

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Rubrik: II. Slabs in reinforced concrete structures

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.09.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

II 1

PLATTEN UND SCHALEN IM EISENBETONBAU

DALLES ET CONSTRUCTIONS A PAROIS MINCES EN BÉTON ARMÉ

SLABS IN REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

EINLEITENDES REFERAT

RAPPORT D'INTRODUCTION

INTRODUCTORY REPORT

Dr. M. RITTER,

Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich.

Die zunehmende Bedeutung der Platten und Schalen im Eisenbetonbau rechtfertigt es, am ersten Kongress der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau in besonderer Arbeitssitzung die aktuellen theoretischen und konstruktiven Probleme dieses Gebietes zu diskutieren und zur Mitarbeit an den dringenden Aufgaben der Zukunft anzuregen. Platten und Schalen gehören zu den ältesten Konstruktionselementen des Eisenbetonbaues; sie finden sich schon in den Patentzeichnungen von MONIER, traten jedoch an Bedeutung zurück, als HENNEBIQUE mit grossem Erfolge den biegsfesten Balken in die Praxis einführte. Erst die neueste Zeit brachte in der Anwendung der Platten und Schalen wesentliche Fortschritte, so die Einführung der trägerlosen Decken (Pilzdecken) und die Ueberdeckung weiter Räume durch biegslose Schalen. Der Ausbau der Theorie unter Berücksichtigung der Bedürfnisse der Praxis ist neuerdings in erfreulicher Entwicklung begriffen und lässt im Verein mit dem konstruktiven Geschick der Ingenieure in naher Zukunft weitere Fortschritte erwarten.

Um die Diskussionen erfolgreich zu gestalten, wurde das Programm der zweiten Arbeitssitzung auf wenige, scharf umrissene Themen begrenzt und durch besondere Referate zur Diskussion vorbereitet. Das erste Thema behandelt die rechteckige kreuzweise armierte, auf räumliche Biegung beanspruchte Eisenbetonplatte, deren statisches Verhalten heute noch nicht abgeklärt ist. Die quadratische, auf allen Seiten frei aufliegende Platte eignet sich besonders gut zur Prüfung der zahlreichen Fragen, die das Plattenproblem dem Theoretiker und dem praktisch tätigen Ingenieur stellt. Der Referent dieses Themas ist in der glücklichen Lage, neue ausgedehnte Plattenversuche vorzulegen, die als Grundlage der Diskussion wertvolle Dienste leisten werden. Auch eine Aussprache über die Berechnungsmethoden der Praxis für teilweise eingespannte und durchlaufende Platten wird von aktuellem Interesse sein.

Das zweite Thema betrifft die trägerlosen Decken (Pilzdecken), ein Konstruktionssystem, das seit 1904 in den Vereinigten Staaten in Nordamerika, seit 1910 auch in Europa (von der Schweiz ausgehend) in steigendem Masse besonders für Lagerhäuser und Fabrikbauten angewendet wird. Die Theorie der Pilzdecken ist heute noch nicht endgültig ausgebaut; auch die konstruktive Gestaltung erfolgt in den einzelnen Ländern nach abweichenden Grundsätzen. Das Referat enthält in knapper Fassung die Grundlagen und den heutigen Stand der Theorie der Pilzdecken, nebst einer Zusammenstellung der einschlägigen, reichhaltigen Literatur. In der Diskussion sollen auch konstruktive Fragen zur Besprechung gelangen.

Das dritte Thema bezieht sich auf die Scheiben und Schalen im Eisenbetonbau. Der Referent bietet eine Uebersicht über die neuesten Fortschritte in der Berechnung und Konstruktion der Flächentragwerke mit ebenen Flächen (Scheiben), wie auch mit gekrümmten Flächen (Schalen). Zahlreiche Beispiele von ausgeführten Bauwerken führen die Vorteile der Schalenbauweise, der eine starke Entwicklung bevorsteht, eindringlich vor Augen; die eingehende Diskussion der zahlreichen statischen und konstruktiven Probleme wird zu den Aufgaben späterer Kongresse gehören.

Der im April 1932 erschienene 1. Band der Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau enthält u. a. 7 wissenschaftliche Arbeiten aus dem Gebiete der Platten, Schalen und Scheiben, verfasst von C. S. CHETTOE, F. DISCHINGER, U. FINSTERWALDER, P. FRANDSEN, E. GRUBER, K. W. JOHANSEN und A. MESNAGER. Es möge genügen, an dieser Stelle auf diese Abhandlungen hinzuweisen.

Im Folgenden werden die am ersten Kongress im Vordergrund stehenden Probleme und Aufgaben aus dem Gebiete der Platten und Schalen kurz näher besprochen.

1. Die Theorie der isotropen Platte.

Zur statischen Untersuchung von kreuzweise armierten Eisenbetonplatten steht vor allem die klassische Elastizitätstheorie zur Verfügung, in der Form, wie sie vor mehr als 100 Jahren durch LAGRANGE und NAVIER begründet und später durch zahlreiche Forscher weiter ausgebaut wurde. Die klassische Plattentheorie beruht auf einer Reihe von Voraussetzungen, die nachstehend kurz erwähnt seien. Analog der Behandlung des prismatischen Stabes in der Baustatik werden auch bei der Platte die sogenannten NAVIER'schen Annahmen eingeführt. Die Platte wird als dünn betrachtet im Verhältnis zu den Grundrissabmessungen. Die Einsenkungen sind wiederum klein im Verhältnis zur Plattenstärke, sodass die sogenannte Membran- oder Gewölbewirkung in den Hintergrund tritt (dehnungslose Deformation der Mittelfläche). Für die Anwendung im Eisenbeton erscheinen diese Voraussetzungen zulässig; immerhin ist zu betonen, dass eine Gewölbewirkung, resp. die Wirkung von Normalspannungen in der elastischen Fläche im Bruchzustand eine gewisse Rolle spielen wird, insbesondere bei eingespannten Platten mit Vouten.

Unter den genannten Voraussetzungen hat bereits 1816 LAGRANGE die Differentialgleichung der elastischen Fläche aufgestellt, und NAVIER hat 1821 den einfachsten Fall der rechteckigen freiaufliegenden Platte behandelt. Die Lite-

ratur, diesen Fall betreffend, ist heute sehr reichhaltig; besonders verwiesen sei an dieser Stelle auf die ausführlichen Darstellungen von G. PIGEAUD, A. MESNAGER und A. NADAI, sowie auf die Spezialschriften von H. HENKY, H. LEITZ u. a. Für die Anwendung im Eisenbetonbau werden besonders die graphischen Tabellen von G. PIGEAUD in den Annales des Ponts et Chaussées 1929, und die Zusammenstellungen von A. MESNAGER in seinem Buche « Cours de béton armé » wertvolle Dienste leisten.

Der Ausbau der klassischen Plattentheorie ist heute noch nicht vollzogen; es fehlen die Lösungen einer Anzahl von Aufgaben, die besonders im Eisenbetonbau von Bedeutung sind. Eine Aufgabe dieser Art bildet die Berechnung einer rechteckigen Platte, die an den Rändern derart frei aufliegt, dass sie sich an den Ecken abheben kann. Durch Versuche kann man sich leicht davon überzeugen, dass das Fehlen der sogenannten Eckkräfte an einer allseitig frei aufliegenden Platte eine messbare Änderung des Deformationszustandes der Platte zur Folge hat. Eine theoretische Lösung dieser Aufgabe fehlt zur Zeit. In der Literatur findet sich mehrfach die Vermutung, dass eine Platte ohne Eckkräfte sich identisch verhält wie ein Balkenrost, was aber nach den Versuchen keineswegs zutrifft. Eine zweite, praktisch wichtige Aufgabe betrifft die rechteckige Platte, die an den Rändern nicht frei aufliegt, sondern teilweise eingespannt ist. Die exakte Lösung dieses Problems bietet wesentliche Schwierigkeiten, weil die Integrationsmethode von NAVIER in diesem Falle versagt. Von mehreren Forschern, so von H. HENKY und H. LEITZ, wurde der Fall der vollständig eingespannten Platte behandelt; für die Anwendung erscheint es aber besonders wichtig, allgemeine Lösungen für beliebige Einspannungsgrade der Ränder in brauchbarer Form zu entwickeln, um die Grundlagen zur Berechnung durchlaufender Platten zu gewinnen. Von grossem Wert ist auch der weitere Ausbau in der Differenzenrechnung, an dem in neuerer Zeit mehrere Ingenieure (N. NIELSEN, H. MARKUS, P. FRANDSEN, H. M. WESTERGAARD) erfolgreich gearbeitet haben. Die Differenzenrechnung erlaubt auch die Untersuchung von Platten mit veränderlicher Stärke, für welche die Differentialgleichung von LAGRANGE keine Gültigkeit mehr besitzt. Prof. M. HUBER in Warschau hat in einer Reihe von wichtigen Arbeiten die orthotrope Platte behandelt, d. i. eine Platte mit verschiedenen Biegungssteifigkeiten nach den beiden Tragrichtungen. Diese wertvolle Erweiterung der Theorie gestattet zahlreiche, interessante Anwendungen, die von praktischer Bedeutung sind.

2. Die Anwendung der Plattentheorie auf den Eisenbeton.

Das Problem der Berechnung kreuzweise armierter, rechteckiger Eisenbetonplatten soll an der zweiten Arbeitssitzung eingehend diskutiert werden. Vor allem ist die grundlegende Frage abzuklären, ob und in wie weit die klassische Theorie der isotropen Platte zur Berechnung von Eisenbetonplatten anwendbar erscheint, obgleich die Voraussetzungen der isotropen Platte beim Eisenbeton nicht zutreffen. Zur Beantwortung dieser Frage genügen theoretische Überlegungen nicht, und es ist notwendig, die Ergebnisse von Belastungsversuchen zu Rate zu ziehen.

Der Referent W. Gehler beschreibt in seinem Referate ausführlich die

neuen, umfangreichen Plattenversuche, die am Materialprüfungsamt der Technischen Hochschule in Dresden durchgeführt wurden. Die Versuche beziehen sich vorwiegend auf die allseitig frei aufliegende Platte, die zwar in der Praxis eine untergeordnete Rolle spielt, aber zur Beobachtung der Einflüsse verschiedener Faktoren besonders geeignet erscheint. Gegenüber früheren Versuchen wurde die Belastungsanordnung wesentlich verbessert. Für die Diskussion seien nachstehend einige grundlegende Fragen besonders formuliert:

Entspricht das statische Verhalten kreuzweise armierter Platten der klassischen Theorie der isotropen Platte mit konstanter Biegssteifigkeit?

Ist zur Berechnung der Biegunsmomente die Poissonzahl mit $m = 4$ einzusetzen, oder rechtfertigt sich eine grössere Poissonzahl und warum?

Lässt sich durch eine besondere Eckarmierung zur Uebertragung der Drillungsmomente die Tragfähigkeit wesentlich steigern? Ist der Drillungswiderstand einer kreuzweise bewehrten Platte auch in höherem Belastungszustand noch voll wirksam?

Welche Rolle spielt die offenbar vorhandene Membran- oder Gewölbewirkung im Bruchzustande der Platten?

3. Die praktische Berechnung der rechteckigen, allseitig gestützten Eisenbetonplatte.

Es erscheint wünschenswert, dass am Kongress in Paris nicht nur Probleme erkenntnistheoretischer Natur, sondern auch für die Anwendung geeignete Rechnungsmethoden besprochen werden. Die Theorie der rechteckigen, allseitig gestützten Platte ist heute noch nicht genügend ausgebaut, um ihre fortlaufende Anwendung in der Praxis zu gestatten. Der von NAVIER behandelte Fall der freien Auflagerung aller Ränder ist ein Grenzfall, der im Eisenbetonbau selten vorkommt. Meistens sind in der Praxis die Plattenränder teilweise eingespannt, indem sie in Mauerwerk eingreifen oder in monolithischer Bauweise mit Randträgern oder Nebenfeldern zusammenhängen. In diesem Falle ist es unrichtig und auch unwirtschaftlich, die Ergebnisse der klassischen Theorie der frei aufliegenden Platte anzuwenden.

Leider wurde in der Literatur bisher sehr selten der Versuch unternommen, den für die Praxis wichtigsten Fall der allseitig teilweise eingespannten Platte zu analysieren. Die praktisch tätigen Ingenieure waren gezwungen, zu einem Näherungsverfahren zu greifen, das unter der Bezeichnung Streifenmethode oder Trägerkreuzverfahren bekannt ist und in zahlreichen Eisenbetonvorschriften empfohlen wird. Man denkt sich aus der Platte in den beiden Tragrichtungen zwei Streifen herausgeschnitten, die sich an der Stelle der grössten Einsenkung kreuzen. Die gleichmässig verteilte Belastung p pro Flächeneinheit wird zerlegt in die Anteile p_1 und p_2 , die nach den beiden Richtungen übertragen werden, wobei $p = p_1 + p_2$. Aus der Bedingung, dass an der Kreuzungsstelle die beiden Streifen die gleiche Einsenkung haben, können die Anteile p_1 und p_2 bestimmt werden; sie richten sich nach dem Verhältnis der Spannweiten und nach der Art der Auflagerung. Diese elementare Methode ist für die Anwendung sehr praktisch und eignet sich besonders auch für Platten, deren Ränder ganz oder teilweise eingespannt sind. In der Literatur des Eisenbetonbaues wurde die Streifenmethode, soweit bekannt, zuerst

1899 von P. CHRISTOPH empfohlen. Das Verfahren ist jedoch älter und scheint zuerst von C. BACH im Maschinenbau angewendet worden zu sein. Man könnte daran denken, das Verfahren zu verbessern, indem man statt einem einzigen Trägerkreuz einen sogenannten Trägerrost einführt. Die Theorie des Trägerrostes wurde erstmals von DE SAINT-VENANT 1883 erwähnt. Sie geht aus der Theorie der isotropen Platte hervor, wenn man den Drillungswiderstand vernachlässigt und die Poissonzahl $m = \infty$ setzt.

Die Streifenmethode und ebenso die Theorie des Trägerrostes liefern Ergebnisse, die von der klassischen Plattentheorie unter Umständen stark abweichen. Man erkennt dies besonders gut am einfachsten Fall der quadratischen, allseitig frei aufliegenden Platte, die der Berechnung leicht zugänglich ist. Man erhält für das grösste Biegmomenterm in der Plattenmitte

$$\text{nach der Streifenmethode} \quad M = \frac{p l^2}{16}$$

$$\text{nach der Theorie des Trägerrostes} \quad M = \frac{p l^2}{13,7}$$

$$\text{nach der Theorie der isotropen Platte} \quad M = \frac{p l^2}{27,2} \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

Um die Streifenmethode der Plattentheorie besser anzupassen, wird in einigen Eisenbetonbestimmungen die Lastverteilung in empirischer Weise so durchgeführt, dass $p_1 + p_2 < p$ gewählt wird (Frankreich 1906, Dänemark 1921, Russland 1926). Dieser Weg ist nur gangbar zur Berechnung der frei aufliegenden Platten. Bei den eingespannten Platten ergeben sich alsdann zu kleine Momente, weil hier der Einfluss der Drillungsmomente zurücktritt; eine Abminderung der Belastungsanteile muss daher unbedingt vom Einspannungsgrad abhängig sein. H. MARKUS hat 1925 in seiner lesenswerten Schrift « Vereinfachte Berechnung biegsamer Platten » versucht, verbesserte Näherungsformeln zur Berechnung frei aufliegender, eingespannter und durchlaufender Platten aufzustellen, wobei er allerdings die Poissonzahl durchweg zu $m = \infty$ angesetzt hat.

Die rechteckige, auf allen Seiten teilweise eingespannte Platte lässt sich nach der klassischen Plattentheorie in ausserordentlich einfacher Weise behandeln, indem man die elastische Fläche durch Polynome darstellt, die den Randbedingungen genügen. Dieser elastischen Fläche entspricht im allgemeinen eine hügelförmige Belastung, die aber bei geeigneter Wahl von Koeffizienten plateauartige Gestalt annimmt und alsdann praktisch mit dem Fall der gleichmässig verteilten Belastung übereinstimmt. Nach diesem Verfahren berechnete der Verfasser (vergl. Schweizerische Bauzeitung 1932) für die quadratische Platte die folgenden Momente:

Moment in Plattenmitte :

$$M_m = \frac{p l^2}{27} \frac{1 + 3 k}{2 + 3 k} \left(1 + \frac{1}{m} \right),$$

Grösstes Moment am Rand :

$$M_r = - \frac{p l^2}{20} \frac{1}{1 + 2 k}.$$

In diesen Formeln bezeichnet die Grösse k den sogenannten Einspannungsfaktor; es ist

$$k = \frac{2 \epsilon E J}{l \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)},$$

wo ϵ die Drehung der Auflagerquerschnitte infolge « $M = 1$ » (elastische Einspannung) und J das Trägheitsmoment der Platte für die Einheit der Breite bezeichnet.

Der Einspannungsgrad der Platte ist definiert durch den Quotienten $\frac{1}{1+k}$. Mit $k = \infty$ und $k = 0$ erhält man als Grenzfälle die bekannten Werte für freie Auflagerung resp. vollständige Einspannung; dazwischen liegen alle möglichen Fälle der teilweisen Einspannung. Die Ergebnisse der obigen, einfachen Formeln stimmen bis auf ca. 3 % mit der exakten Berechnung für gleichmässig verteilte Belastung überein. Der Vergleich mit der Streifenmethode hat ergeben, dass bei höhern Einspannungsgraden die Streifenmethode genügende Genauigkeit besitzt; bei schwacher Einspannung und freier Auflagerung liefert die Streifenmethode für das Moment in Plattenmitte zu grosse Werte. Die Streifenmethode eignet sich besonders gut zur Berechnung durchlaufender Platten, wobei die so bequeme Methode der Fixpunkte (nach CULMANN) beibehalten werden kann. Immerhin ist zu beachten, dass bei den Platten der Einspannungsgrad wesentlich grösser ist, als bei den Balkenträgern, weshalb eine Verschiebung der Fixpunkte nötig wird. Der Ausbau der Theorie zur Berechnung durchlaufender Platten ist heute noch nicht vollendet und gehört zu den dringenden Aufgaben der angewandten Baustatik.

4. Pilzdecken.

Der amerikanische Ingenieur C. A. P. TURNER berichtete 1909 in seinem Buche « Concrete Steel Construction » über die Einführung der trägerlosen Decken oder Pilzdecken (engl. Mushroom system) in den Vereinigten Staaten von Nordamerika. Umfangreiche Belastungsversuche, zum Teil bis zur Bruchgrenze ausgedehnt, dienten zur Klarstellung des statischen Verhaltens und zur Beurteilung des Sicherheitsgrades. Auf Grund dieser Versuche wurden frühzeitig elementare Berechnungsmethoden entwickelt, die auf wissenschaftliche Begründung keinen Anspruch machten, sondern von willkürlichen Annahmen über die Lage der Momentennullpunkte ausgehen (Verfahren von TURNEAURE und MAURER, University Wisconsin). Später wurde auch die Elastizitätstheorie der isotropen Platten herangezogen, in technischen Kreisen « Grashof's Flat Plate Theory » genannt (H. T. EDDY, M. MERRIMAN, H. M. WESTERGAARD und A. SLATER, etc.). Die nordamerikanischen Bestimmungen für Beton und Eisenbeton vom 14. August 1924 enthalten ausführliche Angaben über die statische Berechnung und die konstruktive Ausbildung. Im Anschlusse an eine zur Berechnung der Biegungsmomente empfohlenen Formel wird in den erwähnten Bestimmungen ausdrücklich bemerkt, dass diese Formel nur etwa 72 % derjenigen Momentengrösse liefert, die sich auf Grund streng wissenschaftlicher statischer Berechnung ergibt.

Die nordamerikanischen Bestimmungen rechtfertigen dieses Vorgehen durch folgende Bemerkung :

« Ein gehende Versuche, sowie die vorliegende praktische Erfahrung haben gezeigt, dass durch diese Vorschriften den wirklichen Verhältnissen ausreichend Rechnung getragen wird und dass eine genügende Sicherheit gewährleistet ist ».

Die konstruktive Ausbildung der Pilzdecken bezog sich hauptsächlich auf die Anordnung der Eiseneinlagen und die Form und Armierung der Säulenkapitale. Als Armierung wurde in Nordamerika das sogenannte « Vierbahnsystem » bevorzugt ; zahlreiche Patente wurden auf besonders geformte Zulageeisen in den Pilzköpfen erteilt.

In Europa wurde das Pilzdeckensystem 1910 durch den schweizerischen Ingenieur R. MAILLART eingeführt. Er wählte die Armierung nach dem « Zweibahnsystem » und änderte die Form der Säulenkapitale von Grund auf. Von 1914 an wurden in der Schweiz von verschiedenen Konstrukteuren zahlreiche Hochbauten mit Pilzdecken erstellt. Eine Reihe dieser Ausführungen wurde bereits damals nach der Plattentheorie berechnet, wobei als Nutzlast an Stelle einer gleichmäßig verteilten Belastung eine hügelförmige Belastung in Betracht gezogen wurde, die der Berechnung leichter zugänglich war. Die theoretischen Arbeiten von V. LEWE (1920) und H. MARKUS (1924) lieferten verbesserte Rechnungsmethoden auf wissenschaftlicher Grundlage und trugen zur Verbreitung des Pilzdeckensystems wesentlich bei. Wenn somit in Europa ebenso wie in Nordamerika die Konstruktion der Berechnung weit vorausgeileit war, so konnte das Pilzdeckensystem in Europa doch erst dann allgemein Fuss fassen, nachdem die Baustatik rationelle Hilfsmittel zur Berechnung bereitgestellt hatte.

Am Kongress in Paris sollen einige der heute noch offenen, zahlreichen Fragen theoretischer und konstruktiver Natur zur Diskussion gelangen. Zum Teil liegen dieselben theoretischen Probleme vor, die bei der Besprechung der rechteckigen, kreuzweise armierten Platten bereits formuliert wurden. Von besonderer Wichtigkeit erscheint dem Verfasser der verstieifende Einfluss der Pilzköpfe, der in den statischen Berechnungen bisher nicht einwandfrei berücksichtigt werden konnte. Es steht zu erwarten, dass das erhöhte Trägheitsmoment der Pilzköpfe die Feldmomente günstig beeinflusst, und es ist vielleicht vorwiegend dieser Einfluss, der die amerikanische Anschaug über die Momentengrösse rechtfertigt. Auch die Frage der Prüfung der Theorie durch Belastungsversuche erscheint der Besprechung wert ; in der Tat gehen heute die Ansichten über die richtige Auswertung der Versuche noch stark auseinander. Zahlreiche konstruktive Fragen, wie die Gestaltung der Pilzköpfe, die Ausbildung der Endfelder, etc. harren ebenfalls der Abklärung.

5. Schalen und Scheiben.

RANKINE und SCHWEDLER zeigten 1866 die Berechnung der Rotationsschalen nach der sogenannten Membrantheorie und legten damit den Grund zu der Theorie der biegungslosen Schalen, die im Eisenbetonbau zur Bemessung von Kuppelgewölben seit mehr als drei Jahrzehnten verwendet wurde. Der neuesten Zeit blieb es vorbehalten, diese Schalentheorie auf allgemeinerer

Grundlage weiter auszubauen und die Anwendung der Schalenbauweise im Eisenbetonbau nachhaltig zu fördern. Die Probleme dieses aussichtsreichen Gebietes sind wohl heute noch nicht so hinreichend entwickelt, dass am Kongress in Paris eine Abklärung möglich wäre. Obgleich die statischen Aufgaben zum grösseren Teil nicht zur Elastizitätstheorie gehören, sondern lediglich Gleichgewichtsprobleme darstellen, bietet die allgemeine Theorie der biegungslosen Schalen in einzelnen Fällen bedeutende Schwierigkeiten, die in der Anpassung der Lösungen an die sogenannten Randbedingungen begründet sind.

Als Scheiben bezeichnet man in der Baustatik ebene Platten, die durch in der Mittelebene wirkende Kräfte beansprucht sind, sodass ein ebener Formänderungszustand entsteht. Die Theorie, seit langem Bestandteil der mathematischen Elastizitätslehre, wurde durch LAMÉ und DE SAINT-VENANT begründet und später hauptsächlich durch englische Forscher weiter ausgebaut (AIRY'sche Spannungsfunktion). Die NAVIER'sche Spannungsberechnung am prismatischen Balken bildet einen Sonderfall des Scheibenproblems. Als Konstruktionselement im Eisenbetonbau wird die Scheibe von grosser Bedeutung werden, sobald dem Konstrukteur praktisch brauchbare Verfahren zur statischen Untersuchung zur Verfügung stehen.

TRADUCTION

par M. GOSSIEAUX, Ing., Paris.

L'emploi des dalles et des constructions à parois minces en béton armé prend actuellement une importance de plus en plus grande. Il est donc légitime, au cours de ce premier Congrès de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, d'examiner, dans une séance de travail particulière, les problèmes qui se posent aujourd'hui dans ce domaine, tant en théorie qu'en pratique et d'appeler à la coopération de tous pour résoudre les problèmes que pose impérieusement l'avenir. Les dalles et les constructions à parois minces font partie des plus anciens éléments de la construction en béton armé; on les trouve déjà dans les spécifications des brevets de Monier, mais ils ont toutefois perdu de leur importance depuis que Hennebique a introduit dans la pratique, avec beaucoup de succès, les poutres résistant à la flexion. Ce n'est qu'au cours de ces derniers temps que l'application des dalles et des constructions à parois minces a pu faire des progrès sensibles, tels que l'introduction des planchers sans poutres (dalles-champignons) et des voûtes rigides à parois minces permettant le recouvrement de surfaces plus importantes.

