $\sigma_p = 1,9$ t/cm², limite pour laquelle les valeurs de Chambaud sont valables, la concordance est excellente. Les écarts constatés entre la théorie et l'expérience varient de 3 à 8 %.

Grâce aux recherches théoriques de Chambaud, les courbes théoriques de la T. K. V. S. B. obtiennent une fois de plus confirmation de leur exactitude technique.

Pour terminer, nous résumerons les principes de la méthode de Roš-Brunner (méthode T. K. V. S. B.).

Les suppositions sur lesquelles s'appuient les calculs théoriques sont formellement exprimées dans le rapport de Paris (pages 57 et 58). On n'a pas tenu compte de l'effet de Grashof et de l'influence des efforts tranchants, en parfaite connaissance de leur peu d'importance pratique sur les résultats finaux, pour les barres utilisées en construction.

Les résultats théoriques découlant de ces suppositions ne donnent pas la solution mathématique exacte du problème du flambage. Ils représentent une méthode d'approximation dont la conception nous semble parfaitement claire et dont l'exactitude suffit aux buts de la technique.

Nous avons déjà présenté dans le premier mémoire « Contribution à l'étude du problème du flambage » de la Commission Technique du V. S. B. en 1926, une solution plus rigoureuse du problème du flambage; cette solution a été communiquée en outre dans les mémoires des Congrès de Zurich (1926) et de Paris (1932). L'intégration de l'équation différentielle de la ligne de flexion :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{T_k . J}$$

selon la méthode de Mohr-Vianello, c'est-à-dire le fait de satisfaire aux conditions d'équilibre et de déformations exprimées par cette équation différentielle, fournit une solution plus rigoureuse du problème du flambage. Cette solution n'est possible, comme l'a démontré Kármán pour le cas de très faibles excentricités ($m = \frac{1}{17} - \frac{1}{170}$) qu'au moyen d'une intégration graphique. Pleinement conscients des difficultés que présente l'application de la méthode exacte, nous avons introduit des suppositions admissibles au point de vue technique pour simplifier la résolution du problème, en considérant en particulier la ligne de flexion comme une sinusoïde. Étant donné que les résultats obtenus à l'aide de cette méthode d'approximation (méthode T. K. V. S. B.) corres-

pondent très bien aux résultats qu'on obtient avec la méthode exacte (fig. 2), nous avons introduit la méthode simplifiée et rapide commentée sous chiffre 5 des conclusions du mémoire de Paris (voir aussi fig. 7 de ce mémoire). Les deux méthodes, méthode exacte et méthode d'approximation, permettent de calculer non seulement la stabilité au flambage d'éléments de construction isolés mais aussi celle de systèmes entiers.

Au cours de toutes nos recherches, nous sommes partis du principe que le flambage est un problème de stabibilité et nous avons recherché la simplicité, la clarté et une représentation fidèle, au point de vue physique, du processus du flambage ; nous espérons de cette façon avoir pu servir utilement le constructeur lorsqu'il a à s'occuper de la résistance et de la déformation de barres comprimées, sollicitées jusqu'à la limite d'élasticité ou au-dessus.

Nous avons considéré le flambage par charge centrée comme un cas particulier du flambage par charge excentrée. Les relations $M_a = M_i$ et $\Delta M_a = \Delta M_i$ (fig. 4) représentent un critérium indiscutable pour la charge de flambage ; ces relations expriment l'état d'équilibre indifférent, caractéristique de l'état de flambage, pour une augmentation très petite Δf des flèches de la ligne élastique. En satisfaisant à ces deux conditions, on a un critérium parfait, le seul exact de la stabilité au flambage (fig. 4). D'autres phénomènes tels que la première apparition des déformations plastiques permanentes ou le début de l'allégement sur le côté convexe de la barre, ne peuvent être considérés comme caractéristiques pour l'état limite de la stabilité au flambage.

Le prof. Th. v. Kármán a été le premier à présenter une solution du problème du flambage sous charge excentrée en étudiant la diminution de la force de flambage sous l'influence d'excentricités très faibles ($m \sim \frac{1}{17}$ jusqu'à $\frac{1}{170}$ de la grandeur du noyau). Notre but a été en outre la recherche théorique, la résolution du problème de la stabilité de flambage dans le cas où la force présente une excentricité plus grande et bien caractérisée, telle qu'on en rencontre en construction. Nous avons été attirés dans cette voie par le mémoire de René Koechlin (Paris), « Le calcul d'une barre sollicitée par des efforts de compression excentrée », paru dans la Schweiz. Bauzeitung dès l'année 1899 — Vol. XXXIII, page 159, et du fait de l'introduction du graphique de Koechlin dans la pratique par M. F. Ackermann, ingénieur en chef à Kriens-Lucerne.

I 3

LA STABILITÉ DE L'ÂME ET DES AILES DES BARRES COMPRIMÉES.
DIE STABILITÄT DÜNNER WÄNDE GEDRÜCKTER STÄBE.
STABILITY OF THE WEBS AND THE FLANGES OF COMPRESSED BARS.

Dr. Ing. **F. BLEICH**, Baurat, Wien.

Voir aussi « Publication Préliminaire », p. 107. — *Siehe auch « Vorbericht »*, S. 107.
See also " Preliminary Publication ", p. 107.

Dr. F. BLEICH [1],
Baurat h. c., Wien.

Die in meinem Bericht in der Zusammenstellung angeführten Bemessungsregeln sind aus einer Differentialgleichung gewonnen, die der Voraussetzung Rechnung trägt, dass eine in einer Richtung über die Elastizitätsgrenze gezogene oder gedrückte Platte sich orthotrop verhält. Die bekannten Versuche von Roš und Eichinger weisen auf quasiisotropes Verhalten auch bei Ueberschreiten der Elastizitätsgrenze hin. Neuere Versuche, auf die Hohenemser [2] aufmerksam macht, lassen in gewissen Fällen auf ein Abweichen von der Isotropie schliessen. Nimmt man die Quasi-Isotropie als feststehend an, so bietet die von den Herren Eichinger und Roš mitgeteilte Differentialgleichung mit dem vorangestellten Plattenknickmodul eine einwandfreie wissenschaftliche Grundlage für die Lösung des Stabilitätsproblems der Platte. Ersetzt man nach dem Vorschlage des Herrn Schleicher den Plattenknickmodul durch den Engesser-Kármán-Modul, so erhält man eine nur einige Hundertteile geringere Tragfähigkeit der Platte im unelastischen Bereich, so dass diesem Vorschlage vom Standpunkt der Gewinnung einfacher Bemessungsformeln nur zuzustimmen ist. Es darf aber nicht übersehen werden, dass bei sehr kurzen Stäben, wie sie im Brückenbau häufig genug vorkommen, bei Schlankheiten zwischen 20 und 40 die Formel des Herrn Schleicher bei Forderung gleicher Sicherheit gegen Ausbeulen wie gegen Ausknicken des ganzen Stabes für das Verhältnis $\frac{b}{\delta}$ Ergebnisse liefert, die bei abstehenden Winkelschenkeln bei $\frac{l}{i} = 30$ z. B. das Verhältnis $\frac{b}{\delta} = 6$, bei $\frac{l}{i} = 40$ das Verhältnis $\frac{b}{\delta} = 8$ ergibt. Die gleichen Zahlen gelten auch für die Stege von T -förmigen Gurtquerschnitten. Tatsächlich liegen die Verhältnisse aber so, dass bei kurzen Stäben auch die wirklichen Randbedingungen an den schmalen gedrückten Seiten der Platte nicht ganz ohne Einfluss auf die Tragfähigkeit der Platte sind und diese nicht unwesentlich erhöhen.

---

1. Die hier wiedergegebenen Ausführungen beziehen sich zum Teil auf noch folgende Referate.

2. Hohenemser u. W. Prager, Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flusstahl. Z. A. M. M. 1932, S. 1.

Diese Ueberlegungen waren es, die mich veranlassten, über die unter Annahme der Orthotropie abgeleiteten Formeln zu berichten, obwohl ich die Einwände kannte, die auf Grund der Versuche von Roš und Eichinger gegen die die Grundlage bildende Differentialgleichung erhoben wurden [1].

Ich habe mich in meinem Bericht auf die Versuche bezogen, die anlässlich des Baues der Quebecbrücke durchgeführt wurden. Herr Schleicher bezweifelt die Beweiskraft dieser Versuche, mit dem Hinweis, dass für die Versuchsstäbe stahlartiges Material von 4,79 t/cm² Festigkeit mit einer Streckgrenze von rd. 3,0 t/cm² verwendet wurde, während meine Formeln für übliches Flusseisen von $\sigma_B = 4{,}5$ t/cm² gelten. Das Material, das Tetmajer für seine Versuche benützte, wies Festigkeiten zwischen 3,74 t/cm² und 4,28 t/cm² und Streckgrenzen zwischen 2,82 t/cm² und 3,07 t/cm² mit $\sigma_S = 2{,}99$ t/cm² im Mittel auf. Beide hier erwähnten Werkstoffe zeigen sehr nahe beieinander liegende Streckgrenzen, sodass ich mich wohl berechtigt glaubte, die amerikanischen Versuche zum Vergleich mit den in meinem Bericht angeführten Formeln heranzuziehen. Der Hinweis des Herrn Schleicher, dass der Elastizitätsmodul E des amerikanischen Materiales 2000 t/cm² betrug, während Tetmajer diesen Modul i. M. mit 2150 t/cm² festgestellt hat, ist ohne Bedeutung, da die Formeln für den unelastischen Bereich unabhängig vom Modul E sind und dieser Modul nur ihren Geltungsbereich begrenzt. Im übrigen bin ich der Meinung, dass die in der Diskussion angeschnittenen Fragen nur durch ausführliche Plattenversuche endgültig geklärt werden können.

Zum Schlusse möchte ich auf ein Versehen in meinem Berichte aufmerksam machen. Die Ausgangsgleichung (2) gilt bei den angegebenen Randbedingungen nur für eine ungerade Anzahl von Halbwellen, d. i. für $n = 1,3,5,\ldots$ Sie liefert daher nur die eine Hälfte der möglichen Knickspannungen. Die andere Hälfte die den spiegelsymmetrischen Verformungen entspricht, gewinnt man aus dem ergänzenden Ansatz

$$(2') \quad w = \sin \frac{n \pi x}{a} \left[A \cosh k_1 y + C \cos k_2 y\right]$$

Die Rechnungsergebnisse sind trotzdem richtig, da die für den Ansatz (2) gültige Beschränkung im Laufe der Rechnung stillschweigend fallen gelassen und beliebige Wellenzahlen $n = 1,2,3,\ldots$ zugelassen wurden.

Traduction [2].

Les règles de calcul que contient le tableau figurant dans mon rapport sont déduites d'une équation différentielle dans laquelle il est tenu compte de cette hypothèse que la plaque se comporte d'une manière orthotrope sous l'influence des efforts de traction ou de compression s'exerçant dans une direction déterminée au-dessus de la limite d'élasticité. Les essais bien connus de Roš et d'Eichinger mettent en évidence un comportement quasi isotrope même en cas de dépassement de la limite d'élasticité. De récents essais, sur lesquels Hohen-

1. Siehe : E. Chwalla, Bericht über die II. Intern. Tagung für Brückenbau und Hochbau. Wien, 1929. S. 322.

2. Les observations ci-dessus se réfèrent en partie à des mémoires publiés plus loin.

emser attire l'attention[1], permettent d'ailleurs de constater, dans certains cas, des écarts par rapport à l'isotropie. Si l'on admet la quasi-isotropie, l'équation différentielle établie par Roš et Eichinger constitue un point de départ parfaitement scientifique pour la solution du problème de la stabilité des plaques, cette équation faisant intervenir le module de flambage des plaques, tel qu'il a été établi. Si l'on remplace le module de flambage des plaques par le module de Kármán-Engesser, ainsi que M. Schleicher l'a proposé, on obtient pour la plaque, dans le domaine plastique, une capacité de charge inférieure de quelques centièmes seulement ; on ne peut donc que se rallier à cette proposition, qui permet d'aboutir à des formules de calcul plus simples.

Il ne faut toutefois pas perdre de vue que pour des éléments de très faible longueur, tels que ceux que l'on emploie assez fréquemment dans la construction des ponts et pour des degrés d'élancement compris entre 20 et 40, la formule de M. Schleicher qui implique la même sécurité contre le voilement que contre le flambage de l'élément dans son ensemble, conduit lorsque les ailes sont écartées à des rapports $\frac{b}{\delta}$ tels que pour $\frac{l}{i} = 30$ par exemple, $\frac{b}{\delta} = 6$ et pour $\frac{l}{i} = 40$, $\frac{b}{\delta} = 8$. On obtient les mêmes chiffres pour les âmes des sections de membrures ayant une forme en T. En fait, pour des éléments de faible longueur, les conditions effectives à la périphérie, sur les petits côtés comprimés de la plaque, ne sont pas sans exercer une certaine influence sur la capacité de charge de cette plaque, qu'elles améliorent dans des proportions appréciables.

Ce sont ces considérations qui m'ont conduit à étudier les formules établies en se basant sur l'hypothèse de l'orthotropie ; je n'ignore pas cependant l'objection qui s'est élevée contre l'équation différentielle qui en constitue la base, objection qui repose sur les résultats des essais de Roš et d'Eichinger[2].

Je me suis basé, dans mon rapport, sur les résultats d'essais qui ont été effectués à l'occasion de la construction du Pont de Québec. M. Schleicher émet quelque doute sur la légitimité des conclusions que l'on peut en tirer ; il considère en effet que l'on a utilisé pour la constitution des éprouvettes destinées à ces essais un métal accusant une charge de rupture de 47,9 kg par mm² et une limite d'écoulement de 30 kg par mm² environ, tandis que les formules que j'indique s'appliquent à un acier ordinaire accusant un $\sigma_B = 45$ kg par mm². Le métal que Tetmajer a employé pour ses essais accusait les caractéristiques suivantes :

Charge de rupture entre 37,4 et 42,8 kg par mm² ;

Limite d'écoulement entre 28,2 et 30,7 kg par mm² ;

avec $\sigma_s = 29{,}9$ kg par mm², en moyenne. Les deux limites d'écoulement indiquées ci-dessus sont très voisines ; c'est pourquoi je me suis cru fondé à établir une comparaison entre les résultats des essais américains et les formules indi-

---

1. K. Hohenemser et W. Prager, Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flusstahl. — Z.A.M.M., 1932, p. I.

2. Voir à ce sujet : E. Chwalla, Compte Rendu du deuxième Congrès International des Ponts et Charpentes, Vienne, 1929, p. 322.

quées dans mon rapport. M. Schleicher signale que le module d'élasticité E du métal utilisé en Amérique atteignait 20.000 kg par mm², alors que Tetmayer est arrivé, en moyenne, pour ce module à une valeur de 21.500 kg par mm². Ceci est toutefois sans importance, car les formules qui s'appliquent à la zone plastique ne dépendent pas du module d'élasticité E et ce module n'intervient que pour limiter leur zone d'application. D'ailleurs, j'estime que les questions soulevées dans la discussion ne sont susceptibles d'être définitivement éclaircies que par des essais de plaques très poussés.

Pour terminer, j'attirerai l'attention sur une erreur contenue dans mon rapport. L'équation de départ (2) n'est valable, dans les conditions indiquées pour les bords de la plaque, que pour un nombre impair de demi-ondulations, c'est-à-dire pour $n = 1, 3, 5, \ldots$ Elle ne donne donc que la moitié des contraintes de flambage possibles. On obtient l'autre moitié, qui correspond à des déformations symétriques, par l'opération complémentaire.

$$w = \sin \frac{n \pi x}{a} [A \cosh k_1 y + C \cos k_2 y]$$

Les résultats des calculs n'en sont pas moins exacts, car la restriction valable pour la mise en équation de (2) a été implicitement laissée de côté dans le cours du calcul et on a admis des nombres d'ondulations arbitraires $n = 1, 2, 3, \ldots$

Participants à la discussion.

Diskussionsteilnehmer.

Participants in the discussion.

Dr.-Ing. F. SCHLEICHER,
Professor an der Technischen Hochschule Hannover.

I. — Weitere Versuche über die Knickung von gleichmässig gedrückten Stahlplatten.

Eine interessante Versuchsreihe ist gelegentlich des Baues der Hängebrücke zwischen Philadelphia und Camden durchgeführt worden [1], [2].

Es handelt sich um mit Winkeln gesäumte Rechteckplatten von $b = 88{,}9$ cm Gesamtbreite, bzw. $b' = 58{,}5$ cm zwischen den Saumwinkeln, $a = 305$ cm Länge und Blechdicken $h = 0{,}95$ bis $3{,}80$ cm. Die Platten waren an den Längsrändern lose geführt, das Material war Silizium-Mangan-Stahl von $\sigma_S = 3{,}165$ t/cm² Quetschgrenze und $\sigma_B = 5{,}6$ bis $6{,}7$ t/cm² Zerreissfestigkeit.

Mit $E = 2100$ t/cm², $m = 10/3$ ergibt sich die Knickspannung σ_K für das Seitenverhältnis $\alpha = 3{,}43$ und mit $n = 3$ Halbwellen zu

$$1) \qquad \sigma_K = 7750 \left(\frac{h}{b}\right)^2 \text{ in t/cm}^2.$$

1. W. Schachenmeier, Die Delaware-River-Brücke zwischen Philadelphia und Camden. Die Bautechnik 1927, Seite 513.

2. Clement E. Chase, Research and experimental tests in connection with the design of the bridge over the Delaware River between Philadelphia and Camden. Journal of the Franklin Institute, Vol. 200, Oct. 1925, p. 417.

Für $b = 88{,}9$ cm erhält man danach die folgenden Werte von σ_K. Die eingeklammerten Spannungswerte liegen über der Proportionalitätsgrenze und bedürfen deshalb einer Reduktion.

Aus dem Bericht [2] (S. 123) sind die Werte « beobachtet σ_K » entnommen.

h	b/h	σ_K theoretisch	σ_K beobachtet		Bemerkung
0,95	93,7	0,88	x		knickt vorzeitig aus
1,27	70,1	1,58	x		» » »
1,59	56,0	2,47	x		schon besser
1,90	46,8	(3,53)	3,23	3,17	Querschnitt knickt als Ganzes.
2,54	35,1	(6,30)	3,28	3,17	» » »
			3,09	3,13	
3.80	23,5	(14,1)	3,23	3,27	» » »
cm	—	t/cm²	t/cm²		

Bei 14 Versuchen wurde die Durchbiegung $w = w(\sigma)$ als Funktion der Längsspannung gemessen. Bei den mit x bezeichneten Versuchen konnte keine ausgeprägte Stabilitätsgrenze beobachtet werden, da die Platten schlecht gerichtet waren. Die Höchstlasten entsprachen für $h = 0{,}95$ bis 1,59 cm Spannungen von etwa 2,8 t/cm², wobei die Ausbiegungen bereits ein mehrfaches der Plattendicke betrugen. Abb. 1 zeigt zwei Versuche. Bei der dünnen Platte G1 nahm die Ausbiegung mit der Druckkraft stetig zu, von einer Stabilitätsgrenze kann nicht die Rede sein. Dagegen blieb sie bei den Platten von mehr als 1,9 cm Dicke, die besser gerichtet waren, klein und erreichte erst unter der gut ausgeprägten Knicklast grössere Werte. Abb. 1 zeigt als Beispiel hiefür den Versuch G7A mit einer Platte, die aus zwei 3/4" starken Blechen zusammengenietet wurde. Die Platten mit $h = 1{,}9$ bis 3,8 cm knickten ohne Rücksicht auf die Plattendicke an der Quetschgrenze. Aus zwei Platten zusammengenietete Stege erreichten die gleiche Knickspannung, wie einzelne Bleche von der doppelten Dicke.

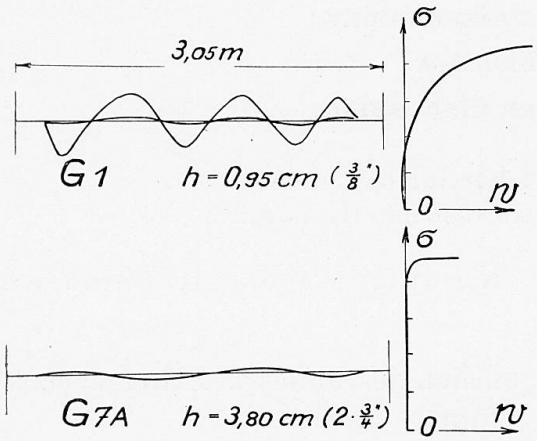

Fig. 1. — Essais de Chase. Déformation des plaques en fonction de la charge = Versuche von Chase. Ausbiegung der Platten als Funktion der Belastung = Test by Chase. Bending of the slabs as a function of the load.

Die anfänglichen Ausbiegungen hatten bei den Versuchen starken Einfluss. Eine Bestimmung der Knickspannungen der Platten mit $h < 1{,}90$ cm war besonders aus diesem Grunde nicht möglich. Es ist auch nicht bekannt, wie weit sich die Stegbleche auf Kosten der vier Saumwinkel entlasteten. Dies gilt besonders für die dünnen Bleche. Von Chase wird weiter bemerkt, dass die Festigkeitszahlen für die dünnen Bleche höher lagen, als für die dickeren Platten.

Aus den Beobachtungen an den dünneren Platten können also keine Schlüsse gezogen werden. Die Kurven für $w = w(\sigma)$ beweisen jedoch, dass die Ver-

suche für die dickeren Platten einwandfrei sind. Ein Vergleich mit der Theorie des Herrn Bleich für die Knickung im unelastischen Bereich ist somit zulässig. Bei den dünnen Blechen stellen sich die Ausbiegungen als Vergrösserung der von vornherein vorhandenen Unebenheiten dar. Die dicken Platten hatten eine gut ausgeprägte Knickgrenze und nach dem Ausbeulen 4 oder 5 Halbwellen. Eine Veränderlichkeit der Wellenzahl mit der Plattendicke ist nicht zu erkennen.

