Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Artikel: Théorie des dalles à champignon

Autor: Huber, M.T.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-449

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

II 3

THÉORIE DES DALLES A CHAMPIGNON

THEORIE DER PILZDECKEN

THEORY OF " MUSHROOM " SYSTEMS

Dr. M. T. HUBER,
Professeur à l'École Polytechnique de Varsovie.

I. Introduction.

Les « dalles à champignon » sont en général des constructions en béton armé, composées de hourdis horizontaux d'épaisseur constante et de piliers sur lesquels ils s'appuient et qui sont joints rigidement à eux. Les axes des piliers forment sur le plan des hourdis un réseau à mailles d'ordinaire rectangulaires ou carrées. Les fûts des piliers sont joints aux hourdis au moyen de chapiteaux qui s'élargissent considérablement vers le haut. Ce genre de construction est très avantageux par le fait qu'il se comporte comme un monolithe au point de vue de la stabilité, mais il rend difficile la détermination théorique des tensions et des déformations pour des charges données. Une autre difficulté théorique consiste dans le fait que le hourdis, en raison de son armature, ne se comporte pas exactement comme une plaque isotrope, et par conséquent, même pour des flèches insignifiantes, on ne devrait pas, au sens rigoureux, y appliquer l'équation différentielle de LAGRANGE :

$$(1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{d y^4} = \frac{p}{B},$$

où p désigne la charge par unité de surface, B la rigidité au fléchissement cylindrique du hourdis, rapportée à l'unité de largeur de la section.

La théorie des plaques orthotropes [4 à 9] qui tient compte de ce que les rigidités de flexion B_1 et B_2 dans deux directions perpendiculaires x et y de la plaque (l'armature étant supposée répartie uniformément) sont différentes, ne peut y remédier, car cette théorie ne correspond pas exactement non plus à la manière d'armer appliquée dans les hourdis des dalles-champignons. On sait que l'armature est plus dense le long des côtés et quelquefois aussi le long des diagonales de chaque panneau rectangulaire du hourdis disposé entre les quatre piliers les plus proches.

Cette théorie donne pour la surface élastique l'équation différentielle

$$(2) \quad B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p,$$

4 à 9. Voir l'annexe à la fin du rapport.

H étant égal à $\frac{1}{2}\frac{B_1}{m_2} + \frac{1}{2}\frac{B_2}{m_1} + 2C$,

$\frac{1}{m_1}$, $\frac{1}{m_2}$ étant les constantes généralisées de Poisson,

2 C la rigidité de torsion de la plaque.

Heureusement, dans ce qu'on appelle le premier stade (stade I) de la déformation de la dalle qui correspond à toutes les charges employées effectivement, les différences de résistance à la flexion pour les directions des différentes armatures sont tellement insignifiantes, qu'on ne commettra pas d'erreur grave en considérant la plaque comme isotrope. C'est pour cela que si l'on considère la plaque comme illimitée, chargée complètement et uniformément, on peut y appliquer la solution exacte de l'équation (1), d'après la méthode de Navier, qui consiste à se servir des séries de Fourier. C'est M. Lavoinne qui, en 1872, a le premier proposé cette solution [1]. Une autre solution ancienne proposée par M. Grashof [2] et appliquée en 1913 par M. F. Eddy [3] aux dalles-champignons ne peut être considérée que tout au plus comme une approximation assez grossière, parce qu'elle ne satisfait pas aux conditions limites pour l'effort tranchant.

La solution de M. Lavoinne admet que les réactions du chapiteau rectangulaire sont réparties uniformément. En réalité, la répartition des réactions doit dépendre de la déformabilité du chapiteau, et la plaque se comporte, proprement dit, comme si elle était élastiquement encastrée autour du chapiteau.

En tâchant de résoudre le problème d'une manière exacte, on se heurte encore à la complication due à ce qu'on nomme « l'éclisse », c'est-à-dire au renflement de la plaque au-dessous et au-dessus du chapiteau (quelquefois aussi au-dessus de la plaque). Le contour de ce renflement est un carré, un octogone, etc. ; il sert à économiser une armature très forte autour du chapiteau du pilier. Cette éclisse (renflement) joue un rôle analogue à celui de la sellette des étais des poutres continues en bois.

Lorsqu'il s'agit d'une charge pour laquelle on peut considérer que la solution de M. Lavoinne est satisfaisante, les piliers sur lesquels les hourdis s'appuient n'éprouvent qu'une simple compression sans qu'interviennent des moments fléchissants. Les cas des charges qui produisent les plus grands moments dans les piliers ont été étudiés, que je sache, pour la première fois par MM. N. J. Nielsen [10] et V. Lewe [11, 12].

Les solutions exactes de MM. Lavoinne, Lewe, Mesnager [11a] et d'autres auteurs présentent des séries trigonométriques doubles qui sont pour la plupart trop compliquées pour permettre un calcul numérique pratique. Ce fait, à lui seul, prouve le besoin et l'utilité de théories et de méthodes approximatives. Le calcul des différences finies [13 à 15], surtout en connexion avec la méthode de M. H. Marcus [16, 17] qui a imaginé un intéressant modèle de « tissu élastique » (elastisches Gewebe), rendra un grand service dans ces théories.

L'importance et le besoin urgent de méthodes approchées dans la pratique découlent aussi de l'hétérogénéité des formes qui s'imposent pour des raisons de construction. Une certaine irrégularité inévitable du réseau des piliers ou bien des ouvertures dans le hourdis présentent des difficultés insurmontables

lorsqu'on s'efforce de résoudre le problème d'une manière exacte. C'est pour cela que, lorsqu'il s'agit d'applications pratiques immédiates, des méthodes approximatives simples, comme celles qui ont été proposées par MM. I. R. NICHOLS [19], TURNEAURE et MAURER [20], MARCUS [21] et d'autres, jouent un rôle important.

Toutes les théories qu'on a appliquées jusqu'à présent se rapportent aux tensions et aux déformations ayant lieu dans le stade I, c'est-à-dire à celles auxquelles participent les couches de béton qui s'étendent. Dans ce cas on peut, avec une grande approximation, considérer la rigidité au fléchissement de la plaque comme constante, car les écarts du béton par rapport à la loi de HOOKE n'ont lieu presque exclusivement que dans le domaine des déformations permanentes (plastiques) [22 à 26]. Cependant, si, conformément à la tendance de tous les calculs de résistance nous allions chercher les tensions et les déformations qui correspondent à la charge limite, nous nous heurterions à des difficultés considérables, même dans la conception théorique du problème. Dans le stade II, la rigidité au fléchissement B diminue considérablement et reste de nouveau invariable, presque dans l'intervalle entier. Cette nouvelle valeur de B ne se rapporte pas à la surface entière de la plaque; certaines portions pour lesquelles les valeurs des moments sont petites, conservent la valeur précédente de B. C'est pourquoi la plaque se comporte ensuite comme si elle était composée de parties dont les rigidités seraient différentes [27].

Évidemment, le principe de superposition cesse de s'appliquer dans le stade II, et par conséquent, au sens rigoureux, aucune équation différentielle linéaire d'une surface élastique n'est plus applicable. Néanmoins, un programme d'études théoriques futures, qui consiste à décomposer la charge totale en deux parties, paraît possible (fig. 1). La première partie Q′ (la rigidité au fléchissement étant B′) provoque des flèches w' et des tensions σ' qui correspondent à la fin du stade I, l'autre partie Q-Q′ provoque des flèches supplémentaires w-w' et des tensions supplémentaires σ-σ' qui leur sont proportionnelles (le coefficient de proportionnalité n'étant plus le même) et qui correspondent à une nouvelle rigidité au fléchissement $\overline{B}$ plus faible du stade II. Au stade I, nous appliquons l'équation différentielle de la théorie; au stade II également, mais seulement pour les charges et les flèches supplémentaires.