L'édition de la théorie, en tenant compte des exigences de la pratique, est entrée depuis peu dans une phase de développement intéressante; on peut s'attendre à de nouveaux progrès, dans un avenir prochain, grâce aux facultés de création de l'ingénieur.

Pour pouvoir discuter ces questions avec profit, le programme de cette deuxième séance de travail a été limité à quelques sujets nettement définis; des rapports particuliers ont été élaborés pour préparer cette discussion.

Le premier sujet concerne les dalles en béton armé, rectangulaires, armées en croix et travaillant à la flexion dans les deux directions ; les caractères statiques de ces éléments ne sont pas, aujourd'hui encore, bien nettement définis. La dalle rectangulaire, reposant librement sur ses quatre bords, constitue un exemple particulièrement intéressant pour l'étude des nombreuses questions que pose le problème des dalles, tant au théoricien qu'à l'ingénieur chargé des réalisations pratiques. L'auteur de ce rapport est heureux de pouvoir présenter des essais de dalles récents et étendus et qui pourront constituer une base de discussion très intéressante. L'exposé des méthodes pratiques de calcul concernant les dalles partiellement encastrées et continues sera également d'un grand intérêt actuel.

Le deuxième sujet concerne les planchers sans poutres (dalles-champignons), système qui se répand de plus en plus pour la construction des entrepôts et des ateliers. Il est employé aux États-Unis, depuis 1904, et également en Europe, depuis 1910 (où il est originaire de Suisse). La théorie des dalles-champignons n'est pas encore complètement élaborée actuellement. La réalisation pratique de ce système est effectuée, dans les différents pays, suivant des principes qui ne présentent pas une identité absolue. Le rapport qui traite de cette question expose d'une manière concise les bases et l'état actuel de la théorie des dalles-champignons et il mentionne les nombreux ouvrages qui s'y rapportent. Des questions d'ordre pratique doivent être également proposées à la discussion.

Le troisième sujet concerne l'emploi des parois minces et des voûtes minces dans la construction en béton armé. L'auteur trace une vue d'ensemble sur les récents progrès réalisés dans le calcul et la construction des parois portantes situées dans un plan, ainsi que des surfaces non planes : voûtes et coupoles minces. De nombreux exemples d'ouvrages, effectivement exécutés, mettent en évidence, d'une manière saisissante, la supériorité de ce système, qui permet de disposer d'éléments de construction minces, et pour lequel on peut entrevoir un développement important. La discussion plus approfondie des nombreux problèmes statiques et pratiques qui se posent constituera la tâche des Congrès ultérieurs.

Le premier volume des *Mémoires de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes*, qui vient de paraître en avril dernier, contient, entre autres, sept études théoriques concernant les dalles, les parois portantes et les voûtes minces, et dont les auteurs sont MM. C. S. CHETTOE, F. DISCHINGER, U. FINSTERWALDER, P. FRANDSEN, E. GRUBER, K. W. JOHANSEN et A. MESNAGER. Nous ne pouvons, ici, que signaler ces travaux.

Au cours de ce premier Congrès, nous allons examiner brièvement les problèmes et les questions qui concernent le domaine des dalles et des constructions à parois minces et qui sont au premier plan.

1. La théorie des dalles isotropes.

Pour l'étude statique des dalles de béton, armées en croix, on dispose en premier lieu de la théorie classique de l'élasticité, sous la forme dans laquelle elle a été élaborée, il y a plus de cent ans, par LAGRANGE et NAVIER, puis développée ultérieurement par de nombreux investigateurs. La théorie classique

des dalles repose sur une série d'hypothèses, qu'il convient de signaler brièvement. De même que pour l'étude de l'élément prismatique, dans la statique de la construction, on introduit également, pour l'étude de la dalle, l'hypothèse dite de Navier. La dalle est considérée comme mince par rapport à ses dimensions de base. Par ailleurs, les fléchissements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la dalle, de sorte que l'influence de la courbure, c'est-à-dire d'une déformation analogue à celle d'une membrane, peut être laissée de côté (déformation sans allongement sur la surface située dans le plan intermédiaire). Cette hypothèse paraît admissible dans le cas du béton armé; quoi qu'il en soit, il faut attirer l'attention sur le fait que l'influence de la courbure de déformation, c'est-à-dire des efforts normaux à la surface élastique, joue un certain rôle au moment de la rupture, en particulier lorsqu'il s'agit de dalles encastrées, avec voûtes.

En tenant compte des hypothèses indiquées, LAGRANGE a, dès 1816, établi l'équation différentielle d'une surface élastique et, en 1821, NAVIER a traité le cas le plus simple de la dalle rectangulaire reposant librement sur ses appuis. La littérature technique actuelle est très riche à ce sujet; il importe de signaler tout particulièrement ici les travaux détaillés de G. PIGEAUD, de A. MESNAGER et de A. NADAI, de même que les ouvrages spéciaux de H. HENKY, de H. LEITZ et autres. Les tables graphiques de G. PIGEAUD, qui ont paru en 1929, dans les Annales des Ponts et Chaussées, ainsi que les tableaux de A. MESNAGER, dans son « Cours de Béton armé », sont susceptibles de rendre des services tout particuliers dans la construction en béton armé.

L'élaboration de la théorie classique des dalles n'est pas encore complètement terminée; il y manque encore la solution d'un certain nombre de questions qui sont d'une importance particulière dans la construction en béton armé. Le calcul d'une dalle rectangulaire qui repose sur ses bords d'une manière telle que ses angles puissent se soulever, constitue une question qui fait partie du nombre de celles qui ne sont pas encore résolues d'une manière satisfaisante. Si l'on fait des essais, on peut facilement se rendre compte que le fait de supprimer les contraintes dans les angles, pour les dalles reposant librement sur tous les côtés, peut conduire à une modification appréciable dans l'état de déformation de cette dalle. La solution théorique de cette question manque encore actuellement. On trouve très souvent, dans la littérature technique, cette idée qu'une dalle qui n'aurait pas à subir de contraintes dans les angles se comporterait comme un système de poutres, ce que les essais ne confirment toutefois nullement. Une deuxième question, qui présente une grande importance pratique, est celle des dalles rectangulaires ne reposant pas librement sur leurs bords, mais partiellement encastrées. La solution exacte de ce problème présente de notables difficultés, car la méthode d'intégration de NAVIER ne peut pas être appliquée dans ce cas particulier. De nombreux auteurs, tels que H. HENKY et H. LEITZ, ont étudié le cas de la dalle admettant un encastrement complet; en pratique, il paraît toutefois très intéressant d'arriver à une solution générale conduisant à une interprétation facile, et pour un degré d'enca斯特ment arbitraire, afin d'en déduire les bases du calcul des dalles continues. L'extension de l'emploi de la méthode de calcul par différence sera également d'un grand intérêt. A cette question ont travaillé récemment, avec succès, de nom-

breux ingénieurs (MM. N. NIELSEN, H. MARKUS, P. FRANDSEN, H. M. WESTERGAARD). La méthode de calcul par différence permet également l'étude des dalles d'épaisseurs variables, pour lesquelles l'équation différentielle de LAGRANGE n'est plus applicable. Le professeur M. HUBER, de Varsovie, dans une série de travaux remarquables, a traité la question des dalles orthotropes, c'est-à-dire des dalles qui possèdent des résistances variables à la flexion suivant les deux directions. Ces développements remarquables apportés à la théorie pourront aboutir à des applications pratiques diverses et intéressantes et présentant une grosse importance utilitaire.

2. L'application de la théorie des dalles au béton armé.

Le problème du calcul des dalles rectangulaires de béton, armées en croix, doit être discuté d'une manière approfondie au cours de la deuxième séance de travail. Avant tout, il convient d'élucider cette question de savoir si, et dans quelle mesure, la théorie classique des dalles isotropes peut être considérée comme applicable aux dalles en béton armé, quoique l'hypothèse de base de cette théorie des dalles isotropes ne s'applique essentiellement pas au béton armé. Pour répondre à cette question, des considérations théoriques ne sont pas suffisantes ; il est nécessaire de faire appel aux résultats que peuvent donner des essais en charge.

Dans son rapport, M. W. GEHLER décrit, d'une manière détaillée, les nouveaux et remarquables essais qui ont été exécutés au Bureau d'Essai des Matériaux de l'École Technique Supérieure de Dresde. Ces essais se rapportent particulièrement à des dalles reposant librement de tous côtés ; ce système ne joue évidemment dans la pratique qu'un rôle secondaire, mais il semble particulièrement intéressant pour permettre l'observation de l'influence que peuvent exercer différents facteurs. Par rapport aux essais antérieurs, les dispositifs d'application des charges ont été sensiblement améliorés. Nous proposons tout particulièrement à la discussion les questions fondamentales qui sont exposées ci-dessous :

La manière dont se comportent statiquement les dalles armées en croix peut-elle correspondre à la théorie classique des dalles isotropes possédant une résistance uniforme à la flexion ?

Pour le calcul des moments fléchissants, doit-on employer la constante de Poisson avec $m = 4$ ou convient-il de faire intervenir un coefficient plus élevé, et pourquoi ?

La capacité de charge de la dalle peut-elle être améliorée d'une manière notable, par l'intervention d'une armature particulière aux angles, destinée à supporter les moments de torsion ? La résistance à la torsion d'une dalle armée en croix est-elle encore pleinement effective pour des charges très élevées ?

Quel rôle joue, dans les conditions de rupture de la dalle, l'« effet de membrane » qui se manifeste nettement lors de sa déformation ?

3. Calcul pratique des dalles de béton armé rectangulaires, appuyées sur les quatre bords.

Il serait désirable qu'au cours du Congrès de Paris, les problèmes se rapportant aux questions théoriques ne soient pas seuls étudiés, mais que l'on

envisage également l'étude des méthodes de calcul susceptibles d'applications pratiques. La théorie des dalles rectangulaires, appuyées sur tous les côtés, n'est pas encore suffisamment avancée pour permettre son emploi suivi dans la pratique. Le cas étudié par Navier, des appuis libres sur tous les bords, est un cas limite qui se présente rarement dans la construction en béton armé.

Dans la plupart des cas, les bords des dalles sont partiellement encastrés, soit qu'elles soient engagées dans la maçonnerie voisine, soit qu'elles constituent un système monolithique avec les poutres ou les panneaux latéraux. Dans ce cas, il est inexact et même non économique de leur appliquer les résultats que donne la théorie classique des dalles reposant librement par leurs bords.

Malheureusement, ainsi que le montre la littérature technique, les essais effectués jusqu'à maintenant, pour étudier le cas le plus intéressant en pratique des dalles partiellement encastrées, sont très rares. Les ingénieurs qui sont chargés des réalisations ont été obligés, jusqu'à maintenant, de faire appel à une méthode d'approximation, connue sous le nom de méthode de décomposition par tranches et qui est recommandée dans de nombreux ouvrages sur le béton armé. On imagine deux tranches découpées dans la dalle, dans les deux directions principales, et qui se croisent à l'endroit de la déformation maximum. La charge p uniformément répartie par unité de surface est décomposée en deux fractions p_1 et p_2 qui s'exercent suivant les deux directions, et telles que :

$$p = p_1 + p_2.$$

En partant de cette condition que, à l'endroit du croisement des deux bandes considérées, on rencontre la même déformation, on peut déterminer les deux fractions p_1 et p_2 ; elles se répartissent suivant le rapport des portées et la disposition des appuis respectifs. Cette méthode élémentaire est très pratique pour les besoins courants et elle convient également particulièrement bien aux cas dans lesquels les dalles sont partiellement ou totalement encastrées sur leurs bords. Aussi loin que l'on peut remonter dans la littérature technique, on trouve cette méthode recommandée, pour la première fois, par P. CHRISTOPHE, en 1899. Il semble toutefois que cette méthode soit encore plus ancienne et elle paraît avoir été employée tout d'abord par C. BACH en construction mécanique. On pouvait donc penser améliorer cette méthode, en remplaçant la simple croix par un ensemble de tranches élémentaires formant une véritable grille. Cette méthode a été signalée, pour la première fois, en 1883, par DE SAINT-VENANT. Elle permet de sortir de l'hypothèse théorique de la dalle isotrope, en négligeant la résistante à la distorsion et en adoptant pour la constante de Poisson, $m = \infty$.

La méthode de la décomposition par tranches et la méthode de SAINT-VENANT conduisent à des résultats qui, dans certains cas, s'écartent notablement de ceux de la théorie classique des dalles. Ceci est particulièrement facile à constater dans le cas le plus simple de la dalle carrée et reposant librement sur tous ses bords et pour lequel le calcul est très facile. On obtient pour le moment fléchissant maximum au centre de la dalle :

$$\text{par la méthode de décomposition en tranches } M = \frac{p \cdot l^2}{16}$$

$$\text{par la méthode de SAINT-VENANT } M = \frac{p \cdot l^2}{13,7}$$

$$\text{par la théorie des dalles isotropes } M = \frac{p \cdot l^2}{27,2} \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

Pour mieux adapter la méthode de décomposition en tranches à la théorie des dalles, on effectue la répartition des charges, dans quelques règlements, d'une manière empirique telle que :

$$p_1 + p_2 < p$$

(France, 1906. — Danemark, 1921. — Russie, 1926). Toutefois, cette méthode n'est admissible que pour le calcul des dalles reposant librement sur leurs bords. Dans les dalles encastrées, on obtient alors des moments trop faibles, car l'influence des moments de torsion est moins accusée ; il faut donc qu'une réduction dans la répartition des charges soit liée d'une manière formelle au degré d'encaissement. Dans son intéressant ouvrage de 1923, « Vereinfachte Berechnung biegsamer Platten » (Calcul simplifié des Dalles élastiques), H. MARKUS a cherché à établir des formules approchées meilleures, pour le calcul des dalles reposant librement sur leurs bords, des dalles encastrées et des dalles continues. Il a, toutefois, adopté partout la constante de Poisson, $m = \infty$.

La dalle rectangulaire, encastrée partiellement sur tous les côtés, peut être traitée d'une manière extrêmement simple d'après la théorie classique des dalles, en représentant la surface élastique par des polynômes qui satisfont aux conditions des bords. A cette surface élastique correspond généralement une charge en « tas » que l'on peut toutefois admettre comme uniforme en choisissant des coefficients appropriés et qui correspond alors pratiquement avec le cas de la charge uniformément répartie. D'après cette méthode, l'auteur a calculé les moments suivants, pour une dalle carrée (voir Schweizerische Bauzeitung, 1932) :

Moment au centre de la dalle :

$$M_m = \frac{p \cdot l^2}{27} \cdot \frac{1 + 3k}{2 + 3k} \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

Moment maximum aux bords :

$$M_r = - \frac{p \cdot l^2}{20} \cdot \frac{1}{1 + 2k}$$

Dans ces formules, la valeur k désigne le « facteur d'encaissement » ; il est défini par la relation :

$$k = \frac{2 \epsilon E J}{l \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)}$$

dans laquelle on désigne par :

ϵ la déviation de la section d'appui pour $M = 1$
(encaissement élastique) ;

J le moment d'inertie de la dalle pour la largeur unité.

Le « degré d'encaissement » de la dalle est défini par le quotient :

$$\frac{1}{1 + k}$$

En donnant à k les valeurs ∞ et 0 , on obtient les cas limites, qui correspondent à l'appui libre et à l'encastrement complet et entre lesquels on trouve tous les cas possibles de l'encastrement partiel.

Les résultats de l'application des formules ci-dessus sont en accord, à environ 3 % près, avec les résultats du calcul exact pour une charge uniformément répartie. La comparaison avec les résultats de la méthode de décomposition en tranches a montré que pour les degrés d'encastrement élevés, cette dernière méthode donne une précision suffisante ; pour les degrés d'encastrement faibles et pour l'appui libre, la valeur obtenue par la même méthode pour le moment au centre de la dalle est trop élevée. Cette méthode de décomposition par tranches convient particulièrement bien pour le calcul des dalles continues, pour lesquelles la méthode si commode du point fixe (d'après CULMANN) peut être conservée. Il faut toutefois remarquer que dans les dalles, le degré d'encastrement est sensiblement plus élevé que dans les poutres, de sorte qu'il est nécessaire de déplacer le point fixe.

L'adaptation de la théorie au calcul des dalles continues n'est pas encore complètement effectuée actuellement et fait partie des problèmes les plus urgents qui se posent dans la statique appliquée de la construction.

4. Les dalles-champignons.

L'ingénieur américain C. A. P. TURNER a signalé en 1909, dans son ouvrage « Concrete Steel Construction », l'introduction aux États-Unis des planchers sans poutres ou dalles-champignons (Mushroom system). Des essais en charge nombreux, poussés parfois jusqu'à la rupture, ont permis de déterminer nettement la manière de se comporter de ce système au point de vue statique, et d'évaluer le coefficient de sécurité. En se basant sur ces essais, on a pu mettre au point, très tôt, des méthodes élémentaires de calcul, qui ne prétendent nullement être basées sur des données scientifiques fondamentales, mais qui reposent sur des hypothèses arbitraires en ce qui concerne la position des points de moment nul (méthode de TURNEAURE et MAURER, de l'Université de Wisconsin). Ultérieurement, la théorie de l'élasticité des dalles isotropes a été publiée ; elle est connue dans les milieux techniques sous le nom de « Graslof's Flat Plate Theory » (H. T. EDDY, M. MERRIMAN, H. M. WESTERGAARD et A. SLATER, etc...). Les règlements nord-américains pour le béton et le béton armé, du 14 août 1924, contiennent des indications détaillées sur le calcul statique et l'exécution pratique. A propos d'une formule recommandée pour le calcul des moments fléchissants, les règlements ci-dessus mentionnent que cette formule donne, pour les moments fléchissants, des valeurs qui n'atteignent que 72 % environ de celles que donne un calcul statique basé sur des considérations théoriques rigoureuses.

Les règlements nord-américains justifient l'emploi de cette formule en faisant la remarque suivante :

« Des essais très poussés, de même que l'expérience acquise par les constructeurs, ont montré que l'emploi de cette prescription permet de faire un calcul qui répond d'une manière suffisante aux conditions effectives et qu'elle peut garantir une sécurité satisfaisante. »

La forme pratique donnée aux dalles-champignons a résulté principalement

de la disposition adoptée pour les armatures, ainsi que de la forme et du mode d'armature des chapiteaux des colonnes. Dans l'Amérique du Nord, on a donné la préférence, en ce qui concerne l'armature, au « système à quatre rangées » ; de nombreux brevets ont été déposés pour des dispositifs divers des armatures dans les chapiteaux.

En Europe, le système des dalles-champignons a été introduit en 1910 par l'ingénieur suisse R. MAILLART. Il a choisi l'armature d'après le système à deux rangs et a modifié la forme des chapiteaux des colonnes. Depuis 1914, en Suisse, de nombreuses constructions ont été réalisées avec des dalles-champignons, par différents constructeurs. Dès cette date, toute une série de planchers a été calculée d'après la théorie des dalles, en supposant, comme charge utile, non pas une charge uniformément répartie, mais une charge « en tas », qui conduisait à un calcul plus facile. Les travaux théoriques de V. LEWE (1920) et de H. MARKUS (1924) ont fourni des méthodes de calcul plus perfectionnées, basées sur des principes scientifiques, et ont permis d'élargir le domaine d'application du système des dalles-champignons. Quoique, en Europe, de même qu'en Amérique, la construction eût été en avance sur le calcul, le système des dalles-champignons ne pouvait toutefois devenir d'un emploi général qu'après une contribution rationnelle de la statique de la construction à l'établissement des méthodes de calcul.

Au cours du Congrès de Paris, doivent venir en discussion quelques-unes des questions nombreuses, tant théoriques que de réalisation pratique, qui sont encore pendantes. On trouve en partie, dans ce domaine, les mêmes problèmes théoriques qui se sont déjà posés pour l'étude des dalles rectangulaires armées en croix. L'influence de renforcement exercée par les chapiteaux, et qui n'a pas été prise en considération d'une manière suffisante jusqu'à maintenant, paraît revêtir, aux yeux de l'auteur, une importance particulière. Il faut s'attendre à ce que la valeur élevée du moment d'inertie du chapiteau exerce une influence favorable sur les moments dans les intervalles et c'est peut-être surtout cette influence qui justifie le point de vue exprimé par les Américains en ce qui concerne la valeur des moments.

5. Parois portantes et voûtes minces.

RANKINE et SCHWEDLER ont indiqué, en 1866, la méthode de calcul des coupoles de révolution, en se basant sur la théorie des membranes et ont posé ainsi les principes de la théorie des parois minces ne subissant pas de flexion, théorie qui est utilisée depuis plus de trente ans pour le calcul des voûtes en coupole. Ce n'est que très récemment que cette théorie a pu être généralisée et que l'on a pu étendre l'emploi des parois minces à la construction en béton armé, dans des conditions sérieuses. Les problèmes que l'on rencontre dans ce domaine extrêmement fécond n'ont pas encore reçu des développements suffisants pour qu'il soit possible de les élucider au cours du Congrès de Paris. Quoique, pour la plus grande partie, les problèmes statiques qui se posent n'appartiennent pas à la théorie de l'élasticité, mais qu'ils relèvent uniquement de questions d'équilibre, la théorie générale des parois minces ne subissant pas de flexion offre dans certains cas des difficultés considérables, qui proviennent de la nécessité de mettre les solutions en conformité avec les conditions auxquelles sont soumis les éléments, à la jonction.

Par paroi portante¹, on entend, dans la statique de la construction, une dalle plane, qui se trouve chargée par des efforts agissant dans le plan médian, de sorte que les déformations se produisent dans le plan. La théorie correspondante, qui fait partie depuis longtemps de la théorie mathématique de l'élasticité, a été établie par LAME et DE SAINT-VENANT et développée ultérieurement, principalement par des investigateurs anglais (fonction d'AIRY). Le calcul de NAVIER, sur les efforts dans les poutres prismatiques, constitue un cas particulier du problème des parois portantes. Les parois portantes prendront une importance considérable dans la construction en béton armé, lorsque le constructeur pourra disposer de méthodes effectivement pratiques pour ses études statiques.

Zusammenfassung.

Die am Kongress in Paris zur Diskussion gelangenden Themen aus dem Gebiete der Platten und Schalen im Eisenbetonbau werden, als Einleitung zu den Sonderreferaten, kurz besprochen. Im Vordergrund stehen die grundlegenden Probleme der Theorie der isotropen Platten, die Anwendung der Plattentheorie auf den Eisenbeton, die praktische Berechnung der rechteckigen, allseitig frei aufliegenden oder teilweise eingespannten Eisenbetonplatten, die Berechnung und Konstruktion der Pilzdecken, sowie der Schalen und Scheiben. Eine Reihe von aktuellen Fragen aus diesen Gebieten, deren Abklärung am Kongress erwünscht wäre, werden formuliert und näher begründet.

Résumé.

L'auteur expose une vue d'ensemble des sujets qui doivent faire l'objet d'une discussion au cours du Congrès de Paris, et qui appartiennent au domaine des dalles et éléments à paroi mince en béton armé.

Au premier plan, il faut signaler le problème de base que constitue la théorie des dalles isotropes, puis l'application, au béton armé, de la théorie des dalles, le calcul pratique des dalles de béton armé rectangulaires, reposant librement sur leurs quatre bords, ou partiellement encastrées, le calcul et la construction des dalles, ainsi que des voûtes et parois minces.

L'auteur expose une série de questions ayant trait à ce domaine et qu'il serait intéressant de pouvoir élucider au cours de ce Congrès.

Summary.

As an introduction to the separate reports, the themes concerning slabs and shells in reinforced concrete structures to be discussed at the Paris Congress are here briefly spoken of. In the foreground stand the basic problems of the theory of isotropic plates, the application of the plate theory to reinforced concrete, the practical calculation of rectangular reinforced concrete slabs free on all sides or partly held, the calculation and design of mushroom systems, and also of shells and thin walls. A series of topical questions from this field, whose elucidation at the Congress is desirable, is drawn up and further discussed.

1. Dans le rapport II 4, Petry, « Parois et voûtes minces en béton armé », la paroi portante est désignée par « tympan ».

II 2

RECHTECKIGE, ALLSEITIG AUFLIEGENDE PLATTEN

DALLES RECTANGULAIRES REPOSANT SUR LES QUATRE COTÉS

RECTANGULAR SLABS SUPPORTED ON ALL SIDES

Dr. Ing. W. GEHLER,

Professor der Technischen Hochschule und
Direktor beim Staatl. Versuchs- und Materialprüfungsamt, Dresden.

I. Die Bedeutung des Plattenproblems für den Eisenbetonbau.

Während im Stahlbau die Tragwerke in der Regel aus Trägern bestehen, deren Beanspruchung durch einen einachsigen Spannungszustand hinreichend genau gekennzeichnet ist, werden im Eisenbetonbau Deckenplatten, Balken und Säulen fast ausschliesslich in starrem Zusammenhang miteinander ausgeführt. Dies hat zur Folge, dass an Stelle der frei drehbaren Lagerung meist eine teilweise Einspannung der Trägerenden tritt, also im Längsschnitt der Tragwerke eine *Rahmenwirkung* entsteht, und dass ferner im Grundriss die *rechteckige Platte* mit den Balken starr verbunden ist, also zweiachsig beansprucht wird. Durch die Entwicklung der Baustatik in den beiden ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts ist die Rahmenberechnung befriedigend ausgebaut worden. Da die Berechnung der Eisenbetonplatten aber sehr stark von den Baustoff-Eigenschaften abhängt, kann die Bemessung der Plattendicke und der Eisenquerschnitte, sowie die Anordnung der Eiseneinlagen nur auf der Grundlage von Versuchen mit baumässigen Abmessungen künftig weiter erforscht werden. Die *Pilzdecken* bilden die Vereinigung der beiden kennzeichnenden Elemente des Eisenbetonbaues, der kreuzweise bewehrten Platte und der Säulen, umfassen also Rahmen- und Plattenwirkung zugleich, die man durch die Betrachtung der Gurtstreifen und der Feldstreifen veranschaulichen kann.