Nach der Theorie der isotropen Platte würden $\alpha = \sqrt{12} = 3{,}46$ sowohl 3 als auch 4 Halbwellen auftreten können, und zwar für die gleiche Knickspannung. Die untersuchten Platten ($\alpha = 3{,}43$) sind also gerade an der Grenze. Wenn die Verallgemeinerung der Differentialgleichung für den unelastischen Bereich zutreffen würde, (Vorbericht, S. 108)

$$2)\qquad \left(\frac{\partial^4 w}{\partial_x{}^4}\tau + 2\frac{\partial^4 w}{\partial_x{}^2\,\partial_y{}^2}\sqrt{\tau} + \frac{\partial^4 w}{\partial_y{}^4}\right) + \frac{\sigma.\,h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial_x{}^2} = 0$$

müsste[1] die Anzahl n der Halbwellen mit σ_K zunehmen und die Beulenlänge jedenfalls viel kleiner als die Plattenbreite sein. Dies ist aber nach Obigem nicht der Fall. Auch bei den Versuchen für die Quebecbrücke ist die zu erwartende Verkleinerung der Beulenlänge nicht zu beobachten[2], sondern die Wellenlänge stimmt im Wesentlichen mit der Plattenbreite überein.

Benützt man für die Berechnung der Knickzahl τ die Gleichung von Tetmajer

$$3)\qquad \sigma_K = 3{,}1 - 0{,}0114\,(l/i)^2,\ \text{in t/cm}^2,$$

die auch Bleich als Grundlage seines Vorschlags für die Dimensionierungsformeln gebraucht, dann ergeben sich Knickspannungen, die mit abnehmendem b/h ansteigen. Für Platten aus normalem Stahl wäre danach z. B. für die Werte $b/h = 46{,}8$ bzw. $23{,}5$ ein Unterschied von rd. 20 % in den Knickspannungen zu erwarten.

Die Versuche von Chase gaben für alle Platten, die dicker waren als 1/50 der ganzen Plattenbreite, die Quetschgrenze als Knickspannung, ein Anwachsen mit der Plattendicke konnte für $h > b/50$ nicht beobachtet werden. Aus den obigen Versuchen muss also die Folgerung gezogen werden, dass die Tetmajer-Formel, bzw. eine ihr entsprechende Gleichung, verbunden mit der verallgemeinerten Theorie von Bleich, keine genügend genaue Ermittlung der Knickspannung gestattet.

Zum Schlusse noch eine Bemerkung über die Randbedingungen an den Längsseiten der Platten. Für die Versuche von Chase ist es unzulässig, die freie Plattenbreite b etwa nur zwischen den Nietreihen oder den Winkelschenkeln zu messen. Beim dritten Versuch wird mit $b' = 58{,}5$ cm Breite $\sigma_K^{el} = 5{,}75$ t/cm², während der Versuch einen weit unter der Quetschgrenze liegenden Wert ergab.

In der Abbildung eines der ausgeknickten Bleche (Chase, p. 420 oder

1. Man vergl. : II. Die Beulenlänge bei Knickung im unelastischen Bereich.
2. Man vergl. : Abb. 8 auf Seite 117 des Vorberichts oder R. Mayer, Die Knickfestigkeit, Abb. 212 auf Seite 425 und Abb. 215 auf Seite 427.

Schachenmeier, S. 514) ist zu erkennen, dass die Beulen nicht durch die Saumwinkel begrenzt sind. Eine nennenswerte Einspannung des Stegbleches in den Saumwinkel war also nicht vorhanden. Diese Beobachtung entspricht dem Vorschlag von Bleich (Vorbericht, S. 112, Fig. 3*c* und *d*), die ganze Plattenbreite in die Rechnung einzuführen.

Eine wirksame elastische Einspannung an den Rändern ist nur vorhanden, wenn die einspannenden Konstruktionsteile nicht gleichzeitig mit der Platte ausbeulen können. Im Normalfall sind gelenkig gelagerte Ränder anzunehmen und in die Rechnung ist die ganze Plattenbreite ohne Abzüge einzuführen.

II. — Die Beulenlänge bei Knickung im unelastischen Bereich.

Für eine an allen Rändern frei aufliegende Rechteckplatte mit gleichmässigen Druckspannungen erhält man nach Bleich die Knickspannung σ_K^{pl} im unelastischen Bereich zu

1) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \frac{\sqrt{\tau}}{4} \left\{ \frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} + \frac{n\sqrt[4]{\tau}}{\alpha} \right\}^2 .$$

Darin bedeutet

2) $$\sigma_{K1}^{el} = \frac{\pi^2 E}{2{,}73} \left(\frac{h}{b}\right)^2, \text{ mit } m = 10/3,$$

die Knickspannung einer Platte aus Material von unbegrenzt hoher Proportionalitätsgrenze bei quadratischen Beulen ($n = \alpha$). Sie ist ebenso gross, wie die Euler-Knickspannung eines Stabes aus dem gleichen Material mit der Schlankheit

3) $$\lambda = 1{,}652\ (b/h).$$

Die Knickzahl

$$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{\sigma^{Euler}}$$

ist von Knickversuchen mit geraden Stäben zu entnehmen. Sieht man in erster Annäherung davon ab, dass τ nach der Theorie von Engesser-Kármán von der Querschnittsform abhängt, so ergibt sich τ als eindeutige Funktion der Knickspannung σ_K^{pl}, bzw. der zugeordneten Euler-Knickspannung σ_{Euler}.

Das Minimum der Knickspannung im unelastischen Bereich

4) $$\min \sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \cdot \sqrt{\tau}.$$

tritt ein, wenn die Beulenzahl n gleich

5) $$n = \alpha / \sqrt[4]{\tau}$$

ist [1]. Die Beulenlänge $l = a/n$ der ausgeknickten Platten ist also mit der Höhe der Knickspannungen veränderlich, und zwar nimmt sie mit wachsender Plattendicke ab.

---

1. Die Beulenzahl ist hier als stetig veränderlich vorausgesetzt, während sie in Wirklichkeit nur ganzzahlige Werte annehmen kann. Das absolute Minimum nach Gl. 4 tritt nur ein, wenn α ein ganzzahliges Vielfaches der vierten Wurzel aus τ ist. Ist das nicht der Fall, dann sind die beiden benachbarten Werte n zu untersuchen und σ_K^{pl} ist etwas grösser als $\min \sigma_K^{pl}$. Der Unterschied ist jedoch bei mehr als zwei Beulen praktisch ohne Bedeutung.

Der Zusammenhang zwischen Beulenlänge und Plattendicke soll nachstehend näher verfolgt werden.

a) Legt man für weichen Flusstahl zur Berechnung von τ die Tetmajer-Formel

6) $$\sigma_K^{pl} = 3{,}1 - 0{,}0114\,\lambda, \text{ in t/cm}^2,$$

zugrunde, dann ist nach Engesser

7) $$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E}\left(\frac{3{,}1 - \sigma_K^{pl}}{\pi.\ 0{,}0114}\right)^2.$$

Beschränkt man sich auf den Kleinstwert der Knickspannung, dann ist für Plattendicken $h > b/64$

8) $$_{\min}\sigma_K^{pl} = 3{,}1 + 2{,}282.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4 - \sqrt{\left\{3{,}1 + 2{,}282.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4\right\}^2 - 9{,}61}, \text{ in t/cm}^2$$

9) $$\tau = 1{,}655.10^{-8}\left(_{\min}\sigma_K^{pl}\right)^2.\left(\frac{b}{h}\right)^4, \text{ in t/cm}^2,$$

In diesen Gleichungen ist nach dem Vorgang von Tetmajer und Bleich $E = 2150$ t/cm² gesetzt[1]. Die Anzahl n der Beulen ergibt sich damit zu

10) $$n = \frac{88{,}1}{\sqrt{_{\min}\sigma_K^{pl}}}\left(\frac{h}{b}\right).\ \alpha, \quad \sigma_K \text{ in t/cm}^2,$$

gegenüber $n = \alpha$ im elastischen Bereich ($h < b/64$). Für verschiedene Plattendicken ergeben sich nach Obigem die in Tabelle 1 zusammengestellten Werte.

Tabelle 1.

b/h	=	50	40	30	25	20	15	10	—
$_{\min}\sigma_K^{pl}$	=	2,292	2,554	2,779	2,874	2,953	3,017	3,063	t/cm²
τ	=	0,544	0,276	0,1041	0,0533	0,0232	0,00755	0,00152	—
n/α	=	1,16	1,38	1,76	2,08	2,56	3,39	5,06	—

b) Für Material mit ausgeprägter Quetschgrenze σ_S, für das die Knickspannung bei Stäben in einem grösseren Bereich der Schlankheit λ mit σ_S zusammenfällt, erhält man folgende Zusammenhänge.

Ist die Knickspannung als Funktion der Stabschlankheit gegeben (Abb. 2),

11) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl}(\lambda),$$

so kann man die Knickzahl τ aus

12) $$\sigma_K^{pl} = \tau.\ \sigma_{Euler}$$

berechnen. Man erhält

13) $$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E}.\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2$$

1. Vergl. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1924, S. 131.

oder wenn man λ durch Umkehrung der Gl. 11 ermittelt und in Gl. 13 einsetzt

$$\tau = \tau\,(\sigma_K^{pl}).$$

Für die in Abb. 2 dargestellte σ_K^{pl}-Kurve sind einige Ergänzungen notwendig. Wenn $\lambda \geqslant \lambda_P$ ist, gilt $\sigma_K^{el} = \sigma_{Euler}$ und $\tau = 1$. In dem Bereich $\lambda_2 < \lambda < \lambda_P$, $\tau < 1$, in dem sich die Knickspannungen $\sigma_K^{pl} < \sigma_S$ mit λ ändern, kann man Gl. 11 umkehren und τ als einwertige Funktion von σ_K^{pl} berechnen. Gleiches gilt für das Gebiet $\lambda < \lambda_1$, bei Knickspannungen, die über der Quetschgrenze liegen,

$$\sigma_K^{pl} > \sigma_S.$$

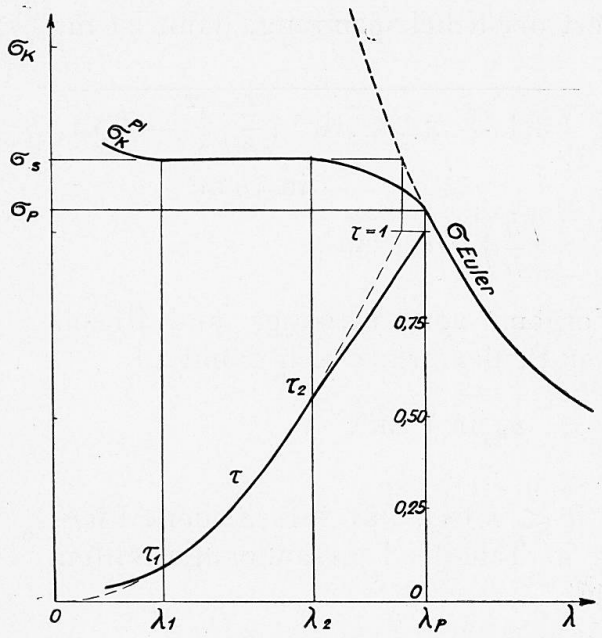

Fig. 2. — Représentation schématique de la relation entre la contrainte de flambage et le coefficient de flambage = Schematische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Knickspannung und Knickzahl = Diagrammatic representation of connection between buckling stress and buckling coefficient.

An den Grenzen λ_1 und λ_2 des mittleren Bereichs stimmt die Knickspannung mit der Quetschgrenze überein, $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$. Die zugehörigen Knickzahlen τ_1 und τ_2 ergeben sich zu

$$14)\qquad \tau_{1,2} = \frac{\sigma_S}{E}\left(\frac{\lambda_{1,2}}{\pi}\right)^2.$$

Die entsprechenden Plattendicken sind

$$(15\qquad \left(\frac{h}{b}\right)_{1,2} = \frac{0{,}527}{\sqrt[4]{\tau_{1,2}}}\sqrt{\frac{\sigma_S}{E}}\,.$$

Für alle Werte $\tau_1 < \tau < \tau_2$ ist $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$.

Da $\tau = \tau\,(\sigma_K^{pl})$ für $\tau < \tau_1$ und $\tau > \tau_2$ bekannt ist, kann die Knickspannung einer Platte unmittelbar aus

$$16)\qquad {}_{\min}\,\sigma_K^{pl} = \sqrt{\tau}\,\frac{\pi^2\,E}{2{,}73}\left(\frac{h}{b}\right)^2$$

berechnet werden. Für den Bereich $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ kann man somit schliessen: Wenn $h_1 \geqslant h \geqslant h_2$ ist, liegt die Knickspannung wegen $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ an der Quetschgrenze, $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$, und es gilt

$$17)\qquad \tau = \left(\frac{2{,}73\ \sigma_S}{\pi^2\ E}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{h}\right)^4.$$

Insbesondere für St 37 ergibt sich mit $\sigma_S = 2{,}4$ t/cm² und[1] $E = 2150$ t/cm²

$$18)\qquad \tau = 9{,}53.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4 \text{ und}$$

$$19)\qquad n = 56{,}9\left(\frac{h}{b}\right)\alpha.$$

$b/h = 56{,}9$ würde dem Grenzfall $\tau = 1$ der elastischen Beulung entspre-

1. Dieser hohe Wert wird eingesetzt, damit ein Vergleich mit a) möglich ist.

chen, wenn σ_P mit σ_S zusammenfallen könnte. Für $b/h = 28{,}4$ wäre im Vergleich zu der elastischen Knickung bereits die doppelte Beulenzahl zu erwarten. Für dieselben Plattendicken wie in Tabelle 1 ergeben sich die nachstehenden Zahlen.

Tabelle 2.

b/h	=	50	40	30	25	20	15	10	—
$\min \sigma_K^{pl}$	=	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	t/cm²
τ	=	0,597	0,244	0,0773	0,0373	0,01526	0,00483	0,000953	—
n/α	=	1,14	1,42	1,90	2,28	2,85	3,80	5,70	—

Vergleicht man Tabelle 1 und 2, so erkennt man, dass sich die Werte n/α nur wenig unterscheiden. Die Annahmen über die Knickspannungen beim Stab sind also in weiten Grenzen von geringem Einfluss auf die Beulenzahl. Diese Zunahme der Beulenzahl mit steigender Plattendicke müsste aber bei Versuchen mit dicken Platten deutlich festzustellen sein. Die bisherigen Versuche (mit $b/h = 23{,}5$) lassen eine solche Abhängigkeit nicht erkennen [1].

Bei der Beulung von ebenen Platten durch Schubspannungen liegen für $\tau_K \geqslant \tau_P = 0{,}58\,\sigma_P$ ähnliche Verhältnisse vor, wie bei der Knickung durch gleichmässige Druckspannungen. Versuche von Bollenrath zur Bestimmung der kritischen Schubspannungen zeigten ebenfalls keinen Unterschied in der Beulenlänge für elastische und unelastische Knickung. Bollenrath [2] sagt darüber: « Ein Unterschied in der Wellenlänge für elastische und unelastische Ausbeulung war nicht festzustellen » und « Die Wellenlänge der Ausbeulung steht in einem konstanten Verhältnis zur Plattenbreite und erweist sich als unabhängig von der Plattendicke und dem Werkstoffe ».

Der nach der Theorie von Bleich bestehende Zusammenhang zwischen Knickspannungen und Beulenlänge im unelastischen Bereich wird durch die Versuche nicht bestätigt.

Die hier angeschnittene Frage ist von grundlegender Bedeutung für die richtige Anordnung der Aussteifungen. Eine Klärung der Verhältnisse ist deshalb dringend notwendig.

III. — Beulung von Platten im unelastischen Bereich.

Die Nachrechnung auf S. 118 des Vorberichts ist mit E = 2150 t/cm² durchgeführt, während für das betr. Material im Mittel nur E = 2000 t/cm² ange-

1. Für den Grenzfall der sehr breiten Platte ($\alpha \to 0$) geht die Knickspannung in

$$\sigma_{K0}^{pl} = \sigma_{K0}^{el} \cdot \tau$$

über, worin σ_{K0}^{el} bis auf einen von der Querkontraktion abhängenden Faktor die bekannte Euler-Knickspannung eines Stabes von der Knicklänge a bedeutet. Diese Uebereinstimmung ist jedoch kein Beweis dafür, dass die Reduktion im unelastischen Bereich auch im allgemeinen Fall zutrifft.

2. F. Bollenrath, Ausbeulerscheinungen an ebenen auf Schub beanspruchten Platten, Dissertation Technische Hochschule Aachen, 1928, Seite 11 bezw. 16.

geben wird. Die Zerreissfestigkeit betrug [1] 4,79 t/cm². Da die Gültigkeit der Tetmajer-Formel auf Material mit weniger als 4,5 t/cm² Zugfestigkeit beschränkt ist [2], wäre mit der « Tetmajer-Formel für Flusseisen von Stahlcharakter » [3] zu rechnen. Berücksichtigt man diese Umstände, dann erhält man eine weniger gute Uebereinstimmung. Die von Bleich für den unelastischen Bereich zugrunde gelegte Differentialgleichung entspricht orthotropen Platten. Diese Voraussetzung « steht jedoch mit der Erfahrung in Widerspruch und führt zu fehlerhaften, auf der Seite der Unsicherheit liegenden Ergebnissen » [4].

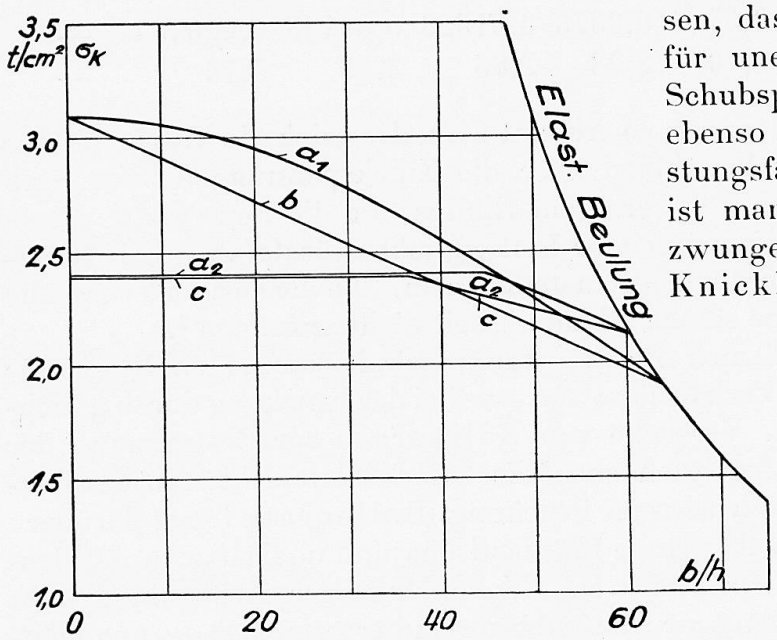

Fig. 3. — Contraintes de flambage sur des plaques rectangulaires soumises à une compression uniformément répartie, dans le domaine inélastique = Knickspannungen gleichmässig gedrückter Rechteckplatten im unelastischen Bereich = Rectangular slabs under uniform pressure; buckling stresses in the non-elastic zone.
Voile élastique = Elast. Beulung = Elast. buckling.

Schliesslich ist darauf hinzuweisen, dass eine Verallgemeinerung für unelastische Beulung durch Schubspannungen bisher fehlt, ebenso für alle anderen Belastungsfälle. Für praktische Zwecke ist man jedoch bereits heute gezwungen, die Abminderung der Knicklasten im unelastischen Bereich in Rechnung zu stellen. Bis Theorie und Versuchswesen weitere Fortschritte gemacht haben, ist ein Weg zu suchen, um diese Wirkung, möglichst für alle Fälle von Instabilität, auf die gleiche einfache Weise zu berücksichtigen. Es stehen dafür folgende Möglichkeiten offen :

a) Entsprechend Gl. 6 auf S. 110 des Vorberichts

1) $\min \sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{pl} \sqrt{\tau}.$

könnte man die unter Annahme unbegrenzt elastischen Materials berechneten Knickspannungen allgemein mit $\sqrt{\tau}$ reduzieren [5]. Die Abb 3 zeigt den Verlauf der Knickspannungen nach Gl. 1, für eine gleichmässig gedrückte

1. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, Tabelle 39. S. 423.
2. L. v. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe, 3. Aufl. Leipzig und Wien, 1903.
3. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, S. 61, Formel für Flusseisen von mehr als 4, 5 t/cm² Zugfestigkeit.
4. E. Chwalla, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturw. Klasse, Abt. IIa, 137. Band, 8. Heft, Wien, 1928.
5. Die Bezeichnung τ für die « Knickzahl » kann zu Verwechslungen Anlass geben, wenn sich die Stabilitätsuntersuchung auf Belastungen durch Schubspannungen τ bezieht. Es empfiehlt sich, die Bezeichnung τ für die Knickzahl zu vermeiden und nur mit $T = \tau E$ bzw T/E zu rechnen.