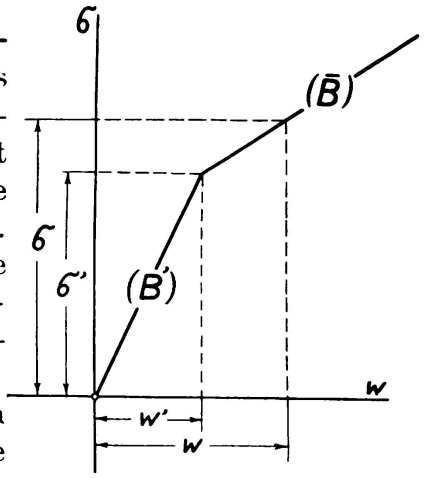


Fig. 1.

Cependant, lorsque nous augmentons encore la charge, en passant au stade III, c'est-à-dire lorsque nous approchons la charge limite (charge de destruction), le diagramme théorique lui-même ne subsiste plus, car d'ordinaire les flèches deviennent si considérables, qu'elles produisent des réactions d'extension dans la plaque. Ces réactions empêchent un accroissement correspondant des flèches, c'est pourquoi la charge destructive est plus grande qu'on ne l'aurait supposé. On a constaté ceci depuis longtemps, non pas pour des dalles-champignons, mais pour des constructions en béton armé qui sont conçues d'une manière analogue.

II. Théories basées sur les solutions exactes de l'équation du fléchissement des plaques isotropes « minces ».

1. La solution de M. Lavoinne, dont il a déjà été question et qui a été ensuite trouvée indépendamment par M. Lewee, donne l'équation de la surface élastique pour une charge totale et uniforme d'une plaque illimitée d'épaisseur constante h, lorsqu'on suppose ce qui suit : les piliers sur lesquels les hourdis s'appuient divisent la plaque en panneaux rectangulaires qui se touchent, de longueur $2\,a$ et de largeur $2\,b$ (fig. 2). Les chapiteaux des piliers sont en contact avec la dalle suivant des aires également rectangulaires, orientées de la même manière, et dont les dimensions sont $2a'$ et $2b'$. Nous admettons que les réactions des chapiteaux sont réparties uniformément, donc définies par la charge de l'unité de surface

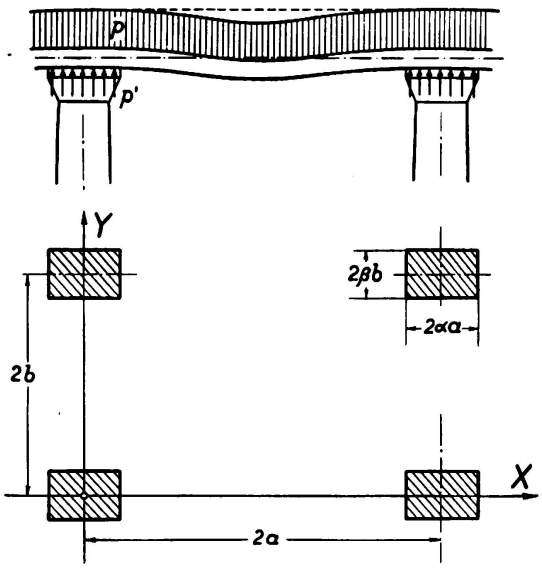


Fig. 2.

$$p' = p\,\frac{a\,b}{a'b'}\,, \quad \text{ou } p' = \frac{p}{\alpha\beta}$$

en posant $a' = \alpha a$, $b' = \beta\, b$.

Les ordonnées de la flèche w, comptées à partir du plan horizontal passant par le milieu de la face supérieure du chapiteau (comme origine du système x, y), sont alors déterminées par la formule (3), (en posant $x = a\,\xi$, $y = b\,\eta$) :

$$(3)\quad w = \frac{2p}{\pi^4 \mathrm{B}}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^4}{m^4}\cdot\frac{\sin m\pi\alpha}{m\pi\alpha}(1-\cos m\pi\xi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^4}{n^4}\cdot\frac{\sin n\pi\beta}{n\pi\beta}(1-\cos n\pi\eta) + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha\,.\sin n\pi\beta}{m\pi\alpha\,.\,n\pi\beta}\cdot\frac{1-\cos mn\xi\,.\cos n\pi\eta}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\right]$$

On en tire les formules (4) pour les moments « suppléants » :

$$(4a)\quad . \; . \; . \quad \mathrm{M}_1' = -\mathrm{B}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{2pa^2}{\pi^2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cdot\frac{\sin m\pi a}{m\pi\alpha}\,.\cos m\pi\xi + \right.$$
$$\left. + 2b^4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}m^2.\,\frac{\sin m\pi\alpha\,.\sin n\pi\beta}{m\pi\alpha\,.\,n\pi\beta}\cdot\frac{\cos m\pi\xi\,.\cos n\pi\eta}{(m^2b^2+n^2a^2)^2}\right]$$

$$(4b)\quad . \; . \; . \quad \mathrm{M}_2' = -\mathrm{B}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{2pb^2}{\pi^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\sin n\pi\beta}{n\pi\beta}\,.\cos n\pi\eta + \right.$$
$$\left. + 2a^4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\,\frac{\sin m\pi\alpha\,.\sin n\pi\beta}{m\pi\alpha\,.\,n\pi\beta}\cdot\frac{\cos m\pi\xi\,.\cos n\pi\eta}{(m^2b^2+n^2a^2)^2}\right]$$

On voit que d'après la théorie des plaques minces, les moments véritables sont déterminés par les formules (5), μ étant la constante de Poisson (au lieu de $\frac{1}{m}$). Les efforts tranchants sont déterminés par les formules (6). Enfin nous calculons les moments de torsion D d'après la formule (7).

$$(5)\ldots\begin{cases} M_1 = M'_1 + \mu M'_2 \\ M_2 = M'_2 + \mu M'_1 \end{cases} \qquad (6)\ldots\begin{cases} V_1 = \frac{\partial}{\partial x}(M'_1 + M'_2) \\ V_2 = \frac{\partial}{\partial y}(M'_1 + M'_2) \end{cases}$$

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots D = B(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Les valeurs des moments dans le cas de panneaux et de chapiteaux carrés, et calculées d'après ces formules, sont représentées par les graphiques des fig. 3 et 4, empruntés en partie à la monographie importante de MM. Westergaard et Slater [28]. Ces graphiques font voir clairement combien il est avantageux d'augmenter les chapiteaux. On diminue ainsi considérablement, non seulement les moments, mais aussi les efforts tranchants.

2. M. V. Lewe [12] a encore donné des solutions semblables pour de nombreux cas de charge d'une plaque illimitée, cas qui sont importants au point de vue pratique. En outre, il a calculé des tables qui facilitent beaucoup les applications. A l'exception d'un cas dans lequel $b : a = 2$, tous les autres se rapportent à un réseau carré de piliers, celui-ci étant le plus simple et le plus avantageux. On a toujours adopté des chapiteaux carrés, le rapport α étant de $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$; on a ensuite adopté également le rapport $\alpha = \frac{1}{3}$.

Il existe une solution qui est particulièrement importante; c'est celle pour laquelle la charge est la plus désavantageuse pour la construction entière de la dalle-champignon, ce qui est le cas lorsque les panneaux disposés entre des rangées parallèles de piliers sont chargés alternativement. Des moments de réactions apparaissent alors dans les chapiteaux. Dans l'hypothèse la plus simple au sujet de leur répartition, d'après la fig. 5, M. Lewe trouve la solution générale exacte semblable à (3) et il calcule une table pour le cas $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$; $a = b$.