Aus der geschichtlichen Entwicklung ist es wohl zu erklären, dass in Anlehnung an den Stahlbau bisher im Eisenbetonbau die einfachen statischen Grundformen des *Balkens* und *Plattenstreifens* auf zwei oder mehreren starren Stützen und des *Gewölbestreifens* trotz ihrer Unzulänglichkeit der Berechnung zu Grunde gelegt wurden. Die Zukunft des Eisenbetonbaues liegt jedoch in den zweiachsigen Grundformen, nämlich den *Platten* und den *Schalen*. Das Problem der Schubsicherung der Balken, das durch 3 Jahrzehnte lange Versuche praktisch vollständig ausreichend geklärt ist, zeigt besonders hinsichtlich der Rissicherheit offenkundig die Unzulänglichkeit des Eisenbetonbalkens und die Grenzen seiner Ausführbarkeit, die nur durch eine wesentliche Erhöhung

der Beton-Zugfestigkeit noch etwas erweitert werden können. Alle auf Biegung beanspruchten Eisenbetonbauteile werden bekanntlich wegen der geringen Zugfestigkeit des Betons unter der Annahme einer gerissenen Zugzone und zwar für den Bruchzustand bemessen. Dies gilt heute sowohl für die Balken als auch für die Platten. Bei den Platten besteht Einigkeit darüber, dass sie unterhalb der Risslast (Stadium I) als homogene oder isotrope Platten wirken. Den Streitpunkt bildete seither lediglich die Frage, durch welches statische Rechnungsverfahren der verwickelte Gleichgewichtszustand zwischen den innern und äusseren Kräften nach dem Auftreten der Plattenrisse (Stadium II) in verhältnismässig einfacher Weise zu beschreiben und wie ihm durch die Anordnung der Eiseneinlagen Rechnung zu tragen ist. Hierzu kommt auf Grund unserer Plattenversuche die bisher weniger beachtete, aber mindestens ebenso wichtige zweite Frage, wie gross die Rissicherheit der Eisenbetonplatten im Vergleich zum Eisenbetonbalken angenommen werden darf. Als Beitrag zur Klärung dieser Fragen sollen die im folgenden beschriebenen Versuche dienen.

II. Die Entwicklung der bisher gebräuchlichen Rechnungsverfahren.

1. Die einfachste und niedrigste Stufe des Rechnungsverfahrens besteht darin, dass man sich parallele Balkenstreifen aus den Platten herausgeschnitten denkt und diese Träger auf zwei oder mehreren Stützen mit oder ohne Endeinspannung berechnet. (*Erste Entwicklungsstufe.*) Auf die rechnerische Ausnutzung des günstig wirkenden Einflusses des seitlichen Zusammenhangs (die sogen. seitliche Kontinuität), den man dabei als stille Sicherheitsreserve betrachtet, wird somit verzichtet. Um diesen seitlichen Zusammenhang baulich zu gewährleisten, wurden in den Deutschen Eisenbetonbestimmungen 1925, § 14, Ziff. 10, Abs. 2, sogen. Konsoleisen (4 Rundeisen 7 mm Durchmesser auf 1 m Breite) vorgeschrieben, und in den Brückenvorschriften DIN 1075, § 6, Ziff. 1, eine wesentlich stärkere Querbewehrung dann verlangt, wenn mit einer weitergehenden Lastverteilung gerechnet wird. Dieses Rechnungsverfahren, das sogen. *Plattenstreifen-Verfahren*, hat zwar den Vorzug möglichster Einfachheit, aber den grossen Nachteil, dass es in krassem Widerspruch mit der Ausführung als zusammenhängende Platte steht.

2. *Die zweite Stufe* besteht in der Annahme des sogen. *Trägerrostes*, nämlich zweier Scharen sich rechtwinklig kreuzender Plattenstreifen, die im Kreuzungspunkt die gleiche Durchbiegung

$$\zeta_x = \zeta_y \cdot \dots \quad (1)$$

haben müssen (Bild 1), was als *erster Grundsatz der Plattenlehre* bezeichnet werden kann. Ist das Längenverhältnis der Platten-Stützweiten, die sogen. *Länglichkeit der Platte* $\lambda = l_y : l_x$ und je nach dem durch α oder β gekennzeichneten *Einspannungsgrad* die *Durchbiegung des X- bzw. Y-Streifens*¹

1. Mit q_x , q_y und q möge hier, wie beim Balken, die gleichmässig verteilte Last eines Plattenstreifens von der Breite 1, also in kg/m bezeichnet werden, dagegen mit q' die bei den Plattenversuchen anzugebende Einheitslast in kg/m².

$$\zeta_x = \alpha \cdot \frac{q_x l_x^4}{EJ} \quad \zeta_y = \beta \cdot \frac{q_y l_y^4}{EJ},$$

so ergibt sich aus Gl. 1 :

$$\frac{q_x}{q_y} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{l_y^4}{l_x^4}.$$

In Bild 2 sind für einen Plattenquadranten die Ordinaten des Lasthügels für eine Anzahl von Punkten N des mittleren X-Streifens in Bild 1 für verschiedene Länglichkeitsverhältnisse aufgetragen. Man erkennt hieraus, dass die in der Nähe der Ränder liegenden Y-Streifen einen grösseren Lastanteil q_x als die

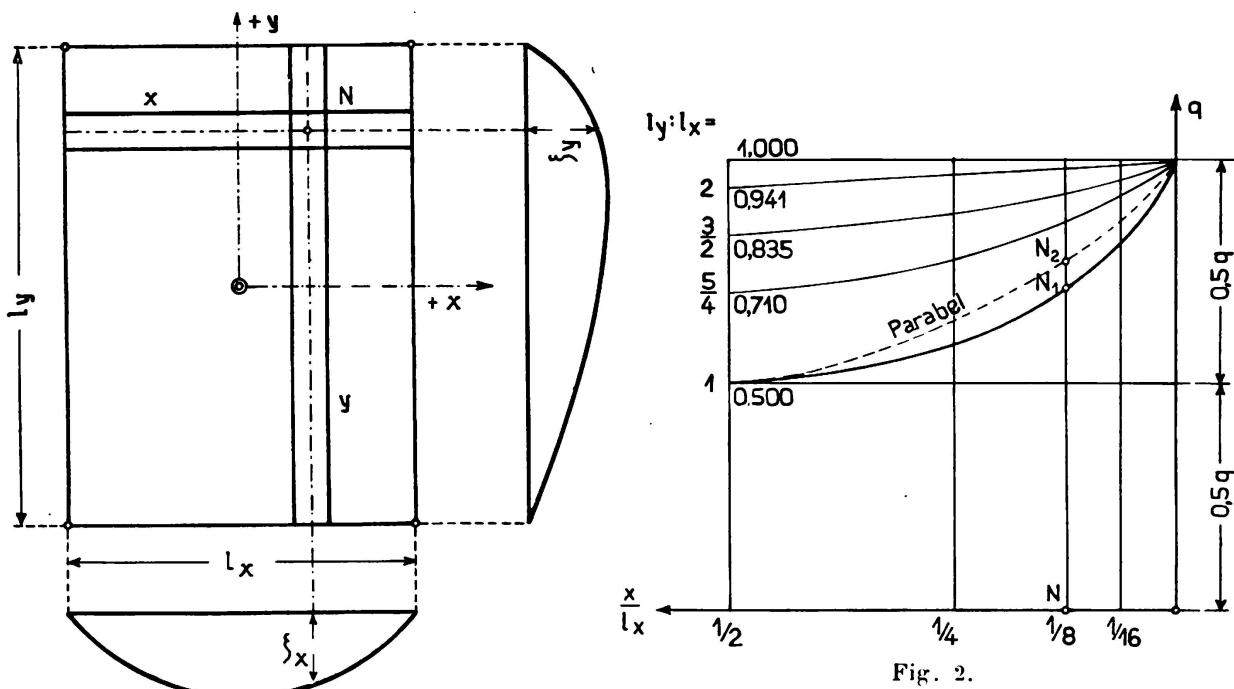


Fig. 1.

Das Trägerrostverfahren.
Méthode des poutres croisées.
The Girder Grillage Method.

Ordinaten des Lasthügels beim Trägerrostverfahren.
Ordonnées de charge dans la méthode des poutres
croisées. (Décomposition de la dalle en tranches.)
Ordinates of the Load with the Girder Grillage
Method.

weiter nach der Mitte zu gelegenen übernehmen, weil sie sich weniger stark durchbiegen, also grösseren Widerstand leisten, dass sie also die mittleren Streifen entlasten. Ersetzt man die Linie 1 durch eine Parabel, so erhält man¹ als Mittenmomente für die quadratische Platte

$$M_m = \frac{7}{96} q l^2 = \frac{1}{13,7} q l^2 = 0,0730 q l^2. \dots \dots \dots \quad (2)$$

Die entlastende Wirkung zeigt sich durch den Vergleich mit dem Mittennmoment des frei gestützten X-Streifens $\partial M_m = \frac{q l^2}{8}$, wie es sich nach dem Plattenstreifen-Verfahren (s. unter I.) ergeben würde. Das *Trägerrostverfahren*

1. S. W. GEHLER, Handbuch für Eisenbetonbau, III. Aufl., 1931, 6. Bd. Balkenbrücken, S. 323 (Wilh. Ernst und Sohn, Berlin).

berücksichtigt somit die entlastende Wirkung, die die seitlichen Randstreifen den mittleren Streifen zuteil werden lassen.

Aus Bild 2 geht aber auch hervor, dass die entlastende Wirkung des Trägerrostes bei einer Länglichkeit der Platte $l_y : l_x = 1,5$ bzw. $2,0$ nur noch 16% bzw. 6% beträgt, dass also das hauptsächliche Anwendungsgebiet sich auf verhältnismässig enge Grenzen beschränkt (etwa von $l_y : l_x = 1$ bis $1,5$).

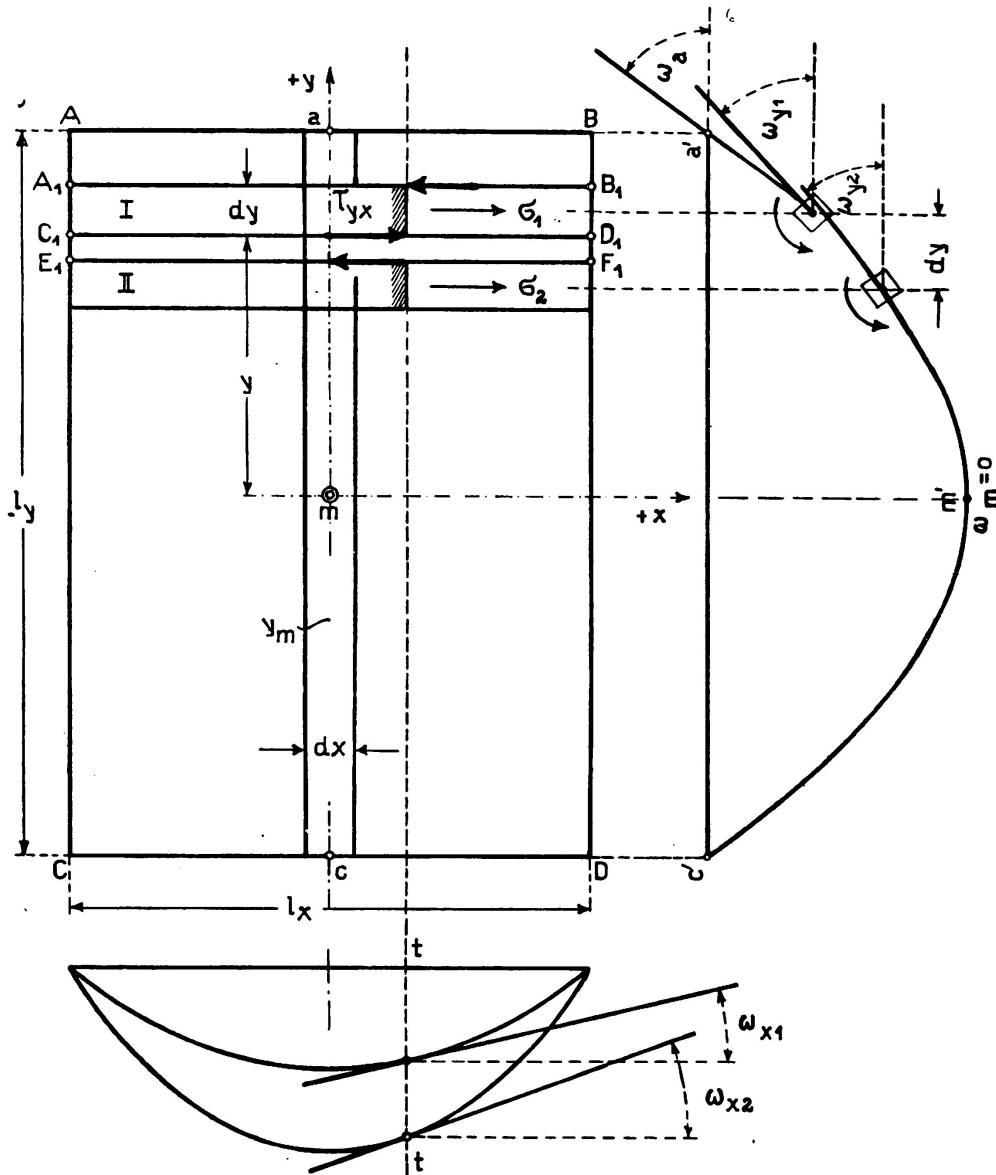


Fig. 3.
Verdrehung der Streifenquerschnitte bei der drillungssteifen Platte.
Torsion des sections d'une bande pour la dalle résistant à la distorsion.
Twisting of the Strip Cross-Sections in the Plate stiffened against Twisting.

Beim Trägerrostverfahren lautet die Gleichung der Biegefläche

$$E \cdot \left(J_x \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + J_y \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) = p(x, y). \dots \quad (3)$$

wobei J_x und J_y die Trägheitsmomente des Streifens von der Breite 1 in der X-

und Y- Richtung bedeuten und $p(x, y)$ die Lastfunktion, die man nach Dr. LEWE¹ jeweils mittels Fourrierscher Reihen entwickeln kann.

3. Um das Verfahren noch mehr zu vereinfachen, wird vielfach ein *Trägerkreuz* betrachtet, dessen Kreuzungspunkt willkürlich in der Plattenmitte angenommen wird und das daher nur eine rohe Annäherung des wirklichen Formänderungs- und Spannungszustandes geben kann. Für die quadratische Platte erhält man dann $q_x = q_y = \frac{q}{2}$ und das Mittenmoment

$$M_m = \frac{1}{8} \cdot \frac{q}{2} \cdot l^2 = \frac{q l^2}{16} \quad \dots \quad (4)$$

Das *Trägerkreuzverfahren* ist somit hinsichtlich der Entwicklung der fortschreitenden schärferen Erfassung des Spannungszustandes im Vergleich zum Trägerrostverfahren zwar als eine Vereinfachung, zugleich aber auch als ein Rückschritt zu bezeichnen.

4. Die dritte Stufe endlich, das *Verfahren der isotropen, drillungssteifen Platte*² berücksichtigt noch die Tatsache, dass die herausgeschnitten gedachten parallelen Plattenstreifen einer jeden Schar in Wirklichkeit miteinander zusammenhängen und sich vor allem dadurch beeinflussen, dass sie ihrer Verdrehung oder Verdrillung einen Widerstand entgegensetzen (*zweiter Grundgedanke der Plattenlehre*). Die Aufgabe ist statisch dann einwandfrei lösbar, wenn man (auch trotz etwaiger Zugrisse im Beton) eine isotrope Platte

1. S. LEWE, Pilzdecken, 2. Aufl., 1926 (Wilh. Ernst u. Sohn, Berlin) u. Bauing. 1926, S. 898.

2. Die klassische Theorie der homogenen oder isotropen elastischen Platte, die durch LAGRANGE und NAVIER begründet wurde, ist in den letzten Jahrzehnten wesentlich ausgebaut worden, wie z. B. durch A. und L. FÖPPL, HAGER, H. LEITZ, S. TIMOSHENKO, A. NADAI, DANUSO, NIELSEN, H. MARCUS, M. T. HUBER, LEWE u. a. Angaben über das umfangreiche Schrifttum s. Fussnote S. 192, a. a. O. S. 135. W. GEHLER Erläuterungen zu den Eisenbetonbestimmungen 1925 (W. ERNST et SOHN, Berlin), IV. Aufl. S. 124.

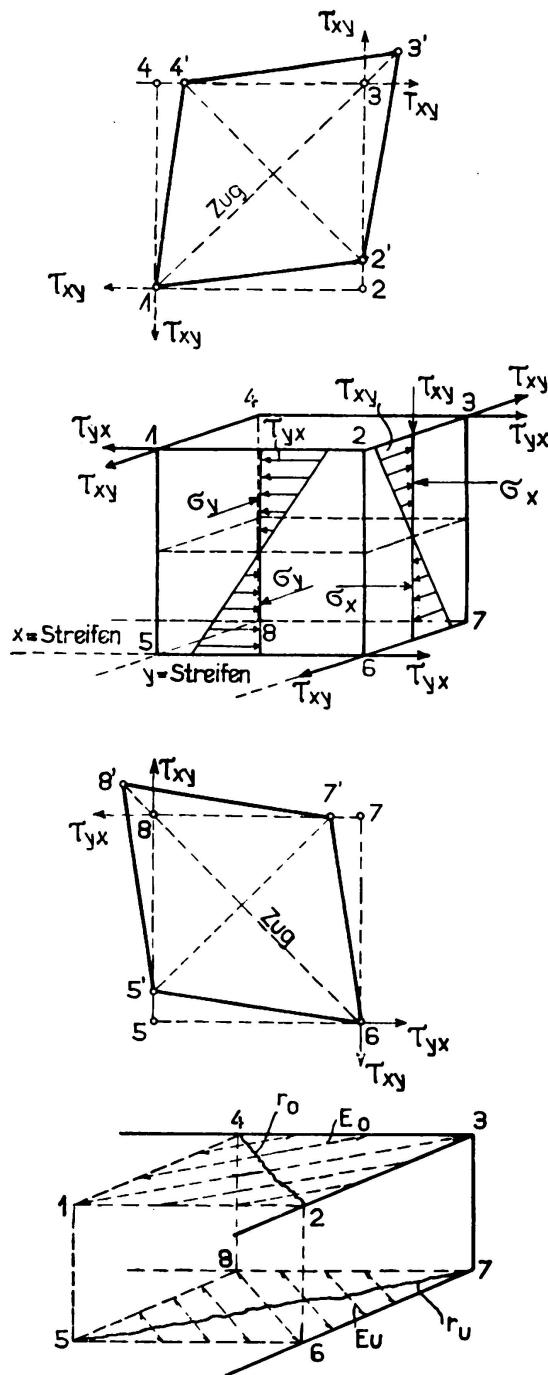


Fig. 4.
Spannungen am Element der drillungssteifen Platte.
Efforts dans un élément de la dalle résistant à la distorsion.
Stresses on an Element of the Plate stiffened against Twisting.

und Festhalten der Ecken voraussetzt. Heben sich dagegen die Ecken ab, so wird die Auflagerlänge an den Rändern statisch unbestimmt. Bei der Platte mit festgehaltenen Ecken wird die Verformung durch Bild 3 gekennzeichnet, in der die Verdrehung zweier Nachbarstreifen (Bild 3 a und c) angedeutet ist, wodurch die sogen. Drillungsspannungen¹

$$\tau_{xy} = -2G \cdot z \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \cdot \partial y} \dots \dots \dots \quad (5)$$

ausgelöst werden mit dem Verdrillungswinkel ω_{y1} und ω_{y2} . Ist $\omega = 0$, wie z. B. in Plattenmitte oder bei voller Einspannung an den Plattenrändern, so verschwinden daselbst auch diese Drillungsspannungen. Ihr Zusammenhang mit den Normalspannungen σ_x und σ_y ist in Bild 4 dargestellt.

Im Sonderfall der ringsum aufliegenden, quadratischen und symmetrisch belasteten Platte mit festgehaltenen Ecken werden bei den in der Diagonale liegenden Würfeln jeweils die Normalspannungen in der X- und Y-Richtung

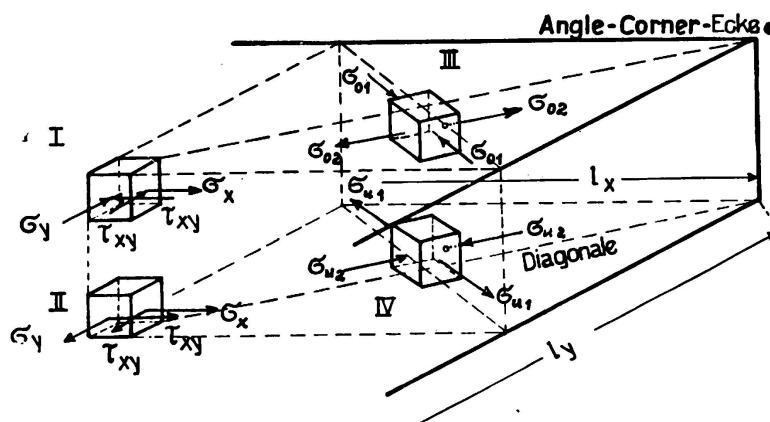


Fig. 5.

Hauptspannungen am Element in den Eckbereichen der Platte.

Efforts principaux dans un élément d'un angle de la dalle.

Principal Stresses on an Element near the Corner of the Plate.

gleich gross. Dann ergeben sich mit $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ und $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ die Hauptspannungen, die längs des Diagonalschnittes und quer dazu gerichtet sind, zu (Bild 5)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} = \sigma \pm \tau. \dots \quad (6)$$

also oben (Würfel III) längs der Diagonale die Zug-Spannung $\sigma_{o2} = \tau - \sigma$
quer zur Diagonale die Druckspannung $\sigma_{o1} = -(\sigma + \tau)$
und unten (Würfel IV) längs der Diagonale die Druckspannung $\sigma_{u2} = -(\tau - \sigma)$
quer zur Diagonale die Zug-Spannung $\sigma_{u1} = \sigma + \tau$

Da bei der ringsum frei aufliegenden Platte entsprechend dem Drillungswinkel ω (s. Bild 3 c) in der Nähe des Auflagers τ gross, dagegen σ klein ist, müssen bei derartigen Versuchen mit Eisenbetonplatten infolge der grossen Zug-

1. S. W. GEHLER, Erläuterungen zu den Eisenbetonbestimmungen 1925 (W. Ernst und Sohn, Berlin), IV. Aufl., S. 124.

spannungen $\sigma_{u1} = \sigma + \tau$ an der Unterfläche zuerst die Diagonalrisse in der Nähe der Ecken auftreten und erst bei wesentlich höheren Laststufen an der Oberfläche die Zugrisse quer zur Diagonale infolge der Zugspannungen $\sigma_{o2} = \tau - \sigma$ (s. auch Bild 4 d und die Verformungen nach Bild 4 b und c).

Die quadratische, ringsum frei aufliegende Platte eignet sich deshalb besonders für Versuche, weil das Biegemoment der äusseren Kräfte in Bezug auf den Diagonalschnitt statisch bestimmt ist. Für die gleichmässig verteilte Last q' (in kg/m²) berechnet es sich nach Bild 6 zu :

$$M_D = \frac{q' l^2}{2} \cdot \left(\frac{d_1}{4} - \frac{d_1}{6} \right) = \frac{q' l^2}{24} d_1. \dots \dots \dots \quad (7)$$

und unter der allerdings rohen Annahme einer gleichmässigen Verteilung dieses Biegemomentes über den ganzen Diagonalschnitt für die Längeneinheit (in kgm/m) zu

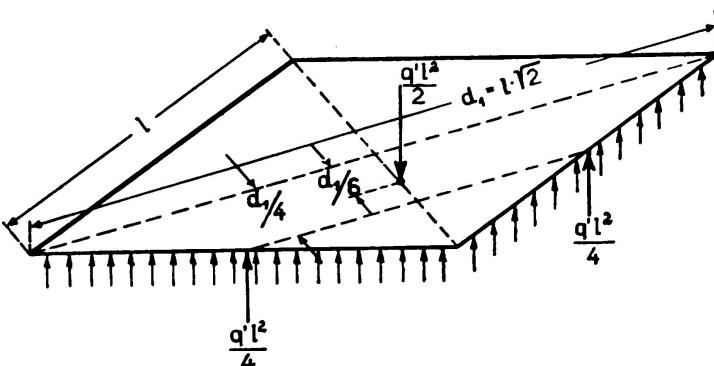
$$M'_D = \frac{M_D}{d_1} = \frac{q' l^2}{24}. \dots \dots \dots \quad (8)$$

Fig. 6.

Biegemoment im Diagonalschnitt der quadratischen Platte.

Moment de flexion dans la section diagonale de la dalle carrée.

Bending Moment in the Diagonal Section of the Square Plate.