Rechteckplatte aus Flusstahl (St 37), als Funktion der Plattendicke. Die Kurve a_1 gilt, wenn $\sqrt{\tau}$ aus der Tetmajer-Formel berechnet wird (Gl. 8 von II, a), Kurve a_2 für eine den Reichsbahnvorschriften für St 37 entsprechende Knickspannungslinie, mit $(b/h)_2 = 45{,}3$ (vgl. II, b).

b) Man könnte analog dem Vorschlag von Timoshenko für den unelastischen Bereich der Kippspannungen von Balken (vgl. S. 134 des Vorberichts, bzw. Abb. 3 auf S. 133) auch bei Platten einen geradlinigen Zusammenhang zwischen « Schlankheit » b/h und Knickspannungen σ_K^{pl} annehmen. Die Gerade ist bestimmt durch die Elastizitätsgrenze σ_E (besser Proportionalitätsgrenze σ_P) und die Druckfestigkeit σ_B, letztere vielleicht mit einem etwas ermässigten fiktiven Betrag. Die Kurve *b* in Abb. 3 zeigt diese Gerade mit den Tetmajer'schen Grenzwerten der Spannungen.

c) Wenn die σ_K-Linie für Stäbe [1] bekannt ist, kann man die unter Voraussetzung unbegrenzt elastischen Materials berechneten Spannungen σ_K^{el} bei Platten und Schalen im gleichen Verhältnis wie die Euler-Knickspannung bei Stäben reduzieren.

2) $$\sigma_K^{pl} = \tau . \sigma_K^{el}.$$

Für diesen Zweck braucht man nur die der gleichgrossen Euler-Spannung entsprechende Vergleichsschlankheit

3) $$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_K^{el}}}$$

zu berechnen und in die als bekannt vorausgesetzte Gl. 4 einzusetzen.

4) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{p} (\lambda).$$

Z. B. bei der gleichmässig gedrückten Rechteckplatte ist die Ersatzschlankheit [2] gleich

4') $$\lambda = 1{,}652\ (b/h).$$

Die Kurve c in Abb. 3 zeigt die Knickspannungen, wenn die Knickspannungslinie für St 37 der Reichsbahnvorschriften zugrunde gelegt wird.

Für andere Spannungszustände ist die Höhe der Beanspruchung nach der Plastizitätsbedingung [3] zu messen. Z. B. für Plattenknickung durch Schubspannungen oder Instabilität von Zylinderschalen unter Torsionsbeanspruchung gilt bei dehnbaren Metallen

5) $$\tau_S = 0{,}58\ \sigma_S \text{ bzw. } \tau_P = 0{,}58\ \sigma_P.$$

---

1. Für den vorliegenden Zweck ist σ_K und τ für Stäbe von Rechteckquerschnitt zu benutzen. Ueber den Einfluss der Querschnittsform vergl. man F. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1929, N° 35.

2. Man vergl. den Vorschlag von E. Chwalla (S. 322 des Berichts über die II. internat. Tagung für Brückenbau und Hochbau, Wien, 1928), für gleichmässig gedrückte Platten den Knickmodul allen drei Gliedern der Differentialgleichung zuzuordnen, bei Vernachlässigung der Aenderungen der Poisson'schen Zahl m. Man erkennt, dass dieser Vorschlag mit der Reduktion nach c) übereinstimmt.

3. Man vgl. F. Schleicher, Ueber die Sicherheit gegen Ueberschreiten der Fliessgrenze bei statischer Beanspruchung. Der Bauingenieur (9), 1928, Heft 15.

Bei allgemeinen kritischen Spannungszuständen ist anstatt Gl. 5 die Plastizitätsbedingung zu benutzen. Die Vergleichsspannung σ_{gK}, welche die Platte als einfache Druckspannung ebenso hoch beansprucht, wie der gegebene allgemeine Spannungszustand, tritt an die Stelle der Euler-Knickspannung σ_K^{el}, sodass die reduzierte Knickspannung wird

$$\sigma_{gK}^{pl} = \sigma_{gk}^{pl}\,(\sigma_{gk}^{el}) = \sigma_K^{pl}\,(\lambda_g). \tag{6}$$

Diese Art der Reduktion entspricht der Tatsache, dass die Quasi-Isotropie des Stahls auch im unelastischen Bereich der Spannungen erhalten bleibt [1]. Aus diesem Grunde tritt nur eine Abminderung in der Höhe der Knickspannungen ein, während die Beulenform wie bei der elastischen Knickung bleibt.

Die Abminderung nach c) lässt sich ohne Weiteres bei beliebiger Knickspannungslinie anwenden. Sie wurde in neuerer Zeit z. B. für die Stabilitätsuntersuchungen bei der « Dreirosenbrücke » über den Rhein in Basel (kontinuierlicher Blechbalken mit 75 + 105 + 75 m Stützweite) angewendet, die von der M.A.N., Werk Gustavsburg, und der Buss A.G., Basel, erbaut wird.

Wenn die Plattensteifigkeit gleichmässig abgemindert wird (sog. homogene Spannungszustände), so sind die Gleichungen genau zutreffend. Ist dagegen der Spannungszustand veränderlich, dann variiert τ D mit der Stelle und die nach c) reduzierten Spannungen sind zu klein, wenn die Reduktion für die grösste Beanspruchung durchgeführt wird.

Bei nicht homogenen Spannungszuständen ist nach Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze in der Regel mit einem Spannungsausgleich zu rechnen. Um in solchen Fällen eine genauere Berechnung durchführen zu können, müsste man, bekannte Spannungsverteilung vorausgesetzt, die Plattensteifigkeit in der Plattenbiegungsgleichung als Funktion der Höhe der Beanspruchung einführen.

$$\nabla^4 w + \frac{h.\,\sigma_x\,(y)}{D.\,\tau\,(y)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{7}$$

Schliesslich wäre noch zu untersuchen, wie sich der Umstand auswirkt, dass die bleibenden Formänderungen ohne Volumdehnung erfolgen [2]. Den Werten m = 10/3 im elastischen, bzw. m = 2 im plastischen Bereich würde ein Unterschied von 21 % in den Plattensteifigkeiten D entsprechen.

Wir fassen unsere Meinung über die Reduktion der kritischen Spannungszustände für allgemeine Stabilitätsgrenzen zusammen :

---

1. Man vergl. : M. Roš und A. Eichinger, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. 1) Verhandlungen des zweiten internat. Kongresses für technische Mechanik, Zürich 1926. 2) Mitteilungen des schweizer. Verbandes für die Materialprüfungen der Technik, Zürich, September 1926. 3) Diskussionsbericht N° 34 der eidgen. Materialprüfungsanstalt in Zürich, Februar 1929.

W. Lode, Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle. Dissertation Göttingen, 1926 (Heft 303 der Forsch. Arbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Berlin, 1928).

Neue Versuche weisen allerdings darauf hin, dass unter gewissen Umständen auch ein von der Isotropie abweichendes Verhalten eintreten kann. Man vgl. K. Hohenemser und W. Prager, Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flusstahl. Z. A. M. M. (12), 1932.

2. Man vergl. die in 1) genannten Arbeiten von Roš und Eichinger, und zwar Abb. 12 von N°. 2 und Abb. 44, 65, 66 von N°. 3.

Die Reduktion nach *a*) ist nicht zu empfehlen, da sie durch die Beobachtungen nicht bestätigt wird und zu hoch liegende Knickspannungen gibt.

Nach *b*) erhält man für den Bereich $\sigma_P < \sigma < \sigma_S$ i. a. genügend genau zutreffende Werte, sodass diese Art der Reduktion z. B. dann brauchbar sein dürfte, wenn die Knickspannungslinie nicht bekannt ist. Für dicke Platten wird die Stabilität danach jedoch überschätzt, sodass es sich empfiehlt, Werte $\sigma_K > \sigma_S$ (bzw. die der Plastizitätsbedingung entsprechende Beanspruchung) durch σ_S zu ersetzen.

Die Abminderung nach *c*) entspricht dem heutigen Stande unserer Kenntnisse am besten. Sie kann allgemein empfohlen werden; sowohl für homogene, als für nicht homogene Spannungszustände. Für die letzteren bleibt man auf der sicheren Seite, wenn man die Reduktion für die am stärksten beanspruchte Stelle durchführt.

Traduction.

I. — Autres essais sur le flambage des plaques d'acier uniformément comprimées.

Une série d'essais très intéressants a été effectuée à l'occasion de la construction du pont suspendu reliant Philadelphie à Camden [1, 2].

Il s'agit ici de plaques rectangulaires, bordées avec des cornières et accusant les dimensions suivantes : largeur totale $b = 88{,}9$ cm. ; largeur entre les cornières $b' = 58{,}5$ cm. ; longueur $a = 305$ cm. ; épaisseurs $h = 0{,}95$ cm. à 3,80 cm.

Les plaques ne comportaient aucun encastrement sur les bords longitudinaux et étaient constituées en acier au silicium-manganèse, accusant les caractéristiques suivantes : limite de compression $\sigma_S = 3{,}165$ t/cm² ; charge de rupture $\sigma_B = 5{,}6$ à 6,7 t/cm².

Pour $E = 2100$ t/cm², $m = 10/3$, on obtient la charge de flambage σ_K, pour un rapport entre les côtés égal à $\alpha = 3{,}43$ et en tenant compte d'un nombre de demi-ondulations $n = 3$: par la relation suivante :

$$\sigma_K = 7750 \left(\frac{h}{b}\right)^2 \text{ en t/cm}^2. \tag{1}$$

Pour $b = 88{,}9$ cm., on obtient les valeurs de σ_K indiquées dans le tableau suivant. Les valeurs indiquées entre parenthèses se trouvent au-dessus de la limite de proportionnalité et doivent donc subir une diminution. Les « σ_K observés » ont été tirées du Rapport.

Au cours de 14 essais, la déformation $w = w(\sigma)$ a eté déterminée en fonction de la contrainte longitudinale. Dans les essais marqués « x », on n'a pu observer aucune limite de stabilité nettement accusée, car les plaques étaient mises en place d'une manière défectueuse. Les charges les plus élevées corres-

1. W. Schachenmeier, Die Delaware River Brücke zwischen Philadelphia und Camden. Die Bautechnik, 1927, p. 513.

2. Clement E. Chase, Research and experimental tests in connection with the design of the bridge over the Delaware River between Philadelphia and Camdem, Journal of the Franklin Institute, vol. 200, oct. 1925, p. 417.

pondaient, pour $h = 0{,}95$ à $1{,}59$ cm., à des contraintes d'environ 2,8 t/cm², les déformations correspondantes atteignant déjà une valeur multiple de l'épaisseur de la plaque. La figure 1 se rapporte à deux de ces essais. Pour la plaque mince G 1 la déformation augmenta régulièrement avec l'effort de compression et il ne peut pas dans ce cas être question d'une limite de stabilité. Par contre, pour les plaques dont l'épaisseur était supérieure à 1,9 cm., la déformation est restée faible, car ces plaques étaient fixées dans de meilleures conditions ; elle n'a atteint des valeurs élevées que sous l'influence d'une charge de flambage nettement accusée. On trouvera sur la figure 1, à titre d'exemple, l'essai G7A, effectué avec une plaque constituée par deux tôles fortes de 3/4″ (19,05 mm.) rivées ensemble. Les plaques ayant une épaisseur de $h = 1{,}9$ à 3,8 cm. ont flambé à la limite de compression sans que l'épaisseur elle-même de la plaque intervienne. Sur les pièces constituées par deux plaques rivées, on a atteint la même contrainte de flambage que sur des tôles simples d'épaisseur double.

Les déformations initiales ont exercé, au cours de ces essais, une influence très marquée. Pour cette raison principalement, il ne fut pas possible de déterminer les contraintes de flambage des plaques dont l'épaisseur était inférieure à 1,90 cm. On ignore également dans quelle mesure les tôles constituant en quelque sorte l'âme ont pu être soulagées par la présence des quatre cornières de bordure ; ceci d'ailleurs particulièrement en ce qui concerne les tôles minces. Chase a remarqué ultérieurement que les chiffres de résistance des tôles minces étaient relativement plus élevés que ceux des tôles de plus forte épaisseur.

h cm	b/h	σ_K théorique t/cm²	σ_K observé t/cm²	Observations
0,95	93,7	0,88	x	flambage anticipé
1,27	70,1	1,58	x	flambage anticipé
1,59	56	2,47	x	comportement meilleur
1,90	46,8	(3,53)	3,23 3,17	la section flambe dans son ensemble
2,54	35,1	(6,3)	(3,28 3,17) (3,09 3,13)	»
3,80	23,5	(14,1)	3,23 3,27	»

Aucune conclusion n'a pu non plus être tirée des observations effectuées sur les tôles minces. Les courbes pour $w = w(\sigma)$ montrent toutefois que les essais effectués sur les tôles épaisses sont remarquablement bons. Ils permettent une comparaison avec la théorie établie par M. Bleich pour le flambage dans le domaine inélastique. Pour les tôles minces les déformations ne constituent, en somme, que les accentuations des gauchissements initiaux dont il a déjà été fait mention. Les tôles épaisses ont accusé une limite de

flambage très nette, et, après apparition du voile, 4 ou 5 demi-ondulations se sont manifestées. On n'a pas pu constater de modifications dans le nombre des ondulations en fonction de l'épaisseur des plaques.

D'après la théorie des dalles isotropes, pour $\alpha = \sqrt{12} = 3{,}46$, il pourrait se produire aussi bien 3 que 4 demi-ondulations ; cela pour la même contrainte de flambage. Les plaques étudiées se trouvaient donc à la limite, puisque $\alpha = 3{,}43$. S'il est légitime de généraliser l'équation différentielle de déformation des plaques minces dans le domaine inélastique (voir Publication Préliminaire, page 120) :

$$2) \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial_x{}^4}\tau + 2\frac{\partial^4 w}{\partial_x{}^2\,\partial_y{}^2}\sqrt{\tau} + \frac{\partial^4 w}{\partial_y{}^4} + \frac{\sigma\, h}{D}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial_x{}^2} = 0$$

le nombre n des demi-ondulations devrait [1] augmenter avec σ_K et la longueur intéressée par le voile devrait dans tous les cas être beaucoup plus faible que la largeur des plaques. D'après ce qui précède, ce n'est toutefois pas le cas. La diminution que l'on pouvait escompter sur la longueur intéressée par le voile n'a pas été observée non plus au cours des essais sur le pont de Québec [2], la longueur d'onde coïncidant sensiblement avec la largeur des plaques.

Si l'on fait appel, pour le calcul du coefficient de flambage τ, à l'équation de Tetmajer :

$$3) \qquad \sigma_K = 3{,}1 - 0{,}0114\left(\frac{l}{i}\right)^2 \text{ en t/cm}^2$$

qui est également à la base de l'étude de Bleich concernant le calcul des dimensions des plaques, on obtient alors des contraintes de flambage qui s'élèvent lorsque le rapport b/h diminue. Pour des plaques en acier normal, on arrive par exemple, pour des valeurs de b/h égales à 46,8 et 23,5, à des écarts de 20 % environ sur les contraintes de flambage, par rapport aux valeurs escomptées.

Les essais de Chase ont donné comme contrainte de flambage, pour toutes les plaques dont l'épaisseur est supérieure au 1/50 de la largeur totale, la limite de compression elle-même ; pour $h > b/50$, on n'a pas pu observer de valeurs supérieures pour une augmentation de l'épaisseur de la plaque. Les essais qui précèdent permettent donc de conclure que la formule de Tetmajer, ou toute autre relation correspondante, en liaison avec la théorie généralisée de Bleich, ne permettent pas de déterminer d'une manière suffisamment précise la contrainte de flambage.

Faisons encore une remarque, pour conclure, au sujet des conditions régnant aux bords de la plaque, sur les grands côtés. Il n'est pas admissible de mesurer, pour l'interprétation des essais de Chase, la largeur libre b de la plaque entre les rangées de rivets ou entre les arêtes des cornières seulement. Dans le troisième essai, avec $b' = 58{,}5$ on obtient :

$$\sigma_K^{el} = 5{,}75 \text{ t/cm}^2$$

---

1. Voir : Die Beulenlänge bei Knickung im elastischen Bereich.
2. Voir : Fig. 8, p. 117 de la Publication Préliminaire, ou R. Mayer, Die Knickfestigkeit, fig. 212, p. 425 et fig. 215, p. 427.

tandis que l'essai donne une valeur qui se trouve très nettement au-dessous de la limite de compression.

La photographie d'une des tôles ayant subi le flambage montre (Chase, p. 420, ou Schachenmeier, p. 514) que le voile n'est pas limité par les cornières de bordure. On ne peut donc pas dire qu'il y ait eu effectivement un encastrement de la tôle par la cornière de bordure. Cette observation correspond au projet de Bleich (Publication Préliminaire, p. 112, fig. 3 *c* et *d*) d'introduire la largeur entière de la plaque dans le calcul.

Il n'y a effectivement un encastrement élastique sur les bords de la plaque que lorsque les pièces qui sont susceptibles de constituer cet encastrement ne peuvent pas simultanément participer au voile de la plaque elle-même. Dans le cas général, il faut admettre que les bords de la plaque comportent un appui articulé et la largeur totale de la plaque doit être introduite dans les calculs sans aucune réduction.

II. — Importance du voile par flambage dans le domaine plastique.

Pour une plaque rectangulaire reposant librement sur ses quatre bords, et soumise à des contraintes uniformément réparties, on obtient la contrainte de flambage, suivant Bleich, dans le domaine inélastique, par la relation :

1) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \frac{\sqrt{\tau}}{4} \left(\frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} + \frac{n\sqrt[4]{\tau}}{\alpha} \right)^2.$$

relation dans laquelle :

2) $$\sigma_{K1}^{el} = \frac{\pi^2 E}{2{,}73} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \text{ avec } m = 10/3$$

représente la charge de flambage d'une plaque constituée par un matériau présentant une limite de proportionnalité infiniment élevée pour le voile rectangulaire ($n = \alpha$). Cette contrainte de flambage a la même valeur que la contrainte de flambage d'Euler pour une barre constituée avec le même matériau et ayant un degré de finesse :

3) $$\lambda = 1{,}652 . \frac{b}{h}$$

Le coefficient de flambage

$$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{\sigma_{Euler}}$$

est fourni par les essais de flambage sur barre rectilignes.

Si, à titre de première approximation, on fait abstraction du fait que τ dépend de la forme de la section, suivant la théorie d'Engesser-Kármán, on obtient τ en le considérant comme fonction définie de la contrainte de flambage σ_K^{pl} ou de la contrainte de flambage d'Euler correspondante σ_{Euler}.

On atteint le minimum de la contrainte de flambage dans le domaine plastique :

4) $$\min \sigma_K^{pl} = \sigma_{K1}^{el} \sqrt{\tau}.$$

lorsque le nombre de demi-ondulations n est égal à [1] :

5) $$n = \frac{\alpha}{\sqrt[4]{\tau}}$$

La longueur du voile $l = \frac{a}{n}$ de la plaque ayant subi le flambage est donc variable suivant le niveau des contraintes de flambage ; en pratique, elle diminue d'ailleurs lorsque l'épaisseur de la plaque augmente.

Il est intéressant d'étudier d'une manière plus approfondie la relation qui existe entre la longueur du voile et l'épaisseur de la plaque.

a) Si l'on se base sur la formule de Tetmajer pour le calcul de τ dans le cas de l'acier doux :

6) $$\sigma_K^{pl} = 3{,}1 - 0{,}0114\ \lambda \text{ en t/cm}^2$$

on obtient, d'après Engesser :

7) $$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E}\left(\frac{3{,}1 - \sigma_K^{pl}}{\pi\, 0{,}0114}\right)^2.$$

Si l'on se limite à la plus faible valeur de la contrainte de flambage, on obtient alors, pour une épaisseur de plaque $h > b/64$:

8) $${}_{\min}\sigma_K^{pl} = 3{,}1 + 2{,}282.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4 - \sqrt{\left(3{,}1 + 2{,}282.10^{-8}\left(\frac{b}{h}\right)^4\right)^2 - 9{,}61}$$

en t/cm², et :

9) $$\tau = 1{,}655.10^{-8}\left({}_{\min}\sigma_K^{pl}\right)^2 . \left(\frac{b}{h}\right)^4 \text{ en t/cm}^2.$$

Dans les équations, suivant la méthode de Tetmajer et de Bleich, on pose $E = 2150$ t/cm² [2]. Le nombre n des voiles est défini par la relation :

10) $$n = \frac{88{,}1}{\sqrt{{}_{\min}\sigma_K^{pl}}} . \frac{h}{b} . \alpha \ (\sigma_K^{pl} \text{ en t/cm}^2)$$

alors que $n = \alpha$ dans le domaine plastique ($h < b/64$). On trouvera dans le tableau 2 ci-contre les valeurs obtenues pour différentes valeurs de l'épaisseur des plaques.

$\frac{b}{h}$	50	40	30	25	20	15	10
${}_{\min}\sigma_K^{pl}$	2,292	2,554	2,779	2,874	2,953	3,017	3,063
τ	0,544	0,276	0,104	0,0533	0,0232	0,00755	0,00152
n/α	1,16	1,38	1,76	2,08	2,56	3,39	5,06

1. Le nombre d'ondulations est ici supposé variable d'une manière continue, tandis qu'en réalité il ne peut prendre que des valeurs entières. Le minimum absolu suivant la relation (4) ne se produit que lorsque α est un multiple entier de la racine quatrième de τ. Si ce n'est pas le cas, il faut rechercher les deux valeurs voisines de n et σ_K^{pl} est un peu plus élevé que ${}_{\min}\sigma_K^{pl}$. La différence est toutefois sans importance lorsqu'il s'agit de plus de deux ondulations.