3. Les solutions qu'on a trouvées pour une plaque illimitée ne sont évidemment plus justes lorsque la plaque est appuyée non pas seulement par le système de piliers, mais aussi le long des bords par les parois du bâtiment (fig. 6). Lorsque la projection horizontale de la dalle est un rectangle et que l'appui linéaire des bords ne permet pas que les coins de la plaque se soulèvent, il est souvent possible de trouver une solution exacte par une superposition de solutions particulières, comme on en trouve dans les travaux de MM. Estanave [29], B. G. Galerkin [30 à 33], H. Hencky [34], M. T. Huber [5, 7], H. Leitz [33, 36], V. Lewe [11, 12], A. Mesnager [37], A. Nádai [38], S. Timoshenko [39] et d'autres auteurs [40].

Le cas d'un contour circulaire a été traité récemment par MM. W. Flügge [41] et K. Hajnal-Kónyi [42].

L'encastrement des bords de la plaque rend très difficile la recherche de solutions exactes pour des plaques rectangulaires, mais il la facilite lorsqu'il s'agit de plaques circulaires.

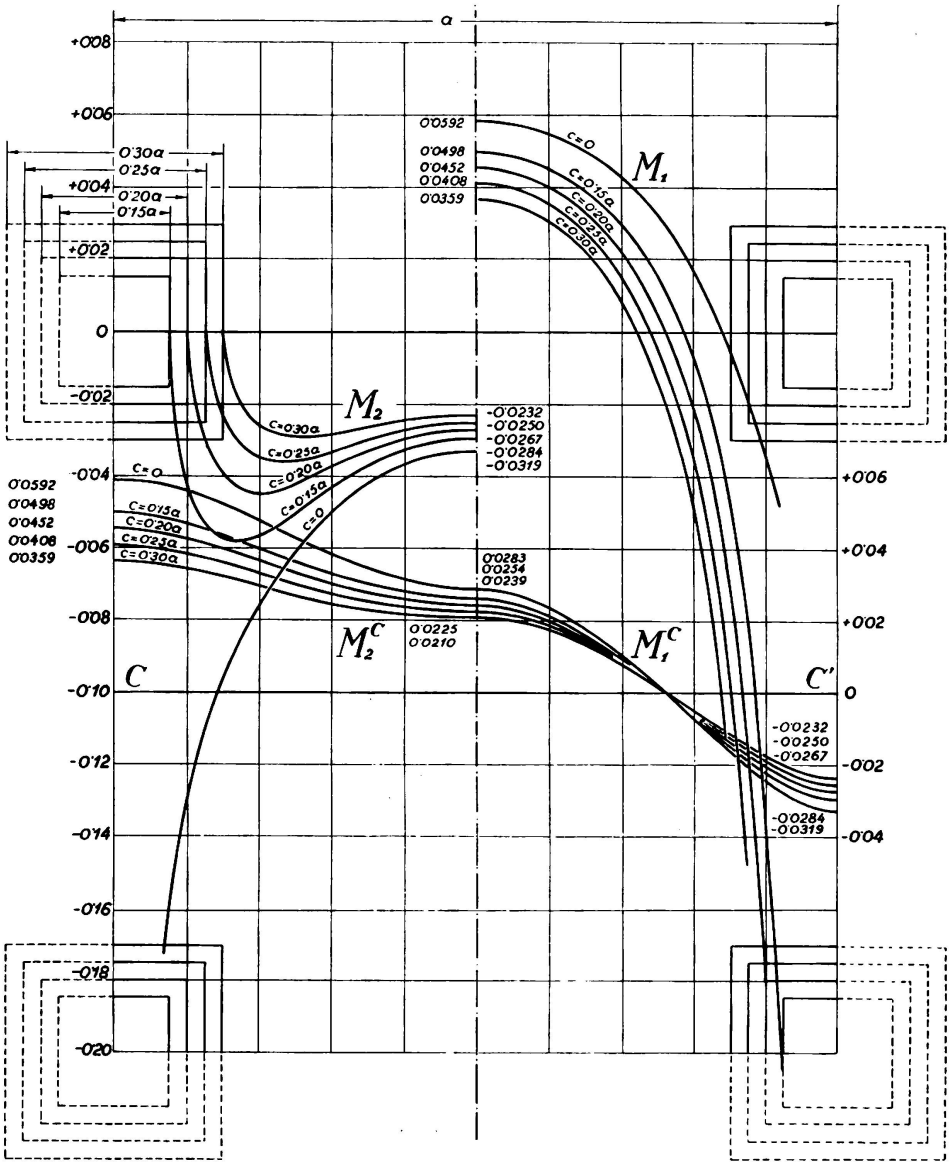


Fig. 3. — Coefficients (= $M/q\,a^2$) des moments fléchissants « suppléants » dans un panneau carré à l'intérieur d'une dalle chargée uniformément.
— Beiwerte (=$M/q\,a^2$) der Ersatzmomente in einem quadratischen Mittelfeld der gleichförmig belasteten unendlichen Pilzdecke.
— Coefficients of Bending Moments in a Square Panel in the Interior of a uniformly loaded Flat Slab.
Moments le long du bord (M_1) et de la ligne médiane (M_1^c). — Die Ersatzmomente längs der Seite (M_1) und längs des Medianschnittes (M_1^c). — Moments along the Edge (M_1) and the Centre Line (M_1^c).
Moments en travers du bord (M_2) et de la ligne médiane (M_2^c). — Die Ersatzmomente quer zur Seite (M_2) und quer zum Medianschnitte (M_2^c). — Moments across the Edge (M_2) and the Centre Line (M_2^c).

On peut d'ordinaire simplifier considérablement le calcul en admettant que les réactions des piliers agissent comme des forces et des moments concentrés en un même point; mais on ne trouve alors qu'une approximation de la

solution exacte. Cette approximation est tout à fait satisfaisante pour la portion entière de la plaque qui reste lorsqu'on en élimine les surfaces des chapiteaux, et qu'on peut prévoir aisément en vertu du principe de SAINT-VENANT.