Nach dieser Theorie der isotropen, drillungssteifen Platte errechnet sich im Falle gleichmässig verteilter Belastung q (in kg/m) für die ringsum frei gelagerte, quadratische Platte das Mittenmoment

$$M_m = 0,0368 q l^2 = \frac{1}{27,2} q l^2. \dots \dots \dots \quad (9)$$

5. Das Näherungsverfahren von H. MARCUS¹ hat den Zweck, eine möglichst einfache Näherungsformel für den Größtwert des Plattenbiegemomentes anzugeben, in der die verschiedene Länglichkeit der Platte $\lambda = l_y : l_x$ und die verschiedenen Randbedingungen berücksichtigt werden und zwar für den Fall der gleichmässig verteilten Last und den der Einzellast in Plattenmitte. Hinsichtlich der Randbedingungen genügt es, sich auf die Grenzfälle der freien Auflagerung und der vollen Einspannung der einzelnen Plattenränder zu beschränken. Für die nach dem Trägerkreuzverfahren (Gl. 2) aufgeteilten Lasten q_x und q_y werden die grössten Biegemomente $\partial M_{x \max}$ in der X- Richtung und $\partial M_{y \max}$ in der Y- Richtung wie bei einachsig bewehrten Plattenstreifen für die ungünstigste Laststellung unter Berücksichtigung der jeweils vorliegenden

1. S. H. MARCUS. Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten, 2. Aufl., 1929 (Jul. Springer, Berlin).

Stützungsart ermittelt. Mit Rücksicht auf die günstige Wirkung der Drillungssteifigkeit dürfen dabei die Feldmomente wie folgt abgemindert werden:

$$M_{x \max} = v_x \cdot \partial n_{x \max} = \partial n_{x \max} \cdot \left[1 - \frac{5}{6} \left(\frac{l_x}{l_y} \right)^2 \cdot \frac{\partial n_{x \max}}{\frac{q l^2}{8}} \right] \dots \dots \quad (10)$$

und entsprechend $M_{y \max}$ (unter Vertauschung von x und y). Für den Fall der ringsum frei aufliegenden, quadratischen Platte ist infolge der Symmetrie $q_x = q_y = \frac{q}{2}$, also $\partial n_{x \max} = \frac{q_x l_x^2}{8} = \frac{q l^2}{16}$ (s. Gl. 3), wobei der Abminderungsbeiwert seinen Größtwert

$$v = 1 - \frac{5}{6} \frac{q_x}{q} = \frac{7}{12} = 0,584$$

annimmt. Hiernach wird in diesem Sonderfall 42% der Last q durch den Drillungswiderstand anstatt durch den Biegungswiderstand der Platte übertragen. Das Moment in Plattenmitte ergibt sich dann nach Gl. 10 zu

$$M_{x \max} = v \cdot \partial n_{x \max} = 0,584 \frac{q_x l^2}{8} = 0,0365 q l^2 = \frac{1}{27,4} q l^2 \dots \quad (11)$$

also nur halb so gross wie beim Trägerrostverfahren (Gl. 2). Die Ergebnisse der nach diesem Näherungsverfahren ermittelten Biegemomente stimmen mit den Werten des genauen Verfahrens (s. unter 4.) hinreichend befriedigend überein (vgl. z. B. Gl. 9 und 11).

III. Die Einwände gegen die Anwendung der Theorie der isotropen Platte auf Eisenbetonplatten.

1. Im Stadium II, also nach dem Auftreten der Betonzugrisse, können die Drillungsspannungen (s. Gl. 4) bei Eisenbetonplatten nicht mehr übertragen werden, weil die Eiseneinlagen allein waagrechte Schubkräfte nicht aufzunehmen vermögen¹. Bei niedrigen Laststufen wird der Drillungswiderstand einer Eisenbetonplatte verhältnismässig gross sein, aber jenseits der Rissgrenze mit zunehmender Belastung und Rissbildung stark abnehmen. Die Durchbiegungen wachsen daher im Stadium II bedeutend rascher als im Stadium I. Nur durch geeignete Zusatzbewehrungen wird es möglich sein, die Drillungsmomente auch bei höheren Laststufen in gewissem Umfang zu übertragen. Behält man den Grundsatz der Bemessung nach der Sicherheit gegen Bruch wie bei Eisenbetonbalken bei, so ist sie nur nach dem Trägerrostverfahren, nicht aber unter der Annahme einer drillungssteifen, isotropen Platte zulässig (also z. B. nach Gl. 2 mit $M_m = \frac{q l^2}{13,7}$, anstatt nach Gl. 11 mit $M_m = \frac{q l^2}{27,4}$).

2. In der bekannten Ausgangsgleichung für die Krümmung in der X- und Y-Richtung treten ausser den Biegmomenten M_x und M_y die Beiwerte E J

1. S. H. LEITZ-Graz. Berechnung kreuzweise bewehrter Platten. Der Bauing., 1925. S. 920.

und m auf, die sich bei Eisenbeton bekanntlich mit wachsender Belastung ändern. Daher ist es nicht berechtigt, sie als Festwerte anzunehmen, wie bei der Herleitung der Gleichung für die Biegefläche der isotropen Platte.

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = \frac{p}{EJ} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \dots \dots \dots \quad (12)$$

Daher empfiehlt M. T. HUBER¹ für die orthogonal, also seitenparallel bewehrte Platte die neue Bezeichnung als orthotrope Platte mit der veränderlichen Biegssteifigkeit $E_x J_x$ und $E_y J_y$ in der X- und Y-Richtung, für die die Gleichung der elastischen Fläche lautet :

$$E_x J_x \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \frac{E_x J_x + E_y J_y}{m} \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y J_y \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = p \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \quad (13)$$

M. RITTER, Zürich² wies rechnerisch nach, dass im Stadium II bei dem aus der Betondruckzone und der Eisenzugzone bestehenden Querschnitt der Eisenbetonplatte mit dem ideellen Trägheitsmoment J_1 an die Stelle der gebräuchlichen Querdehnungszahl m hier eine ideelle Querdehnungszahl

$$m_1 = m : \left[m - \frac{J}{J_1} \cdot (m-1) \right] \dots \dots \dots \dots \dots \quad (14)$$

zu setzen ist, und diese bei den üblichen Bewehrungsverhältnissen den 3- bis 4-fachen Wert von m annimmt. Die Glieder der Gl. 13, in denen an Stelle von m hier m_1 tritt (z. B. bei $m = 6$ also $m_1 = 18$ bis 24) sind daher ohne nennenswerten Einfluss, sodass $m_1 = \infty$ angenommen werden darf und Gl. 13 in die einfache Form der Gleichung der Biegefläche des Trägerrostes (vgl. Gl. 3)

$$E_x J_x \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + E_y J_y \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = p \dots \dots \dots \dots \quad (15)$$

übergeht. Da sich die Steifigkeitszahlen von Punkt zu Punkt ändern, müssen diese beim ersten Rechnungsgang des Näherungsverfahrens von Masche zu Masche zunächst angenommenen Werte EJ bei der Wiederholung der Rechnung der Grösse der Biegemomente entsprechend berichtigt werden. Am Beispiel der quadratischen, ringsum frei aufliegenden Platte zeigte RITTER, dass für 3 Fälle, in denen das Verhältnis der Steifigkeitsziffer in Plattenmitte zu der am Plattenrand $E_m J_m : E_r J_r = 1$ bzw. 1,5 bzw. 2,0 angenommen wird,

das Mittelmoment sich zu $\frac{q l^2}{13,7}$ (s. Gl. 2) bzw. $\frac{q l^2}{17,3}$ bzw. $\frac{q l^2}{2 \pi^2} = \text{rd. } \frac{q l^2}{20}$ berechnet. Es sei daher nicht zulässig, die klassische Theorie der homogenen Platte mit konstanter Biegssteifigkeit zur Berechnung kreuzweise bewehrter Eisenbetonplatten zu verwenden, weil dabei der *Drillungswiderstand* über-

1. M. T. HUBER. Warschau, Ueber die genaue Biegungsgleichung einer orthotropen Platte in ihrer Anwendung auf kreuzweise bewehrte Betonplatten. Bauingenieur, 1925.

2. S. M. RITTER. Zürich, Die Anwendung der Theorie elastischer Platten auf den Eisenbeton, Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau in Wien, 1929, S. 644 (Jul. Springer, Wien).

schätzt und keine Rücksicht auf die beträchtliche Entlastung genommen wird, die an gefährdeten Stellen infolge der Abminderung der Biegssteifigkeit eintritt.

Hierbei handelt es sich somit um eine selbsttätige Entlastung der hochbeanspruchten Plattenstellen durch stärkere Formänderungen (vgl. Bild 7, 8, 15 und 17), also um ein *Weicherwerden*, wodurch die Biegemomente vor dem Bruch gleichmässiger über den Querschnitt verteilt werden. Derartige Aufgaben der sogen. *Plastizitätslehre*¹ lassen sich rechnerisch dadurch erfassen, dass in den durch Versuche gefundenen Darstellungen von Belastungen und Formänderungen die Abweichungen von der linearen Gesetzmässigkeit berücksichtigt werden.

IV. Die Kennziffern zur Beurteilung der Ergebnisse von Versuchen mit Eisenbetonplatten.

Um aus der Fülle der Zahlen einen klaren Ueberblick über die Ergebnisse von Versuchen mit Eisenbetonplatten zu erhalten, empfiehlt es sich, eine Reihe von Kennziffern aufzustellen.

1. Als *Kennziffer ν_R für die Rissicherheit* diene das Verhältnis der Risslast q'_R zur zulässigen Belastung q'_{zul} , die vielfach auch Gebrauchslast genannt wird. Somit

$$\nu_R = \frac{q'_R}{q'_{zul}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (16)$$

sowie entsprechend die Bruchsicherheit

$$\nu_B = \frac{q'_B}{q'_{zul}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (17)$$

2. Die *Riss-Bruch-Kennziffer α* soll das Verhältnis der Risslast zur Bruchlast in Prozenten bezeichnen, also

$$\alpha = \frac{q'_R}{q'_B} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (18)$$

3. Die *Kennziffer β der Betonzugspannung* quadratischer Platten wird aus der Gesamt-Risslast Q_R und dem Widerstandsmoment des homogenen Eisenbetonquerschnittes längs der Diagonale im Stadium I ermittelt, für das als

erste Annäherung $W = \frac{l\sqrt{2}d^2}{6}$ gesetzt werden kann. Da der Unterschied

zwischen verschieden starker Eisenbewehrung im Stadium I stark zurücktritt, soll er hier zunächst unberücksichtigt bleiben. Für das statisch bestimmte Biegemoment in Bezug auf den Diagonalschnitt ergibt sich bei gleichmässig

1. S. W. GEHLER. Bericht über Festigkeit, Elastizität und Schwinden von Eisenbeton, II. Internat. Materialprüfungskongress in Zürich, 1931, S. 10. Ein weiterer Aufschluss ist durch die Betrachtung der Formänderungsarbeit zu erwarten in ähnlicher Weise wie bei der Spannungs-Dehnungs-Linie für Baustahl, wo im plastischen Bereich einer Vergrösserung des Weges eine Verminderung des Spannungszuwachses entspricht. (Vgl. W. GEHLER, Sicherheitsgrad und Beanspruchung, Bericht über die II. Internat. Tagung für Brückenbau und Hochbau in Wien, 1928, S. 244 ff. (Jul. Springer, Wien).

verteilter Belastung (nach Gl. 8) $M_D = \frac{1}{24} Q_R \cdot l \sqrt{2}$, sodass man für die nur als vergleichende Kennziffer dienende mittlere Betonzugsspannung erhält:

$$\beta = \frac{M_D}{W} = \frac{1}{4} \frac{Q_R}{d^2} = rd \cdot \sigma_{bz} \dots \dots \dots \quad (19)$$

Da das Biegemoment sich nicht gleichmäßig über den Diagonalschnitt verteilt, ist diese Kennziffer nur als ein Mittelwert der Betonzugsspannung anzusehen.

4. Die Kennziffer γ der Eisenspannung im Diagonalschnitt quadratischer Platten kann in gleicher Weise angenähert wie folgt errechnet werden. Bezeichnet $(Fe_x + Fe_y)$ die Summe aller Eisenquerschnitte an der Plattenunterseite in der X- und Y-Richtung und $z = 0,89 h$ den Hebelarm der inneren Kräfte, so ist das Moment der inneren Kräfte, wenn bei der quadratischen Platte $\varphi = 45^\circ$ den Winkel der Eiseneinlagen mit der Diagonale bedeutet

$$M_i = [(Fe_x + Fe_y) \cdot \cos \varphi \cdot \sigma_e] \cdot 0,89 h.$$

Damit man erhält aus $M_i = M_D = \frac{1}{24} \cdot Q_B \cdot l \sqrt{2}$ und für $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\gamma = rd \cdot \sigma_e = \frac{1}{10,7} \cdot \frac{Q_B \cdot l}{(Fe_x + Fe_y) \cdot h} \dots \dots \dots \quad (20)$$

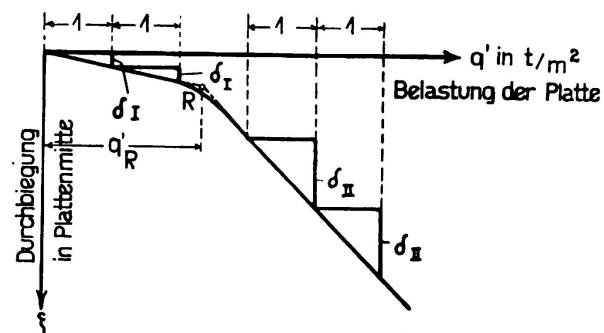
Da sich das Biegemoment in Wirklichkeit nicht gleichmäßig über den Diagonalschnitt verteilen wird und auch die üblichen Annahmen über die Grösse des Hebelarmes der inneren Kräfte $z = 0,89 h$ für den Bruchzustand der durch Zug beschädigten Platte nicht genau zuzutreffen brauchen, ist diese Kennziffer nur als rohe Annäherung für den Mittelwert der Eisenspannungen anzusehen.

Fig. 7.

Die Kennziffer für die Durchbiegung.
Coefficient caractéristique pour la flexion.
Characteristic for Bending.

Belastung der Platte = Charge de la dalle = Load on the Plate.

Durchbiegung in Plattenmitte = Flexion au centre de la dalle = Deflection in the Centre of the Plate.



5. Die Kennziffer ζ für die Durchbiegung (Bild 7). Die Last-Durchbiegungs-Linie setzt sich nach den Messungen sowohl der Stuttgarter, als auch der Dresdener Versuche stets aus zwei Geraden zusammen (s. auch Bild 18). Daher liegt es nahe, mit ζ_I bzw. mit ζ_{II} den Zuwachs der Durchbiegung im Stadium I bzw. Stadium II bei einer Laststeigerung von $\Delta q' = 1 \text{ t/m}^2$ als eine Kennziffer der Steifigkeit oder Weichheit der Platte einzuführen. Der Knickpunkt R dieser Linie entspricht der Risslast q'_R . Die Winkel der beiden Geraden gegen die ζ -Achse sind proportional der sogen. Steifigkeitsziffer EJ , da hier $Q = q' \cdot l^2$ und $\zeta = C \cdot \frac{Q l^3}{E J}$, also $EJ = \frac{q'}{\zeta} \cdot \text{const. ist.}^1$.

1. S. Fussnote 1, S. 188.

6. Die Kennziffer für die Eisenspannungen in Plattenmitte (Bild 8). Die gemessenen Eisendehnungen ergeben auf Grund der Dresdener Versuche nach Bild 18 ähnliche Linien, aus denen sich als eine Kennziffer ϵ_I bzw. ϵ_{II} der Zuwachs der Eisenspannung in Plattenmitte für eine Laststeigerung von $\Delta q' = 1 \text{ t/m}^2$ im Stadium I bzw. Stadium II angeben lässt.

7. Kennziffer für die Hauptspannungsmomente auf Grund der Versuche mit Vergleichsplattenstreifen. Sowohl bei den Versuchen in Stuttgart, als auch bei den Dresden Versuchen wurden zu den einzelnen Plattenreihen besondere, 50 cm breite Plattenstreifen hergestellt, die aus der Mitte der Platte in

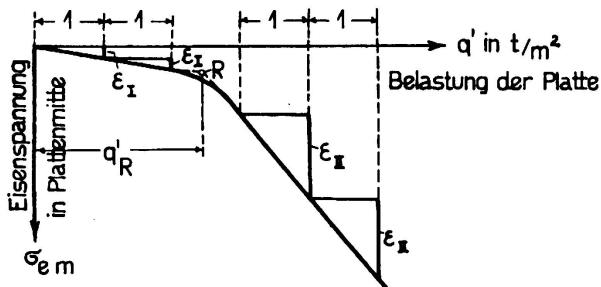


Fig. 8.

Die Kennziffer für die Eisenspannung.
Coefficient caractéristique pour la tension dans le fer.
Characteristic for Stress in Iron.
Belastung der Platte = Charge de la dalle = Load on the Plate.
Eisenspannung in Plattenmitte = Tension des fers au milieu de la dalle = Stress of Reinforcement in the Centre of the Plate.

Richtung der unteren Eiseneinlagen herausgeschnitten gedacht sind. Die Streifen bestehen aus den gleichen Baustoffen wie die Platten und wurden in gleicher Weise wie diese belastet und als einfache Balken auf zwei Stützen bis zum Bruch geprüft.

Stellt man der Bruchlast $q_{B(PI)}$, die für die Platte gefunden wurde, die Bruchlast $q_{B(Str)}$ gegenüber, die sich für den Plattenstreifen gleichen Querschnittes ergibt, so erhält man einen Vergleichswert, der angibt, um wieviel infolge des zweiachsigen Spannungszustandes der 0,5 m breite Streifen in der Platte mehr trägt, als der Plattenstreifen der Vergleichsversuches. Da das Biegemoment des statisch bestimmten Plattenstreifens $M_{B(Str)} = \frac{q_{B(Str)} \cdot l^2}{8}$ und das der Platte $M_{B(PI)} = \frac{q_{B(PI)} \cdot l^2}{x}$ ist, so ergibt sich durch Gleichsetzung beider Werte die Kennziffer

$$\chi = \frac{1}{x} = \frac{M_{B(Str)}}{q_{B(PI)} \cdot l^2} \dots \dots \dots \quad (21)$$

V. Die Stuttgarter Plattenversuche.

In Heft 30 und 56 der Veröffentlichungen des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton in den Jahren 1915 und 1926 wird von C. BACH und O. GRAF über die Stuttgarter Versuche berichtet, die an 42 quadratischen Platten von 2 m Seitenlänge, sowie an 11 rechteckigen Platten von $(2 \times 3) \text{ m}^2$ und $(2 \times 4) \text{ m}^2$ und endlich an 3 über 2 quadratische Felder durchlaufenden Platten durchgeführt worden sind. Sämtliche Platten waren *alseitig frei aufgelagert, wobei die Ecken nicht festgehalten wurden*. Eine Auswertung dieser Versuche findet sich in E. MÖRSCH, Der Eisenbetonbau, 6. Aufl., Stuttgart, 1929, 1. Band., 2. Hälfte, S. 403 bis 442, die im folgenden durch den Vergleich mit den Dresden Plattenversuchen noch ergänzt werden möge.

Uebersicht I. — Tableau I.

**Abmessungen der quadratischen Platten bei den Stuttgarter Versuchen.
Dimensions des dalles carrées utilisées pour les essais effectués à Stuttgart.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
Mörsch ¹		Graf ²		Dicke Épaisseur <i>d</i>	Stützweite Distance entre appuis <i>l</i>	mittlere Nutzhöhe Hauteur utilisable moyenne <i>h</i>	$\frac{l}{h}$	Gesamtbewehrung der Unterseite Armature inférieure totale ($\Sigma F_{ex} + \Sigma F_{ey}$)		Bewehrungsdichte in Mitte für einen 50 cm breiten Streifen. Armature au centre pour une bande large de 50 cm.		σ_s	
Reihe Série	Fig.	Fig.	Platte Dalle Nr.	Nr.	cm	cm	—	\varnothing	$= f$	cm ²	$\varnothing = $	cm ²	t/cm ²
Nr.	Nr.	Nr.	Nr.										
1	884	1	825 826 827 819	12	200	10,3	19,41	42 Ø 7 =	16,17	10 Ø 7 =	3,85	4,08	
2	—	4	822 824 831	8	200	6,3	31,75	42 Ø 7 =	16,17	10 Ø 7 =	3,85	4,08	
3	—	5	837 840 828	12	200	10,3	19,41	21 + 23 = 44 Ø 7 =	16,94	10,4 Ø 7 =	4,00	4,08	
4	—	6	830 841 816	8	200	6,3	31,75	21 + 24 = 45 Ø 7 =	17,17	10,7 Ø 7 =	4,12	4,08	
5	889	7	847 842	12	200	10,3	19,41	18 + 19 = 37 Ø 7 =	14,19	10,4 Ø 7 =	4,00	4,08	
6	—	8	843	8	200	6,3	31,75	18 + 19 = 37 Ø 7 =	14,19	10,7 Ø 7 =	4,12	4,08	
										i.M.		4,08	
7 ³	890	9	853 858 859 848	12	200	10,3	19,41	39,6 Ø 7 =	15,19	10,4 Ø 7 =	4,00	4,45	
8 ³	890	10	849 850	8	200	6,3	31,75	41 Ø 7 =	15,78	10,7 Ø 7 =	4,12	4,45	
9	891	11	884 892 899 924	12	200	10,3	19,41	21 + 23 = 44 Ø 10 =	16,94	10,6 Ø 10 =	8,31	3,49	
10	896	14	946 951	8	200	6,3	31,75	34 + 40 = 74 Ø 10 =	28,44	18,4 Ø 10 =	7,08	3,49	

1. Mörsch, Handbuch für Eisenbetonbau (Konrad Wittwer, Stuttgart, 1929, I. Bd., 2. Hälfte, S. 403 bis 442).

2. Deutscher Ausschuss für Eisenbeton (W. Ernst und Sohn, Berlin 1915, Heft 30, S. 2).

3. Bei den Reihen 7 und 8 lagen die Eisen parallel zu den Diagonalen, bei allen anderen parallel zu den Seiten.

L'armature des séries 7 et 8 fut placée parallèlement aux diagonales, celle des autres séries parallèlement aux bords.

Uebersicht II. — Tableau II.
Kennziffern für die Stuttgarter Versuchsergebnisse.
Coefficients caractéristiques résultant des essais effectués à Stuttgart.

1 Versuchs-Reihe Série d'essais	2 Risslast Charge de fissures	3 Bruchlast Charge de rupture	4 Riss-Bruch-Kennziffer Coeff. caract. pour fissure-rupture	5 6		7 Kennziffer der Eisenspannung Coeff. caract. pour la tension dans l'armature	8	9 10		11 Kennziffer des Mittenmomentes Coeff. caract. du moment du milieu			
				Kennziffer der Betonzugspannung Coeff. caract. pour la tension dans le béton				Kennziffer der Durchbiegungen Coeff. caract. pour les flexions					
				$\alpha = \frac{q_R}{q_B}$	$\beta = \frac{1}{4} \frac{Q_R}{d^2} = \sim \sigma_{bx}$ $d = 12 \text{ cm}$			ζ_I Stad. I	δ_{II} Stad. II				
—	kg	kg	%	kg/cm²	kg/cm²	kg/cm²	—	mm	mm	—			
1	14782	41615	35,5	25,7		4680	1,146	0,22	2,96	$0,0463 = \frac{1}{21,6}$			
2	8360	26377	31,7		32,7	4840	1,185	0,58	7,37	$0,0431 = \frac{1}{23,2}$			
3	13938	43438	32,1	24,2		4670	1,143	0,20	2,62	$0,0465 = \frac{1}{21,5}$			
4	7690	27024	28,5		30,0	4680	1,148	0,62	6,43	$0,0439 = \frac{1}{22,8}$			
5	12764	38764	32,9	22,2		4960	1,213	0,21	3,14	$(0,0521 = \frac{1}{19,2})^4$			
6	7104	24854	28,7		27,8	5210	1,275	0,63	7,21	$(0,0481 = \frac{1}{20,8})^4$			
			i. M. 31,6			i. M. 4840	1,185						
7	11951	42617	28,1	20,8		5100	1,147	0,20	2,19	$0,0472 = \frac{1}{21,2}$			
8	6806	27335	25,0		26,8	4180	—	0,64	4,67	$0,0435 = \frac{1}{23,0}$			
			i. M. 26,5			i. M. 5140							
9	15274	57941	26,4	26,5		6220	1,781	0,22	1,38	$0,0510 = \frac{1}{19,6}$			
10	6919	43919	15,8		27,0	4590	1,317	—	—	$0,0467 = \frac{1}{21,4}$			
			i. M. 21,1	23,9	28,9				i. M.	$0,0460 = \frac{1}{21,73}$			

1. Wurden bei der Mittelbildung ausgeschlossen, weil die Randstreifen schwächer als die Mittelstreifen bewehrt waren.

En calculant les valeurs moyennes, on n'a pas tenu compte de ces chiffres, parce qu'au bord de ces dalles leur armature était moins serrée que dans le centre.

A. Quadratische Platten.

Für die *quadratischen Platten* sind die Abmessungen und Versuchsergebnisse der 10 Reihen in Uebersicht I zusammengestellt. An Stelle der gleichmässig verteilt angenommenen Belastung wurden die Versuchskörper in Wirklichkeit durch 16 gleichmässig über die Platte verteilte Einzellasten beansprucht (Bild 9 a).