2. Voir Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1924, page 131.

b) Pour un matériau admettant une limite de compression très nette σ_{-S} pour lequel la contrainte de flambage à l'état de barre concorde avec σ_{-S} pour une large marge de variation du degré de finesse λ, on obtient les relations qui suivent :

Si la contrainte de flambage est donnée en fonction du degré de finesse à l'état de barre (figure 2) :

11) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl}(\lambda)$$

on peut alors calculer le coefficient de flambage τ en partant de la relation :

12) $$\sigma_K^{pl} = \tau . \sigma_{(Euler)}$$

et on obtient :

13) $$\tau = \frac{\sigma_K^{pl}}{E} \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2$$

ou, en déterminant λ par inversion de l'équation (11) et en la remplaçant par sa valeur dans l'équation (13) :

$$\tau = \tau\,(\sigma_K^{pl}).$$

Quelques commentaires sont nécessaires au sujet de la courbe de σ_K^{pl} représentée sur la figure 2.

Si $\lambda \geqslant \lambda_P$ alors $\sigma_K^{el} = \sigma_{Euler}$ et $\tau = 1$. Dans la zone définie par : $\lambda_2 < \lambda < \lambda_P$, $\tau < 1$, dans laquelle les contraintes de flambage $\sigma_K^{pl} < \sigma_{-S}$ varient avec λ, on peut inverser l'équation (11) et calculer τ comme une fonction définie de σ_K^{pl}. Il en est de même pour la zone $\lambda < \lambda_1$ pour des contraintes de flambage qui se trouvent au-dessus de la limite de compression.

Pour les limites λ_1 et λ_2 de la zone moyenne, la contrainte de flambage coïncide avec la limite de compression :

$$\sigma_K^{pl} > \sigma_{-S}.$$

Les coefficients de flambage correspondants τ_1 et τ_2 peuvent être déduits de la relation suivante :

14) $$\tau_{1,2} = \frac{\sigma_{-S}}{E} \cdot \left(\frac{\lambda_{1,2}}{\pi}\right)^2.$$

Les épaisseurs correspondantes des plaques sont données par la relation :

15) $$\left(\frac{h}{b}\right)_{1,2} = \frac{0{,}527}{\sqrt[4]{\tau_{1,2}}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{-S}}{E}}.$$

Pour toutes les valeurs de τ telles que : $\tau_1 < \tau < \tau_2$ on a :

$$\sigma_K^{pl} = \sigma_{-S}.$$

Comme $\tau = \tau\,(\sigma_K^{pl})$ est connu pour $\tau < \tau_1$ et $\tau > \tau_2$ la charge de flambage d'une plaque peut être calculée directement à partir de la relation :

16) $$\min \sigma_K^{pl} = \sqrt{\tau} \cdot \frac{\pi^2 E}{2,73} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2 .$$

Pour la zone $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ on peut donc conclure :

Si $h_1 \geqslant h \geqslant h_2$ la contrainte de flambage coïncide avec la limite de résistance à la compression : $\sigma_K^{pl} = \sigma_S$ car $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ et l'on a :

17) $$\tau = \left(\frac{2,73\ \sigma_S}{\pi^2 E}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{h}\right)^4 .$$

En particulier, pour l'acier St. 37, on obtient avec $\sigma_S = 2,4$ t/cm² et [1] $E = 2150$ t/cm²

18) $$\tau = 9,53.10^{-8} \left(\frac{b}{h}\right)^4 \text{ et}$$

19) $$n = 56,9 . \frac{h}{b} \alpha .$$

$b/h = 56,9$ correspondrait à la limite $\tau = 1$ du voile dans le domaine élastique, si σ_P pouvait coïncider avec σ_S. Pour $b/h = 28,4$ on pourrait déjà escompter un nombre d'ondulations double, par rapport au flambage dans le domaine élastique. Pour les mêmes épaisseurs de plaque que dans le tableau 2 précédent, on arrive aux chiffres du tableau 3 ci-contre.

$\frac{b}{h}$	50	40	30	25	20	15	10
$\min \sigma_K^{pl}$	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40
τ	0,597	0,244	0,0773	0,0373	0,01526	0,00483	0,000953
n/α	1,14	1,42	1,90	2,28	2,85	3,80	5,70

Si l'on compare les tableaux 2 et 3, on constate que les valeurs de n/α diffèrent très peu. Les hypothèses concernant les contraintes de flambage de la barre sont donc, dans de larges limites, sans influence sensible sur le coefficient n. Cette augmentation du nombre de voiles lorsque l'épaisseur de la plaque augmente demande toutefois à être établie en toute certitude, par des essais, pour les plaques épaisses. Les essais qui ont été effectués jusqu'à maintenant, avec $b/h = 23,5$ ne permettent pas de mettre en évidence une telle relation [2].

---

1. Cette valeur élevée est adoptée ici afin de permettre la comparaison avec le cas *a* précédent.

2. Dans le cas limite d'une plaque très large ($\alpha \rightarrow 0$), la contrainte de flambage devient :

$$\sigma_{K0}^{pl} = \sigma_{K0}^{el}$$

relation dans laquelle σ_{K0}^{el} désigne la contrainte de flambage connue d'Euler pour une barre ayant une longueur de flambage *a* et sous réserve de l'introduction d'un facteur dépendant de la contraction transversale. Cette concordance ne prouve toutefois nullement que la réduction se présente également, dans le domaine plastique, dans le cas général.

Dans le cas du voile de plaques planes par suite de contraintes de cisaillement et pour :

$$\tau_K \geqslant \tau_P = 0{,}58\ \sigma_P$$

on se trouve en présence de conditions semblables à celles que présente le flambage sous l'action de contraintes de compression uniformément réparties. Les essais effectués par Bollenrath en vue de la détermination des contraintes critiques de cisaillement n'ont également mis en évidence aucune différence pour les longueurs de voile, entre les flambages élastique et plastique. Bollenrath [1] dit, à ce sujet : « Il n'y a pas à mettre en évidence une différence entre les flambages élastique et plastique » et « Les longueurs d'onde au voile sont dans un rapport constant avec la largeur des plaques et se montrent indépendantes de l'épaisseur des plaques et du matériau utilisé ».

La relation qui, suivant la théorie de Bleich, existe entre : la contrainte de flambage et la longueur du voile, dans le domaine plastique, n'est pas confirmée par les essais.

La question étudiée ici est d'une importance capitale pour la disposition judicieuse des éléments de renforcement. Il est absolument nécessaire, par conséquent, d'aboutir à une notion très nette des conditions effectives.

III. — Le voile des plaques dans le domaine plastique.

Le calcul de la page 126 de la Publication Préliminaire est exécuté avec $E = 2150$ t/cm², tandis que pour le métal considéré, on n'a environ, en moyenne, que $E = 2000$ t/cm². La résistance à la traction a atteint 4,79 t/cm² [2]. Comme la validité de la formule de Tetmajer est limitée à un métal accusant une résistance à la traction inférieure à 4,5 t/cm² [3], le calcul devrait être effectué avec la « formule de Tetmajer pour fontes présentant les caractéristiques de l'acier » [4].

Si l'on tient compte de cette remarque, on obtient alors une concordance moins bonne. L'équation différentielle sur laquelle se base Bleich pour le domaine plastique correspond aux plaques orthotropes. Cette hypothèse « est toutefois en contradiction avec les faits expérimentaux et conduit à des résultats erronés, tendant à provoquer une certaine insécurité » [5].

Enfin, il faut attirer l'attention sur le fait que jusqu'à maintenant, il n'existe pas de généralisation pour l'étude du flambage dans le domaine plastique, sous l'influence de contraintes de cisaillement, pas plus d'ailleurs que pour tous

---

1. F. Bollenrath, Ausbeulerscheinungen an ebenen auf Schub beanspruchten Platten. Dissertation, Ecole Polytechnique d'Aix-la-Chapelle, 1928, p. 11 et 16.
2. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, tableau 39, p. 423.
3. L. v. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technich wichtigsten Baustoffe, 3e édition, Leipzig et Vienne, 1903.
4. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, page 61, Formule pour aciers accusant une résistance à la traction de plus de 4,5 t/cm².
5. E. Chwalla, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Rapport de Séance de l'Académie des Sciences de Vienne, Mathématiques-Sc. Naturelles, Sec. IIa, Vol. 137, fasc. 8, Vienne, 1928.

autres cas de charges ; en pratique, on est toutefois obligé de faire entrer en ligne de compte une réduction de la charge de flambage dans le domaine plastique. Tant que la théorie et la recherche expérimentale n'auront pas accompli de nouveaux progrès, il importe de chercher un moyen permettant de tenir compte de cette influence, s'appliquant, dans toute la mesure du possible, à tous les cas d'instabilité d'une manière également simple. On se trouve, à ce sujet, en présence des possibilités suivantes :

a) Suivant l'équation (6) de la page 121 de la Publication Préliminaire,

1) $$_{\min}\,\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl} \cdot \sqrt{\tau}$$

on pourrait réduire dans le rapport $\sqrt{\tau}$, d'une manière générale, les contraintes de flambage calculées dans l'hypothèse d'un matériau possédant une élasticité illimitée [1]. La figure 3 représente la variation des contraintes de flambage suivant l'équation (1) pour une plaque rectangulaire soumise à une compression uniformément répartie en acier St. 37, en fonction de l'épaisseur de cette plaque. La courbe a_1 s'applique au cas où $\sqrt{\tau}$ est calculé à partir de la formule de Tetmajer (équation (8) de la partie II, *a*) ; la courbe a_2 s'applique à une courbe de flambage correspondant aux prescriptions des Chemins de Fer Allemands pour l'acier St. 37, avec $(b/h)_2 = 45{,}3$ (voir II, *b*).

b) On pourrait également, suivant le projet de Timoshenko concernant les tensions critiques des poutres dans le domaine plastique (voir figure 3, page 133 et page 152 de la Publication Préliminaire), admettre une relation linéaire, même en ce qui concerne les plaques, entre le degré de finesse b/h et les contraintes de flambage σ_K^{pl}. Cette droite est déterminée par la limite d'élasticité (ou mieux par la limite de proportionnalité) et par la résistance à la compression, cette dernière étant représentée ici d'une manière fictive avec une certaine réduction. Cette droite est représentée par la courbe *b* de la figure 3, avec les valeurs limites des contraintes suivant Tetmajer.

c) Si l'on connaît la courbe σ_K pour les barres [2] on peut réduire les contraintes calculées dans l'hypothèse d'un matériau infiniment élastique σ_K^{el} pour les plaques et les parois minces, dans le même rapport que l'on réduit la contrainte d'Euler pour les barres.

2) $$\sigma_K^{pl} = \tau . \sigma_K^{el}.$$

Il suffit pour cela de calculer le degré de finesse relatif correspondant à la contrainte d'Euler équivalente :

3) $$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_K^{el}}}$$

---

1. L'appellation τ adoptée pour le coefficient de flambage peut donner lieu à des confusions, si le problème de stabilité envisagé se rapporte à des charges de cisaillement τ. Il est donc à recommander d'éviter l'emploi de la désignation τ pour le coefficient de flambage et de ne faire intervenir que $T = \tau E$ ou T/E.

2. Dans le cas présent, il faut faire intervenir σ_K et τ pour des barres de section rectangulaire. En ce qui concerne l'influence de la forme de la section, voir F. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1929, nº 35.

et de le reporter dans l'équation (4) supposée connue :

4) $$\sigma_K^{pl} = \sigma_K^{pl}(\lambda).$$

Par exemple, pour la plaque rectangulaire soumise à une compression uniformément répartie, le degré de finesse équivalent est égal à [1] :

4') $$\lambda = 1{,}652\,(b/h).$$

La courbe *c* de la figure 3 représente les contraintes de flambage obtenues lorsque l'on adopte la courbe de flambage prévue dans les prescriptions des Chemins de Fer Allemands pour l'acier St. 37.

Pour d'autres régimes de charge, la valeur de la contrainte doit être calculée d'après les considérations de plasticité [2]. Par exemple, pour le flambage des plaques par contraintes de cisaillement ou l'instabilité des parois cylindriques minces sous l'influence de contraintes de torsion, on a, pour des métaux susceptibles d'accuser un allongement :

5) $$\tau_S = 0{,}58\,\sigma_S \text{ et } \tau_P = 0{,}58\,\sigma_P.$$

Pour tous les régimes critiques en général, on utilisera la condition de plasticité au lieu de l'équation 5. La contrainte de comparaison σ_{gK} qui correspond pour la plaque, à titre de compression simple, à la même contrainte que le régime de charge général indiqué, intervient à la place de la contrainte de flambage d'Euler, de telle sorte que la contrainte de flambage devient, après réduction :

6) $$\sigma_{gK}^{pl} = \sigma_{gK}^{pl}(\sigma_{gK}^{el}) = \sigma_K^{pl}(\lambda_g).$$

Ce mode de réduction correspond au fait que la quasi-isotropie de l'acier se conserve même dans le domaine inélastique des charges [3].

Par suite, il ne se manifeste qu'une diminution dans la valeur des contraintes de flambage, la forme que prend le voile restant la même que dans le cas du flambage élastique.

La méthode de réduction suivant *c* peut être utilisée sans dispositions spé-

---

1. Voir la proposition de E. Chwalla (p. 322 du Rapport sur la 2e Conférence Internationale des Ponts et Charpentes, Vienne, 1929) tendant à rapporter le module de flambage, pour les plaques soumises à une compression uniformément répartie, aux trois termes de l'équation différentielle, en négligeant les variations du coefficient de Poisson m. On voit que cette proposition concorde avec la réduction indiquée en *c*.

2. Voir Schleicher, Ueber die Sicherheit gegen Ueberschreiten der Fliessgrenze bei statischer Beanspruchuug. Bauingenieur, 9, 1928, n° 15.

3. Voir : M. Roš et A. Eichinger, Versuche zur Erklärung der Frage der Bruchgefahr. 1. Communications au 2e Congrès International de Mécanique Industrielle, Zurich, 1926. 2. Communications de l'Association Suisse pour l'Essai des Matériaux, Zurich, septembre 1926. 3. Discussion, n° 34, Laboratoire Fédéral pour l'Essai des Matériaux, Zurich, février 1929.

W. Lode, Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle. Dissertation, Göttingen, 1926, Fasc. 303 der Forsch. Arbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Berlin, 1928.

De récents essais montrent d'ailleurs que dans certains cas on peut constater un comportement s'écartant de l'isotropie (voir Hohenemser et Prager : Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flussstahl. Z.A.M.M., 12, 1932.

ciales pour une courbe de contraintes de flambage arbitraire. Elle a été d'ailleurs employée récemment par exemple, pour les recherches de stabilité concernant le Pont des Trois Roses, sur le Rhin, à Bâle (poutres continues en tôles avec portées de 75 + 105 + 75 mètres), pont qui a été construit par la M.A.N., les Ateliers de Gustavsburg et la Buss A.G., de Bâle.

Lorsque la rigidité de la plaque se trouve uniformement réduite (état de contrainte dit homogène), les équations s'appliquent exactement. Si, par contre, l'état de contrainte n'est pas uniforme, τ_D varie alors avec le point considéré et les contraintes réduites suivant *c* sont alors trop faibles lorsque la réduction porte sur la contrainte maximum.

Dans le cas d'un régime de charge non homogène, et après le dépassement de la limite de proportionnalité, il faut en règle générale, compter sur une certaine compensation des contraintes. Pour pouvoir, en pareil cas, effectuer un calcul plus précis, il faudrait, en supposant connue la répartition des contraintes, introduire la rigidité de la plaque dans l'équation de déformation de cette plaque, à titre de fonction de la valeur de la contrainte.

$$\nabla^4 w + \frac{h.\,\sigma_x(y)}{D.\,\tau(y)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{7}$$

Il conviendrait enfin de rechercher également comment il se fait que les déformations permanentes s'accomplissent sans augmentation de volume [1]. Aux valeurs $m = 10/3$ dans le domaine élastique et $m = 2$ dans le domaine plastique, il devrait correspondre une différence de 21 °/₀ dans la rigidité des plaques.

Résumons maintenant notre manière de voir au sujet de la réduction du régime critique de charge dans le cas des limites générales de stabilité :

La réduction suivant *a* n'est pas à préconiser, car elle ne se trouve pas confirmée par les observations effectives et elle conduit à des contraintes de flambage trop élevées ;

Suivant *b*, et pour la zone $\sigma_P < \sigma < \sigma_S$ on obtient en général des valeurs suffisamment précises, de sorte que ce mode de réduction pourrait par exemple être appliqué lorsque les courbes des contraintes de flambage ne sont pas connues. Pour les plaques épaisses, la stabilité est toutefois ainsi surestimée, de sorte qu'il est à recommander de remplacer les valeurs de σ_K supérieures à σ_S par σ_S (ou la contrainte correspondant aux conditions de plasticité).

La réduction suivant *c* correspond au mieux à l'état actuel de nos connaissances. Elle est à recommander d'une manière générale, tant pour les régimes de charge homogènes que pour les régimes non homogènes. Pour ces derniers, on conservera une marge de sécurité, en effectuant la réduction pour les points qui sont soumis aux contraintes les plus élevées.

---

1. Voir les travaux de Roš et Eichinger mentionnés en (3) et, en particulier, la figure 12 du nº 2 et les figures 44, 65 et 66 du nº 3.

Dr. Ing. h. c. M. ROŠ,
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule
und Direktor der Eidg. Materialprüfungsanstalt, Zürich,

und

A. EICHINGER,
Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Eidg. Materialprüfungsanstalt, Zürich.

Allgemeine Betrachtungen :

Durch die Versuche, welche in der Eidg. Materialprüfungsanstalt in den Jahren 1926-1929 durchgeführt worden sind[1] ist erbracht, dass das Mass der plastischen Gestaltänderung : δ_g in ebenso einfacher Weise von der Vergleichspannung : σ_g abhängig ist, wie bekannterweise das Mass der elastischen Gestaltänderung : e_g durch dieselbe bedingt ist, nämlich :

$$\text{elastisch}: e_g = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 - e_x e_y - e_y e_z - e_z e_x + \frac{3}{4}(g_{xy}^2 + g_{yz}^2 + g_{zx}^2)}$$

$$= \frac{\sigma_g}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$\text{worin}: \sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\text{und plastisch}: \delta_g = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2 - \delta_x \delta_y - \delta_y \delta_z - \delta_z \delta_x + \frac{3}{4}(V_{xy}^2 + V_{yz}^2 + V_{zx}^2)}$$

$$= \frac{\sigma_g}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{sowie gesamt}: \varepsilon_g = e_g + \delta_g = \sigma_g \left\{ \frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \right\}$$

Es sind :	elastisch :	plastisch :	total :
e_x	$= \frac{1}{E}\left\{\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)\right\}$	$\delta_x = \frac{1}{D}\left\{\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right\}$	$\varepsilon_x = e_x + \delta_x$
e_y	$= \frac{1}{E}\left\{\sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_x)\right\}$	$\delta_y = \frac{1}{D}\left\{\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right\}$	$\varepsilon_y = e_y + \delta_y$
e_z	$= \frac{1}{E}\left\{\sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)\right\}$	$\delta_z = \frac{1}{D}\left\{\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right\}$	$\varepsilon_z = e_z + \delta_z$
g_{xy}	$= \frac{2\,\tau_{xy}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$V_{xy} = \frac{2\,\tau_{xy}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$\gamma_{xy} = g_{xy} + V_{xy}$

1. M. Roš u. A. Eichinger, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr : I Flussstahl, 1926, III Metalle, 1929 E.M.P.A.
M. Roš u. A. Eichinger, Kongress f. techn. Mechanik. Stockholm, 1930. « Weitere Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. »

$$g_{yz} = \frac{2\,\tau_{yz}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) \qquad V_{yz} = \frac{2\,\tau_{yz}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \qquad \gamma_{yz} = g_{yz} + V_{yz}$$

$$g_{zx} = \frac{2\,\tau_{zx}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) \qquad V_{zx} = \frac{2\,\tau_{zx}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \qquad \gamma_{zx} = g_{zx} + V_{zx}$$

Ebenso wurde damit erbracht, dass die plastische Volumenänderung ziemlich genau gleich Null ist : $\delta_x + \delta_y + \delta_z = 0$, weil $m = 2$; die mittlere Normalspannung $\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ ohne Einfluss auf die plastische Formänderung ;

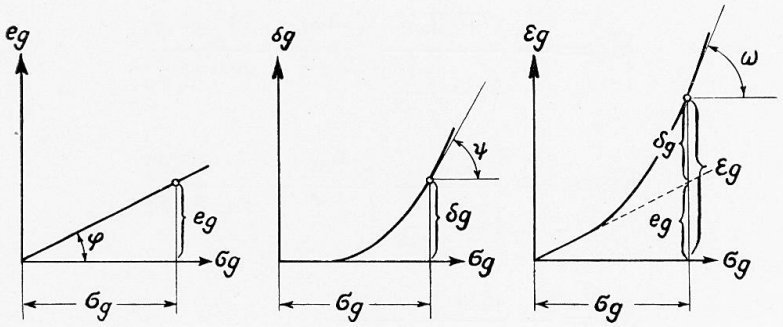

Fig. 1.

sowie dass die Quasiisotropie auch nach dem Ueberschreiten der E-Grenze bewahrt bleibt, da der Plastizitätsmodul D in allen Richtungen derselbe ist.

In bestimmten Fällen ist es günstiger, mit der Tangente an das σ_g — δ_g — Diagramm Fig. 1. zu operieren, statt mit dem D-Modul bezw. mit der plastischen Dehnungszahl $\frac{1}{D} = \frac{2}{3}\frac{\delta_g}{\sigma_g}$.

Das Letztere ist namentlich der Fall bei den Knickproblemen der Platten, von welchen wir beispielsweise die rechteckige Platte behandeln wollen :

Knicken rechteckiger Platten :

Wird die Platte in ebenem Zustand zentrisch durch σ_x^k und σ_y^k bis zur Knicklast gebracht, wobei die Elastizitätsgrenze überschritten ist, so treten bei einer virtuellen Verbiegung der Platte folgende Kräfteänderungen unter der Voraussetzung des Ebenbleibens der Querschnitte auf.