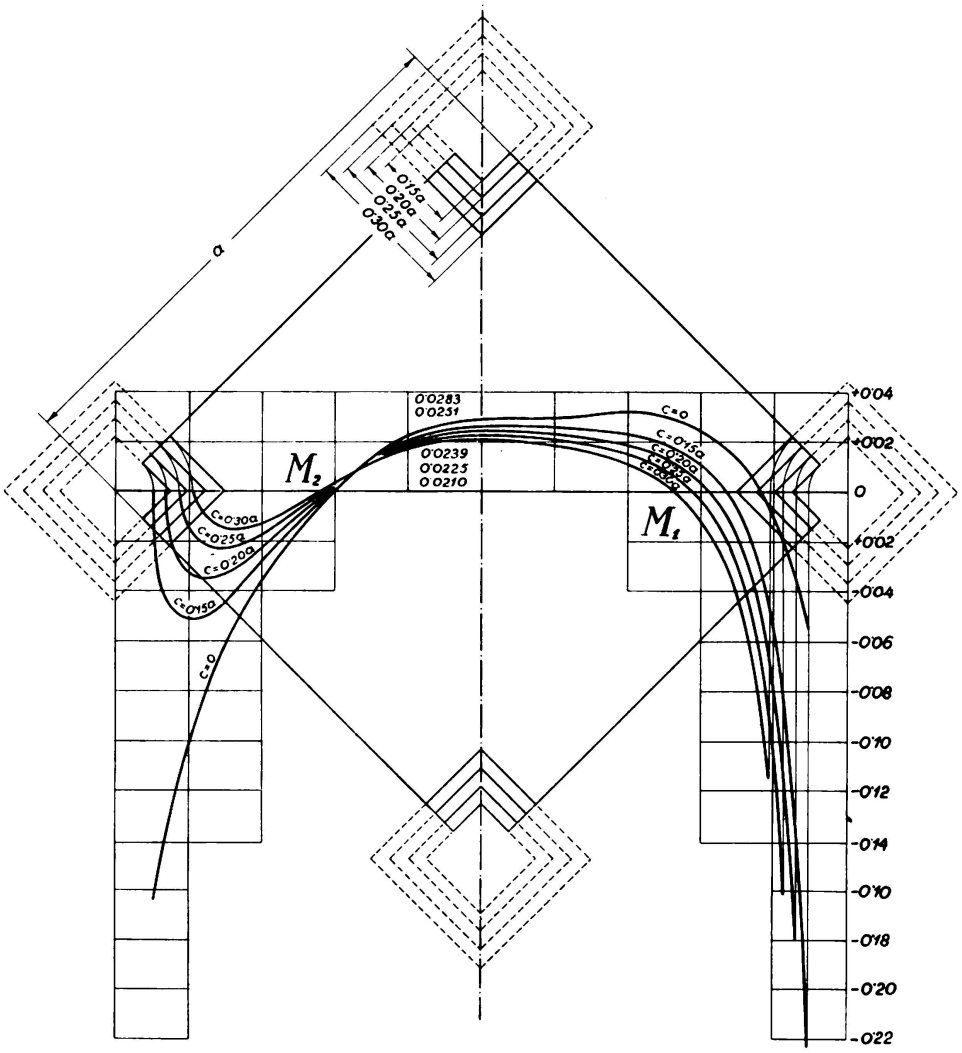


Fig. 4.
Moments le long des diagonales (M_1) et dans des sections perpendiculaires (M_2).
Die Ersatzmomente längs des Diagonalschnittes (M_1) und quer dazu (M_2).
Moments along the Diagonals (M_1) and across them (M_2).

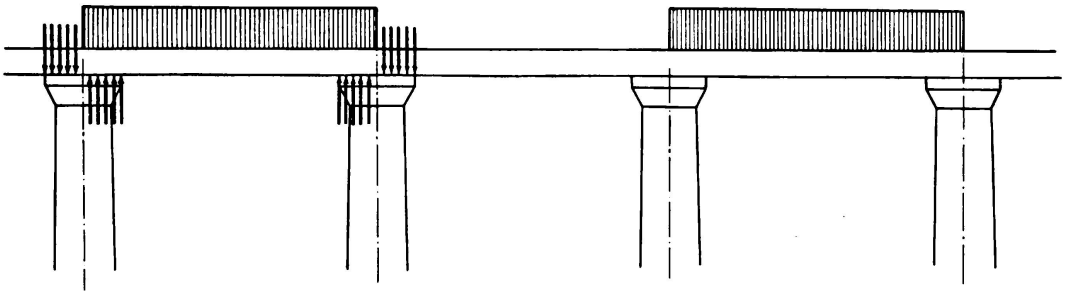


Fig. 5.

Nous citerons ici deux solutions auxiliaires pour les formes du contour de la dalle qu'on vient de nommer.

a) Contour rectangulaire appuyé (fig. 7). La charge P est concentrée au point $(x_1\, y_1)$. La rigidité du fléchissement de la plaque dans les éléments lon-

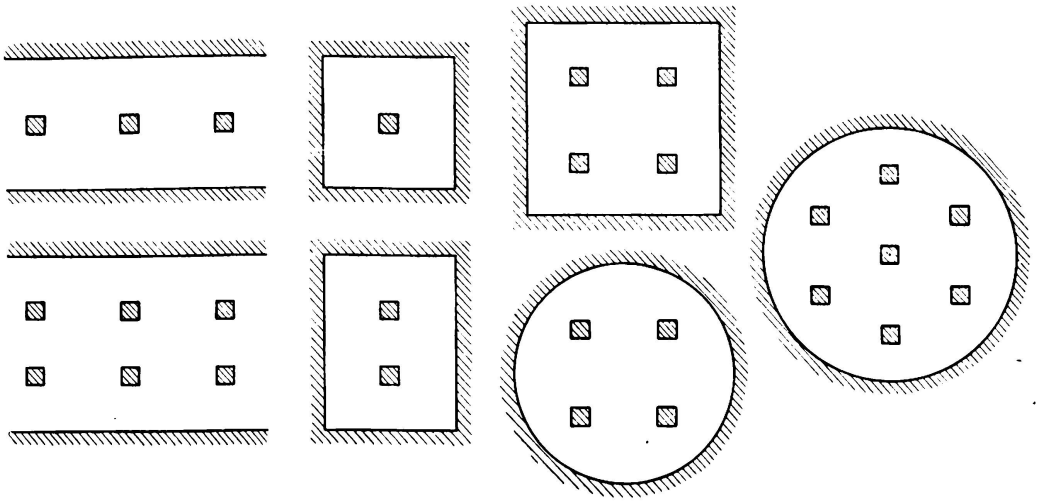


Fig. 6.

gitudinaux parallèles à l'axe des X est égale à B_1, dans les éléments perpendiculaires, à B_2. En posant :

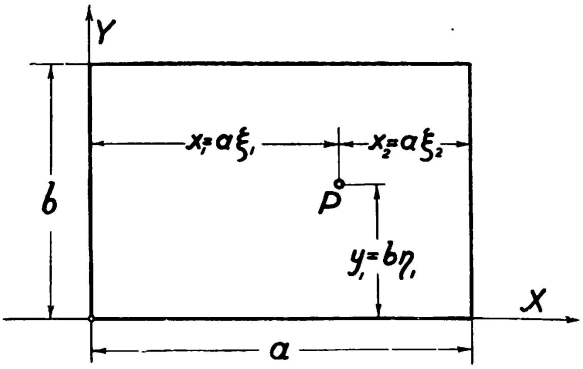


Fig. 7.

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \eta_1 = \frac{y_1}{b}, \quad \xi_2 = 1 - \xi_1; \quad \varepsilon = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{B_2}{B_1}}$$

nous trouvons pour $\xi \leqq \xi_1$:

$$(8) \qquad w = \frac{P b^2}{\pi^3 B_2}\sqrt[4]{\frac{B_2}{B_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(1 + n\pi\varepsilon \operatorname{Cth} n\pi\varepsilon - n\pi\varepsilon\xi_2 \operatorname{Cth} n\pi\varepsilon\xi_2 - \right.$$

$$\left. - n\pi\varepsilon\xi \operatorname{Cth} n\pi\varepsilon\xi\right) \frac{\operatorname{Sh} n\pi\varepsilon\xi_2 . \operatorname{Sh} n\pi\varepsilon\xi}{\operatorname{Sh} n\pi\varepsilon} . \sin n\pi\eta_1 \sin n\pi\eta$$