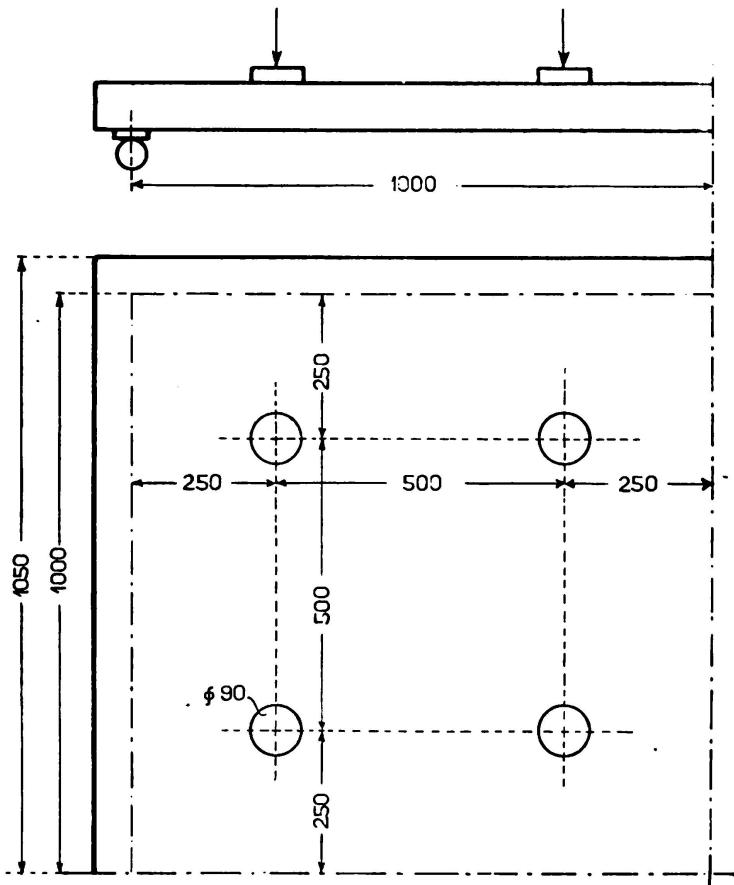


Fig. 9 a.

Anordnung der Belastungsstellen (Stuttgart).
Disposition des points de charge (Stuttgart).
Arrangement of the Loading Positions (Stuttgart).

Die Uebersicht II enthält die Kennziffern dieser Stuttgarter Versuchsergebnisse. Da diese Platten nicht für eine bestimmte Gebrauchslast bemessen worden sind, kann der Wert q'_{zul} und damit die Kennziffer ν_r und ν_b (Gl. 16 und 17) nicht angegeben werden. Das Gleiche gilt für die Kennziffer ε_1 und ε_{11} (Zuwachs der Eisenspannungen, s. Bild 8), weil die Eisendehnungen nicht unmittelbar gemessen wurden.

Die für die Nutzanwendung wesentlichsten Ergebnisse der Stuttgarter Versuche sind folgende :

1. Der Verlauf der Riss- und Brucherscheinung. Die ersten Betonzugrisse traten an der Unterfläche im mittleren Teil der Platten auf und zwar entweder parallel zu den Seiten oder in den Diagonalen, sodann folgten in den übrigen Teilen die Diagonalrisse an der Unterfläche. Als « Klaffen » der Risse

wurde eine Risserweiterung von etwa 1 mm Stärke bezeichnet und als Kennzeichen dafür angenommen, dass die Streckgrenze der Eisen erreicht war. Das erste Klaffen der Risse trat ebenfalls im mittleren Teil der Platten-Unterfläche auf und zwar in der Regel parallel zu den Seiten, in den übrigen Plattenteilen aber wiederum in der Richtung der Diagonalen. Obwohl die Ecken nicht festgehalten wurden, waren dennoch an der Platten-Oberfläche in der Nähe der

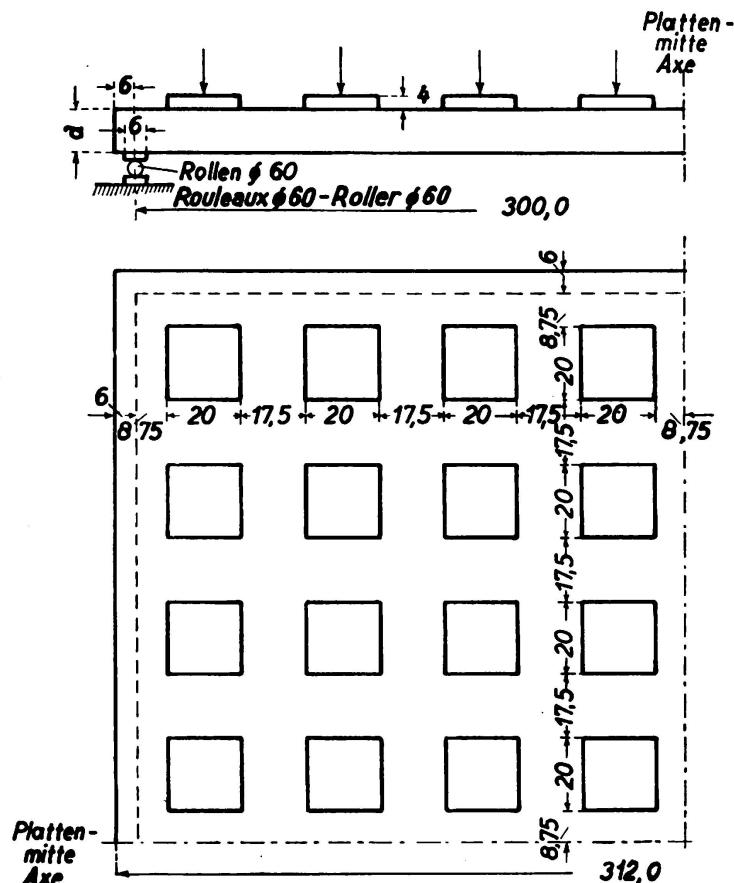


Fig. 9 b.
Anordnung der Belastungsstellen (Dresden).
Disposition des points de charge (Dresde).
Arrangement of the Loading Positions (Dresden).

Ecken Zugrisse rechtwinklig zu den Diagonalen festzustellen und später Druckzerstörungen an der Platten-Oberfläche über den Hauptzugrissen an der Unterseite längs der Diagonalen. Die Rissbilder sind ganz ähnlich denen der Dresdener Versuche (s. Bild 15).

2. Das Kräftespiel lässt sich durch die Unterteilung in drei verschiedenartige Tragelemente der Platte erläutern (s. Bild 10). Die ersten Risse treten in der Mitte des Trägerkreuzes abcd an der Unterfläche auf. Hier wird auch die Streckgrenze der Eisen zuerst überwunden. Die Eckbalken ef lassen an der Unterfläche die Diagonalrisse erkennen und zum Schluss an der Oberfläche die Druckzerstörung des Betons. Da bei den Stuttgarter Versuchen die Ecken nicht festgehalten wurden, kommt die Wirkung der Konsolträger gh nur zum Teil dadurch zur Geltung, dass sie mit den Eckbalken ef jeweils ein steifes, räum-

liches Gebilde ergeben, wodurch die freie Durchbiegung, wie sie bei einer kreisförmigen Platte eintreten könnte, störend beeinflusst wird. Dieser innere Zwang ist durch die Eckrisse an der Plattenoberfläche in der Richtung e deutlich zu erkennen.

3. Die Eiseneinlagen in Plattenmitte, die zur Bewehrung des Trägerkreuzes $abcd$ dienen, sind, wie die Kennziffern γ zeigen (Uebersicht II, Spalte 7), für die Tragfähigkeit der Platten und das Auftreten der ersten Risse von ausschlaggebender Bedeutung. Ausserdem aber zeigt ein Vergleich der Platten 3 und 5 von der gleichen Dicke und der gleichen Bewehrungsdichte in Plattenmitte (Uebersicht I, Spalte 5 und 11), dass die Gesamtbewehrung an der Unterseite (Uebersicht I, 9) massgebend für die Tragfähigkeit ist. Die Verminderung der Gesamtbewehrung bei Platte 5 gegenüber Platte 3 um 17 % führt zu einer Verminderung der Bruchlast um 11 % (Uebersicht II, 3). Hieraus ergibt sich, dass für die Tragfähigkeit der Platte nicht allein die Bewehrung des Trägerkreuzes $abcd$ massgebend ist, sondern auch die der Randstreifen, dass also die Drillungssteifigkeit der Platte sich auch dann auswirkt, wenn die Ecken nicht festgehalten werden.

Es empfiehlt sich daher im allgemeinen, die Bewehrung an der Platten-Unterseite in gleicher Dichte wie in Plattenmitte durchzuführen, also die Randstreifen nicht schwächer zu bewehren.

4. Die diagonal bewehrten Platten (Reihe 7 bzw. 8) ergeben hinsichtlich der Bruchlast (Uebers. II, 3) keine Unterschiede im Vergleich mit den entsprechenden seitenparallel bewehrten Platten (z. B. Reihe 3 bzw. 4).

5. Die Riss-Bruch-Kennziffer α (Uebers. II, 4) lässt erkennen, dass bei den seitenparallel bewehrten Platten die Risse in der Betonzugzone i. M. bei 32 % der Bruchlast eintreten (Reihe 1 bis 6), dagegen bei den sehr stark bewehrten Reihen 9 und 10 infolge der Schwächung des Betonzuggurtes i. M. bereits bei 21 % der Bruchlast.

6. Die Kennziffer β der Betonzugspannung, die unter Annahme eines über die Diagonale gleichmäßig verteilten Momentes gerechnet wurde, schwankt zwischen 21 und 33 kg/cm², entspricht also den bekannten üblichen Werten der Betonzugfestigkeit (Uebers. II, 5 u. 6.).

7. Die Kennziffer γ der Eisenspannung (Uebers. II, 7), die unter der gleichen Annahme wie β hinsichtlich der Verteilung des Diagonalmomentes ermittelt wurde und die durch die Rissbildung vor dem Bruchzustand naturgemäß stark beeinflusst ist, schwankt zwischen 4.200 und 6.200 kg/cm². Errechnet man hieraus das Verhältnis dieser Ziffer zur jeweiligen Streckgrenze der Eiseneinlagen, also den sogen. Plastizitätsfaktor¹, so schwanken diese Werte

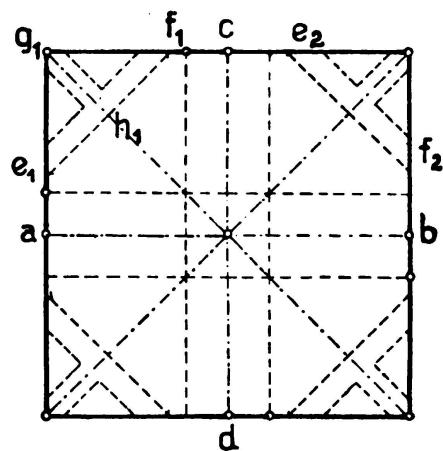


Fig. 10.

Die 3 Tragelemente der Platten.
Les trois éléments portants de la dalle.

The three Supporting Elements
of the Plate.

1. S. Fussnote 196, a. a. O. S. 12.

von 1, 14 bis 1, 78. Sie sind bekanntlich sehr stark von der Art der Brucherscheinung und den örtlichen Verhältnissen abhängig.

8. Die Kennziffer δ der Durchbiegung (Uebers. II, 9 u. 10) zeigt, dass bei den Reihen 1 bis 6 (s. Bild 7) der Zuwachs der Durchbiegung für 1 t/m² Laststeigerung im Stadium I nur 1/10 bis 1/15 von dem im Stadium II ist. Hieraus erkennt man den Vorzug geringerer Durchbiegung unter der Gebrauchslast bei den Platten gegenüber den einachsig beanspruchten Balken.

9. Die Kennziffer des Mittenträgertes, die aus den Vergleichsversuchen mit Plattenstreifen errechnet wurde, führt zu dem Mittelwert $M = \frac{1}{21,7} ql^2$ für die hier untersuchten quadratischen Platten mit nicht festgehaltenen Ecken bei gleichmäßig verteilter Belastung. Auch dieser für die Nutzanwendung bedeutsamste Wert lässt erkennen, dass gegenüber den Rechnungsverfahren des Trägerrostes mit $M_m = \frac{1}{13,7} ql^2$ (Gl. 2) und des Trägerkreuzes $M_m = \frac{1}{16} ql^2$ (Gl. 4) bei den kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten selbst bei nicht festgehaltenen Ecken die Drillungssteifigkeit oder die Verminderung der Biegssteifigkeit, das Weicherwerden, im Stadium II (s. unter III, 2) in günstigem Sinne mitwirkt.

B. Die Stuttgarter Versuche mit rechteckigen Platten.

Bei diesen Versuchen wurde der Einfluss der Länglichkeit auf die Plattenwirkung und der Einfluss des Verhältnisses der Längs- und Querbewehrung auf die Bruchlast untersucht. Hierbei hat sich folgendes ergeben:

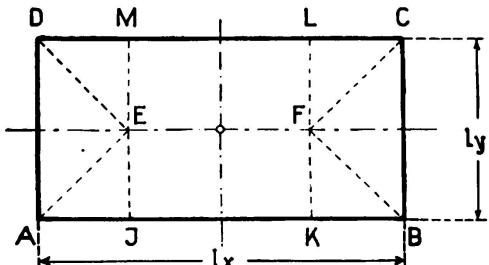


Fig. 11.
Rechteckige Platten.
Plaques rectangulaires.
Rectangular Plates.

1. Die ersten Risse traten an den Schnittpunkten E und F der Winkelhalbierenden (Bild 11) auf. Die Risserscheinung dieser rechteckigen Platten lässt deutlich erkennen, dass sich die «Plattenwirkung» nur im Bereich ADMJ bzw. CBKL ausprägt. In dem restlichen Teilbereiche JKLM wirkt die Platte dagegen als Balken auf zwei Stützen.

2. Die Ergebnisse der Versuche von Heft 56 mit 2 × 4 m weitgespannten Platten, bei denen der Einfluss der Längs- und Querbewehrung untersucht wurde, sind in nebenstehender Tabelle aufgeführt.

Die Platten d und e zeigen hiernach die beste Ausnutzung des Eisens. Nach den deutschen Bestimmungen verhalten sich die Mittenträgerteile M_x und M_y wie $l_y^2 : l_x^2$. Die Platte c, bei der $f_{ey} : f_{ex} = 1 : 4$ ist, würde somit diesen Bestimmungen entsprechen.

Aus dem Vergleich der Bruchlasten der Platten mit denen der entsprechenden Plattenstreifen ergibt sich in gleicher Weise wie für die quadratischen Platten ein Wert für das Mittenträgert, der auch bei den Platten d und e mit fehlenden Längseisen noch $M_x = \frac{ql^2}{10}$ gegenüber $\frac{ql^2}{8}$ für den Plattenstreifen be-

Platte	Bewehrungsdichte		Eisengewicht G_e	Höchstlast P_m	Wirkungsgrad $P_m : G_e$
	f_{ex} $l = 2,0 \text{ m}$	f_{ey} $l = 4,0 \text{ m}$			
	cm ² /m		kg	kg	—
a	f_e	f_e	55,7	35000	628
b	f_e	$f_e/2$	42,7	31000	726
c	f_e	$f_e/4$	36,5	29000	794
d	f_e	o	33,2	28000	870
e	1,82/ f_e	o	57,8	48000	830

trug. Diese Versuche zeigen also, dass auch die nur einachsig bewehrte Platte ihre Tragfähigkeit gegenüber dem Plattenstreifen erhöht, sei es infolge einer, wenn auch nur geringen Drillungssteifigkeit oder sei es infolge der Verringerung der Biegsungssteifigkeit, also durch das Weicherwerden im Stadium II, das sich bei der ringsum aufliegenden Platte stärker als beim Plattenstreifen auswirkt (vgl. unter III, 2).

VI. Die Dresdner Plattenversuche.

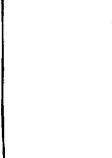
In den Jahren 1927 bis 1930 wurden im Versuchs- und Materialprüfungsamt an der Techn. Hochschule Dresden vom Deutschen Ausschuss für Eisenbeton insgesamt 22 quadratische Eisenbetonplatten von 3 m Stützweite und 4 Platten von 2 m Stützweite bis zum Bruch belastet. Ausserdem wurden zu den Reihen 1 bis 4 und 6, 8 und 9 noch 50 cm breite Vergleichs-Plattenstreifen hergestellt, die aus der Mitte der Platte herausgeschnitten gedacht sind und als Balken auf zwei Stützen ebenfalls bis zum Bruch belastet wurden (s. Uebersicht III)¹.

Gegenüber den Stuttgarter Versuchen wurden bei den Dresdner Versuchen folgende Erweiterungen vorgenommen. Sämtliche Platten mit Ausnahme der Reihen 8 und 9, die den Anschluss an die Stuttgarter Versuche bilden, wurden jeweils nach einem bestimmten Rechnungsverfahren (s. Spalte 4 der Uebersicht III) für die in Spalte 8 angegebenen Gebrauchslasten bemessen und auch entsprechend bewehrt (s. z. B. Bild 12). Um den baumässigen Abmessungen möglichst nahe zu kommen, wurde als Stützweite der Platte 3 m gewählt mit Ausnahme der Anschlussreihen 8 und 9, die wie alle Stuttgarter Platten 2 m Stützweite aufweisen. Bei der gewählten Versuchsanordnung konnte die Zahl der Belastungsstellen bei den 3 m-Platten auf 64 erhöht werden, um die Last möglichst gleichmässig zu verteilen (s. Bild 9^b im Vergleich zu 9^a). Endlich wurden die Eisendehnungen unmittelbar gemessen.

1. Ueber diese Versuche wird in einem Heft des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton (Berlin, Wilh. Ernst und Sohn) 1932 ein ausführlicher Bericht von W. GEHLER, H. AMOS und M. BERGSTÄSSER erstattet werden.

Übersicht III. — Tableau III.

Grundlagen der Dresdner Versuche mit kreuzweise bewehrten Platten.
Données des essais effectués à Dresde avec des dalles à armature croisée.

Versuchs-Gruppe Groupe d'essais		1 2	3	4	5	6	7	8 9 10	11	12	13 14	15	16	17	18			
Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Bezeichnung Signe	Kennzeichen Caractéristiques	Skizze Croquis	Lagerung der Platten Appuis des dalles	Eigenlast Poids propre g	Gebrauchslast Surcharge p	Gesamtlast Charge totale q	Mittenträgheitsmoment Moment du milieu $\frac{qI^2}{x}$	Dicke Epaisseur d	Mittl. Nutzhöhe Hauteur utilisable moyenne h	Gesamtbewehrung Armature inférieure totale $\Sigma Fe_x + \Sigma Fe_y$	Eisengewicht Poids de l'armature totale ; inférieure ; supérieure	Streckgrenze des Eisens Limite d'écoulement du fer σ_s	Würffelfestigkeit Résistance des cubes en béton W_{180}	Biegezugfestigkeit Résistance du béton à la tension due à des moments fléchissants σ_b
I	1	691 695	bemessen nach Trägerrost Déterminé d'après la méthode des poutres croisées $d = 12 \text{ cm}$		Allseitig auf Rollen mit Festhalten der Ecken Rouleaux de chaque côté, avec fixation des angles	288	750	1.038	16	12	10,3	62 Ø 7,2	25,2	64,5 64,5	3.250	205	27,2	
	2	692 696	Drillungsschliff bewehrt Armé contre la torsion $d = 10 \text{ cm}$			240	750	990	27,2	10	8,3	62 Ø 7,2	25,2	15,4 58,4 73,8	3.250	226	32,0	
	2 _a	699 700	wie 2, doch verlängerte Haftlänge Analogue à 2, mais long. d'adhérence augmentée			240	750	990	27,2	10	8,3	62 Ø 7,2	25,2	18,8 58,4 77,2	3.250	218	—	
	3	693 697	$d = 12 \text{ cm}$			288	750	1.038	27,2	12	10,3	54 Ø 7,2	21,9	13,7 49,6 63,3	3.250	226	30,2	
	4	694 698	$d = 12 \text{ cm}$ $f_{e4} = f_{e1}$ wie R. 3, doch Ø 8			288	750	1.038	27,2	12	10,2	54 Ø 8,2	28,6	18,1 64,9 83,0	3.420	220	45,0	
	6	703 704	Wie Reihe 1 Comme Série 1			288	750	1.038	16	12	10,3	62 Ø 7,2	25,2	64,5 64,5	3.250	294	33,0	

I	8	715 716	Vergleichsversuch Stuttgart-Dresden Essai de comparaison pour Stuttgart-Dresde (Heft 30, Abb. 7)		Allseitig auf Rollen Rouleaux de chaque côté	288	—	—	—	12	10,3	37 Ø 7,2	15,0	<u>25,4</u> 25,4	3.400	244	—
	9	723 724	Bewehrung aus punktgeschweißtem Stahldrahtgewebe Armature : Tissu soudé en acier		Allseitig auf Rollen Rouleaux de chaque côté	192	—	—	—	8	6,5	42 Ø 5	8,23	<u>13,3</u> 13,3	5.600	246	—
	5	701 702	Berechnet mit Drillung, als freiaufliegende Platte Calculé comme dalle non encastrée, en tenant compte de la torsion		Mit Randbalken, die i.d. Ecken punktförmig gelagert sind. Avec poutres de retombée, reposant aux angles sur appuis pointus	240	750	990	27,2	10	8,3	50 Ø 7,2	22,8	—	3.250	234	45,9
II	7	705 706	Berechnet mit Drillung, als eingespannte Platte Calculé comme dalle encastrée, en tenant compte de la torsion		Mit Randbalken auf Säulen (Rahmen) starr eingespannt Avec poutres de retombée sur piliers, formant cadre avec eux	240	1.260	1.500	56,0 (20,7)	10	8,3	36 Ø 7,2	14,6	—	3.400	265	33,0
	E1	709 710	Quadratisch Carré (1:1)		An 4 Ecken auf Halbkugeln Aux quatre angles sur des hémisphères	360	500	860	8	15	13,0	56 Ø 10,2	45,7	—	3.200	280	47,9
III	E2	711 712	Rechteckig Rectangulaire 1:2		An 4 Ecken auf Halbkugeln Aux quatre angles sur des hémisphères	360	500	860	8	15	13,5	14 Ø 10,2 +(16 Ø 10,2 + 20 Ø 6,2)	30,5	—	3.200	273	—
	E3	713 714	Rechteckig Rectangulaire 1:2		An den kurzen Seiten auf Rollen Sur rouleaux aux bords courts	300	500	860	8	15	13,5	14 Ø 10,2 +19 Ø 6,2	17,2	—	3.200	270	i.M 35,2
IV	zu 1,6 2,3,4	A,B,C 730 bis 735	Plattenstreifen Bande de la dalle (3 m)		Als Balken (gleichmäßig verteilte Belastung) Comme poutre (charge uniformément répartie).												Zu den Reihen: 1, 6, 2, 3, 4, 8 und 9 wurden Plattenstreifen hergestellt, welche aus den zugehörigen Platten in Plattenmitte in der Richtung der unteren Eiseneinlagen herausgeschnitten gedacht sind.
	zu 8,9	719 720 725 726	Plattenstreifen Bande de la dalle (2 m)		Als Balken (2 Einzellasten) Comme poutre (2 charges concentrées)												Pour les séries 1, 6, 2, 3, 4, 8 et 9 on a exécuté des poutres conformes à une tranche de la dalle, qui passe par le milieu de celle-ci dans la direction de l'armature inférieure.

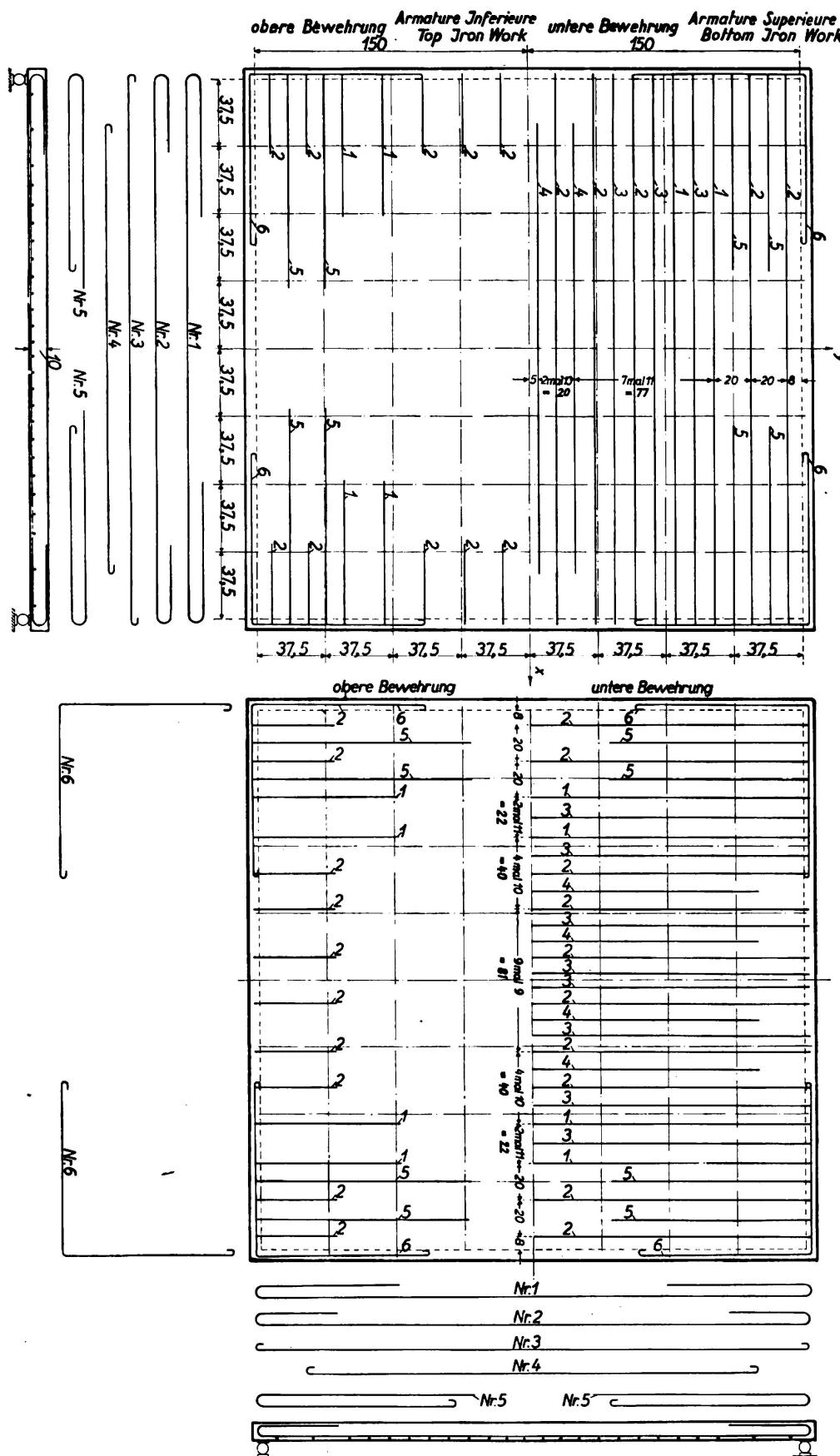


Fig. 12. — Bewehrungsplan der Dresdener Platten 699 und 700, Versuchsreihe 2 a.
(Drillungssteif bewehrte Platten mit Festhalten der Ecken belastet.)