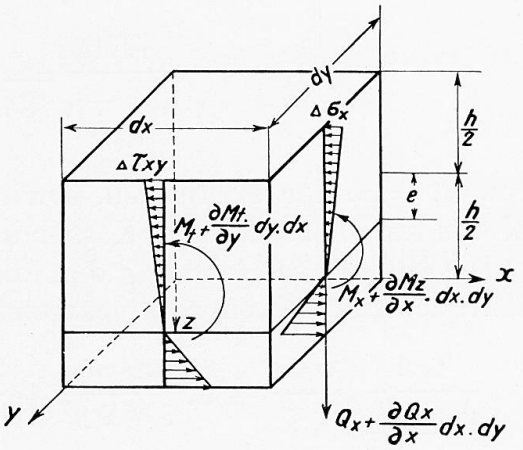

Fig. 2.

$$\text{Weil}: \Delta\varepsilon_x = \Delta e_x + \Delta\delta_x = \frac{1}{E}\left(\Delta\sigma_x - \frac{\Delta\sigma_y}{m}\right) + \operatorname{tg}\psi.\,\frac{2}{3}\left(\Delta\sigma_x - \frac{\Delta\sigma_y}{2}\right)$$

$$\Delta\varepsilon_y = \Delta e_y + \Delta\delta_y = \frac{1}{E}\left(\Delta\sigma_y - \frac{\Delta\sigma_x}{m}\right) + \operatorname{tg}\psi.\,\frac{2}{3}\left(\Delta\sigma_y - \frac{\Delta\sigma_x}{2}\right)$$

$$\Delta\gamma_{xy} = \Delta g_{xy} + \Delta V_{xy} = 2\,\tau_{xy}\left\{\frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \operatorname{tg}\psi\right\}$$

ist, können $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$, $\Delta\tau_{xy}$ daraus ermittelt werden.

Die konkave Seite folgt, was die Spannungsverteilung im Schnitt betrifft, der Tangente an das $\sigma_g - \varepsilon_g$ — Diagramm ($\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi$), die konvexe Seite dem $\operatorname{tg}\varphi$ des σ_g — e_g — Diagrammes d. h. E-Gesetz. Daraus erhält man den Abstand der neutralen Fläche von der Mittelfläche :

$$e = \frac{h}{2}\,\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\omega} - \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}{\sqrt{\operatorname{tg}\omega} + \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}} \text{ worin } \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi$$

Nun ist leicht, M_x, M_y, und M_t zu ermitteln, nämlich :

$$M_x = -\frac{E.J.c}{1 - \frac{1}{m^2}}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}$$

$$M_y = -\frac{E.J.c}{1 - \frac{1}{m^2}}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}$$

$$M_t = -\frac{E.J.c}{1 + \frac{1}{m}}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

$$\text{worin } J = \frac{h^3}{12} \text{ und } c = \frac{4\operatorname{tg}\varphi}{E\left\{\sqrt{\operatorname{tg}\omega} + \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\right\}^2}$$

Bezeichnet man ähnlich wie beim Knicken zentrisch gedrückter Stäbe das Produkt $E.c = T_k$ = Knickmodul, so kommt man zu :

$$T_k = \frac{4\,E\operatorname{tg}\varphi}{\left\{\sqrt{\operatorname{tg}\omega} + \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\right\}^2} = \frac{4\,E\,\frac{1}{\operatorname{tg}\omega}}{\left\{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}} + \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}\omega}}\right\}}$$

Für $m = \infty$ der elastischen, sowie plastischen Deformationen geht der T_k — Modul für plattenförmige Körper in denjenigen für Stäbe über.

Die Differentialgleichung der in beiden Axenrichtungen über die E-Grenze zentrisch gedrückten, rechteckigen Platte lautet bei einer virtuellen Verbiegung :

$$\frac{T_k\,J}{1 - \frac{1}{m^2}}\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2.\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\} + h.\left\{\sigma_x^k.\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y^k.\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\} = 0$$

Es ergibt sich daraus, dass die Durchbiegungsfläche ihre Form auch im Gebiet ausserhalb der E-Grenze nicht ändert, z. B. bei allseitig geführter Platte :

$$\omega = f.\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

womit alles gegeben ist, um Knickprobleme rechteckiger Platten auch ausserhalb der E-Grenze bei verschiedenen Randbedingungen lösen zu können.

Traduction.

Considérations générales.

Au cours des essais qui ont été effectués entre les années 1926 et 1929 au Laboratoire Fédéral pour l'Essai des Matériaux on a pu établir que le degré de déformation plastique δ_g est relié à la contrainte σ_g envisagée par une relation aussi simple que celle qui conditionne le degré de déformation élastique e_g par rapport à la contrainte considérée [1]. On a en effet :

Cas de l'élasticité :

$$e_g = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 - e_x e_y - e_y e_z - e_z e_x + \frac{3}{4}\left(g_{xy}^2 + g_{yz}^2 + g_{xz}^2\right)} = \frac{\sigma_g}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

où : $\sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3\left(\tau_{yz}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}$

Cas de la plasticité :

$$\delta_g = \sqrt{\delta_x^2 + {}_y^2 + \delta_z^2 - \delta_x \delta_y - \delta_y \delta_z - \delta_z \delta_x + \frac{3}{4}\left(V_{xy}^2 + V_{yz}^2 + V_{zx}^2\right)} = \frac{\sigma_g}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

et : $\varepsilon_g = e_g + \delta_g = \sigma_g\left[\frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right]$

On a

Elasticité	Plasticité	Au total
$e_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)\right]$	$\delta_x = \frac{1}{D}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right]$	$\varepsilon_x = e_x + \delta_x$
$e_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_x)\right]$	$\delta_y = \frac{1}{D}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right]$	$\varepsilon_y = e_y + \delta_y$
$e_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)\right]$	$\delta_z = \frac{1}{D}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]$	$\varepsilon_z = e_z + \delta_z$
$g_{xy} = \frac{2\tau_{xy}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$V_{xy} = \frac{2\tau_{xy}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$\gamma_{xy} = g_{xy} + V_{xy}$
$g_{yz} = \frac{2\tau_{yz}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$V_{yz} = \frac{2\tau_{yz}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$\gamma_{yz} = g_{yz} + V_{yz}$
$g_{zx} = \frac{2\tau_{zx}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$V_{zx} = \frac{2\tau_{zx}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$\gamma_{zx} = g_{zx} + V_{zx}$

On a pu établir également que la variation plastique de volume est assez sensiblement nulle :

$$\delta_x + \delta_y + \delta_z = 0$$

car $m = 2$; la contrainte normale moyenne

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

1. M. Roš et A. Eichinger, Contribution à l'étude des possibilités de rupture. — I. Acier (1926). — II. Métaux divers (1929). — L.F.E.M.

M. Roš et A. Eichinger, Congrès de Mécanique Industrielle, Stockholm, 1930. — Nouvelles contributions à l'étude des possibilités de rupture.

est sans influence sur la déformation plastique. De même, la quasi-isotropie reste assurée, même après le dépassement de la limite élastique, car le module de plasticité D est le même dans toutes les directions.

Dans certains cas déterminés, il est plus indiqué plutôt que de faire intervenir le module D ou le coefficient d'allongement plastique

$$\frac{1}{D} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta_g}{\sigma_g}$$

de travailler avec la tangente au diagramme $\sigma_g - \delta_g$ ci-contre.

C'est précisément le cas pour les problèmes de flambage des plaques, parmi lesquels nous traiterons à titre d'exemple le cas de la plaque rectangulaire.

Flambage des plaques rectangulaires.

Si une plaque plane est soumise axialement à des contraintes $\sigma_x{}^k$ et $\sigma_y{}^k$ jusqu'à la charge de flambage, la limite d'élasticité se trouvant dépassée, on obtient, pour une déformation virtuelle de cette plaque, les variations suivantes des efforts, en se basant sur l'hypothèse de la conservation de la section :

comme : $$\Delta \varepsilon_x = \Delta e_x + \Delta \delta_x = \frac{1}{E}\left(\Delta \sigma_x - \frac{\Delta \sigma_y}{m}\right) + tg\,\psi \cdot \frac{2}{3}\left(\Delta \sigma_x - \frac{\Delta \sigma_y}{2}\right)$$

$$\Delta \varepsilon_y = \Delta e_y + \Delta \delta_y = \frac{1}{E}\left(\Delta \sigma_y - \frac{\Delta \sigma_x}{m}\right) + tg\,\psi \cdot \frac{2}{3}\left(\Delta \sigma_y - \frac{\Delta \sigma_x}{2}\right)$$

$$\Delta \gamma_{xy} = \Delta g_{xy} + \Delta V_{xy} = 2\,\tau_{xy}\left[\frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) + tg\,\psi\right]$$

on peut en déduire $\Delta \sigma_x$, $\Delta \sigma_y$, $\Delta \tau_{xy}$.

La répartition des contraintes sur le côté concave est déterminée par la tangente au diagramme $\sigma_g - \varepsilon_g$, $(tg\,\varphi + tg\,\psi)$; sur le côté convexe, par $tg\,\varphi$ du diagramme $\sigma_g - e_g$ c'est-à-dire par la loi de l'élasticité. On en déduit l'intervalle entre la surface neutre et la surface médiane :

$$e = \frac{h}{2} \cdot \frac{\sqrt{tg\,\omega} - \sqrt{tg\,\varphi}}{\sqrt{tg\,\omega} + \sqrt{tg\,\varphi}} \text{ . où : } tg\,\omega = tg\,\varphi + tg\,\psi$$

Il est maintenant facile de déterminer M_x M_y et M_t :

$$M_x = -\frac{EJc}{1 - \frac{1}{m^2}}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

$$M_y = -\frac{EJc}{1 - \frac{1}{m^2}}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]$$

$$M_t = -\frac{EJc}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

où : $$J = \frac{h^3}{12}$$

et :
$$c = \frac{4\,\mathrm{tg}\,\varphi}{E\left(\sqrt{tg\,\omega}+\sqrt{tg\,\varphi}\right)^2}.$$

De même que dans le cas du flambage d'une barre soumise à une compression axiale, si l'on adopte la désignation :

$E.c = T_k$ = module de flambage, on obtient :

$$T_k = \frac{4\,E\,tg\,\varphi}{\left(\sqrt{tg\,\omega}+\sqrt{tg\,\varphi}\right)^2} = \frac{4E.\dfrac{1}{tg\,\omega}}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{tg\,\varphi}}+\sqrt{\dfrac{1}{tg\,\omega}}\right)^2}.$$

Pour $m = \infty$ (déformations élastiques aussi bien que déformations plastiques), le module T_k des éléments plans vient se confondre avec celui des barres.

Pour une déformation virtuelle, l'équation différentielle de la plaque rectangulaire soumise à une compression axiale suivant les deux directions de ses axes, au-dessus de la limite d'élasticité, devient :

$$\frac{T_k\,J.}{1-\dfrac{1}{m^2}}\left\{\frac{\partial^4\omega}{\partial_x^4}+2.\frac{\partial^4\omega}{\partial_x^2\,\partial_y^2}+\frac{\partial^4\omega}{\partial_y^4}\right\}+h.\left\{\sigma_y^k.\frac{\partial^2 w}{\partial_x^2}+\sigma_y^k.\frac{\partial^2 w}{\partial_y^2}\right\}=0$$

Il en résulte que la surface de flexion n'est modifiée ni dans sa position, ni dans sa forme, même dans la zone située au-dessus de la limite d'élasticité ; on a par exemple, pour une plaque maintenue sur tous ses côtés :

$$\omega = f.\ \sin\frac{\pi x}{a}.\ \sin\frac{\pi y}{b}.$$

On est donc en possession de tous les éléments pour pouvoir résoudre le problème du flambage des plaques rectangulaires même au-dessus de la limite d'élasticité, et pour différentes conditions aux bords.

I 4

LA STABILITÉ DE L'ÂME DES POUTRES SOLLICITÉES A LA FLEXION
DIE STABILITÄT DER STEGBLECHE VON BIEGUNGSTRÄGERN
STABILITY OF PLATE GIRDERS SUBJECTED TO BENDING

S. TIMOSHENKO,
Professor of Engineering, University of Michigan,
Ann Arbor.

Voir aussi « Publication Préliminaire », p. 129. — *Siehe auch « Vorbericht »*, S. 129. —
See also " Preliminary Publication ", p. 129.

S. TIMOSHENKO,
Prof. University of Michigan, Engineering Mechanics,
Ann Arbor (Michigan).

In discussing the elastic stability of the web of a plate girder we have to consider two extreme cases : 1) the pure bending and 2) the pure shear of a rectangular plate.

At the middle of the span the bending stresses in the web are of primary importance and a portion of the web between the two stiffeners should be considered as a rectangular plate submitted to pure bending in its plane. In a plate girder of usual proportions, the distances between the stiffeners are such that the stiffeners do not affect substantially the critical value of maximum bending stress. This critical stress must be taken as a basis for calculating the thickness of the web. Considering the web as a rectangular plate with simply supported edges and neglecting the effect of stiffeners, the critical value of maximum bending stress will be larger than the usual working stress (16,000 lbs. per sq. in.) if we satisfy the relation :

$$\frac{h}{t} = \frac{\text{depth of the web}}{\text{thickness of the web}} < 200 \qquad (1)$$

When the thickness of the web has been determined by using equation (1) the distance between the stiffeners can be calculated by considering a portion of the web near the support as a rectangular plate submitted to the action of pure shear. The curves in figure 9 of the paper can be used for calculating the necessary distance between the stiffeners such that the desired factor of safety will be realised.

Table 10 of the paper gives the necessary data for proper dimensioning of the stiffeners.

Traduction.

Dans l'étude de la stabilité élastique de l'âme d'une poutre, deux cas extrêmes doivent être pris en considération :

1. la flexion simple ;
2. le cisaillement simple ;

ces cas étant appliqués à une plaque rectangulaire.

Au milieu de la portée, les efforts de flexion dans l'âme exercent une influence capitale et une portion de l'âme comprise entre deux éléments de renforcement doit être considérée comme une plaque rectangulaire soumise dans son plan à une flexion simple. Dans une poutre à parois pleines de dimensions courantes, les intervalles entre les éléments de renforcement successifs sont tels que ces éléments n'exercent pas une influence notable sur la valeur critique de l'effort maximum de flexion. Cette valeur critique doit être considérée comme constituant la base du calcul de l'épaisseur de l'âme. Si l'on considère l'âme de la poutre comme une plaque rectangulaire dont les bords sont simplement posés et si l'on néglige l'influence des éléments de renforcement, la valeur critique de l'effort maximum de flexion sera plus élevée que la contrainte ordinaire de travail (11,2 kg par mm^2) si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\frac{h}{t} = \frac{\text{hauteur de l'âme}}{\text{épaisseur de l'âme}} < 200 \qquad (1)$$

Si l'épaisseur de l'âme a été déterminée en faisant appel à l'équation (1), l'écartement entre les éléments de renforcement peut être calculé en considérant une partie de l'âme située près de l'encastrement comme une plaque rectangulaire soumise à un cisaillement simple. Les courbes de la figure 9 du Rapport (page 146) peuvent être utilisées pour calculer l'écartement nécessaire entre les éléments de renforcement de telle sorte que le coefficient de sécurité convenable soit effectivement assuré.

La table 10 du même Rapport (page 164) donne tous les éléments nécessaires pour le calcul des éléments de renforcement.

Participants à la discussion

Diskussionsteilnehmer

Participants in the discussion :

Dr.-Ing. F. SCHLEICHER,
Professor an der Technischen Hochschule Hannover.

I. — Die im Vorbericht erwähnten Versuche von Lilly sind für einen Vergleich mit den theoretischen Werten nicht brauchbar. Die Dicken von 0,038 bis 0,122 cm sind bei handelsüblichen Blechen zu klein, um eine Kontrolle der Rechnung zu ermöglichen. Die Abweichungen von der Ebene störten zu stark, ferner dürfte neben der Schubknickung auch die Beulung durch Biegungsdruckspannungen mitgewirkt haben. Trotzdem zeigen die Versuche deutlich, wie eng vertikale Steifen gesetzt werden müssen, wenn sie die Knickspannung τ_K nennenswert heben sollen. Bei Seitenverhältnissen α der einzelnen Plattenfelder

α	=	3,30	1,65	1,10	0,55	betrugen die kritischen Schubspannungen			
τ_K	=	371	495	620	742	kg/cm² bei	h =	0,038 cm	Plattendicke
τ_K	=	381	528	700	848	»	» h =	0,056 cm	»
τ_K	=	538	830	1170	1610	»	» h =	0,122 cm	»

Wichtig ist, dass sich die Beulenlänge von der Blechdicke unabhängig zeigte.

Hinsichtlich der bei Versuchen zu verwendenden Mindestblechstärken ist auf die Ausführungen von K. v. Sanden [1] und T. Tokugawa [2] zu verweisen. Danach sollte bei baumässigen Stahlblechmodellen die Wanddicke nicht unter 4 mm betragen, weil sonst die Störungen zu grossen Einfluss haben. Selbstverständlich kann man auch mit dünnen Platten gute Ergebnisse erzielen. Dafür sind jedoch besonders genau gearbeitete Modelle notwendig.

II. — Sorgfältige Modellversuche über die Schubknickung von Platten enthält eine Aachener Dissertation [3]. Diese Versuche zeigten die Schwierigkeiten, die sich der Verwirklichung der Randbedingungen entgegenstellen. Da ein Seitenpaar frei war, mussten auch Biegungsspannungen auftreten. Spannungen und Randbedingungen lassen sich also nicht unmittelbar mit den theoretischen Verhältnissen vergleichen, weiter wären die Spannungserhöhungen in der Nähe der freien Ränder zu beachten. Schliesslich deuten die beobachteten Biegungsflächen darauf hin, dass die Einspannung nicht vollkommen war. Bollenrath selbst bemerkt, dass « die Güte der Annäherung an die theoretische Knicklast so ziemlich eine Frage der Einspannung ist ».

Die Versuche wurden mit Platten aus Zelluloid, Duralumin und Messing durchgeführt, wobei der Elastizitätsmodul zwischen 16 und 943 t/cm² variierte.

Die Ausbeulung ging immer vom freien Rande aus. Die Knickspannungen ergaben sich für den elastischen Bereich zu

$$h\tau_K = 50 \frac{D}{b^2} \tag{1}$$

Der Zahlenkoeffizient wurde zwischen 47 und 56 gefunden, wobei die theoretische Breite zwischen den Klemmbacken eingesetzt wurde. Die Theorie liefert für die sehr lange Platte mit freiaufliegenden bzw. eingespannten Rändern

$$h\,\tau_K = 53 \text{ bzw. } 89 \frac{D}{b^2} \tag{2}$$

Die ganze Beulenlänge wurde im Mittel aller Versuche zu $\lambda = 1{,}97\ b$ gefunden. Die Theorie gibt $\lambda = 2{,}66\ b$ für freiaufliegende Ränder und $\lambda = 1{,}60\ b$ bei Einspannung. Da die Breite nur 0,8 bis 2,0 cm betrug, bei den Metallstrei-

1. K. von Sanden und K. Günther, Ueber das Festigkeitsproblem querversteifter Hohlzylinder unter gleichmässigem Aussendruck, Werft und Reederei 1920 und 1921.

2. V. Takesada Tokugawa, Model experiments on the elastic stability of closed and cross-stiffened circular cylinders under uniform external pressure. Paper N° 651 der japan. Schiffbautechn. Gesellschaft, 1929.

3. F. Bollenrath, Ausbeulerscheinungen an ebenen auf Schub beanspruchten Platten, München, 1928.

fen bis 3,5 cm, bei 0,5 cm breiten Einspannkanten, muss jede kleine Korrektur der Plattenbreite wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis haben. Z. B. für $b'/b = 2{,}4/2{,}0$ würde der Koeffizient in Gl. 1 statt 50 gleich 72, die Beulenlänge $\lambda' = 1{,}64\ b'$.

Die Gleichung von Bollenrath gilt nur für Schubspannungen unter der Proportionalitätsgrenze τ_P, die deutlich ausgeprägt war. Sie wurde, zugleich als Grenze zwischen der elastischen und unelastischen Ausbeulung, bei den folgenden Verhältnissen b/h gefunden : 34 bei Zelluloid, 50 bei Duralumin und 70 bei Messing. Ein Unterschied in der Beulenlänge für elastische und unelastische Ausbeulung war nicht festzustellen.

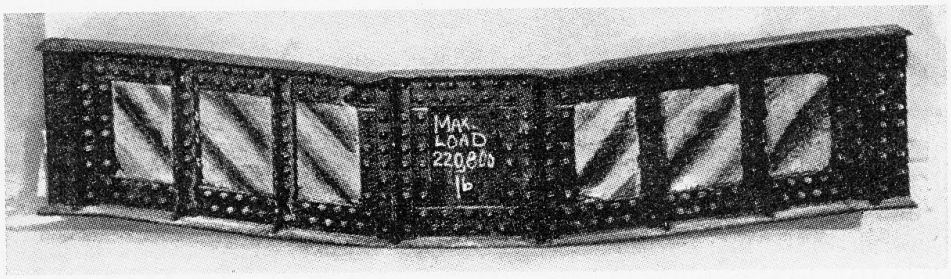

Fig. 1.