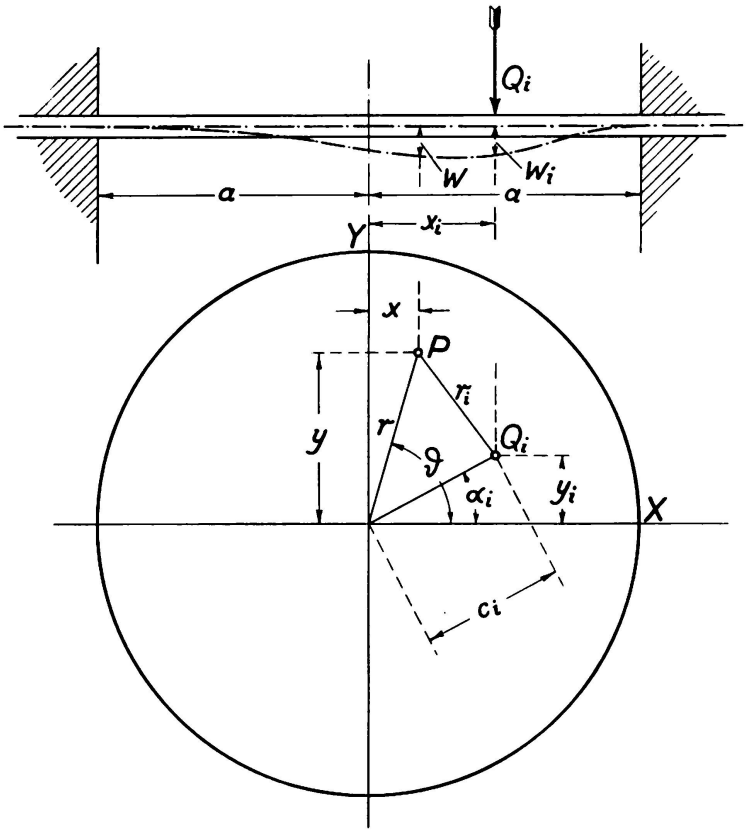
Pour $\xi \geqq \xi_1$ il faut remplacer dans cette équation ξ_2 par ξ_1.

b) Contour circulaire (fig. 8) d'une plaque isotrope. Lorsque le bord est parfaitement encastré, et en admettant la signification des lettres indiquée sur la figure, on peut représenter la flèche par la formule relativement simple [43] :

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad w = \frac{Q_i a^2}{16 \pi B} \left\{ (1-\gamma_i^2)(1-\rho^2) - \rho_i^2 \log \text{nat} \left[1 + (1-\gamma_i^2)(1-\rho^2) \frac{1}{\rho_i^2} \right] \right\}$$

Pour la flèche dans un point supportant la force concentrée Q_i, on trouve d'après l'équation (9) la formule :

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad w_i = \frac{Q_i a^2}{16 \pi B} \cdot \left(1 - \frac{c_i^2}{a^2}\right)^2$$



$$\gamma_i = \frac{c_i}{a} \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\rho = \frac{r}{a} \qquad r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

$$\rho_i = \frac{r_i}{a} \qquad r_i^2 = c_i^2 + r^2 - 2 c_i r \cos(\vartheta - \alpha_i)$$

Fig. 8.

En vertu de la condition que dans les points d'appui les flèches dues aux charges doivent être annulées par des flèches dirigées vers le haut dues à des forces inconnues X_i, nous trouvons ces forces comme réactions des piliers.

Lorsque le contour circulaire de la plaque est appuyé et que les piliers sont disposés symétriquement par rapport au centre, on peut trouver une solution avec une grande approximation, en composant les flèches calculées, en tenant compte de l'encastrement du bord, avec celles qui sont dues aux moments d'encastrement de signes contraires, si l'on admet que ceux-ci sont répartis uniformément.

III. Théories basées sur des solutions approximatives pour des flèches de plaques isotropes minces.

La principale méthode générale pour trouver des solutions approximatives consiste à remplacer l'équation différentielle (1) pour la flèche de la plaque par une équation à différences finies. En divisant la plaque en un réseau de carrés dont les longueurs finies des côtés sont λ (fig. 9), et en désignant par p_1 la charge par unité de surface du carré hachuré dont le milieu se trouve au point 1, nous trouvons pour la surface élastique l'équation suivante à différences finies :

$$(11) \ldots \quad 20w_1 - 8(w_2+w_3+w_4+w_5)+2(w_6+w_7+w_8+w_9)+ \\ +w_{10}+w_{11}+w_{12}+w_{13}=\frac{\lambda^4 p_1}{B}$$

Cette équation fut appliquée par M. N. S. Nielsen, dans son important mémoire [10] cité plus haut, à la solution d'une série de problèmes de fléchissement de plaques, et en particulier de dalles-champignon. Les solutions de M. Nielsen s'accordent très bien avec les résultats qu'on obtient en intégrant l'équation différentielle de Lagrange, sauf, bien entendu, pour les points supportant une force unique. Ce côté faible ne diminue cependant pas la valeur pratique de la méthode, car les charges effectives sont toujours réparties sur une surface finie.

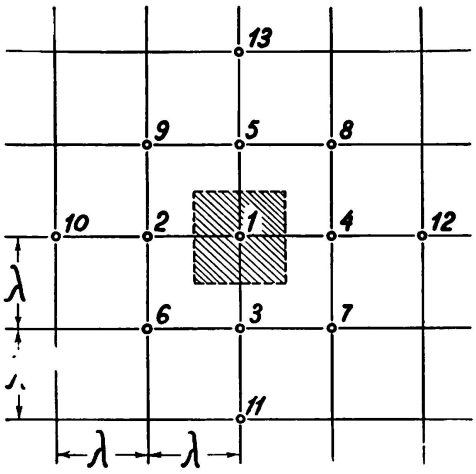


Fig. 9.

Nous devons une importante simplification de l'application du calcul des différences finies à la méthode du tissu élastique de M. H. Marcus [17], dont on a déjà parlé. Cette méthode consiste à combiner l'équation différentielle pour la flèche de la plaque sous la forme de :

$$(12)^* \ldots \quad \nabla^2\nabla^2 w = \frac{p}{B} \qquad \left(\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

avec l'équation différentielle de la surface élastique d'une membrane, d'abord plate et tendue uniformément par un effort de S kg/cm, et infiniment faiblement enfoncé par une charge de p' kg/cm², perpendiculaire au plan de la membrane, c'est-à-dire avec l'équation :

$$\nabla^2 w' = -\frac{p'}{S}$$

Comme dans la théorie des plaques

$$(13) \ldots \quad \nabla^2 w = -\left(\frac{1}{\rho_x}+\frac{1}{\rho_y}\right) = -\frac{M'_1+M'_2}{B} \equiv -\frac{M}{B}$$

* ∇^2 = Désignation anglaise et allemande pour Δ.

est l'invariant qui détermine la courbure moyenne de la surface élastique, nous écrirons donc, en substituant $M = w'$, l'équation du fléchissement de la plaque sous la forme :

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \nabla^2 w' = -p$$

Rigoureusement parlant, ceci n'est autre chose que l'équation du fléchissement d'une membrane tendue à 1 kg/cm et chargée comme la plaque.

En intégrant cette équation, nous trouvons la répartition des moments M sur la surface de la plaque. Maintenant, nous considérons M comme la charge par unité de surface d'une autre membrane tendue avec un effort égal à B, conformément à l'équation (13) ; la flèche de cette membrane donne en même temps celle de notre plaque.

M. Marcus remplace par approximation le dispositif de la membrane tendue d'une manière continue par un tissu à mailles finies chargé seulement dans les nœuds. Les fils rectilignes de tissu s'appliquent tangentiellement à la surface élastique, tout comme les côtés d'un polygone funiculaire à la ligne de fléchissement d'une poutre, selon l'analogie de Mohr. La structure du tissu peut être différente, suivant le contour de la plaque. Le système du tissu permet de remplacer les équations différentielles (13) et (14) par des équations à différences finies, sous la forme :

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad 4\,w_1 - (w_2 + w_3 + w_4 + w_5) = \frac{\lambda^2 p_1}{B},$$

qui sont beaucoup plus commodes à appliquer que les équations citées au début de ce paragraphe (voir fig. 9).

C'est d'après cette méthode que M. Marcus a calculé la répartition des moments dans une dalle-champignon pour une série de cas d'appui et de charge importants au point de vue pratique. Ces calculs ont servi à justifier une méthode pratique approximative qu'on nomme *méthode des cadres suppléants* [17], admise par les règlements officiels allemands de 1925, si l'auteur du projet n'applique pas les résultats exacts de la théorie des plaques isotropes ou des tissus élastiques.