Plan de l'armature des dalles 699 et 700 de Dresde, Série 2 a. (Dalles armées contre la torsion et chargées avec fixation des angles.)

Reinforcement of the Dresden Plates 699 and 700, Serie 2 a. (Reinforced against Twisting and charged with the Corners fixed.)

A. Die allseitig auf Rollen gelagerten Platten der Reihen 1 bis 4, 6, 8 und 9.

Die Kennziffern für diese Dresdner Versuchsergebnisse sind in Uebersicht IV zusammengestellt.

1. Die Rissicherheit (Spalte 4) schwankt bei den Reihen 1 bis 4 und 6 von

$$\gamma_R = \frac{q'_R}{q'_{zul}} = 1,36 \text{ bis } 2,05 \text{ und ist i.M.} = 1,8 \dots \dots \quad (22)$$

In dieser nunmehr nachgewiesenen Ueberlegenheit der kreuzweise bewehr-

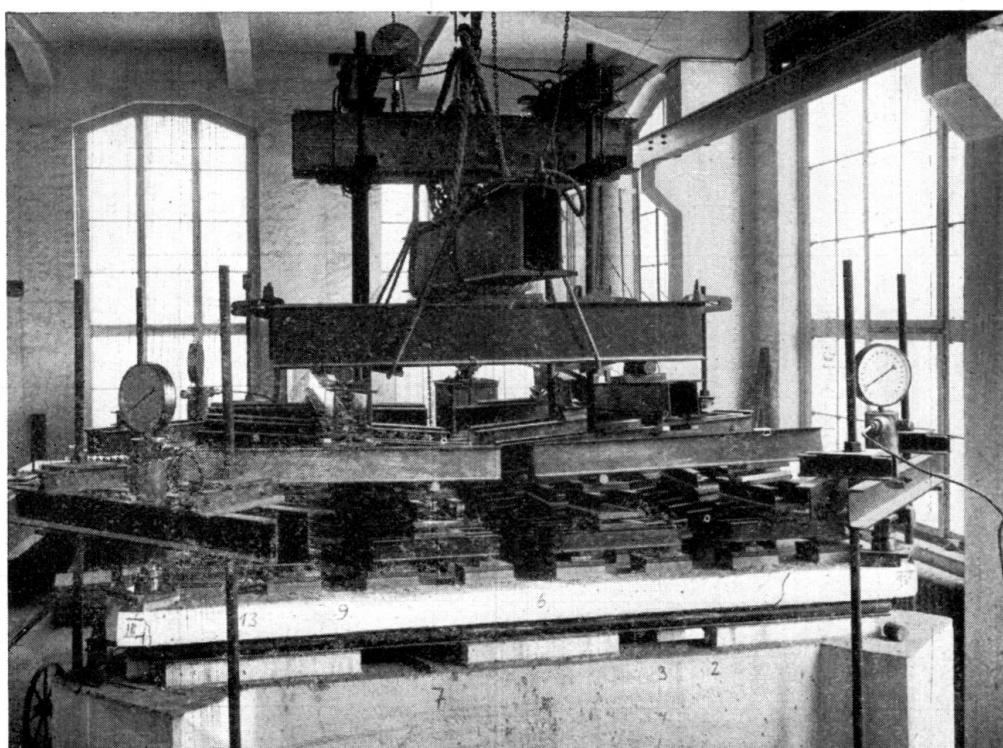


Fig. 13.

Versuchseinrichtung bei den Dresdener Plattenversuchen zur gleichmässigen Belastung der Platten und zum Festhalten der Ecken.

Dispositif d'essai de Dresde pour la répartition uniforme de la charge et la fixation des coins.

Arrangements for Testing the Dresden Plates with uniformly distributed Load and Fixation of the Corners.

ten Platten gegenüber den Eisenbetonbalken, bei denen bekanntlich $\gamma_R = \frac{\sigma_{er}}{\sigma_{ezul}} = \text{rd. } \frac{600}{1200} = 0,5$ ist, besteht das *erste hauptsächliche Ergebnis* dieser Dresdner Versuche (s. Bild 20).

2. Die Bruchsicherheit (Spalte 5) ergibt sich hier zu :

$$\gamma_B = \frac{q'_B}{q'_{zul}} = 4,24 \text{ bis } 5,75 \text{ und i.M.} = 4,9 \dots \dots \quad (23)$$

Uebersicht IV. — Tableau IV.

Kennziffern der Dresdner Versuchsergebnisse.

Coefficients caractéristiques résultant des essais effectués à Dresde.

Vers. Reihe Série	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	Risslast Charge de fissure	Bruchlast Charge de rupture	Riss-Sicherheit Sécurité contre fissures	Bruch-Sicherheit Sécurité contre rupture	Riss-Bruch-Kennziffer Coeff. caract. pour la fissure-rupture	Kennziffer der Beton- zugsspannung Coeff. caract. pour la tension dans le béton	Kennziffer der Eisenspannung Coeff. caract. pour la tension dans l'armature	Kennziffer der Durchbiegungen Coeff. caract. pour les flexions	Kennziffer der Zunahme der Eisenspannung Coeff. caract. pour l'augmen- tation de la tension de l'armature							
	Q _R	Q _B	v _R	v _B	α	β	γ	σ_a	δ_I	δ_{II}	ϵ_I	ϵ_{II}	$\alpha = \frac{l}{x}$	i.M.	Nach der Deutschen Eisenbeton- bestimmung ¹	
	kg	kg	—	—	%	kg/cm ²	kg/cm ²	—	mm	mm	kg/cm ²	kg/cm ²				
1	1992	5440	1,92	5,23	36,5	31,2	5100	1,63	1,16	10,8	63	2750	$0,0459 = \frac{1}{21,8}$	$\frac{1}{21,8}$	$\frac{1}{20}$	
2	1595	4240	1,61	4,29	37,6	36,0	5120	1,57	1,60	15,2	105	—	$0,0348 = \frac{1}{28,7}$			
2 _a	1340	4110	1,36	4,24	32,2	30,2	5060	1,56	1,80	16,4	126	3590	$0,0356 = \frac{1}{28,1}$	$\frac{1}{28,7}$	$\frac{1}{27,4}$	
3	1992	4750	1,92	4,57	42,0	31,2	5320	1,64	1,14	11,4	88	4760	$0,0342 = \frac{1}{29,4}$	$\frac{1}{28,7}$		
4	2080	5290	2,01	5,08	39,0	32,5	4510	1,33	1,14	8,6	63	2940	$0,0349 = \frac{1}{28,7}$			
6	2130	5975	2,05	5,75	35,7	33,3	5820	1,79	1,16	10,6	109	2600	$0,0420 = \frac{1}{23,8}$	$\frac{1}{23,8}$	$\frac{1}{20}$	
							i.M.	1,57			92	3300				
8	3205	8425	—	—	38,0	22,3	4070	1,20	0,56	2,8	59	1300	$0,0440 = \frac{1}{22,7}$	$\frac{1}{22,7}$	$\frac{1}{20}$	
9	1620	4850	—	—	33,4	25,3	6780	1,21	1,38	13,4	126	5030	$(0,0400 = \frac{1}{25})$	—	$\frac{1}{20}$	
	i.M.		1,8	4,9	37,0	30,2	4100									

1. D'après les prescriptions ministérielles allemandes pour le béton armé.

Sie ist also wesentlich höher als die sonst bei schwach bewehrten Eisenbetonbalken vorhandene 2,5 bis 3-fache Sicherheit¹.

3. Die Riss-Bruch-Kennziffer (Spalte 6) beträgt für die Reihen der Uebersicht

$$\alpha = \frac{q'_{\text{n}}}{q'_{\text{u}}} = 32,2 \text{ bis } 42,0 \% \text{ und i.M. } 37 \% \quad (24)$$

Sie kann somit in Uebereinstimmung mit den Stuttgarter Versuchen (s. unter V, 5) zu mindestens $\alpha = 1/3$ angenommen werden.

4. Die Kennziffer für die Betonzugspannung (Spalte 7) wurde hier unter der Annahme gleichmässiger Verteilung des Biegemomentes im Diagonalschnitt, somit als Durchschnittswert zu

$$\beta = \frac{1}{4} \frac{Q_{\text{n}}}{d^2} = 22,3 \text{ bis } 36,0 \text{ und i.M. } 30,2 \text{ kg/cm}^2 \quad (25)$$

gefunden. Sie entspricht in Uebereinstimmung mit den Stuttgarter Versuchen (s. unter V, 6) den üblichen Werten der Biegezugfestigkeit des Betons, die hier an Biegebalken von $45 \cdot 10 \cdot 10 \text{ cm}^3$ zu 27,2 bis 47,9 und i.M. zu $35,2 \text{ kg/cm}^2$ bestimmt wurde.

5. Der die Größenordnung der Eisenspannung beim Bruch kennzeichnende Wert (Spalte 8) berechnet sich zu

$$(26) \quad \gamma = \frac{1}{10,7} \cdot \frac{Q_{\text{b}} \cdot l}{(F_{\text{e}_x} + F_{\text{e}_y}) \cdot h} = 4100 \text{ bis } 5800 \text{ und i.M. } 4400 \text{ kg/cm}^2$$

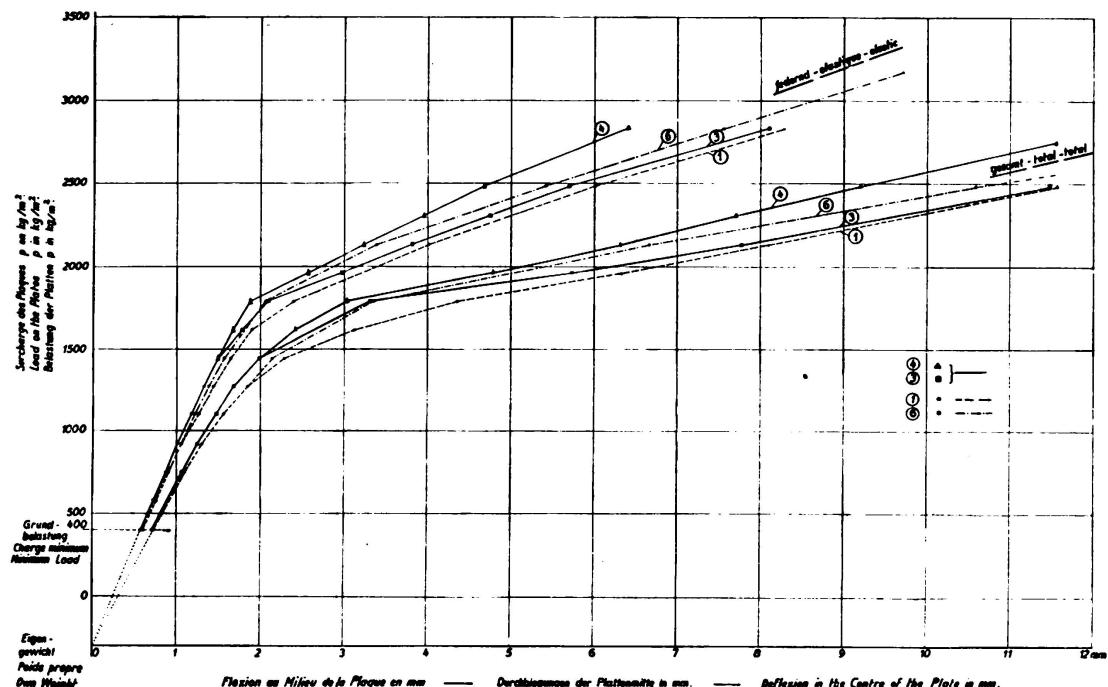


Fig. 14.

Durchbiegung der Dresdner Reihen 1, 3, 4, 6.
Flexions constatées aux séries de Dresde 1, 3, 4, 6.
Deflections of the Dresden Plates 1, 3, 4, 6.

1. S. Fußnote 1, S. 196; a. a. O., S. 7 und 14.

bei einer zwischen 3250 und 3420 kg/cm² liegenden Streckgrenze, wobei der Wert $\gamma = 6780$ kg/cm² für das Stahldrahtgewebe der Reihe 9 wegen der wesentlich höheren Streckgrenze von 5600 kg/cm² bei der Mittelbildung nicht inbegriffen ist. Das Verhältnis dieser Kennziffer zur Streckgrenze ($\gamma : \sigma_s$), das für die Plastizitätslehre des Eisenbetons bedeutsam ist¹, schwankt nach Spalte 9 für die den baumässigen Abmessungen mehr entsprechenden Platten von 3 m Stützweite von 1,33 bis 1,79 und ist i. M. 1,57, während es bei den Platten von 2,0 m Stützweite (Reihe 8 und 9) 1,20 in Uebereinstimmung mit den Stuttgarter Versuchen beträgt.

6. Die Kennziffer ε_i der Durchbiegung im Stadium I ändert sich hier gesetzmässig mit der Stützweite und der Dicke der Platten. Ihre reziproken Werte sind den sogen. Steifigkeitsziffern EJ proportional (s. Bild 14). Platten von gleicher Dicke und Spannweite ergeben auch trotz verschiedener Bewehrung die gleiche Kennziffer ε_i . Hieraus folgt, dass sich die Eisenbetonplatten im Stadium I wie *homogene oder isotrope Platten* verformen (*Zweites Hauptergebnis*). Im Stadium II ist die Kennziffer ε_n (Spalte 14), also die Zunahme

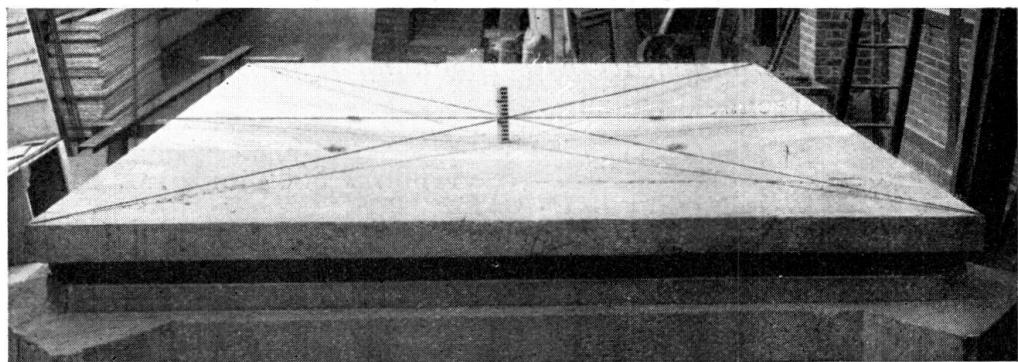


Fig. 15.

Bleibende Durchbiegung der Dresdener Platte 693. (Plattendicke 120 mm, bleibende Durchbiegung 118 mm.)

Flexion permanente de la dalle de Dresden 693. (Épaisseur de la dalle 120 mm, Flexion permanente 118 mm.)

Permanent Deflection of the Dresden Plate 693. (Thickness of Plate 120 mm, Permanent Deflection 118 mm.)

der Durchbiegung bei einer Laststeigerung um $\Delta q' = 1000$ kg/m² i. M. 9 mal so gross wie bei den 3,0 m-Platten und 5 mal so gross wie bei den 2,0 m-Platten der Reihe 8. Kurz vor dem Bruche betrug die grösste Durchbiegung bei den 3 m-Platten (z.B. der Reihe 6) 210 mm, also $\frac{1}{14}$ der Stützweite. Aus diesen starken Durchbiegungswerten (s. z. B. für die Platte 692 der Reihe 3, Bild 15), die grösser als die Plattendicke sind, ist zu folgern, dass sich in der Nähe des Bruches der Spannungszustand der isotropen Platte mit dem einer Membrane überlagert.

7. Die Zunahme der gemessenen Eisenspannung bei 1000 kg Laststeigerung (Spalte 12 und 13) beträgt für die mit einer bestimmten Gebrauchslast bemes-

1. S. Fussnote 1, S. 196; a. a. O. S. 12.

senen Platten 1 bis 4 und 6 im ersten Stadium $\varepsilon_1 = 63$ bis 126 kg/cm^2 und i. M. 92 kg/cm^2 , dagegen im zweiten Stadium $\varepsilon_{11} = 2500$ bis 4800 kg/cm^2 und i. M. 3300 kg/cm^2 , also das rd. 36-fache, wobei naturgemäß örtliche Einwirkungen von Rissstellen von starkem Einfluss sind (Bild 16).

8. Aus den *Versuchen mit Plattenstreifen* wurde für die *drillungssteif* bewehrten 8 Platten 2 bis 4 das Mittennmoment zu

$$M_m = \frac{1}{28,1} \cdot q l^2 \text{ bis } \frac{1}{29,4} \cdot q l^2 \text{ und i. M. } = \frac{1}{28,7} \cdot q l^2 \dots \quad (27)$$

gefunden (s. Spalte 14 und 15, Kennziffer $z = \frac{1}{x}$), dagegen für die nach dem *Trägerrostverfahren* bemessenen 6 Platten der Reihen 1, 6 und 8 zu

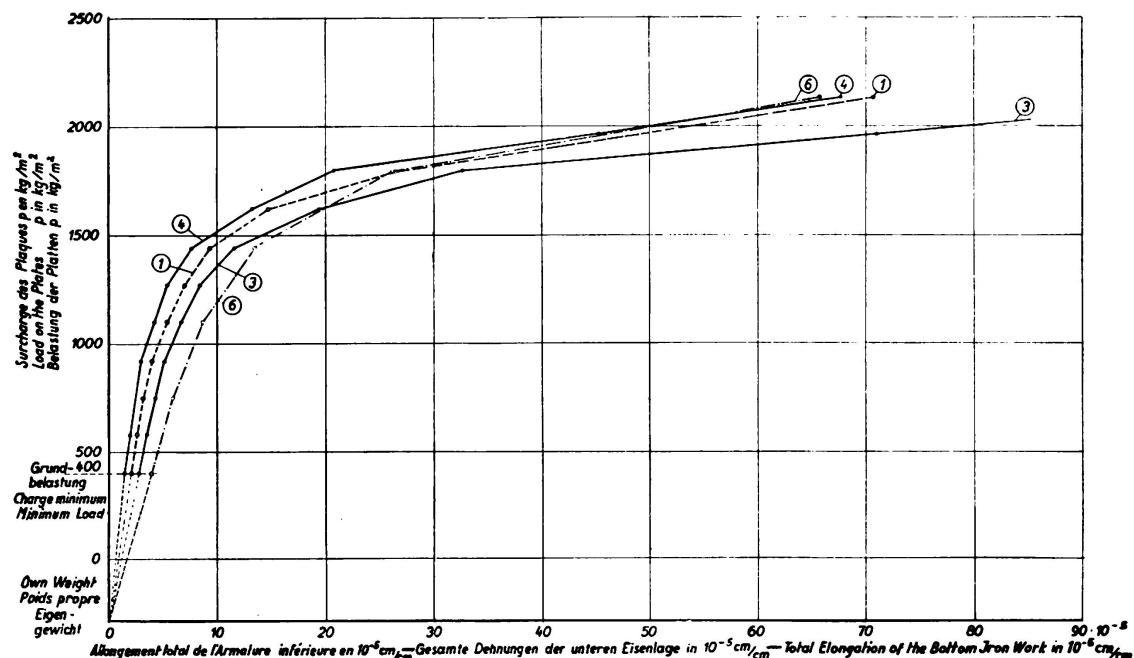


Fig. 16.

Eisendehnung bei den Dresden Reihen 1, 6, 3, 4.

Allongement du fer pour les séries de Dresde n° 1, 6, 3, 4.

Elongation of the Reinforcement in the Dresden Plates, series 1, 6, 3, 4.

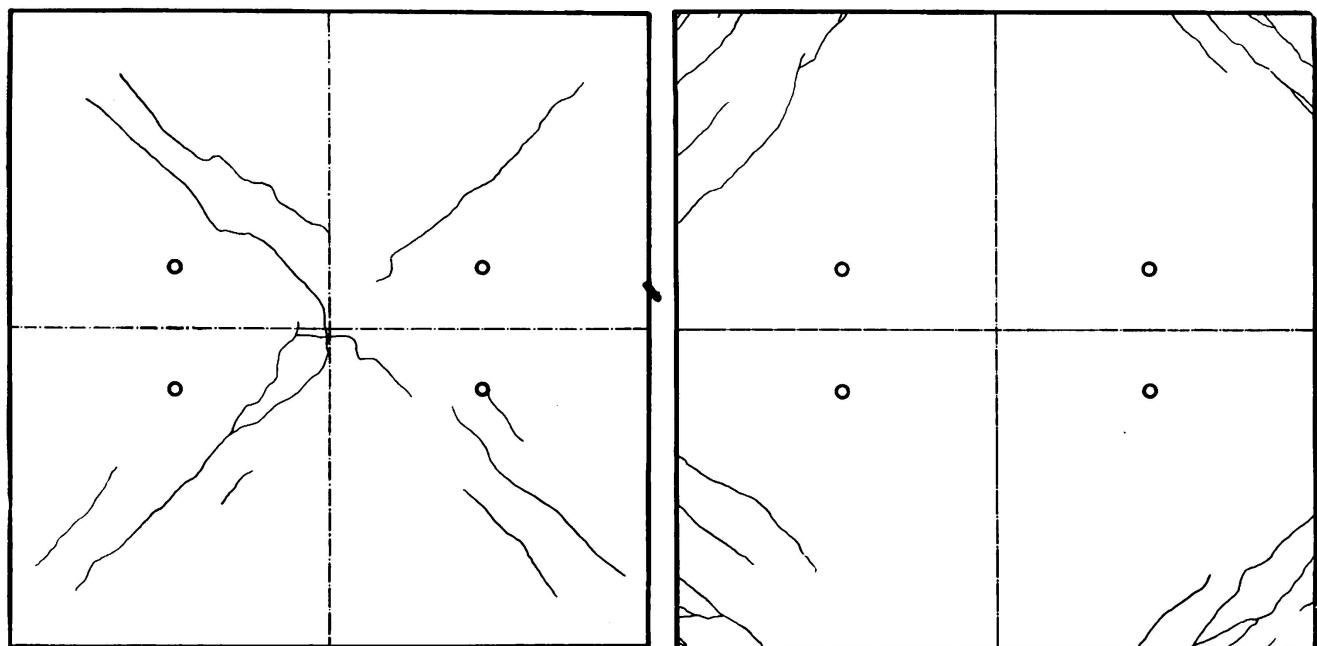
$$M_m = \frac{1}{21,8} \cdot q l^2 \text{ bis } \frac{1}{23,8} \cdot q l^2 \text{ und i. M. } = \frac{1}{22,7} \cdot q l^2 \dots \quad (28)$$

während sich bei den Stuttgarter Versuchen hierfür als Mittel aus 28 Platten $M_m = \frac{1}{21,7} q l^2$ ergab.

Da der Gl. 27 der Wert

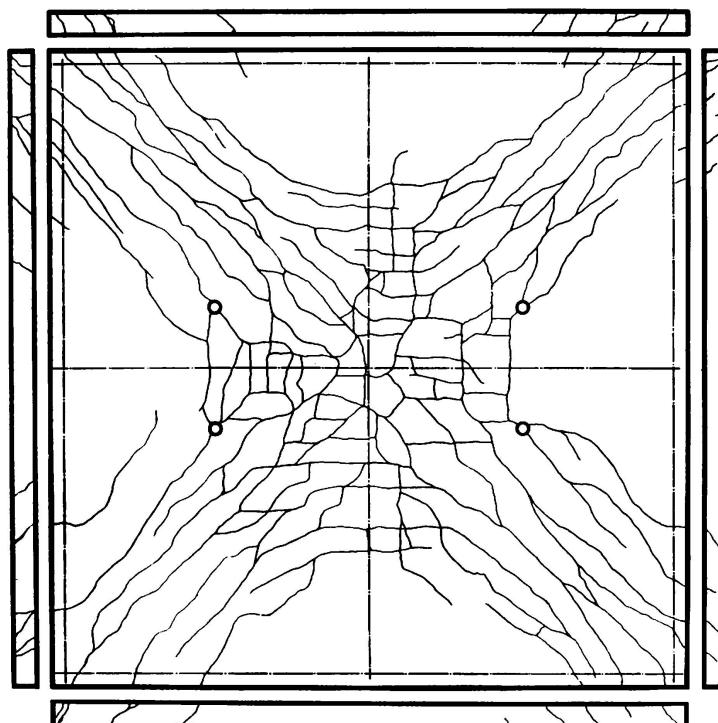
$$M_m = \frac{1}{27,4} q l^2 \dots \dots \dots \dots \dots \quad (29)$$

gegenüberzustellen ist, der sich bei der Berechnung nach der Theorie der *drillungssteifen* Platte ergibt (s. Gl. 11), so ist hiermit die Berechtigung dieser Theorie für die quadratischen Eisenbetonplatten für den Fall erwiesen, dass die Ecken festgehalten werden, dagegen die Berechtigung des Wertes



a) Erste Risse. Unterseite der Platte. Belastung 1440 kg/m^2 .
Les premières fissures. Surface inférieure de la dalle. Charge 1440 kg/m^2 .
The First Cracks. Bottom Surface. Load 1440 kg/m^2 .

b) Oberseite der Platte. Belastung 1440 kg/m^2 .
Surface supérieure de la dalle. Charge 1440 kg/m^2 .
Top Surface of the Plate. Load 1440 kg/m^2 .