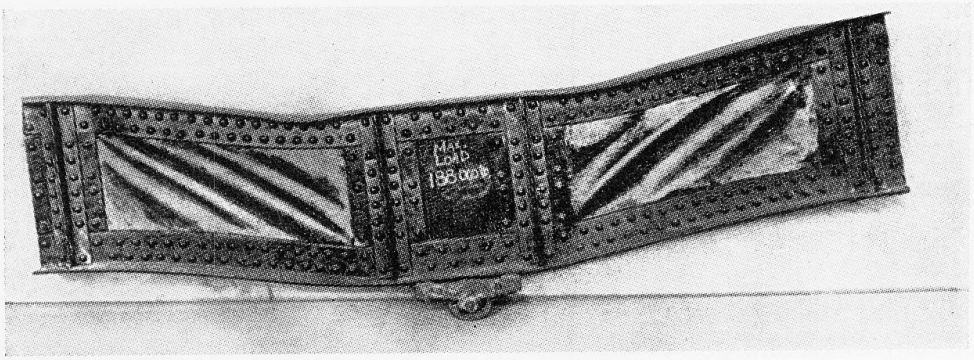

Fig. 2.

III. — Zwei schöne Beispiele von durch Schubspannungen ausgebeulten Blechen zeigen die Fig. 1 und 2, die einem Versuchsbericht von H. F. Moore und W. M. Wilson entnommen sind [1]).

IV. — Stabilität der Stegbleche von Blechträgerbrücken, insbesondere aus hochwertigen Baustählen.

Die Sicherung der Stegbleche von Vollwandbalken gegen die Ausbeulung durch Biegungsdruckspannungen ist schwieriger durchzuführen, als die gegen Schubspannungen. Die grössten Schubspannungen hat man im allgemeinen nur in der Nähe der Stützen, dagegen sind z. B. beim Parallelbalken die Biegungsdruckspannungen praktisch auf der ganzen Länge von konstanter Grösse.

1. H. F. Moore and H. M. Wilson, the strength of webs of I-beams and girders. University of Illinois, Engineering experiment station Bulletin N° 86, May 1916.

Besondere Schwierigkeiten sind bei kontinuierlichen Trägern zu überwinden, doch ist es auch da in den meisten Fällen möglich, konstruktiv und ästhetisch befriedigende Lösungen zu finden. Ein Beispiel einer Brücke, bei deren Entwurf alle Erfahrungen über die Stabilität von versteiften Platten berücksichtigt werden konnten, ist die im Bau befindliche « Dreirosenbrücke » über den Rhein in Basel [1].

Die bekannten Erfahrungsregeln für die Bemessung der Stegbleche gelten für Stahl von Normalgüte (St 37).

Wir betrachten eine bestimmte Konstruktion. Das Stegblech soll im elastischen Bereich knicken und andere Stabilitätsgrenzen als die des Stegblechs sollen nicht in Frage kommen. Wenn diese Konstruktion aus St 37 1,7-fache Sicherheit gegen Ausbeulen besitzt, so würde sie aus St 52 und unter der 1,5-fachen Belastung, die an sich zulässig wäre, nur noch 1,1-fache Knicksicherheit haben. Bei sonst gleichen Verhältnissen und genügend hoher Proportionalitätsgrenze müsste das Stegblech einer Konstruktion aus St 52 im Vergleich zu St 37 um 1,22-mal dicker sein. Allgemein müssten sich die Blechdicken wie die Wurzeln aus den Spannungen verhalten.

Ein Beispiel soll die Notwendigkeit besonderer Massnahmen zur Aussteifung hoher Blechträger illustrieren. Das unversteifte Stegblech eines Trägers aus St 52 soll eine kritische Biegungsbeanspruchung von $\sigma_K = 0{,}85 . 2{,}1 . 1{,}75 = 3{,}12$ t/cm² besitzen, entsprechend der üblichen Sicherheit gegen Erreichen der Streckgrenze, bezogen auf die mittlere Spannung ohne Nietabzüge. Die Proportionalitätsgrenze liege mindestens ebenso hoch. Nach Timoshenko ist dann

3) $$\sigma_K = 24.1895\ (h/b)^2 = 45500\ (h/b)^2, \text{ in t/cm}^2,$$

oder wenn $\sigma_K = 3{,}12$ t/cm² sein soll

4) $$b = 120\ h.$$

Z. B. für einen Träger von $b = 480$ cm Höhe wäre eine Stegblechstärke von $h = 4{,}0$ cm notwendig. Vertikale Steifen in 240 cm Abstand würden [2] die Knickspannungen nur um 6% heben. Vertikale Steifen sind also kein geeignetes Mittel, um die Stabilität unter Biegungsdruckspannungen zu verbessern. Bei steifen, gegen Verdrehung gesicherten Gurten liegen die Verhältnisse infolge der Randeinspannung etwas günstiger. Wieviel dieser Einfluss ausmacht, kann jedoch nur von Fall zu Fall geschätzt werden.

V. — Zur experimentellen Bestimmung der Knickspannungen im elastischen Bereich.

Für die Untersuchung der Stabilität sollte mehr als bisher die Beobachtung der Schwingungszahlen mit heran gezogen werden. Wird das stabile Gleich-

---

1. L. Karner, Internat. Wettbewerb zur Erlangung von Entwürfen für eine Strassenbrücke über den Rhein in Basel (Dreirosenbrücke). Die Bautechnik, 1931. Ferner : Wettbewerb Dreirosenbrücke Basel. Ein Markstein in der Entwicklung der Balkenbrücken. Der Bauingenieur, 1931.

2. S. Timoshenko, Tafel 8, Vorbericht, S. 143.

gewicht eines elastischen Systems gestört, so zeigt das System das Bestreben, in die frühere Lage zurückzukehren. Das System schwingt um die stabile Gleichgewichtslage, die Frequenz ändert sich mit dem Spannungszustand. Bei jedem elastischen System, das unter einem bestimmten Spannungszustand instabil wird, sinkt die Frequenz bei Annäherung der Spannungen an die kritischen Werte. Auf der anderen Seite steigt sie mit Spannungen, die die Stabilität vergrössern. An der Stabilitätsgrenze wird die Frequenz null, das System zeigt keine Tendenz, in die alte Gleichgewichtslage zurückzukehren.

Für einen Stab mit der Druckspannung σ und der Euler-Knickspannung σ_K ist die Frequenz

$$p = p_0 \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\sigma_K}}$$

worin p_0 die Frequenz des unbelasteten Stabes bedeutet [1]. Dabei ist vorausgesetzt, dass $\sigma_K < \sigma_P$ und die Störungsausbiegung genügend klein bleibt. Man erhält die folgenden Werte :

$\sigma : \sigma_K =$	0,00	0,50	0,75	0,90	0,950	0,990	0,999	1,000
$p : p_0 =$	1,00	0,707	0,500	0,316	0,224	0,100	0,032	0,000

Ähnliche Zusammenhänge gelten für Platten und Schalen. Die Beobachtung der Frequenzen dürfte auch noch dann brauchbare Ergebnisse liefern, wenn die theoretische Form etwas gestört ist.

Traduction.

I. — Les essais de Lilly, dont il est fait mention dans la Publication préliminaire, ne peuvent pas être utilisés pour établir une comparaison avec les résultats théoriques. Les épaisseurs de 0,038 à 0,122 cm sont trop petites, pour les tôles du commerce, pour permettre d'effectuer un contrôle du calcul. Les déformations par rapport au plan initial sont trop importantes ; en outre, il aurait fallu faire intervenir, à côté du flambage s'exerçant transversalement par cisaillement, le voile sous l'influence de contraintes simultanées de compression et de flexion. Quoi qu'il en soit, ces essais montrent quels écartements on doit admettre entre les éléments de renforcement verticaux pour leur permettre de parer aux contraintes de flambage τ_K. On trouvera dans le tableau ci-dessous

Rapport α	3,3	1,65	1,1	0,55
τ_K en kg/mm²				
$h = 0{,}038$ cm.	3,71	4,95	6,2	7,42
$h = 0{,}056$ cm.	3,81	5,28	7,0	8,48
$h = 0{,}122$ cm.	5,38	8,3	11,7	16,1

1. Vgl. Handbuch der Physik, Band VI, Berlin, 1928, S. 365.

les charges transversales critiques τ_K correspondant à divers rapports α entre les dimensions des côtés des plaques élémentaires, pour différentes épaisseurs h des tôles constituant ces plaques. Il est intéressant de remarquer que les longueurs de voile se sont révélées indépendantes de l'épaisseur des tôles.

En ce qui concerne les épaisseurs minima des tôles qu'il convient d'adopter pour les essais, on se reportera aux travaux de K. v. Sanden [1] et de T. Tokugawa [2]. Dans des modèles en tôle d'acier destinés à reproduire exactement les conditions de la construction pratique, l'épaisseur des parois ne doit pas descendre au-dessous de 4 millimètres, faute de quoi les influences qui provoquent les déformations sont trop fortes. On peut naturellement obtenir également de bons résultats avec des plaques minces ; toutefois, les modèles doivent alors être étudiés avec un soin particulier.

II. — Des essais très soignés, sur modèles, ont été effectués à Aix-la-Chapelle, sur le flambage des plaques par contrainte latérale [3]. Ces essais ont permis de mettre en évidence les difficultés que présente la réalisation de conditions déterminées en ce qui concerne les bords des plaques. Deux des côtés étant libres, des contraintes de flexion se sont également manifestées. On ne peut donc pas comparer d'une manière directe les contraintes et les conditions des bords des plaques avec les résultats correspondants obtenus du point de vue théorique ; en outre, il faudrait également tenir compte des accroissements que subissent les contraintes au voisinage des bords libres. Enfin, les surfaces de déformation qui ont été observées montrent que l'encastrement réalisé n'était pas parfait. Bollenrath lui-même fait remarquer que la valeur de l'approximation par rapport à la charge théorique de flambage est presqu'exclusivement une question d'encastrement.

Les essais ont été effectués sur des plaques de celluloïd, de duralumin et de laiton ; le module d'élasticité variait ainsi entre 160 et 9.430 kg par mm^2.

Le voile s'est toujours amorcé sur les bords libres. On a atteint, pour les efforts de flambage dans le domaine élastique :

$$h\,\tau_K = 50\,\frac{D}{b^2} \qquad (1)$$

Le coefficient numérique a atteint des valeurs comprises entre 47 et 56, ce coefficient tenant compte de l'écartement théorique entre les mâchoires de serrage. La théorie donne pour les plaques très longues reposant en appui libre ou avec bords encastrés :

$$h\,\tau_K = 53 \text{ ou } 89\,\frac{D}{b^2} \qquad (2)$$

Pour tous les essais, la valeur moyenne de la longueur de voile a été

1. K. v. Sanden et K. Günther, Ueber das Festigkeitproblem querversteifter Hohlzylinder unter gleichmässigem Aussendruck, Werft und Reederei, 1920 et 1921.

2. V. Takesada Tokugawa, Model experiments on the elastic stability of closed and cross. stiffened circular cylinders under uniform external pressure. Rapport n° 651 de la Société de Constructions Navales Japonaise, 1929.

3. F. Bollenrath, Ausbeulerscheinungen an ebenen auf Schub beanspruchten Platten-Munich, 1928.

$\lambda = 1{,}97\, b$. La théorie donne $\lambda = 2{,}66\, b$, pour des plaques reposant librement sur leurs bords et $\lambda = 1{,}60\, b$ dans le cas de l'encastrement. La largeur n'atteignant que 0,8 à 2 cm, pour des bandes métalliques allant jusqu'à 3,5 cm, avec des encastrements de 0,5 cm de large, une correction si faible soit-elle sur la largeur de la plaque doit exercer une influence sensible sur le résultat obtenu. C'est ainsi que pour $b'/b = 2{,}4/2{,}0$ on atteindrait pour le coefficient de l'équation (1) une valeur de 72 au lieu de 50, la longueur de voile étant alors $\lambda' = 1{,}64\, b'$.

L'équation de Bollenrath n'est valable que pour les efforts transversaux inférieurs à la limite de proportionnalité τ_p qui fut nettement accusée. Elle a coïncidé avec la limite de séparation entre les voiles élastique et plastique pour les rapports de dimensions suivants : $b/h = 34$ pour le celluloïd, 50 pour le duralumin et 70 pour le laiton. On n'a pas constaté de différences entre les longueurs de voile pour les voiles élastique et plastique.

III. — Les figures 1 et 2 constituent deux remarquables exemples de tôles ayant subi un voile par suite de contraintes latérales ; elles sont extraites d'un rapport d'essais publié par H. F. Moore et W. M. Wilson [1].

IV. — Stabilité des âmes des poutres de ponts, particulièrement en ce qui concerne les aciers de construction à haute résistance.

Il est plus difficile d'assurer la sécurité des âmes des poutres pleines contre le voile dû aux contraintes simultanées de compression et de flexion, que contre le voile dû aux efforts transversaux. Les maxima de ces contraintes transversales se manifestent en général seulement au voisinage des appuis ; par contre, dans les poutres parallèles par exemple, les contraintes simultanées de flexion et de compression sont pratiquement constantes sur toute la longueur de la poutre. Des difficultés particulières se rencontrent dans les poutres continues ; toutefois, précisément dans ce cas, il est très souvent possible de trouver des solutions satisfaisantes du point de vue de la construction et par ailleurs esthétiques. Le pont des Trois Roses, qui est actuellement en construction sur le Rhin à Bâle, constitue un remarquable exemple d'une construction dans laquelle on a tenu compte, dès l'établissement du projet, de toutes les expériences qui ont été faites au sujet de la stabilité des plaques renforcées [2].

Les règles expérimentales connues pour le calcul des pièces d'âme sont applicables à l'acier de construction de qualité normale (St. 36).

Considérons un ouvrage déterminé. Les tôles d'âme doivent subir le flambage dans la zone élastique et il ne doit pas intervenir d'autres limites de stabilité que celle de la tôle d'âme. Supposons l'ouvrage en acier St 37, avec une sécu-

---

1. H. F. Moore et H. M. Wilson, The strength of webs of I-beams and girders. Université d'Illinois, Bulletin de la Station d'Essais n° 86, mai 1916.

2. L. Karner, Concours International pour l'établissement des projets concernant la construction d'un pont-route sur le Rhin, à Bâle (Dreirosenbrücke), Die Bautechnik, 1931, et : Concours pour le Pont des Trois Roses à Bâle ; une date dans l'évolution de la construction des ponts à poutres, Der Bauingenieur, 1931.

rité de 1,7 contre le voile ; si, par contre, il était en acier St 52, avec une charge correspondant à un coefficient de 1,5, valeur admissible en soi, il ne resterait plus qu'une marge de sécurité de 1,1. Toutes choses égales d'ailleurs et pour une limite de proportionnalité suffisamment élevée, une pièce en acier St 52 doit avoir une épaisseur égale à environ 1,2 fois l'épaisseur correspondant à l'acier St 37. D'une manière générale, les épaisseurs des tôles varient comme les racines des charges.

Un exemple montrera quelles précautions particulières il est nécessaire d'envisager pour le renforcement des poutres à âmes pleines de grande hauteur. L'âme non renforcée d'une poutre en acier St 52 doit accuser une charge critique à la flexion

$$\sigma_K = 0{,}85 . 2{,}1 . 1{,}75 = 3{,}12 \text{ t/cm}^2$$

qui correspond à une marge de sécurité normale par rapport à la limite d'écoulement, pour l'effort moyen, sans tenir compte de l'affaiblissement dû au rivetage. La limite de proportionnalité serait au moins aussi élevée. On a alors, d'après Timoshenko :

$$\sigma_K = 24.1895 \, (h/b)^2 = 45500 \, (h/b)^2 \text{ en t/cm}^2 \qquad (3)$$

ou, si σ_K doit être égal à 3,12 t/cm² :

$$b = 120 \, h \qquad (4)$$

Par exemple, pour une poutre ayant une hauteur $b = 480$ cm, il serait nécessaire d'adopter pour les tôles de l'âme une épaisseur de $h = 4{,}0$ cm. Des éléments de renforcement situés à des intervalles de 240 cm n'élèveraient la charge de flambage que de 6 % environ[1]. L'adjonction d'éléments de renforcement verticaux ne constitue donc pas une solution favorable pour améliorer la stabilité aux efforts simultanés de compression et de flexion. Avec des membrures rigides, présentant une sécurité assurée contre la torsion, on arrive à des conditions de résistance bien meilleures, par suite de l'encastrement qui en résulte pour l'âme. L'influence exercée par cette disposition ne peut toutefois être évaluée que comme un cas d'espèce.

V. — La détermination expérimentale des contraintes de flambage dans la zone élastique.

Il devient de plus en plus important de prendre en considération, dans les études sur la stabilité, la question des fréquences d'oscillation. Lorsque l'équilibre stable d'un système élastique est soumis à une perturbation, ce système accuse une tendance à revenir à sa position initiale. Le système oscille autour de la position qui correspond à l'équilibre stable ; la fréquence varie avec le régime de charge. Dans tout système élastique instable sous un régime de charge déterminé, la fréquence baisse lorsque la charge approche de la valeur critique. Par ailleurs, elle s'élève pour des charges qui provoquent une amélioration de la stabilité. A la limite de stabilité, la fréquence est nulle, le système ne manifeste aucune tendance à revenir à l'ancienne position d'équilibre.

---

1. Timoshenko, Tableau 8, Publication Préliminaire, p. 162.

Pour une barre soumise à une contrainte de compression σ et admettant une charge de flambage d'Euler σ_K, la fréquence d'oscillation est donnée par :

$$p = p_0 \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\sigma_K}}$$

p_0 désignant la fréquence de la barre à l'état non chargé [1]. On suppose que σ_K est inférieur à σ_P et que la déformation est suffisamment faible.

On obtient alors les valeurs suivantes, pour p/p_0, en fonction de $\frac{\sigma}{\sigma_K}$.

$\frac{\sigma}{\sigma_K}$:	0	0,5	0,75	0,9	0,95	0,99	0,999	1
$\frac{p}{p_0}$:	1	0,707	0,5	0,316	0,224	0,1	0,032	0

On obtiendrait des relations semblables pour les dalles et les surfaces de courbure. La prise en considération des fréquences ne peut toutefois donner de résultats effectifs que lorsque la forme théorique subit une certaine perturbation.

Dr.-Ing. A. HAWRANEK,
Professor an der Deutschen Technischen Hochschule, Brünn.

Knickversuch eines Blechträgerstückes mit veränderlicher Höhe.

Soweit bekannt, liegen bisher bloss theoretische Versuche mit vollwandigen genieteten Trägern mit parallelen Gurtungen vor, die sich mit dem Stabilitäts-

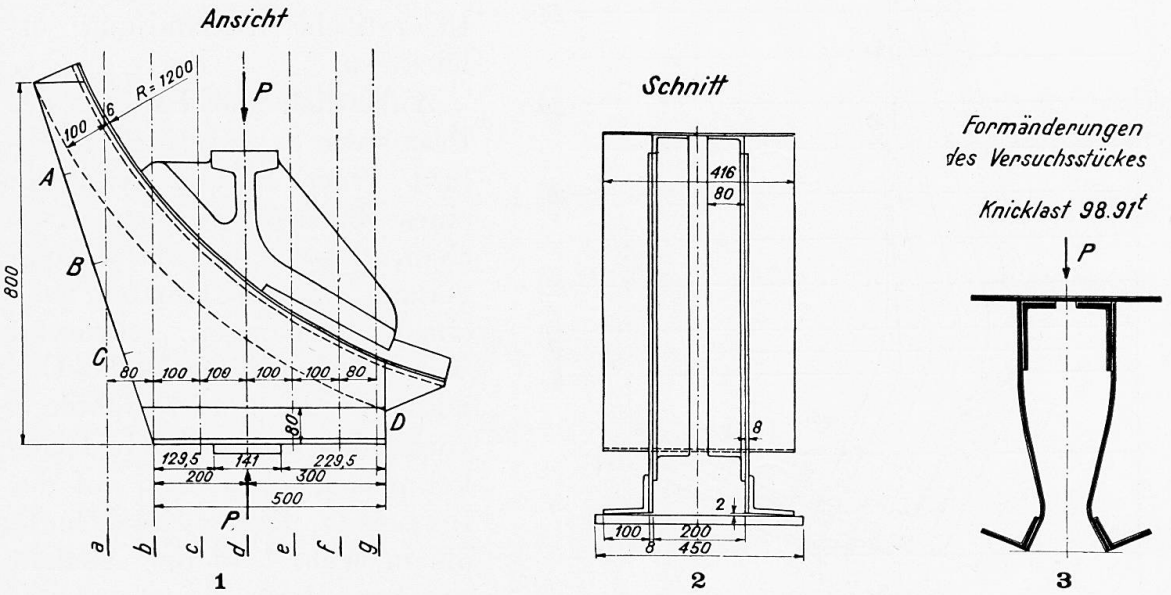

Fig. 1. — Vue de face = Ansicht = Side view.
Fig. 2. — Coupe = Schnitt = Section.
Fig. 3. — Déformation de la pièce d'essai = Formänderungen des Versuchsstückes = Deformation of the test piece — Charge de flambage : 98, 91 tonnes = Knicklast 98, 91t = Bukling load 98, 91 tons.

1. Voir Handbuch der Physik, vol. VI, Berlin, 1928, p. 365.

problem des Stehbleches befassen. Für Blechträger mit nichtparallelen Gurtungen ist sowohl für den Fall von Schubspannungswirkungen, wie bei Biegung das Problem der Stabilität des Stehbleches derzeit noch ungelöst, ist aber für die Hauptträger von Brücken, die als durchlaufende Träger oder Gerberträger ausgebildet sind von Wichtigkeit, da diese bei den Stützen gewöhnlich eine Vergrösserung der Stehblechhöhe in Form von Vouten erhalten.