IV. Le rôle des piliers dans la théorie des dalles-champignons et la méthode approchée des cadres suppléants.

Le calcul aussi exact que possible des efforts dans les piliers sous l'influence des charges prévues pour la dalle est tout au moins aussi important pour la sécurité de celle-ci que le calcul des efforts dans la plaque. Il faut en même temps tenir compte de ce que la répartition la plus désavantageuse de la charge utile est différente par rapport à la plaque et par rapport au pilier.

C'est ici que se pose l'important problème des surfaces d'influence, lequel, que je sache, n'a pas été traité jusqu'à présent d'une manière exacte au point de vue théorique. Bien que les mesures des flèches et des tensions aient été effectuées au cours de nombreuses recherches expérimentales, surtout aux États-Unis [28], où les dalles-champignons se sont répandues plus tôt que dans

les autres pays, nous devons néanmoins le premier essai de détermination expérimentale des surfaces d'influence des flèches et des moments, aux recherches de MM. Roš et Eichinger, effectuées en 1925-1929 [44].

Cependant, ces recherches ne s'occupent que des panneaux qui touchent immédiatement le panneau étudié. Mais il n'est pas difficile de prévoir que, s'il agit des moments au milieu des panneaux et au milieu de leurs côtés, il faudrait tout au moins étudier également l'influence de la charge du troisième panneau voisin du panneau étudié. Il serait fort désirable que les mesures fussent complétées dans ce sens ; il est vrai que ceci demande un très gros travail.

Les moments dans la plaque, autour du chapiteau, diminuent évidemment à mesure que le diamètre de celui-ci croît, et elles atteignent leur valeur maximum lorsque tous les panneaux sont chargés. C'est pourquoi la surface d'influence n'aurait pour eux qu'une importance pratique minime. La surface d'influence

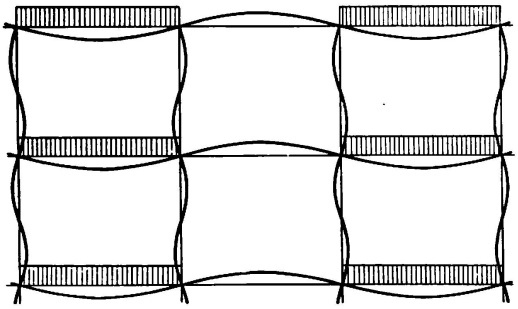


Fig. 10.

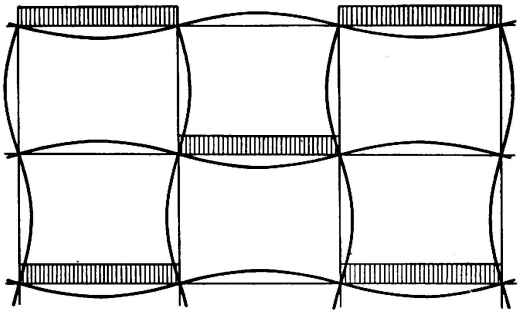


Fig. 11.

serait par contre fort importante pour les moments dans les piliers, mais sa détermination expérimentale serait encore plus difficile. Ce serait d'ailleurs une surface composée d'autant de parties qu'il y a d'étages dans le bâtiment. Une étude de ce genre confirmerait probablement l'avis de tous les spécialistes que la charge la plus désavantageuse par rapport aux piliers correspond bien au schéma de la fig. 10. Par contre le schéma de la fig. 11 correspond aux valeurs maxima des moments positifs des parties médianes des panneaux chargées.

Les moments de l'encastrement des chapiteaux dans la dalle peuvent être très exactement calculés, en prenant pour base la solution de M. Lewe, citée en II.2, d'après la condition que l'angle d'inclinaison de la section du pilier au sommet du chapiteau est égal à l'angle d'inclinaison de l'élément de la plaque qui y est superposée (Lewe, 1926, p. 52-54). On peut prévoir, même sans calcul, que la grandeur de ce moment M_c dépend surtout du rapport de la rigidité au fléchissement de la plaque B, à la rigidité relative du pilier, c'est-à-dire $\frac{EJ_c}{H}$. (J_c désigne le moment d'inertie de la section du pilier, H sa hauteur.)

Lorsque ce rapport $\nu = \frac{BH}{EJ_c}$ croît, M_c décroît. M_c doit encore dépendre de la position du point zéro des moments sur l'axe du pilier; donc du schéma de la charge des étages, et encore de ce que la base du pilier peut être encastrée ou bien seulement librement appuyée.

S'il n'est pas possible d'adopter la division la plus avantageuse de la dalle en panneaux carrés, et si l'on a des panneaux rectangulaires de largeur $2b$ dans la direction de l'axe des Y, de longueur $2a$ dans la direction de l'axe des X, b étant $< a$, en diminuant le rapport $\frac{b}{a}$ nous nous approchons des conditions d'une plaque continue à travées égales. Si l'on imagine une zone d'une telle plaque découpée par des sections parallèles à X qui partagent en deux les portées les plus petites des deux côtés d'une rangée de piliers, cette zone se comporte, avec une grande approximation, comme une poutre continue posée sur des supports larges équidistants et qui réagissent élastiquement. Les dalles de tous les étages et les piliers peuvent être remplacées par le système approché d'un portique à plusieurs étages. Ceci n'est évidemment admissible que lorsque les charges portées par les différentes zones sont égales (fig. 12 *a*, *b*). Pour d'autres charges, par ex. pour des charges disposées en échiquier (fig. 12, *c*), un système de ce genre ne conviendrait pas.

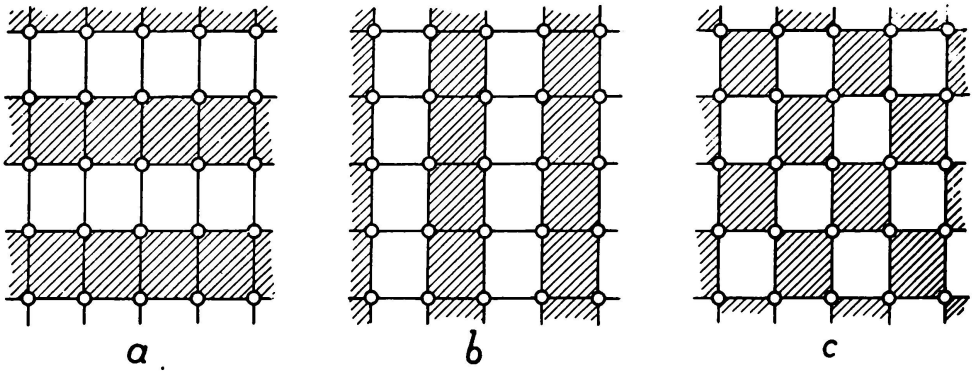


Fig. 12.

M. Marcus affirme dans son livre qu'une charge disposée en échiquier donne pour les moments dans la plaque, des valeurs limites plus faibles qu'une charge alternée de rangées de panneaux (fig. 12, *a*, *b*), et c'est pour cela qu'il propose d'appliquer un portique fictif lorsqu'il s'agit de tous les rapports $a : b$ employés en pratique. Il y a par conséquent, pour chaque dalle-champignon, deux systèmes de portiques fictifs, perpendiculaires entre eux. Ce système est tout à fait analogue au système des plaques rectangulaires que M. Marcus recommande pour le calcul approximatif de ces plaques, d'après les règlements officiels allemands. Il s'agit ici d'un damier fictif, formé par des zones de la plaque qu'on a découpée d'abord parallèlement au côté $2a$, et ensuite parallèlement au côté $2b$. De nombreux théoriciens sont choqués par le caractère factice de tels systèmes; on s'en sert néanmoins depuis longtemps en pratique, de même que l'on utilise, par exemple, des charges fictives pour calculer les poutres des ponts. Le remplacement d'une dalle-champignon par deux systèmes de portiques permet de se servir des méthodes du calcul de tels portiques qui sont perfectionnées et simplifiées depuis longtemps, et c'est pourquoi le système du portique fictif est bien accueilli par les constructeurs. Les moments dans la plaque fournis par le calcul doivent évidemment être répartis entre la zone des piliers et la zone intermédiaire entre les piliers, dans le rap-

port que déterminent les résultats de la théorie des plaques. Les règlements officiels allemands contiennent des formules simplifiées convenables.