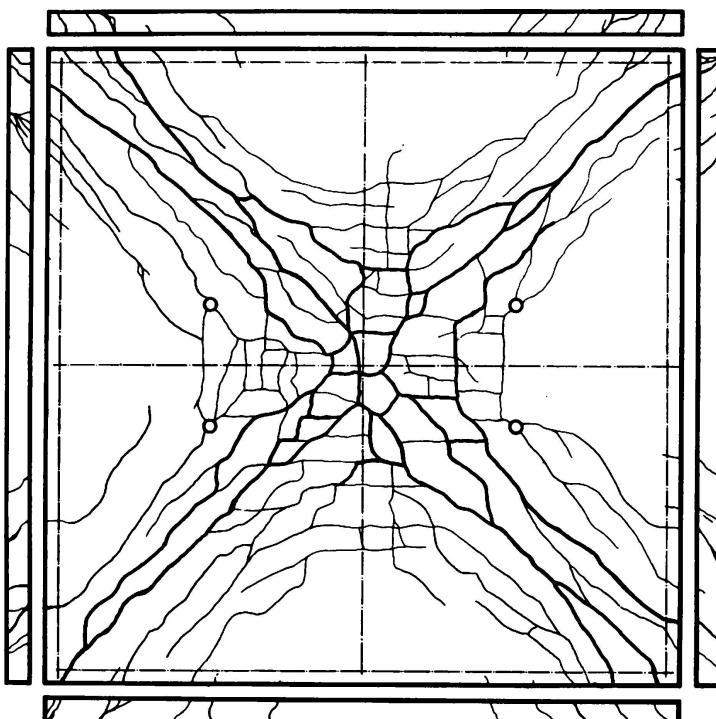


c) Abbruch der Ecken. Belastung 3300 kg/m^2 . Unterseite der Platte.
Coins cassés. Charge 3300 kg/m^2 . Surface inférieure.
Corners damaged. Load 3300 kg/m^2 . Bottom Surface.

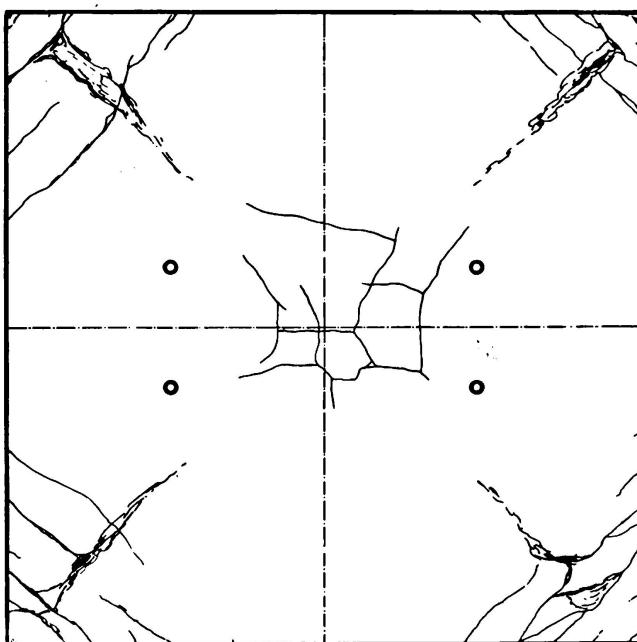
Fig. 17, a-e. — Rissbilder der Platte 692 der Dresdner Versuchs-Reihe 2.
Fissures de la dalle 692 de la série 2 de Dresde.
Cracked Plate 692 of the Dresden Plate Serie 2.

$$(30) \quad M_m = \frac{1}{20} q l^2$$

für den Fall, dass die Ecken nicht festgehalten werden und die Bemessung nach dem Trägerrost-Verfahren erfolgt (*Drittes Hauptergebnis*), s. auch Spalte 16.



d) Bruchzustand. Bruchlast 4100 kg/m^2 . Unterseite der Platte.
Dalle rompue. Charge de rupture 4100 kg/m^2 . Surface inférieure.
Cracked Plate. Load of Rupture 4100 kg/m^2 . Bottom Surface.



e) Oberseite der Platte. Surface supérieure de la dalle.
Top Surface of the Plate. $q = 4100 \text{ kg/m}^2$.

9. Einige Rissbilder sind in Bild 17 und 18 dargestellt, die sich grundsätzlich mit denen der Stuttgarter Versuche decken.

B. Die eingespannten Platten (Reihe 5 und 7 der Uebersicht III) waren entweder mit Randbalken verbunden bei punktförmiger Lagerung in den

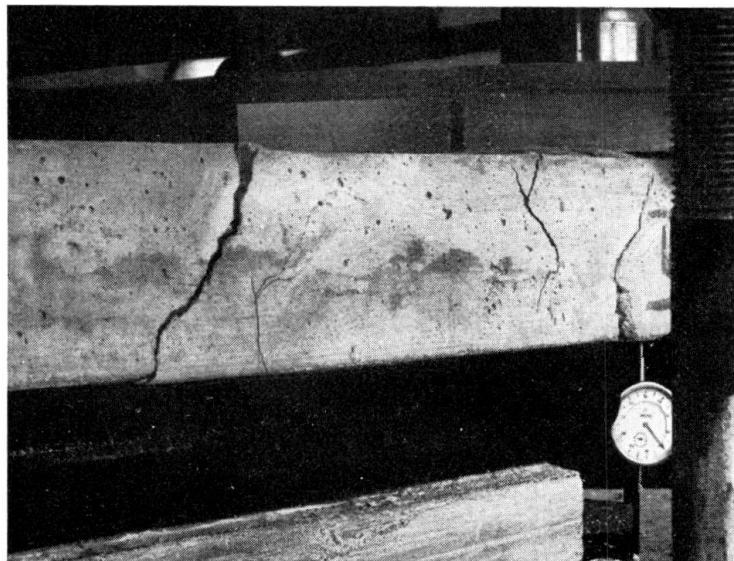


Fig. 18 a.
Abbruch einer Ecke (Platte 696, Reihe 2).
. Coin cassé (plaque 696, série 2).
Corner broken off (Plate 696, Series 2).

Ecken, also nur teilweise eingespannt, oder aber mit Randbalken und Ecksäulen verbunden, also sehr stark eingespannt. Ein bedeutsames Ergebnis bestand

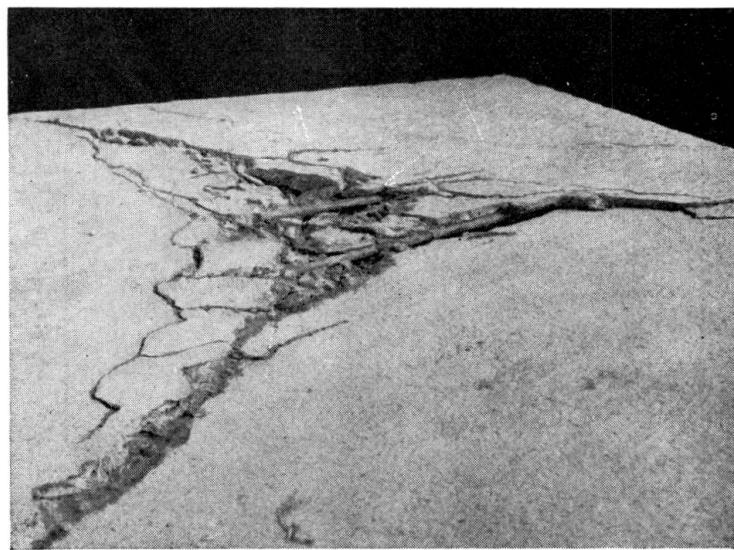


Fig. 18 b.
Eckzerstörung (Platte 698, Reihe 4).
. Coin détruit (Plaque 698, série 4).
Corner damaged (Plate 698, series 4).

darin, dass bei diesen Einspannungsverhältnissen, die meist in der Praxis vorliegen, der Sicherheitsgrad noch ganz wesentlich höher ist als bei den ringsum frei gelagerten Platten.

VII. Zusammenfassung der Ergebnisse aus den statischen Plattenversuchen.

1. *Die Rissicherheit* ist bei kreuzweise bewehrten Platten etwa 3 mal so gross und die Bruchsicherheit mindestens 1 1/2 mal so gross wie bei den Eisenbetonbalken (s. Gl. 22 und 23).

2. *Die Rissgrenze* der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten entspricht der Proportionalitätsgrenze im Stahlbau, bis zu der das Hooke'sche Elastizitätsgesetz gilt. Bis zur Risslast wachsen die Durchbiegungen der Platten nach dem Geradlinien-Gesetz (s. Bild 7 und 14). In diesem Bereich verhält sich die Platte als *isotrope Platte*. Während beim Baustahl das Verhältnis der Proportionalitätsgrenze zur zulässigen Beanspruchung etwa von $\sigma_p : \sigma_{zul} = 2000 : 1200 = 1,67$ bis $2000 : 1600 = 1,25$ schwankt, liegt bei diesen Eisenbetonplatten auf Grund der Dresdener Versuche das Verhältnis $q'_{n} : q'_{zul}$ zwischen 2,0 und 1,36. Wie man mit Recht die Abmessungen der Stahlbauten nach diesem Hooke'schen Elastizitätsgesetz bestimmt, so ist man hiernach auch berechtigt, die kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten *nach der Theorie der isotropen Platte zu bemessen und die Eisenbewehrung entsprechend anzuordnen*, um den Beanspruchungen unter der Gebrauchslast einschliesslich etwaigen Stosszuschlägen Rechnung zu tragen.

3. Nach dem Eintritt der ersten Risse, also im *Stadium II*, bildet sich bei diesen Platten offenbar ein verwickelter Spannungszustand aus, der in der Nähe des Bruches durch eine Ueberlagerung der Spannungen der drillungssteifen Platte mit den nach der Membran-Theorie ermittelten Spannungen entsteht. Da die Bruchsicherheit (nach Gl. 23) 4- bis 5-fach, also verhältnismässig hoch ist, erscheint es zur Vereinfachung wohl zulässig, die *Theorie der drillungssteifen Platte*, also ohne Berücksichtigung der Membranwirkung auch dann zu Grunde zu legen, wenn die Bemessung mit Rücksicht auf den Bruchzustand gefordert wird, wie es im Eisenbetonbau allgemein üblich ist.

4. Für den Sonderfall der quadratischen, ringsum aufliegenden Platte, ist es nach diesen Versuchsergebnissen berechtigt (Gl. 27 und 28) als Mittenmoment der Rechnung zu Grunde zu legen :

a) falls die Ecken gegen Abheben gesichert sind,

$$M_m = \frac{q l^2}{27,4},$$

wie es die Theorie der drillungssteifen Platte ergibt,

b) falls die Ecken nicht gegen Abheben gesichert sind,

$$M_m = \frac{q l^2}{20}.$$

5. Für die Art der Bruchrisse und die Höhe der Bruchlast ist vor allem die Aufteilung der Eiseneinlagen von Bedeutung, wobei die eigenartige Verbundwirkung der kreuzweise bewehrten Platte durch die drei Trägerelemente (das Trägerkreuz, die 4 Eckbalken und bei festgehaltenen Ecken die 4 Konsolträger) nach Bild 10 veranschaulicht werden kann.

6. Die Einspannung der Plattenränder durch Randbalken mit oder ohne Säulen hat sich bei diesen Versuchen als so wirksam erwiesen, dass Platten bei derartiger Auflagerung auch ohne eine besondere Drillungsbewehrung einen hohen Sicherheitsgrad aufweisen.

VIII. Die Platten-Vorschriften in den neuen Deutschen Eisenbeton-Bestimmungen¹ 1932 unterscheiden auf Grund der Stuttgarter und Dresdener Platten-Versuche nach Vorschlag des Verfassers folgende Fälle :

1. *Regelfall* : Rechteckige, kreuzweise bewehrte Platten, die *biegungsfest mit den benachbarten Deckenfeldern oder mit Randbalken verbunden sind*, bedürfen keiner besonderen Bewehrung für Drillungsmomente. Sie dürfen nach dem unter II,5 angegebenen Näherungsverfahren von H. MARCUS berechnet werden, also z. B. bei der ringsum frei aufliegenden quadratischen Platte bei gleichförmiger Last q nach Gl. 11 für das Mittenmoment

$$M_m = \frac{1}{27,4} q l^2.$$

2. Sind im *Ausnahmefall* die Platten *nicht biegungsfest mit den benachbarten Deckenfeldern oder mit Randbalken verbunden* (wie z. B. bei der Abdeckplatte eines Schachtes oder bei den freien Ecken einer Geschossdeckenplatte), so darf dann mit dem vollen Abminderungsbeiwert ν nach Gl. 10 gerechnet werden, wenn zur Sicherung der Ecken und zur Aufnahme der Drillungsmomente auf die Strecke $\frac{1}{3} l_{\max}$, unten gleichlaufend zu den Seiten oder rechtwinklig zur Diagonale, oben gleichlaufend zur Diagonale auf je 1 m Breite der gleiche Eisenquerschnitt vorhanden ist, wie für die grössere Bewehrung F_{ex} in Feldmitte. (Pauschale Eckbewehrung.)

3. Auch in diesem unter 2) genannten *Ausnahmefall* besteht aber noch die Möglichkeit (z. B. bei einfachen Bauwerken), auf die Ausführung einer besonderen *Drillungsbewehrung dann zu verzichten*, wenn das Moment $\partial n_{x \max}$ in Gl. 10 anstatt mit dem vollen Abminderungsbeiwert ν nur *mit dem grösseren Beiwert* $\frac{1+\nu}{2}$ multipliziert wird. Für den Fall (s. Gl. 11) der ringsum frei gelagerten Platte ergibt sich dann :

$$M_m = \frac{1+\nu}{2} \cdot \partial n_{x \max} = \frac{1,584}{2} \cdot \frac{q l^2}{16} = \frac{1}{20,2} q l^2 = rd. \frac{q l^2}{20}$$

in Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen der nach dem Trägerrostverfahren bemessenen Dresdener Versuchsplatten.

Endlich besteht aber in diesem *Ausnahmefall* auch noch die Möglichkeit, *auf Grund einer genaueren Berechnung der Drillungsmomente* gegenüber der unter 2. geforderten pauschalen Eckbewehrung eine Ersparnis an Drillungsei-

1. Bestimmungen des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton, Teil A. (DIN 1045), § 23, Kreuzweise bewehrte Platten.

sen zu erzielen, wobei wiederum mit dem vollen Abminderungsbeiwert ν gerechnet werden darf.

4. Bei *Einzellasten* darf ebenfalls das Näherungsverfahren von MARCUS angewendet werden.

IX. Dynamische Plattenversuche.

A. Ziele.

Die dynamische Untersuchung kann zunächst *zwei Ziele* verfolgen und zwar :

1. Die Bestimmung der Eigenschwingungszahl ν_0 der Platte, um eine Resonanz mit regelmässigen Impulsen von gleicher Frequenz, die z. B. durch Bodenerschütterungen oder direkte Belastung mit Maschinen entstehen können, zu vermeiden. Die theoretische Forschung ermöglicht die genaue Ermittlung der Eigenschwingungszahl von Platten und Plattensystemen auf rein analytischem Wege zur Zeit noch nicht. Um auf diesem neuen Gebiete einen Schritt vorwärts zu kommen, kann man zur Vorherbestimmung der Eigenschwingungszahl Versuche an bestehenden Bauwerken durchführen, deren Auswertung unter Berücksichtigung der Aehnlichkeitsverhältnisse einen hinreichenden Anhalt für die Grössenordnung der Eigenschwingungszahl der auszuführenden Platte liefern wird. Das Anstossen der Platten kann am einfachsten durch Fallgewichte von geeigneter Grösse und die Aufzeichnung der rasch abklingenden Schwingungen durch empfindliche Seismometer erfolgen. Die Messungen gestatten gleichzeitig die Bestimmung der *Dämpfung bei der Grundschiung*, die ein wertvolles Kennzeichen einmal für die Grösse der äusseren und inneren Bewegungswiderstände, zum anderen für den Zustand des Bauwerkes überhaupt darstellt.

2. Ferner kommt die Bestimmung der Formanderung von Plattensystemen unter bestimmten Belastungen in Betracht, um z. B. die Rechnung und insbesondere ihre Voraussetzungen auf ihre Zuverlässigkeit zu prüfen. Die Durchführung derartiger Versuche setzt die Kenntnis der Eigenschwingungszahl ν_0 voraus, da hierbei die Erregerfrequenz ω hinreichend weit unter der Eigenfrequenz bleiben muss, um das Verhältnis der Amplituden A der dynamischen und a der rein statischen Belastung möglichst klein zu halten. In Bild 19 ist das Verhältnis $\frac{\omega}{\nu_0}$ der Erregerfrequenz zur Eigenfrequenz in Abhängigkeit vom

Amplitudenverhältnis $\frac{A}{a}$ und von der Phasenverschiebung φ zwischen Erre-

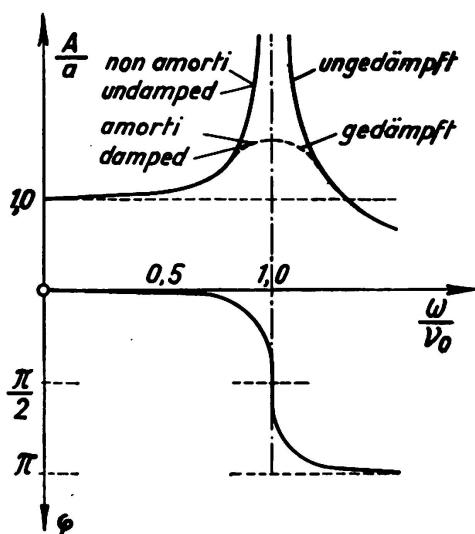


Fig. 19.

Beziehung zwischen Amplituden und Frequenz der Schwingungen.
Relations entre les amplitudes et la fréquence des oscillations.
Relation between Amplitude and Frequency of the Vibrations.

gerfrequenz und Eigenfrequenz dargestellt. Bis zu einem Verhältnis von etwa $\frac{\omega}{\nu_0} = 0,5$ liegt also praktisch ein statischer Lastfall vor, da hierbei A und a nur unwesentlich voneinander verschieden sind. *Man vermag somit durch derartige Schwingungen genau dieselben Formänderungen zu erzeugen wie durch statische Belastungen.*

Im Vergleich mit der rein statischen Formänderungsmessung bietet dieses Verfahren ausserordentliche Vorteile. Bei statischer Belastung müssen stets grössere Lasten aufgebracht werden, was oft mit erheblichen Umständen und Kosten verbunden ist. Weiter besteht die grosse Schwierigkeit, für die Messgeräte (Spiegelapparate, Tensometer und dgl.) einwandfreie und während der Versuchsdauer unveränderliche Bezugspunkte, die von Wärmeschwankungen und Erschütterungen nicht beeinflusst werden, zu schaffen. Beim dynamischen Belastungsversuch genügt dagegen im allgemeinen eine kleine, leicht bewegliche Erregerquelle. Für die Messungen durch Seismometer ist ein unveränderlicher Bezugspunkt nicht erforderlich.

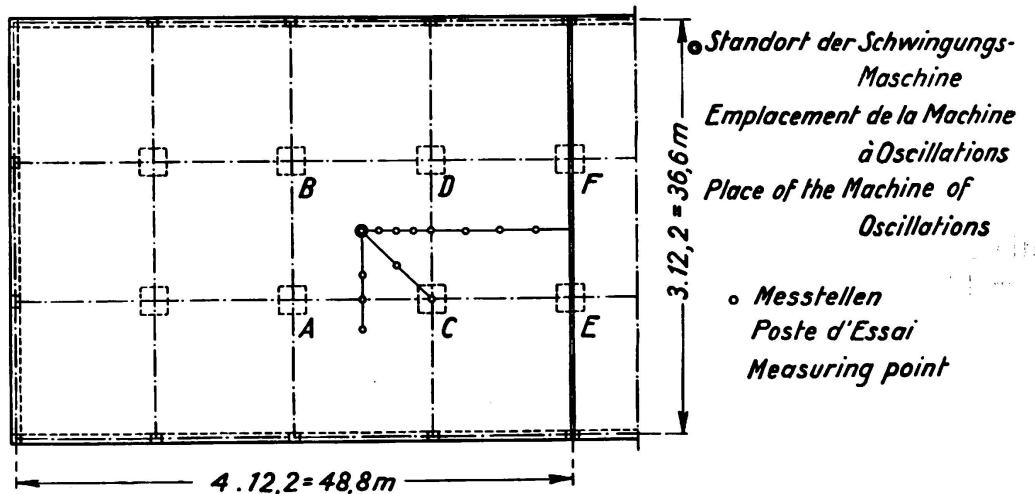


Fig. 20.

Anordnung der Belastung und der Messtellen beim Fordbau in Köln.

Disposition de la charge et des points de mesure au bâtiment Ford à Cologne.

Arrangement of the Loading and of the Measuring Spots in the Ford Building in Cologne.

B. Dynamische Plattenversuche an einem Bauwerk.

Beim Bau des neuen Fabrikgebäudes der Ford-Motor-Company in Köln a./Rh. wurden derartige dynamische Messungen¹ im Auftrage des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton vom Versuchs- und Materialprüfungsamt Dresden und von der Mechanischen Abteilung des Heinrich-Hertz-Institutes in Berlin durchgeführt. Die 52 cm dicke Pilzdecke besteht aus $3 \times 4 = 12$ quadratischen Feldern mit 12,2 m Stützenabstand (vgl. Bild 20). Die Beobachtungen erfolgten

1. Die Anregung hierzu gab Dr.-Ing. REISINGER (Obercassel-Siegkreis) und der Deutsche Beton-Verein. Die Versuchsergebnisse werden demnächst von Professor Dr.-Ing. GEHLER, Dresden und Professor Dr. HOTT-BERLIN in einem Sonderheft des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton veröffentlicht werden.

im Feld ABCD und die Messungen im Bereich ABEF. Die Eigenschwingungszahl der Decke wurde mittels eines Fallgewichtes von 70 kg bei einer Fallhöhe von 60 cm zu $\nu_0 = 13,3$ Hertz bestimmt. Durch einen Schwingungserreger (System Losenhausen-Düsseldorf), der bei einer höchsten Frequenz von 12 Hertz eine Kraft von 10000 kg zu erzeugen vermag, wurde die Decke sodann in sinusförmige Schwingungen von $\omega = 4,8$ Hertz versetzt, sodass $\frac{\omega}{\nu_0} = \frac{4,8}{13,3} = 0,36$ betrug, und die Amplituden an verschiedenen Messpunkten festgestellt, wobei die dynamische Kraft einer statischen Einzellast

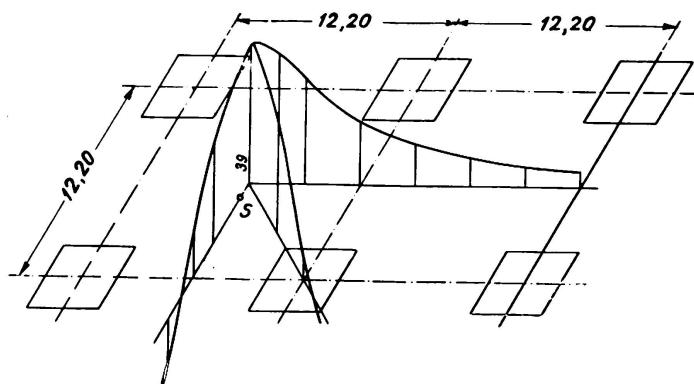


Fig. 21 a.

Dynamische Biegefläche bei Stosserregung in S. (Durchbiegung in 1/1000 mm.)

Surface de déformation par suite de chocs exercés au point S. (Flexion en 1/1000 mm.)

Dynamical Deflection Surface in Consequence of Knocks exercised in S. (Deflection in 1/1000 mm.).

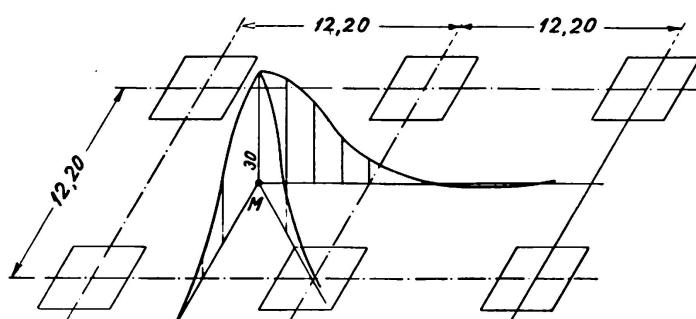


Fig. 21 b.

Statische Biegefläche bei Lastangriff in M (Schwingungsmaschine)
(Durchbiegung in 1/1000 mm.)

Surface de déformation pour une charge statique appliquée au point M. (Flexion en 1/1000 mm.)
(Machine à oscillations.)

Statistical Deflection Surface in Consequence of a Concentrated Load in the Point M.
(Machine of oscillations.) (Deflection in 1/1000 mm.)

von etwa 1600 kg entsprach. Als Messgeräte standen ein Dreikomponenten-Apparat mit photographischer Aufzeichnung der Askania-Werke in Berlin und ein Horizontal- und Vertikal-Seismometer mit Tintenregistrierung nach einer Konstruktion der Leunawerke bei Merseburg zur Verfügung. Einige Ergebnisse der Messungen sind in Bild 21^a und 21^b zusammengestellt.