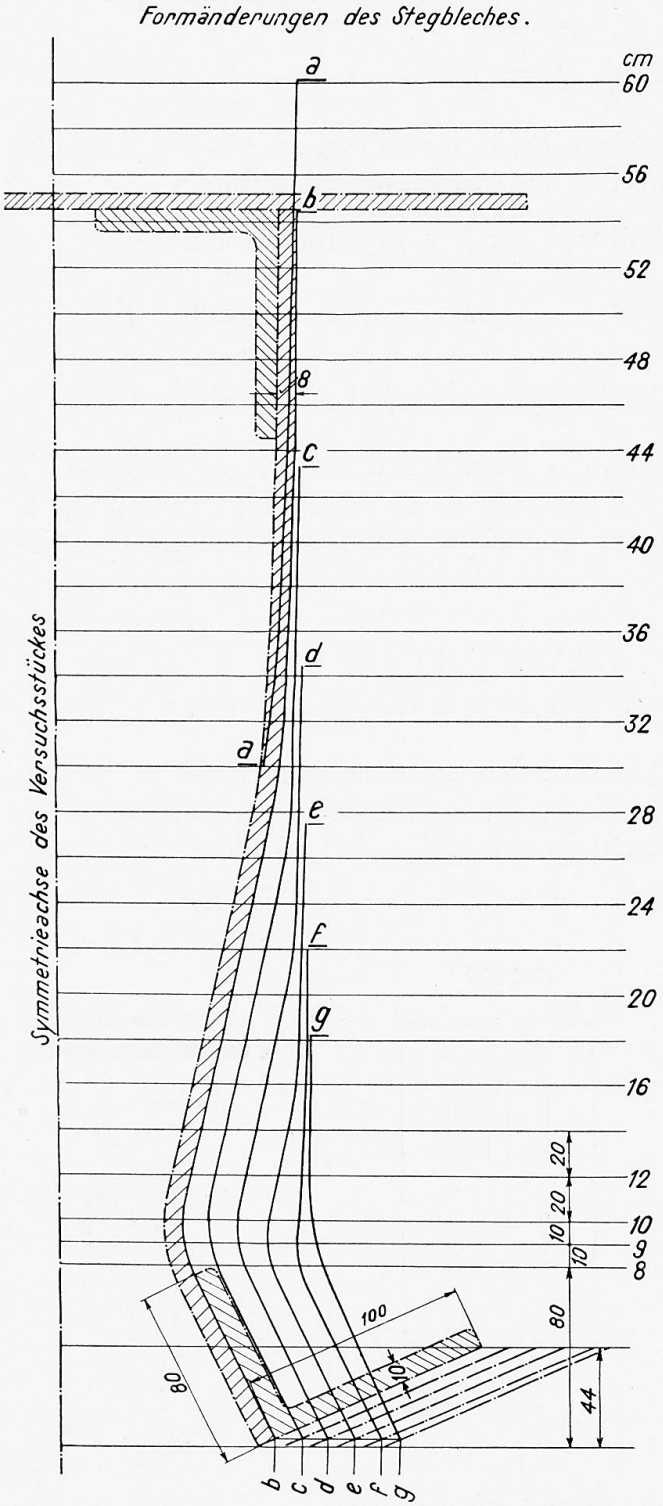

Fig. 4. — Déformation de l'âme = Formänderung des Stegbleches = Deformation of the web. — Axe de symétrie de la pièce d'essai = Symmetrieachse des Versuchsstückes = Axis of symmetry of the test piece.

Verfasser hat zur Klärung einer einschlägigen Frage einen Versuch durchgeführt, aus dem sich allerdings keine allgemeinen Schlüsse ableiten lassen, da er abgesehen von der Form des Versuchsstückes auch bezüglich der Lagerung eigenartig ist, aber hier vorgeführt werden soll, weil die Erscheinungen beim Knickvorgang die theoretische Behandlung erleichtern.

Anlässlich eines Falles in der Praxis war es nötig, die Knicklast eines Sattels in Form eines Blechträgers zu untersuchen, dessen untere Gurtung gerade, die obere Gurtung nach einem Kreisbogen gekrümmt war. Bei dem betreffenden Objekte war bloss ein Stehblech vorhanden, unten ein Gurtwinkel aussen, oben einer auf der Innenseite. Dieses Stück hatte die in Abb. 1 in der Ansicht gegebene Form, sie ist unsymmetrisch, das Stehblech war seitlich schief hinaufgezogen und 8 mm stark. Die Gurtwinkel sind 80/100/10. Die Abstützung des Stückes erfolgte auf einen I-Trägerflansch von 141 mm Breite. Die Belastung war lotrecht, auf 50 cm Breite am Obergurt gleichmässig verteilt, wirksam.

Für den Versuch wurde das Stück doppelwandig mit 200 mm lichtem Abstand ausgebildet (Abb. 2) und oben mit einer 6 mm starken Kopfplatte verbunden. Damit die lotrechte Kraft gleichmässig wirke und sich auf beide Stegteile in gleicher Weise verteile, wurde ein eigenes Gusslager aufgesetzt und die Schubwirkung durch ein aufgesetztes und verschraubtes Zwischenstück aufgenommen.

Die Fusswinkel sind mit einer geringen Federung von 2 mm(Abb. 2) aufgebracht worden, wie im Falle der Praxis, was aber für die Knicklast ohne Einfluss ist, da sich der Fusswinkel bei der kleinsten Last schon ganz aufstützte.

Das Versuchstück wurde mit einem Liniennetz auf den Aussenseiten ver-

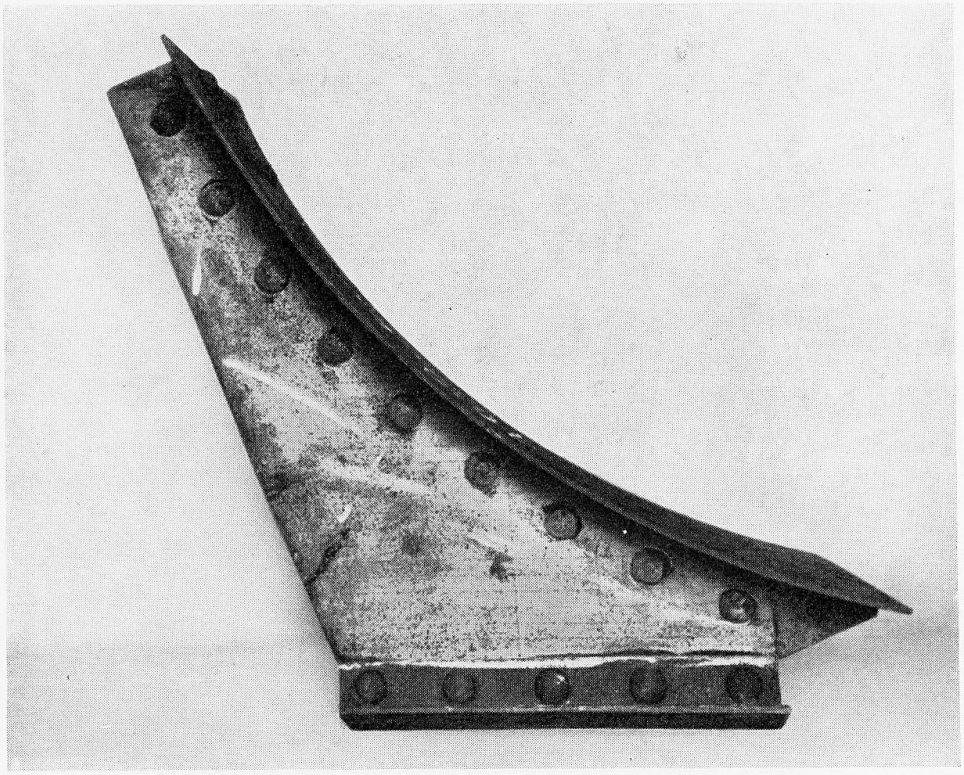

Fig. 5.

sehen und in die 400 t-Presse der Deutschen Techn. Hochschule in Brünn eingebracht.

Im Endzustande hatten die Stehbleche im Querschnitt eine Verbiegung aufgewiesen, die in Abb. 3 wiedergegeben ist. Gemessen wurden während des Versuches die lichten Abstände der Stehbleche auf der schiefen Seite, deren Länge in vier gleiche Teile geteilt war. Die Teilpunkte sind von oben O, A, B, C, während auf dem gegenüberliegenden Rand des Stehbleches knapp unterhalb der Innenwinkel bei D gemessen wurde. Die einzelnen Laststufen wurden je 5 Minuten lang gehalten.

Die Ablesungen ergaben :

Belastung :		0	48,714	61,28	73,846	86,4	98,98	*t*
Messtelle	A	200	200,8	200,6	200,8	200,9	201,0	mm
»	B	198,1	198,2	198,4	198,5	198,9	199,6	»
»	C	195,0	191,2	190,5	189,4	188,0	184,2	»
»	D	202,9	203,4	203,4	203,5	203,5	209,5	»

Die Knicklast betrug 98, 98 *t*, somit entfällt auf eine Hälfte die Knicklast von 49, 49 *t*.

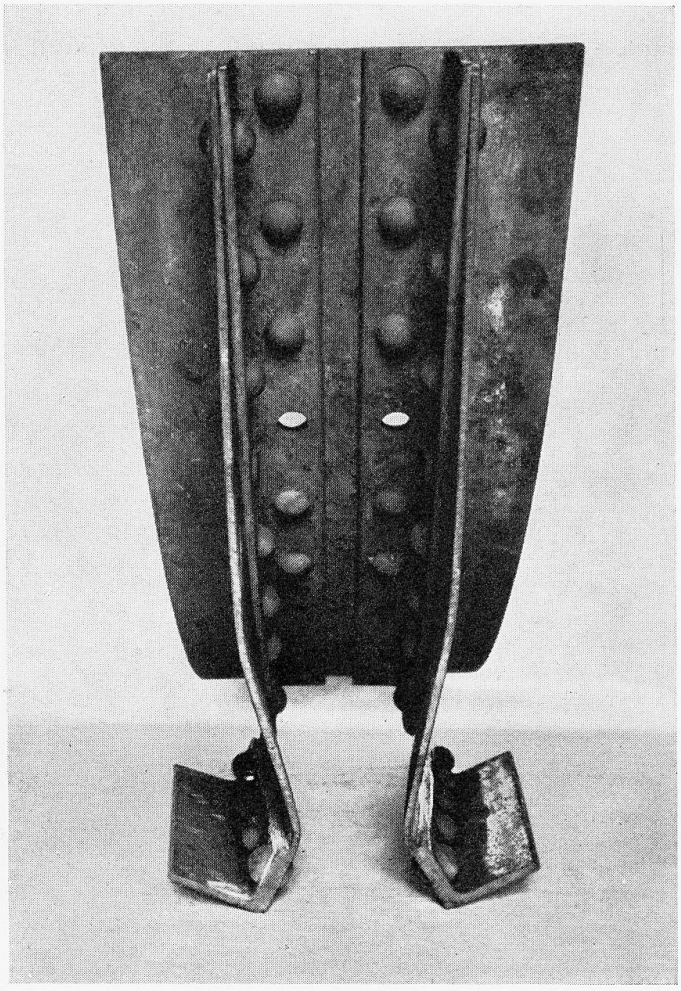

Fig. 6.

Die windschiefe Verbiegung des Stehbleches wurde nach dem Versuche für verschiedene Vertikalschnitte *a-g* (Abb. 1) des Fusses genau vermessen und in Abb. 4 eingetragen. Dabei wurden die unteren Winkeleisen im Grundriss nach innen gedreht und zwar haben sich diese an der Stelle mit grösster Trägerhöhe am meisten genähert, was auch aus Abb. 4 entnommen werden kann. Abb. 5 und 6 geben die Längs- und Queransicht des Versuchsstückes nach der Ausknickung.

Im vorliegenden Fall war es nicht möglich, bisher aufgestellte Formeln anzuwenden. Deshalb wurde eine Theorie aufgestellt, die wegen Raumman-

gels an anderer Stelle veröffentlicht wird. Hier soll nur der Näherungsweg beschritten werden, der eine gute Uebereinstimmung brachte.

Zu diesem Zwecke ist die Basislänge in 10 gleiche Teile eingeteilt worden. Es wurden 10 vertikale Streifen herausgegriffen, ohne auf die seitlichen Widerstände Rücksicht zu nehmen, die die kürzeren Streifen der Ausbeulung der längeren entgegensetzen. Ausserdem wurde der lange dreieckige Zwickel des Stehbleches vernachlässigt, der unten keine Stützung hat, länger ist und auch nicht unmittelbar belastet wird.

Diese Streifen des Stehbleches hatten eine Fläche von 4 cm² und einen Trägheitshalbmesser von 0,231 cm. Da nach der Formänderung des Versuchsstückes die unteren Fusstellen sich gedreht haben, oben jedoch die Gurtwinkel das Stehblech festhielten, aber knapp unterhalb des Winkelrandes das Stehblech sich ausgedreht hat, wird für jeden Streifen der Abstand vom Fussende bis zu diesem Winkelrand als freie Knicklänge genommen.

Für diese Annahme wurde für alle Streifen unabhängig voneinander die zulässige Knicklast nach Tetmajer bezw. Euler gerechnet für s = 1200 kg/cm². Die Stauchspannung für das verwendete Eisen ist mit 2400 kg/cm² ermittelt worden.

Die zulässige Last ergab sich mit 49,44 und die rechnungsmässige Knicklast aus der Stauchspannung mit 98,88 t. Die tatsächliche Knicklast betrug für diese Hälfte 98, 62 t., was eine gute Ubereinstimmung gibt.

Traduction.

Jusqu'à maintenant, et pour autant que l'on sache, seules les poutres rivées à âme pleine à membrures parallèles ont fait l'objet d'études portant sur la question de la stabilité des tôles de l'âme. En ce qui concerne les poutres en tôle dont les membrures ne sont pas parallèles et tant pour le cisaillement que pour la flexion, le problème de la stabilité des tôles de l'âme n'a pas encore reçu de solution. Ce problème présente cependant une extrême importance pour les poutres principales de ponts exécutées en poutres continues ou poutres Gerber, car ces dispositions comportent généralement, aux appuis, une augmentation de la hauteur de l'âme sous forme de voûtins.

L'auteur, ayant à étudier une question corrélative, a effectué un essai, qui, sans permettre d'aboutir à des conclusions d'ordre général (car cet essai porte non seulement sur une forme particulière, mais également sur une disposition particulière des appuis), n'en est pas moins intéressant à évoquer ici, les phénomènes qui ont été constatés au flambage pouvant contribuer à faciliter l'étude théorique de ce processus.

A l'occasion d'un cas concret, il fut nécessaire d'étudier le flambage d'une pièce d'appui ayant la forme d'une poutre à âme pleine, dont la membrure inférieure affectait une forme rectiligne, tandis que la membrure supérieure présentait la forme d'un arc de cercle. Dans le cas considéré, la poutre ne comportait qu'une seule tôle d'âme, avec cornière de membrure inférieure extérieure et cornière de membrure supérieure intérieure. La pièce avait la forme indiquée sur la figure 1 ; elle était donc dissymétrique, la tôle d'âme,

d'une épaisseur de 8 millimètres, étant inclinée latéralement vers le haut. Les cornières de membrure ont 80-100-10. L'appui de la pièce était assuré par une semelle en I de 141 mm de large. La charge s'exerçait verticalement, sur 50 centimètres de large, et d'une manière uniformément répartie, sur la membrure supérieure.

Pour l'essai, la pièce fut constituée avec double paroi à un écartement entre âmes de 200 mm (figure 2), ces deux âmes étant assemblées à la partie supérieure avec une semelle de 6 mm d'épaisseur. Afin que l'influence de la charge puisse s'exercer uniformément et que cette charge se répartisse également sur les deux âmes de la pièce, on disposa un support en fonte de forme appropriée, l'effort de cisaillement étant supporté par une pièce intermédiaire rapportée et boulonnée.

Les cornières inférieures sont montées avec un faible jeu de 2 mm (figure 2), de même que dans la pratique, fait qui n'exerce cependant aucune influence sur le processus du flambage, car l'appui effectif de ces dernières est complètement assuré pour la plus faible charge.

On traça sur la pièce d'essai un système de lignes de repère et elle fut montée sur la presse de 400 tonnes de l'École Polytechnique de Brünn.

La figure 3 représente la déformation accusée par les tôles de l'âme à la fin de l'essai. Pendant l'essai, on mesura l'intervalle entre les tôles d'âme, sur le côté incliné, dont la longueur avait été divisée en quatre parties égales. Les points de divisions sont marqués, à partir du haut, O, A, B, C ; sur le bord opposé de la tôle d'âme, presque sous la cornière, la mesure fut effectuée en D. Les différentes charges successives furent maintenues chacune pendant 5 minutes.

Les résultats obtenus sont indiqués dans le tableau ci-contre :

La charge de flambage fut atteinte pour 98,98 t, ce qui correspond, pour chaque moitié de la pièce, à une charge de flambage de 49,49 tonnes.

Charge en t.	0	48,71	61,28	73,85	86,4	98,98
Point A	200	200,8	200,6	200,8	200,9	201
Point B	198,1	198,2	198,4	198,5	198,9	199,6
Point C	195	191,2	190,5	189,4	188	184,2
Point D	202,9	203,4	203,4	203,5	203,5	209,5

Le gauchissement de la tôle d'âme fut mesuré exactement après l'essai, pour différentes sections verticales *a-g* (figure 1) et fait l'objet de la figure 4. Les cornières inférieures se sont d'ailleurs déformées vers l'intérieur, se rapprochant d'ailleurs l'une de l'autre au maximum à l'endroit correspondant à la plus grande hauteur de l'âme de la poutre, ainsi qu'on peut s'en rendre compte sur la figure 4. Les figures 5 et 6 représentent la pièce ainsi soumise à l'essai, en vue longitudinale et transversale, après le flambage.

Il n'a pas été possible d'appliquer, au cas qui vient d'être exposé, les formules déjà établies. On a dû mettre sur pied une théorie, dont le peu de

place dont nous disposons actuellement nous oblige à différer la publication. Nous n'exposerons ici qu'une méthode approchée, donnant d'ailleurs un résultat en concordance.

Cette méthode consiste à diviser la longueur de base en 10 parties égales. On définit ainsi 10 bandes verticales et l'on ne tient pas compte de la résistance qu'opposent les bandes de faible longueur au flambage des bandes de plus grande longueur. On néglige en outre la longue pointe triangulaire de la tôle d'âme, qui ne comporte aucun appui inférieur et qui n'est pas soumise, d'ailleurs, à l'action d'une charge directe.

Les bandes ainsi définies avaient une surface de 4 cm² et un rayon d'inertie de 0,231 cm. A la suite des déformations provoquées par l'essai, les parties inférieures ayant été particulièrement déformées, la cornière supérieure de membrure ayant tenu, mais la tôle ayant été gauchie presque immédiatement au-dessous du bord de cette cornière, on a pris comme longueur libre de flambage, pour chacune des bandes, la distance entre le pied et ce bord de cornière lui-même.

On a calculé, dans ces conditions, d'après Tetmajer et Euler, la charge de flambage admissible pour toutes les bandes, indépendamment les unes des autres, pour s = 1200 kg/cm². La contrainte de compression, pour l'acier employé, a été trouvée égale à 2400 kg/cm².

On a trouvé une charge admissible de 49,44 tonnes et une charge de flambage déduite de la contrainte de compression de 98,88 tonnes. La charge de flambage effectivement constatée pour cette moitié de la pièce est de 98,62 tonnes, ce qui est d'accord avec le calcul.

Dr. Ing. ST. BRYLA,

Professeur à l'École Polytechnique, Lwów.

En ce qui concerne la question du renforcement des poutres en double T, à l'aide de contre-fiches, question soulevée par M. Timoshenko dans son très intéressant mémoire, je m'empresse d'indiquer ci-après les résultats des essais exécutés par moi en 1930-31.

Il s'agit de poutres en double T laminées, dont les âmes ont été renforcées par des contre-fiches, constituées par des fers plats soudés aux âmes. On a essayé des poutres de 16, 20, 24, 30, 32 et 34 cm de hauteur, dont les appuis étaient éloignés de 3 mètres. Les poutres supportaient une charge appliquée au milieu, car je n'avais pas d'appareils répartissant uniformément la charge sur toute la longueur des poutres.

Dans chacune des 6 séries on a essayé : une poutre sans contre-fiche de renforcement, une poutre avec 3 contre-fiches, placées aux points d'application des charges verticales, et une poutre à 5 contre-fiches placées à des distances égales l'une de l'autre. (Voir fig. 1.)

Les résultats détaillés de ces essais seront publiés spécialement. Je me bornerai ici à citer les résultats qui sont représentés par les tableaux fig. 2-4. Sur ces diagrammes, on a porté en abscisses les hauteurs des poutres et en ordon-

nées la résistance au pliage, calculée d'après la formule $k = \frac{M}{W}$, où M désigne la valeur du moment de rupture et W celle du moment de résistance des poutres.

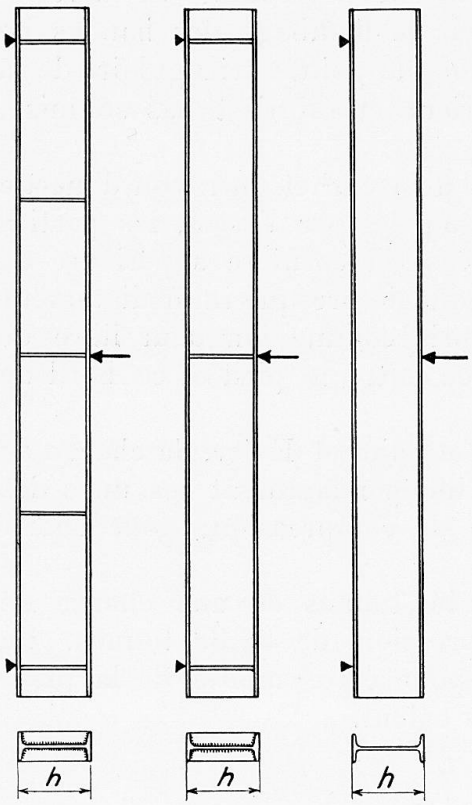

Fig. 1.