V. Autres méthodes approximatives.

La seconde décade du siècle présent a apporté de nombreux essais d'application de la méthode de Rayleigh-Ritz à la solution des problèmes de plaques et par conséquent aussi de dalles-champignons. On a trouvé par ex., dans les cas de plaques appuyées sur les bords, des résultats complètement en accord avec les solutions exactes de l'équation différentielle de Lagrange, lorsqu'on posait un nombre infini de paramètres dans le développement de $w = f(x, y)$ suivant les fonctions satisfaisant aux conditions des bords. En n'introduisant

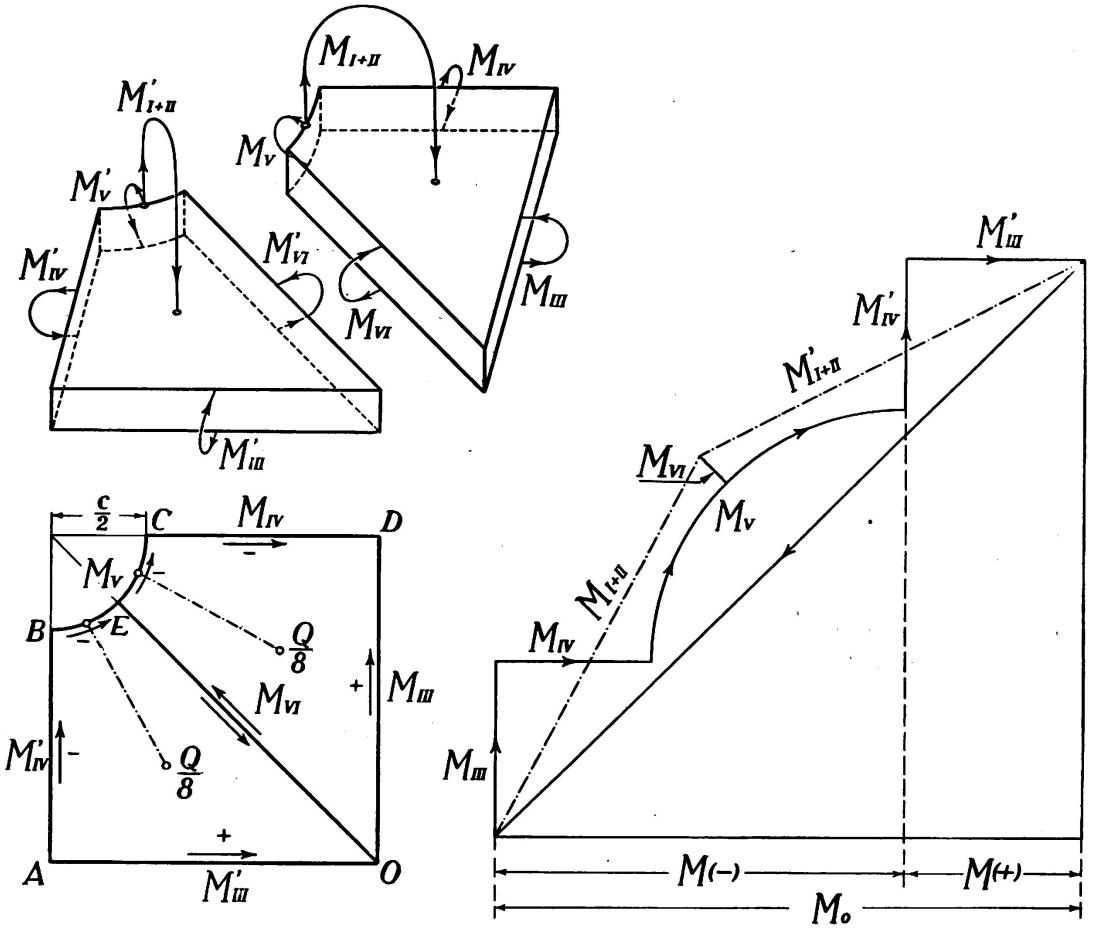


Fig. 13. — Graphique représentant l'équilibre des forces et des moments qui agissent sur un huitième ou un quart d'un panneau carré.

Das Gleichgewicht der Kräfte und Momente, welche ein Oktant und ein Quadrant eines quadratischen Deckenfeldes angreifen.

Diagram showing the Equilibrium of the Forces and Couples acting on an Octant and a Quadrant of a Square Panel.

que peu de paramètres, on trouvait néanmoins des approximations assez bonnes. Les efforts pour résoudre par cette méthode le problème des dalles-champignons n'ont cependant pas eu de succès, comme nous le savons maintenant. Nous renonçons à discuter les causes de ce fait, car cela nous demanderait des développements mathématiques étendus; nous nous bornons à cette brève mention,

sans citer les ouvrages qui s'y rapportent et dont on trouvera une appréciation dans l'ouvrage de M. V. LEWE [12].

Avant qu'on ait trouvé et appliqué les solutions exactes de la théorie dont il a été question dans les par. II et III, les ingénieurs praticiens des différents pays ont essayé de se rendre compte des tensions dans les dalles-champignons, au moins avec une approximation grossière, en se basant sur les plus simples considérations statiques. Les méthodes ainsi élaborées n'ont à présent qu'une valeur historique, la théorie ayant fait des progrès considérables; c'est pour cela que nous pouvons nous borner à ne présenter ici que le principe théorique de l'une de ces méthodes, élaborée aux États-Unis et peu connue sur le continent européen. Ce schéma a été le point de départ des réglements officiels américains pour le calcul des dalles à champignon [19].

En admettant une plaque illimitée et divisée en panneaux carrés, la surface étant chargée uniformément, et les chapiteaux des piliers étant circulaires, on considère l'équilibre de deux huitièmes du panneau, que l'on imagine découpés et qui sont représentés dans la fig. 13. Si l'on désigne par Q la surcharge du panneau total, celle de chaque huitième est $\frac{Q}{8}$. En raison de la symétrie, il n'y a pas d'efforts tranchants dans les sections AO, AB et OE, et il n'y a pas non plus de moments de torsion; la résultante des efforts tranchants (des réactions) le long des BE doit donc être égale et directement opposée à la charge $\frac{Q}{8}$. Par conséquent, le moment des forces extérieures peut être aisément évalué avec une grande approximation. Ce moment est équilibré par des moments fléchissants répartis le long des quatre arêtes de l'octant. Les vecteurs des moments (absolus, et non pas par unité de largeur comme dans les formules théoriques citées plus haut) forment un polygone fermé. La figure représente les polygones pour les deux huitièmes qui forment un quart du panneau. On s'aperçoit immédiatement que la composante horizontale du moment général donné des forces extérieures, désignée par M_0, est égale à la somme M(—) et M(+), c.-à-d. à la valeur absolue des composantes des moments fléchissants négatifs et positifs. Si nous déterminons donc la valeur de l'un des membres de l'addition, nous trouvons facilement l'autre. On trouvera une application intéressante de ce schéma dans le mémoire de MM. WESTERGAARD et SLATER [28].

NOTES

1. LAVOINNE. Note sur la résistance des parois planes des chaudières à vapeur. Ann. des Ponts et Ch., 1872, 1, p. 276 à 303.

2. GRASHOF. Elastizität und Festigkeit. 2 Aufl. Berlin, 1878.

3. H. T. EDDY. The Theory of the Flexure and Strength of Rectangular Flat Plates applied te Reinforced Concrete Floor Slabs. Minneapolis, 1913.

4. M. T. HUBER. Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten. Z. d. Österr. Ing. u. Arch. Ver. 1914, N° 30.

5. M. T. HUBER. Teorja płyt prostokątnie różnokierunkowych... Lwów, 1921.

6. M. T. HUBER. Comptes rendus de l'Académie des sciences. T. 170, 1920, p. 511 et 1305; T. 180, 1925, p. 1243.

7. M. T. HUBER. Der Bauingenieur, 1923, N°s 12 et 13; 1924, n°s 9 et 10; 1925, n°s 1 et 2; 1926, n°s 7, 8 et 9.

8. M. T. Huber. Einige Anwendungen der Biegungstheorie orthotroper Platten. Z. f. ang. Math. u. Mechanik., 1926, n° 3.

9. M. T. Huber. Biegungsprobleme eines durch Querrippen versteiften orthotropen Plattenstreifens. Zurich, 1927.

10. N. J. Nielsen. Bestemmelse af Spaendiger i Plader ved Anvendelse af Differensligninger. Copenhage, 1920. Verl. E. C. Gad.

11. V. Lewe. Die Lösung des Pilzdeckenproblems durch Fouriersche Reihen. Bauingenieur, 1920, n° 22, 1922, n°s 4, 10, 11.

11a A. Mesnager. Plaque mince indéfinie, uniformément chargée, portée par des points régulièrement espacés. Comptes rendus... de l'Acad. des Sciences. T. 176, 1923, p. 1773.

12. V. Lewe. Pilzdecken. Berlin, 1926.

13. P. Funk. Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. J. Springer, Berlin, 1920.

14. G. Wallenberb. Die Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Technik. Zeitschr. f. ang. Math. und. Mech. l., 1921, s. 138.

15. Fr. Bleich w E. Melan. Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. Berlin, Wien, Springer, 1927.

16. H. Marcus. Armierter Beton, 1919.

17. H. Marcus. Die Theorie elastisher Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin, Springer, 1924. II éd. 1932.

18. H. Marcus. Die wirksame Stützfläche der trägerlosen Pilzdecken. B. u. E., 1926. II., 19 u 20.

19. J. R. Nichols. Discussion on reinforced — concrete flat — slab floors. Am. Soc. C. E., v. 77, 1914, p. 1735.

20. Turneaure and Maurer. Principles of Reinforced Concrete Construction. 2 ed. 1909.

21. H. Marcus. Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten. Berlin, 1925, I. Springer.

22. K. Eisenmann. Druck- und Zugversuche an Beton mit Mikrokomparator. Beton und Eisen, 1926. N° 14.

23. R. Knoop. Feinmessungen für Zug und Druck an Betonbalken mit Mikrokomparator. Diss. Braunschweig, 1926.

24. A. Mehmel. Untersuchungen über den Einfluss häufig wie lerholter Druckbeanspruchungen von Beton. Berlin, 1926.

25. O. Dreves. Über das elastische Verhalten von Beton infolge Biegungs- und Druckbeanspruchungen. Diss. Braunschweig, 1929.

26. H. Yoshida. Über das elastiche Verhalten von Beton. Berlin, 1930.

27. M. Ritter. Die Anwendung der Theorie elastischer Platten auf den Eisenbeton. C. R. du 2e Congrès Intern. de Construction des Ponts et Charpentes. Vienne, 1928, p. 694.

28. H. M. Westergaard and W. A. Slater. Moments and stresses in Slabs. Proceedings of the Amer. Concrete Institute, vol. 17, 1921.

29. E. Estanave. Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque mince. Thèse, Paris, 1900.

30. B. G. Galerkin. Les plaques rectangulaires..... Petrograd, 1915. Flexion des plaques rectangulaires... Petrograd, 1917-1918.

31. B. G. Galerkin. Adaptation of curvilinear isothermal coordinates to integrate the equations of equilibrium of elastic plates. Mess. of Math., novembre 1922.

32. B. G. Galerkin. Equilibrium of thin rectangular elastic plates under the action of continous and concentrated loads. Mess. of Math., juin 1925.

33. B. G. Galerkin. On the equilibrium of elastic plate, bounded by the isosceles rectangular triangle. Journ. de la Société Phys.-Math. de Leningrad, 1926, t. I.

34. H. Hencky. Der Spannungszustand in rechteckigen Platten. Munich, 1913. R. Oldenbourg.

35. H. Leitz. Die Berechnung der frei aufliegenden rechteckigen Platten, Berlin, 1914.

36. H. Leitz. Eisenbewehrte Platten bei allgemeinem Biegungszustand. Bautechnik, 1923, p. 155.

37. A. Mesnager. Moments et flèches des plaques rectangulaires minces. Ann. des Ponts et Chaussées, 1916-III.

38. A. Nádai. Die elastischen Platten. Berlin, 1925.
39. S. Timoshenko. « Der Bauingenieur », 1922, p. 51.
40. T. Inada. Die Berechnung auf vier Seiten gestützter rechteckiger Platten. Berlin, 1930.
41. W. Flügge. Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten. Berlin, 1928.
42. K. Hajnal-Kónyi. Die Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken. Berlin, 1929.
43. I. H. Michell. London Math. Soc. Proc. vol. 34, 1902, p. 223.
44. M. Roš et A. Eichinger. Résultats des mesures de déformations et de tensions sur dalles à champignons. Liége, 1930.

Résumé

I. Introduction.

Les difficultés pour la détermination théorique des déformations et efforts dans une dalle à champignon proviennent :

1° de la connexion rigide entre la dalle et les colonnes.

2° de la flexibilité variable de la dalle et de l'influence des chapiteaux, ainsi que

3° du changement considérable de la flexibilité qui se produit au début du stade II.

II. Les théories basées sur les solutions exactes de l'équation du fléchissement des plaques isotropes « minces ».

III. Les théories basées sur des solutions approximatives pour les flèches de plaques isotropes « minces ».

IV. Le rôle des colonnes dans la théorie des dalles à champignon et la méthode approximative des cadres suppléants.

V. Autres méthodes approximatives.

Zusammenfassung.

I. Einleitung. Die Schwierigkeiten der theoretischen Bestimmung der Formänderungen und Spannungen in einer Pilzdecke stecken :

1. in der steifen Verbindung der Säulen mit der Decke,

2. in der ungleichförmigen Biegungssteifigkeit der Decke und der Wirkung der Säulenkopfplatte, und

3. im starken Wechsel der Biegungssteifigkeit beim Uebergang in das Stadium II der Decke.

II. Die Theorien, welche sich auf strenge Lösungen der Biegungsgleichung einer isotropen « dünnen » Platte stützen.

III. Die Anwendung von angenäherten Lösungen der Plattentheorie. Differenzengleichungen und « elastische Gewebe ».

IV. Die Rolle der Säulen in der Theorie der Pilzdecken und die Methode des stellvertretenden Rahmens.

V. Andere Näherungsverfahren.

Summary.

I. Introduction. — Difficulties of theoretical investigation of stress and strain in flat slabs are found :

1. in the rigid joints between columns and ceiling ;
2. in non-uniform rigidity of ceiling and in the effect of abacus on the head of the column ;
3. in rapid change of rigidity of ceiling during the transformation into stage II.

II. The theories based on exact solution of the bending equation of a thin isotropic plate.

III. The application of approximate solutions of the plate theory. Difference equations method and " elastic web ".

IV. The function of columns in flat slabs theory and the method of " replacing frames ".

V. Other approximations.