En ce qui concerne les autres poutres, elles n'ont pas supporté l'effort, ce qui s'est manifesté, soit par l'écrasement de la semelle, soit par le flambage de l'âme.

Pour ces dernières poutres, de plus grande hauteur, on voit l'importance de l'application des contre-fiches, qui augmentent la résistance.

Le diagramme fig. 2 (poutres non-renforcées) montre la diminution de la résistance pour des poutres d'une plus grande hauteur, ce qui est d'ailleurs connu ; cependant le diagramme fig. 3 (poutres renforcées par 3 contre-fiches) et surtout fig. 5 (5 contre-fiches) met en évidence, non seulement une stabilité, mais même une augmentation de la résistance. Cette augmentation est de plus en plus nette lorsque la hauteur des poutres augmente, et traduit le renforcement de l'âme à l'aide des contre-fiches.

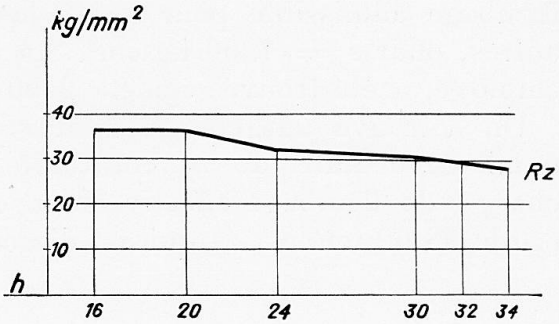

Fig. 2.

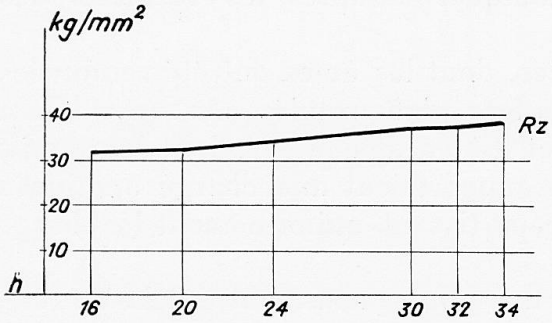

Fig. 3.

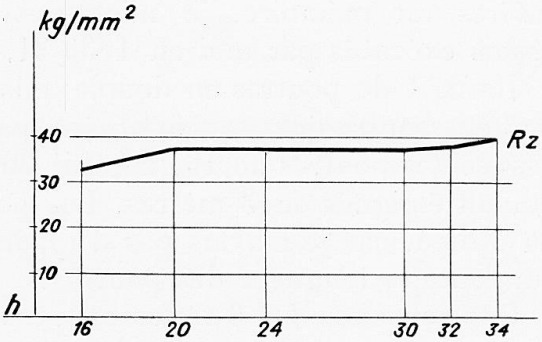

Fig. 4.

Les conséquences qu'on peut tirer de ces diagrammes sont les suivantes :

1° L'application de contre-fiches soudées augmente la résistance des poutres laminées en double T, quelquefois même de plus de 20 %.

2° Si les contre-fiches sont placées à la même distance, la résistance augmente d'autant plus que la hauteur de la poutre est plus grande.

3° Les essais n'ont pas permis de déterminer la valeur la plus avantageuse du rapport $\frac{h}{l}$.

4° L'augmentation est la plus grande si l'on applique des contrefiches dans les points d'application des charges concentrées.

5° L'application des contre-fiches à des intervalles plus réduits augmenterait la résistance, mais leur coût deviendrait alors plus élevé que le profit que l'on retirerait de l'augmentation de la résistance.

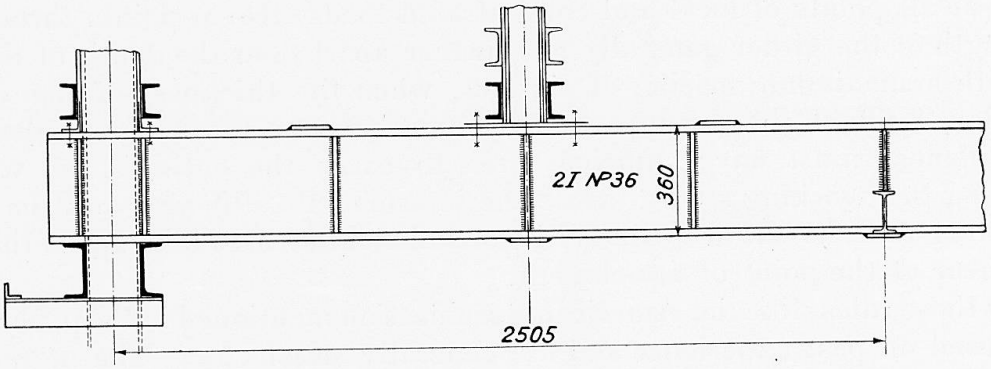

Fig. 5.

6° L'épaisseur de l'âme des poutres examinées n'a pas joué dans ces essais un rôle primordial, étant donné que ces poutres étaient relativement basses; l'épaisseur de l'âme dépend plutôt de considérations de fabrication que de questions de résistance.

Les résultats ci-dessus ne peuvent pas être généralisés, bien entendu, car nous n'avons pas appliqué une charge uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre; néanmoins le renforcement des poutres par des contre-fiches soudées semble procurer des avantages incontestables.

L'augmentation de la résistance par application de contre-fiches peut avoir une importance dans la pratique pour des poutres en double T travaillant à la flexion et la compression. J'ai employé ces poutres à la construction du bâtiment de 16 étages de la Société « Prudential » à Varsovie, où l'on s'est décidé à construire encore le 16e étage alors que l'on était encore au 15e. Les poutres en double T, de 36 cm. de hauteur, qui supportaient 2 étages, ont dû être légèrement renforcées, et on ne pouvait pas appliquer de semelles ni en haut ni de côté, la construction ne le permettant pas. On a donc prévu, dans la partie la plus chargée, plusieurs contre-fiches soudées, en fers plats. (Fig. 5.)

Discussion libre.
Freie Diskussion.
Free discussion.

M. B. BUXTON,
Captain, Chartered Civil Engineer, London.

Professor Timoshenko's paper on Stability of Plate Girders Subject to Bending, marks a practical advance in structural engineering, because he lays down a theoretical basis for the design and spacing of stiffeners in the webs of plate girders, and for the thickness of the web. Hitherto the rules have been largely empirical.

In Great Britain the Standard Specification for Girder Bridges demands web stiffeners riveted on both sides at the ends and inner edges of the bearing plates, at all points of local and concentrated loads, also at points throughout the length of the girder generally not further apart than the depth of the girder with a maximum spacing of six feet, when the thickness of the web is less than 1/60 of the unsupported distance between the flange angles. The end stiffeners must have sufficient area to carry the entire shear without exceeding the working stress, while the intermediate stiffeners and the rivets connecting them to the web should be of sufficient area to take 2/3 of the vertical shear at the point of attachment.

Now these rules, like the American Specification mentioned in the paper, have been based on past experience and are generally satisfactory. The more exact rules of Prof. Timoshenko show an appreciable saving of material and are to be welcomed, and it is hoped that they will be supported by practical experience.

Traduction.

Le Rapport du Professeur Timoshenko sur la Stabilité des poutres sollicitées à la flexion marque un progrès très effectif dans la technique de la construction, car il pose les bases de notions théoriques en vue du calcul des éléments de renforcement et de leur écartement sur l'âme des poutres pleines ainsi que pour le calcul des épaisseurs à donner aux âmes de ces poutres. Jusqu'à maintenant en effet, les règles que l'on adoptait étaient pratiquement empiriques.

En Grande-Bretagne, la « Standard Specification » prescrit pour les ponts à poutres des éléments de renforcement rivés, sur les deux côtés, aux extrémités et sur les bords intérieurs des plaques de tôle constituant les âmes, ainsi qu'en tous les points où peuvent se manifester des charges localisées ou concentrées ; ces éléments de renforcement sont également prévus sur toute la longueur de la poutre, généralement à des écartements non supérieurs à la hauteur de la poutre elle-même, avec un maximum de 6 pieds (1,83 mètre), lorsque l'épaisseur de l'âme est inférieure au 1/60 de la distance qui sépare les extrémités des cornières des membrures inférieure et supérieure (ce que l'on pourrait appeler la hauteur nette de l'âme). Les éléments de renforcement des extrémités doivent présenter une section suffisante pour pouvoir supporter la totalité du cisaillement sans travailler au-dessus du taux normal ; les éléments de renforcement intérieurs et le rivetage qui les assemble sur l'âme de la poutre

doivent présenter une section suffisante pour pouvoir supporter les 2/3 du cisaillement vertical qui s'exerce à leur point d'assemblage.

Ces prescriptions, de même que les Spécifications américaines qui sont mentionnées dans le rapport, sont basées sur une longue expérience et donnent généralement des résultats satisfaisants. Les règles plus exactes établies par le Professeur Timoshenko permettent de réaliser une économie très appréciable de matière première ; elles doivent recevoir un chaleureux accueil et il faut espérer qu'elles seront légitimées par l'expérience pratique.

Dr. sc. techn. J. BRUNNER,
Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt, Zürich.

Zur Abhandlung von Prof. Dr. Karner möchte ich bemerken, dass mir seine Definition des Knickens zu eng gefasst erscheint.

Prof. Karner sagt : « Wird ein gelenkig gelagerter Stab zentrisch belastet, so bleibt er infolge Belastungen unterhalb der kritischen Knicklast (Euler'sche Knicklast) gerade. Wird die Stabachse durch hinzutreten von äusseren Momenten gebogen (und tritt keine Randspannung über der Proportionalitätsgrenze auf), so kehrt der Stab nach Wegfall der Ausbiegungsursachen wieder in die gerade Lage zurück.

« Der Stab bleibt auch bei weiterer Steigerung der Last gerade, er ist im stabilen Gleichgewicht, bis die kritische Last, die Knicklast, erreicht ist. Der Stab ist bisher nur durch eine Normalkraft beansprucht. Wird nunmehr die Last um einen noch so kleinen Teil gesteigert, so tritt eine Ausbiegung auf, es wird ein Zusatzmoment wirksam. Nur diesen Vorgang sprechen wir als Knickvorgang an. »

Diese Definition erscheint mir, wie gesagt, zu eng, sie ist darauf eingestellt, nur elastiche Baustoffe rechnerisch zu erfassen.

Baustoffe, die keine Proportionalitätsgrenze, resp. Elastizitätsgrenze kennen, wie z. B. Kupfer, auch Gusseisen, würden nicht unter den Knickbegriff eingereiht werden können.

Unsere Stäbe der Praxis sind auch immer exzentrisch gedrückt. Auch da würde man nicht von Knicken sprechen können.

Geeigneter scheint es mir, das exzentrische Knicken als Typus zu wählen und das zentrische Knicken als Spezialfall zu bezeichnen.

Gewiss kann man den Begriff « Knicken » so einengen, doch deckt sich dies weder mit der Praxis, noch ist wissenschaftlich damit etwas gewonnen.

Traduction.

Au sujet du Rapport présenté par le Professeur Dr. Karner, je me permettrai de faire cette remarque que sa définition du flambage me semble trop étroite.

Le Professeur dit : Lorsqu'une barre articulée à ses extrémités est soumise à un effort axial centré, elle reste rectiligne si la charge est inférieure à la charge critique de flambage (charge de flambage d'Euler). Si l'axe de la barre subit une flexion sous l'influence de moments extérieurs (et si aucune contrainte périphérique n'arrive à dépasser la limite de proportionalité), la barre revient à sa

forme rectiligne après la disparition des causes ayant provoqué la déformation.

« La barre reste également rectiligne si la charge augmente à nouveau ; elle se trouve en équilibre stable jusqu'à ce que soit atteinte la charge critique, c'est-à-dire la charge de flambage. Cette barre n'a été ainsi soumise, jusqu'à ce moment, qu'à une charge normale, axiale. Si toutefois, à partir de ce moment, la charge continue à augmenter, si peu soit-il, il se produit une déformation par flexion et un moment additionnel entre effectivement en jeu. C'est cette phase seulement du processus de charge que nous considérons comme constituant essentiellement le flambage. »

Ainsi que je l'ai dit, cette définition me paraît trop étroite. Elle ne considère d'une manière mathémathique que les matériaux parfaitement élastiques.

Des matériaux tels que le cuivre, la fonte également, qui ne possèdent aucune limite de proportionnalité, aucune limite d'élasticité nettement définie, ne pourraient en effet pas être soumis à cette notion du flambage.

Dans la pratique, les barres que nous employons sont en outre toujours soumises à des charges excentriques. Là encore, il ne serait pas non plus possible de parler de flambage.

Ainsi que je l'ai dit, cette définition me paraît trop étroite. Elle ne considère d'une manière mathématique que les matériaux parfaitement élastiques.

Il me semblerait donc plus judicieux de considérer le flambage sous l'influence de charges excentrées comme constituant le cas général, dont le flambage sous l'influence de charges centrées ne serait qu'un cas particulier.

On peut évidemment maintenir la notion de « flambage » dans ces étroites limites, mais cela ne concorde pas avec la pratique et l'on n'a rien à y gagner scientifiquement.

M. BROSZKO,

Professor an der Technischen Hochschule, Warschau.

Bei der Behandlung des Knickproblems werden oft logische Fehler begangen, welche auf einen gemeinsamen Ursprung zurückgeführt werden können. Zur Aufdeckung der gemeinsamen Ursache dieser Fehler wird man durch die folgenden Ueberlegungen geführt :

Die Eigenart der mathematischen Elastizitätstheorie besteht bekanntlich darin, dass sie, auf die Allgemeingültigkeit ihrer Ergebnisse von vornherein verzichtend, die wirklichen elastomechanischen Eigenschaften der beanspruchten festen Körper durch willkürlich angenommene, unabänderlich festgelegte Eigenschaften ersetzt, und infolgedessen bei Bewertung der Korrektheit ihrer Resultate sich auf die Anwendung der rein mathematischen Kriterien beschränken kann. Im Gegensatz zu der mathematischen Elastizitätstheorie muss die allgemeine, d. h. eine unbeschränkte Gültigkeit ihrer Lösungen anstrebende Knicktheorie die wirklichen elastomechanischen Eigenschaften der festen Körper in ihren Ansätzen voll berücksichtigen, und kann infolgedessen bei der Ueberprüfung der Richtigkeit ihrer Ergebnisse neben der Mathematik auch eines anderen Prüfmittels, nämlich des Versuchs nicht entbehren. Denn die Korrektheit der mathematischen Operationen, mit deren Hilfe die Ergebnisse der vollwertigen physikalischen Theorien gewonnen werden, bildet eine

zwar notwendige, keinesfalls aber auch hinreichende Bedingung für die Richtigkeit der letzteren. Eine vollwertige physikalische Theorie darf vielmehr den Anspruch auf Richtigkeit nur dann erheben, wenn erstens ihre Grundannahmen, und zweitens auch ihre aus diesen Grundannahmen in korrekter Weise abgeleiteten Endergebnisse mit den Erfahrungstatsachen übereinstimmen.

Die Ursache der bei der Behandlung des Knickproblems sich regelmässig wiederholenden logischen Fehler kann nun auf Grund der vorstehenden Erörterungen leicht aufgezeigt werden. Sie liegt darin, dass viele Ingenieure, infolge des ständigen Gebrauches der von unverrückbaren Ansätzen ausgehenden Elastizitätstheorie, sich gewohnheitsmässig von der Pflicht einer gewissenhaften Ueberprüfung der Rechnungsgrundlagen enthoben fühlen, und nur zu leicht zu dem Glauben verführt werden, ein in mathematischer Hinsicht korrektes Rechnungsergebnis stelle unter allen Umständen eine einwandfreie Lösung des Problems dar. Die Richtigkeit dieser Behauptung möge durch einige Beispiele belegt werden :

1) Die formale Korrektheit der Rechnung, mit deren Hilfe v. Kármán seine Knickformel aus einem unrichtigen, weil mit den Erfahrungstatsachen unverträglichen Spannungsverteilungsgesetz abgeleitet hat, wurde bekanntlich von mehreren Forschern dargelegt. Nach der Meinung eines Verfechters der Engesser-v. Kármán'schen Theorie soll nun die Korrektheit der Kármán'schen Rechnung schon an und für sich einen zwingenden Beweis dafür bilden, dass eine andere, auf Grund anders gearteter Annahmen unter Benutzung einer korrekten Rechnung aufgestellte Knicktheorie unbedingt falsch sein müsse !

2) Die von dem hochverdienten Leiter der Dahlemer Knickversuche aufgestellte Knicktheorie wurde aus physikalischen Annahmen abgeleitet, deren Unrichtigkeit durch die in meinen Diskussionsvortrag dargelegte Unrichtigkeit des Engesser-v. Kármán'schen Spannungsverteilungsgesetzes bedingt ist. Auf Grund einer kritischen Ueberprüfung der Rechnungsgrundlagen und der Rechnungsresultate der Rein'schen Knicktheorie gelangt nun ein Verfasser zu dem Ergebnis, welches im Falle seiner Richtigkeit geeignet wäre, die in der Physik bis dahin geltenden Kriterien für die Richtigkeit der theoretischen Ableitungen ins Wanken zu bringen : Er findet nämlich, dass die Rein'sche Theorie, trotz ihrer (auch von ihm erkannten) Unrichtigkeit sich mit den Erfahrungstatsachen in voller Uebereinstimmung befinde !

Traduction.

Dans l'étude du problème du flambage, on commet souvent des fautes de raisonnement que l'on peut d'ailleurs attribuer à la même cause générale. Les considérations qui sont exposées ci-après nous permettront de mettre en évidence l'origine commune de ces erreurs.

La théorie mathématique de l'élasticité est caractérisée, ainsi qu'on le sait, par la conception suivante : renonçant par avance à donner aux résultats qu'elle permet d'obtenir un caractère général de validité, elle remplace les propriétés mécano-élastiques effectives des corps solides soumis à des contraintes par des propriétés choisies en quelque sorte arbitrairement et *établies dans un cadre invariable*, ce qui lui permet de se limiter, dans l'interprétation

de la légitimité des résultats obtenus, à l'intervention de critères purement mathématiques. Par contre, et opposée en cela à la théorie mathématique de l'élasticité, la théorie du flambage, qui s'efforce d'aboutir à des solutions générales, c'est-à-dire d'une validité non limitée, doit tenir compte d'une manière intégrale des caractéristiques mécano-élastiques effectives des corps solides ; elle se trouve par suite dans la nécessité de faire appel également au contrôle expérimental pour vérifier la validité des résultats obtenus. L'exactitude des opérations mathématiques auxquelles on a recours pour tirer les conséquences d'une théorie physique qui a toute sa valeur constitue donc une condition nécessaire, mais nullement suffisante pour en assurer la légitimité. Il importe bien davantage, pour confirmer la validité de cette théorie physique, de constater un accord entre les principes sur lesquels elle s'appuie et les résultats définitifs logiquement déduits de ces principes, d'une part, et les faits d'expérience correspondants, d'autre part.

Ces considérations d'ordre général vont nous permettre de dégager facilement l'origine des erreurs d'ordre logique dont on constate la répétition régulière dans les études consacrées au problème du flambage. Elle est la suivante : très fréquemment, les ingénieurs, tout habitués qu'ils sont à appliquer la théorie de l'élasticité, qui découle de propositions *immuables*, ne pensent pas avoir à se soumettre à l'obligation de contrôler d'une manière scientifique les principes de base sur lesquels ils appuient leurs calculs ; ils ne sont que trop enclins à admettre qu'un résultat fourni par le calcul, dans des conditions correctes du seul point de vue mathématique, peut constituer, dans tous les cas, la solution parfaite d'un problème. Quelques exemples permettront de se rendre compte du degré de légitimité de cette tendance.

1. — L'exactitude, dans la forme, du calcul au moyen duquel Kármán a établi sa formule du flambage a été reconnue, ainsi qu'on le sait, par de nombreux investigateurs ; or cette formule est basée en somme sur une loi de répartition des contraintes qui n'est pas rigoureusement correcte, puisqu'elle n'est pas conciliable avec les faits d'expérience pratique. Suivant l'opinion émise par un protagoniste de la théorie d'Engesser-Kármán, l'exactitude du calcul de Kármán, prise en elle-même, constituerait un argument de poids, suivant lequel toute autre théorie du flambage, basée sur d'autres hypothèses et faisant intervenir un calcul correct, serait nécessairement fausse !

2. — La théorie du flambage, telle qu'elle est établie par le très distingué réalisateur des essais de flambage de Dahlem, repose sur des hypothèses d'ordre physique dont on peut dire que le caractère non parfaitement légitime est précisément conditionné par le défaut d'exactitude de la loi de répartition des contraintes d'Engesser-Kármán, défaut que j'ai mis en évidence dans ma communication à la Discussion. L'étude critique des bases sur lesquelles repose le calcul de la théorie du flambage de Rein et des résultats correspondants conduit, en considérant cette théorie comme légitime, à un véritable bouleversement des critères admis jusqu'à maintenant comme susceptibles de justifier, en physique, la légitimité des déductions théoriques : on arrive en effet à constater que malgré son défaut d'exactitude — défaut reconnu par l'auteur lui-même — cette théorie de Rein se trouve en parfait accord avec les faits d'ordre expérimental !