Vergleicht man das Formänderungsbild 21^b, das also der statischen Bela-

stung durch eine Einzellast von 1600 kg entspricht, mit den Ergebnissen, die von M. Roš und A. EICHINGER, Zürich¹ durch rein statische Messungen an Pilzdecken im Lagerhaus der Gesellschaft für chemische Industrie in Basel gefunden wurden (vgl. Bild 22), so erkennt man die grundsätzlich völlig gleichartige Form der Biegeflächen. Leider mussten die Kölner Versuche unter sehr ungünstigen Bedingungen durchgeführt werden, da sie während des mit stärkster Beschleunigung ausgeführten Baubetriebes kurz vor der Inbetriebnahme vorgenommen wurden. Die für die Vorbereitung und Durchführung der Versuche

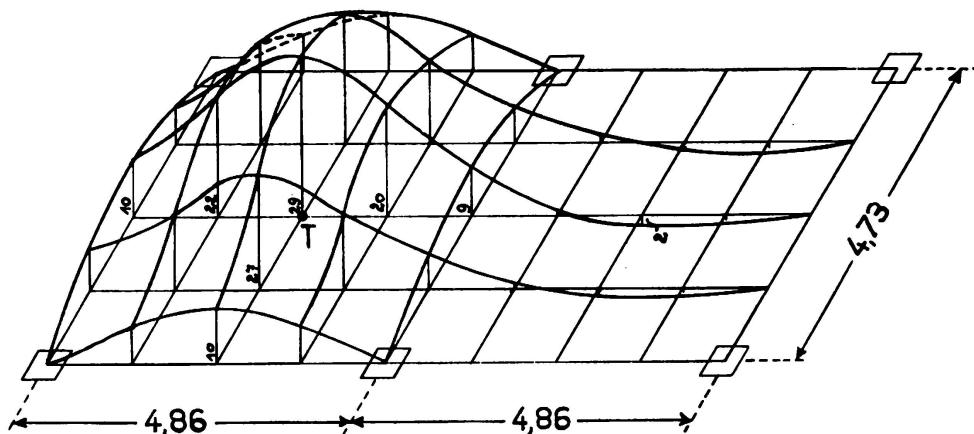


Fig. 22.

Statische Biegefläche unter einer Einzellast von 7 t in Feldmitte T, auf Grund von Messungen von Roš-Eichinger. (Durchbiegungen in 1/1000 mm.)

Surface de déformation pour une charge statique concentrée de 7 t au centre du panneau, d'après les mesures de Roš-Eichinger. (Flexions en 1/1000 mm.).

Statical Deflection Surface for a Concentrated Load of 7 t in the Centre of the Field, by Roš-Eichinger. (Deflections in 1/1000 mm.)

verfügbare Zeit war auf nur 2 Tage beschränkt. Die Ergebnisse sind daher in quantitativer Beziehung nur als Vorversuche mit begrenzter Genauigkeit zu werten. Der qualitative Vergleich mit den statischen Messungen von Roš-EICHINGER aber zeigt die hervorragende Eignung des dynamischen Messverfahrens auch für Platten und Pilzdecken. Der weitere Ausbau dieses Untersuchungsverfahrens kann dazu beitragen, einen Gütemasstab hinsichtlich statischer und dynamischer Beanspruchungen von Bauwerksteilen zu erhalten und manche heute noch nicht beantworteten Fragen dieses bedeutsamen Teilgebietes des Eisenbetonbaues zu klären.

1. Vgl. Bericht zum Ersten Internationalen Kongress für Beton und Eisenbeton in Lützsch im September 1930 : Résultats de mesures de déformations et de tensions sur dalles à champignons.

TRADUCTION

par M. GOSSIEAUX, Ing., Paris.

I. L'importance du problème des dalles dans les ouvrages en béton armé.

Les éléments de la charpente métallique sont en général constitués par des poutres, dont les contraintes sont caractérisées d'une manière exacte par un régime d'efforts intéressant une seule dimension. Par contre, dans le béton armé, les planchers, les poutres et les poteaux sont assemblés les uns aux autres, presqu'exclusivement, d'une manière rigide. Il en résulte qu'au lieu d'un appui libre, on a le plus souvent affaire, pour les poutres, à un encastrement partiel. En coupe longitudinale, la charpente se comporte comme un cadre ; en outre, dans le plan, la dalle rectangulaire est assemblée d'une manière rigide avec les poutres, de sorte que son régime de charge intéresse les deux dimensions. Grâce aux progrès qu'a réalisés la statique de la construction, au cours des vingt premières années de notre siècle, le calcul des éléments en forme de cadre a été développé d'une manière satisfaisante. Par contre, le calcul des dalles en béton armé est lié d'une manière très étroite aux caractéristiques particulières des matériaux utilisés ; le calcul de l'épaisseur des dalles et de la section des armatures, de même que l'étude de la disposition de ces armatures ne pourront progresser que sur la base d'essais effectués sur des éléments de dimensions normales. Les planchers-champignons constituent le groupement des deux éléments caractéristiques des constructions en béton armé, la dalle armée en croix et le poteau ; ils se comportent donc à la fois comme cadres et comme dalles et leur étude devra être effectuée en les considérant comme éléments d'ossature, pour les tranches qui sont immédiatement voisines des poteaux, et comme panneaux de plancher, pour les tranches intermédiaires.

L'étude de l'évolution du béton armé permet de se rendre compte de la nécessité où l'on s'est trouvé de s'appuyer jusqu'à maintenant sur les principes statiques simples qui s'appliquent aux poutres et aux éléments de dalles, ainsi qu'aux éléments de voûtes et qui interviennent en construction métallique, quoique ces principes ne soient pas suffisants pour le calcul du béton armé. L'avenir du béton est en effet dans les systèmes à deux dimensions, tel que les dalles et les parois incurvées minces, ou « coquilles ». Le problème de la sécurité des poutres vis-à-vis des efforts tranchants a fait l'objet, depuis une trentaine d'années, d'études pratiques suffisamment approfondies ; les résultats obtenus ont mis en évidence l'insuffisance notoire de la poutre en béton armé sous le rapport de la sécurité à la fissuration ; le champ d'application de ce système ne pourra être élargi que par une amélioration importante des caractéristiques de résistance du béton à la traction. On sait que pour le calcul de toutes les parties des ouvrages de béton armé qui travaillent à la flexion, on admet une zone tendue fissurée et on calcule à la rupture, à cause de la faible

résistance du béton à la traction. Cette méthode de calcul s'applique aussi bien aux poutres qu'aux dalles. Pour les dalles, on admet, d'une manière unanime, qu'au-dessous de la charge de fissuration (phase I), elles se comportent comme dalles homogènes, ou « isotropes ». Par contre, la question suivante reste litigieuse : par quelle méthode statique peut-on exprimer, d'une manière relativement simple, l'état complexe d'équilibre entre les efforts externes et les efforts internes, après l'apparition des fissures dans les dalles (phase II) et comment doit-on faire intervenir la disposition des armatures ? Une deuxième question se pose, jusqu'à maintenant négligée, et pourtant tout au moins aussi importante : quelle sécurité à la fissuration peut-on admettre, dans les dalles, par rapport aux poutres en béton armé ? Les essais qui sont décrits ci-après doivent contribuer à élucider cette question.

II. Évolution des méthodes de calcul employées jusqu'à maintenant.

1. La méthode de calcul la plus élémentaire et la plus simple consiste à supposer la dalle décomposée en tranches constituant des poutres parallèles et à calculer ces poutres comme reposant sur deux appuis ou plus, avec ou sans encastrement aux extrémités (premier stade d'évolution). Ce mode de calcul conduit à négliger l'influence, d'ailleurs favorable, des liaisons latérales (c'est-à-dire de la continuité latérale), que l'on considère alors seulement comme impliquant une marge de sécurité supplémentaire. Pour assurer effectivement, dans la construction, l'existence de ces liaisons latérales, les règlements allemands pour le béton armé (1925. Section 14, chapitre 10, paragraphe 2) prévoient des fers de répartition, constitués par 4 fers ronds de 7 mm. de diamètre par mètre de largeur. Les règlements concernant les ponts (D.I.N. 1075. Section 6, chapitre 1) imposent un renforcement par armatures transversales encore plus importantes, lorsqu'il y a lieu de prévoir une répartition très étendue des charges. Cette méthode de calcul par sectionnement des dalles présente l'avantage d'une plus grande simplicité, mais elle a l'inconvénient d'être en contradiction formelle avec le caractère monolithique de la dalle.

2. Le deuxième stade d'évolution consiste à considérer la dalle comme décomposée en tranches perpendiculaires admettant à leur point d'intersection le même fléchissement :

$$\zeta_x = \zeta_y \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

Cette méthode peut être considérée comme constituant la base de la théorie des dalles. Si l'on désigne par : (figure 1) $\lambda = l_y : l_x$ le rapport qui caractérise l'étroitesse de la dalle ; et α, β les degrés respectifs d'encastrement ; on a, pour les fléchissements des deux tranches¹ :

$$\zeta_x = \alpha \cdot \frac{q_x l_x^4}{E J} \quad \zeta_y = \beta \cdot \frac{q_y l_y^4}{E J}$$

1. $q_x - q_y$ et q désignent ici, comme dans les poutres, la charge uniformément répartie sur une bande de largeur 1, donc en kg/m ; q' désigne par contre la charge en kg/m², par unité de surface, dans les essais de dalles.

d'où on déduit, en tenant compte de l'équation (1) :

$$\frac{q_x}{q_y} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{l_y^4}{l_x^4}.$$

Sur la figure 2, on a porté, pour le quart d'une dalle rectangulaire et en ordonnées, les taux de charge d'une série de points N pris dans la tranche médiane de la figure 1, pour différentes valeurs du rapport caractérisant l'étroitesse de la dalle. On constate que les tranches Y qui se trouvent dans le voisinage des appuis ont à supporter une plus grande fraction q_x de la charge que les tranches médianes, car leurs déformations sont moins importantes et qu'elles présentent par suite une résistance plus importante. Elles soulagent donc les tranches médianes.

Si maintenant on remplace la courbe des N par une parabole, on obtient, pour le moment au milieu de la dalle carrée¹ :

$$M_m = \frac{7}{96} q l^2 = \frac{1}{13,7} q l^2 = 0,0730 q l^2. \dots \dots \quad (2)$$

Cette influence de décharge exercée par les tranches de bordure peut être mise en évidence en établissant la comparaison avec le moment au milieu d'une tranche X reposant librement sur deux appuis seulement : $\partial M_{om} = \frac{1}{8} q l^2$ qu'on aurait dû envisager si l'on avait appliqué la première méthode de calcul. Cette deuxième méthode tient donc compte de cette influence de décharge que les tranches latérales exercent au profit des tranches plus voisines du milieu de la dalle.

La figure 2 montre toutefois que cette influence de décharge qui intervient dans l'emploi de cette deuxième méthode de décomposition en tranches perpendiculaires diminue de 16 % à 6 % lorsque le rapport qui caractérise l'étroitesse de la dalle varie de 1,5 à 2. Les possibilités d'application de cette méthode se trouvent donc limitées à une zone relativement étroite, en pratique, pour : $l_y : l_x = 1 \text{ à } 1,5$.

Dans la méthode de décomposition en tranches perpendiculaires, l'équation de la surface fléchie est la suivante :

$$E. \left(J_x \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + J_y \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) = p(x, y). \dots \dots \quad (3)$$

dans laquelle on désigne par :

J_x et J_y les moments d'inertie des tranches de largeur 1 dans les directions X et Y;

$p(x, y)$ la fonction des charges, que l'on peut développer, ainsi que l'indique le Dr LEWE², au moyen des séries de Fourier.

3. Pour rendre la méthode encore plus simple, on considère souvent deux tranches perpendiculaires dont le point de croisement se trouve au milieu de la

1. W. GEHLER. Handbuch sur Eisenbetonbau, 3^e édition, 1931, volume 6. Balkenbrücken, p. 323 (Éditeur, Wilhelm Ernst et Sohn, Berlin).

2. Dr LEWE. Pilzdecken, 2^e édition, 1926 (Éditeur, Berlin, Wilhelm Ernst et Sohn) et Bauing, 1926, p. 898.

dalle ; ce procédé ne donne par suite qu'un résultat approximatif assez grossier en ce qui concerne la détermination du régime des efforts et des déformations.

Pour une dalle carrée, on obtient alors : $q_x = q_y = \frac{q}{2}$ et, pour le moment au milieu :

$$M_m = \frac{1}{8} \cdot \frac{q}{2} \cdot l^2 = \frac{q l^2}{16} \dots \dots \dots \quad (4)$$

Cette méthode de décomposition en tranches médianes est donc une simplification dans l'évolution de la notion du régime de charge, par rapport à la méthode précédente, mais également un retour en arrière.

4. Le troisième stade d'évolution des méthodes de calcul correspond à la méthode de la dalle isotrope et résistant à la distorsion¹. Cette méthode tient, en outre, compte de ce fait que les tranches parallèles que l'on a supposées découpées dans la dalle, sont, en réalité, assemblées les unes aux autres et que leur influence réciproque se traduit par une augmentation de la résistance des tranches élémentaires à la distorsion (deuxième principe de base de la théorie des dalles). Le problème peut donc être résolu parfaitement du point de vue statique, en considérant une dalle isotrope avec fixation des angles (même en admettant quelques fissures dans le béton). Si les angles de la dalle peuvent se soulever, les longueurs d'appui sur les bords ne peuvent pas être déterminées statiquement.

Dans une dalle dont la position des angles est déterminée d'une manière fixe, les déformations sont telles que l'indique la figure 3, sur laquelle est mise en évidence la torsion subie par des tranches voisines (figures 3a et c). Les efforts de distorsion sont donnés par la relation :

$$\tau_{xy} = -2G.z \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \cdot \partial y} \dots \dots \dots \quad (5)$$

ω_{y_1} et ω_{y_2} désignant les angles de déformation². Si $\omega = 0$, ainsi que cela se produit par exemple, pour le centre de la dalle, ou sur les bords de la dalle lorsqu'il s'agit d'un encastrement complet, ces efforts de torsion disparaissent également d'eux-mêmes. La figure 4 exprime, d'une manière schématique, la relation qui existe entre ces efforts et les efforts normaux σ_x et σ_y .

Si l'on considère le cas particulier d'une dalle comportant des appuis sur tous ses côtés, soit une dalle carrée, chargée d'une manière uniforme et dont la position des angles soit fixe, les efforts normaux dans les directions X et Y sont équivalents. Pour $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ et $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ on obtient les valeurs suivantes, pour les efforts principaux qui s'exercent dans la direction de la diagonale et perpendiculairement à cette direction (fig. 5) :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} = \sigma \pm \tau \dots \dots \dots \quad (6)$$

1. La théorie classique de la dalle homogène ou isotrope, qui a été fondée par LAGRANGE et NAVIER, a été sensiblement développée, au cours de ces dernières années, par A. et L. FÖPPL, HAGER, H. LEITZ, TIMOSHENKO, NADAI, DANUSO, NIELSEN, MARCUS, M. T. HUBER, LEWE. Voir également le renvoi suivant.

2. W. GEHLER. Erläuterungen zu den Eisenbetonbestimmungen, 1925. Berlin, W. Ernst et Sohn, 4^e édition, p. 124.

Dans le plan supérieur, suivant la direction de la diagonale, on a pour l'effort de traction qui s'exerce sur le cube élémentaire III : $\sigma_{o2} = \tau - \sigma$.

Suivant la direction perpendiculaire à cette diagonale, on a pour l'effort de compression : $\sigma_{o1} = -(\sigma + \tau)$.

Dans le plan inférieur, suivant la direction de la diagonale, on a pour l'effort de compression qui s'exerce sur le cube élémentaire IV :

$$\sigma_{u2} = -(\tau - \sigma).$$

Suivant la direction perpendiculaire à cette diagonale, on a pour l'effort de traction : $\sigma_{u1} = \sigma + \tau$.

Dans une dalle reposant librement sur ses quatre bords, la valeur de τ est importante au voisinage des appuis, en correspondance avec l'angle de déformation ω (figure 3 c) ; par contre, la valeur de σ est faible. Il en résulte que dans les essais de dalles effectués dans de telles conditions, par suite des valeurs élevées des efforts de traction $\sigma_{u1} = \sigma + \tau$, les fissures en diagonale se produiront tout d'abord dans le plan inférieur, au voisinage des angles. Ce n'est que lorsque la charge atteindra des valeurs plus élevées que les fissures par traction se produiront perpendiculairement à cette diagonale, sous l'influence des efforts de traction $\sigma_{o2} = \tau - \sigma$ (Voir en outre la figure 4 d et les dispositions de déformation qu'indiquent les figures 4 b et c).

La dalle carrée, reposant librement sur ses appuis, sur ses quatre côtés, se prête donc particulièrement bien aux essais, du fait que le moment fléchissant résultant des efforts extérieurs est déterminé statiquement, par rapport à la diagonale. Pour une charge q' uniformément répartie (en kg par m^2), ce moment est déterminé par la relation suivante : (figure 6)

$$M_b = \frac{q' l^2}{2} \left(\frac{d_1}{4} - \frac{d_1}{6} \right) = \frac{q' l^2}{24} d_1 \dots \dots \dots \quad (7)$$

et en admettant à titre d'approximation une répartition uniforme de ce moment fléchissant sur toute la longueur de la diagonale, on obtient, par unité de longueur :

$$M'_{\text{D}} = \frac{M_b}{d_1} = \frac{q' l^2}{24} \dots \dots \dots \quad (8)$$

Suivant cette théorie de la dalle isotrope et résistant à la distorsion, et dans le cas d'une charge q en kg par m uniformément répartie, on obtient pour le moment au centre d'une dalle carrée et reposant librement sur ses quatre côtés :

$$M_m = 0,0368 q l^2 = \frac{1}{27,2} q l^2 \dots \dots \dots \quad (9)$$

5. La méthode d'approximation de H. MARCUS¹ a été étudiée pour arriver à une formule d'approximation aussi simple que possible, en ce qui concerne la valeur maximum du moment fléchissant dans la dalle ; elle tient compte de différentes valeurs du facteur caractérisant l'épaisseur de la dalle : $\lambda = l_y : l_x$ et de différentes conditions aux appuis ; elle envisage, en outre, le cas d'une charge uniformément répartie et celui d'une charge unique appliquée au centre

1. H. MARCUS. Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten, 2^e édition, 1929, Berlin, Julius Springer, éditeur.

de la dalle. En ce qui concerne les conditions aux appuis, il suffit de se limiter aux deux cas limites d'une part d'appuis libres, d'autre part d'un encastrement complet des bords de la dalle. Les moments fléchissants maxima $\partial n_{x \max}$ et $\partial n_{y \max}$ suivant les directions X et Y sont déterminés, pour les charges fractionnelles q_x et q_y qui correspondent à l'application de la méthode de décomposition par tranches médianes (équation 2), comme s'il s'agissait de dalles armées ne reposant que sur deux appuis opposés, dans les conditions de charge les plus défavorables et en faisant intervenir le mode d'appui correspondant à chaque cas.

Si l'on tient compte de l'influence favorable qu'exerce la résistance à la distorsion, par suite des liaisons latérales, ces moments peuvent être réduits comme suit :

$$M_{x \max} = v_x \cdot \partial n_{x \max} = \partial n_{x \max} \left[1 - \frac{5}{6} \left(\frac{l_x}{l_y} \right)^2 \cdot \frac{\partial n_{x \max}}{q l^2} \right]. \quad (10)$$

On obtient d'une manière analogue $M_{y \max}$ en permutant dans cette valeur de $M_{x \max}$, les lettres x et y . Si l'on considère le cas d'une dalle carrée, reposant librement sur quatre appuis, on obtient, en tenant compte de la symétrie :

$q_x = q_y = \frac{q}{2}$ d'où l'on déduit :

$$\partial n_{x \max} = \frac{q_x l^2}{8} = \frac{q l^2}{16} \quad (\text{voir équation 3})$$

Le coefficient de réduction atteint alors sa valeur maximum :

$$v = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{q_x}{q} = \frac{7}{12} = 0,584$$

Il en résulte que, pour ce cas particulier, une fraction de 42 % de la charge est supportée par la résistance de la dalle à la distorsion, au lieu d'intéresser directement sa résistance de fléchissement. On obtient alors, pour le moment au centre de la dalle, d'après l'équation (10).

$$M_{x \max} = v \cdot \partial n_{x \max} = 0,584 \frac{q l^2}{8} = 0,0365 \frac{q l^2}{8} = \frac{1}{27,4} q l^2. \quad (11)$$

Ce moment n'est que la moitié de celui que l'on a obtenu par la méthode de décomposition en tranches perpendiculaires (voir équation (2)). Les résultats obtenus par cette méthode d'approximation s'accordent d'une manière satisfaisante avec ceux que donne la méthode exacte exposée au paragraphe 4 ci-dessus (comparer en particulier les équations (9) et (11)).

III. Objections à l'application de la théorie de la dalle isotrope aux dalles de béton armé.

1. Dans la deuxième phase de déformation de la dalle, c'est-à-dire après l'apparition des fissures provoquées par la traction dans le béton, les efforts de torsion (voir équation (4)) ne peuvent plus être supportés par les dalles de béton armé, car les armatures seules ne suffisent pas à absorber des efforts

tranchants horizontaux¹. Aux faibles charges, la résistance à la distorsion opposée par une dalle de béton armé est relativement importante, mais elle diminue dans des proportions importantes, lorsque la limite de fissuration est dépassée, que la charge augmente et que les fissures se produisent. Par suite, dans cette deuxième phase, les déformations croissent plus rapidement que dans la première phase. Ce n'est qu'en prévoyant des armatures auxiliaires convenables qu'il sera possible de faire face, dans une certaine mesure, aux moments de torsion qui prennent naissance pour des charges plus élevées. Si l'on travaille toujours suivant le principe du calcul d'après la sécurité à la rupture, ainsi qu'on le fait pour les poutres, on ne peut appliquer que la méthode de décomposition par tranches, à l'exclusion de l'hypothèse de la dalle isotrope résistant à la distorsion (on appliquera par exemple, l'équation (2), avec $M_m = \frac{q l^2}{13,7}$ au lieu de l'équation (11), dans laquelle : $M_m = \frac{q l^2}{27,4}$).

2. Dans l'équation bien connue, servant de point de départ pour la détermination de la courbure suivant les directions X et Y, interviennent, outre les moments M_x et M_y , les valeurs $E.J.$ et m , qui varient dans le béton armé, ainsi qu'on le sait, avec les charges croissantes. Il n'est, par suite, pas légitime, de les faire intervenir comme valeurs fixes, ainsi qu'on le fait pour l'étude de l'équation de déformation pour la dalle isotrope

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = \frac{p}{E.J.} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right). \dots \dots \dots \quad (12)$$

C'est pourquoi M. T. HUBER² recommande, lorsqu'il s'agit de dalles orthogonales, c'est-à-dire de dalles dont les armatures sont parallèles aux côtés de la dalle, de faire intervenir la notion de la dalle orthotrope, en adoptant des rigidités différentes suivant les directions X et Y, soit $E_x.J_x$ et $E_y.J_y$. On obtient alors pour l'équation de la surface élastique :

$$E_x.J_x \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \frac{E_x.J_x + E_y.J_y}{m} \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y.J_y \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = p \left(1 - \frac{1}{m^2} \right). \dots \quad (13)$$

M. RITTER³ a montré par le calcul que, dans le deuxième stade de déformation, et pour la section de la dalle comportant une zone de béton travaillant à la compression et une zone de fers travaillant à la traction, avec un moment d'inertie théorique J_1 , il faut remplacer le coefficient d'allongement transversal m couramment employé, par un coefficient théorique :

$$m_1 = \frac{m}{m - \frac{J}{J_1} \cdot (m-1)} \dots \dots \dots \quad (14)$$

Dans les conditions de réalisation normales des armatures, ce nouveau coefficient atteint des valeurs 3 ou 4 fois plus fortes que m . Les termes de

1. LEITZ-GRÄZ. Berechnung kreuzweise bewehrter Platten. Bauingenieur, 1925, p. 920.

2. M.T. HUBER. Ueber die genaue Biegungsgleichung einer orthotropen Platte in ihrer Anwendung auf kreuzweise bewehrte Betonplatten. Bauingenieur, 1925.

3. M. RITTER. Zurich. Die Anwendung der Theorie elastischer Platten auf den Eisenbeton. Rapport présenté à la deuxième Réunion Internationale des Ponts et Charpentes. Vienne, 1929, p. 644 (Julius Springer, éditeur, Vienne).

l'équation (13) dans lesquels le coefficient m doit être remplacé par le coefficient m_1 (par exemple, pour $m = 6$, on remplacera m par $m_1 = 18$ à 24), ces termes n'exercent pas une influence appréciable, de sorte que l'on peut supposer $m_1 = \infty$ et qu'en partant de l'équation de la surface fléchie dans le cas de la décomposition en tranches (voir l'équation (3)) :

$$E_x \cdot J_x \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + E_y \cdot J_y \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = p \dots \dots \dots \quad (15)$$

Comme les coefficients de rigidité varient d'un point à l'autre, les valeurs de $E \cdot J$, qui sont tout d'abord estimées, de maille en maille, au cours de la première série de calculs dans la méthode d'approximation, doivent être rectifiées à la reprise du calcul des valeurs des moments fléchissants.

En se basant sur l'exemple de la dalle carrée, reposant librement sur ses quatre appuis, RITTER a montré que pour les trois cas, pour lesquels le rapport entre le coefficient de rigidité au centre de la dalle et sur ses bords est égal successivement à : 1 — 1,5 — 2, les moments au centre sont respectivement égaux à :

$$\frac{q l^2}{13,7} \text{ (voir éq. 2); } \quad \frac{q l^2}{17,3}; \quad \frac{q l^2}{2 \pi^2} = \text{environ } \frac{q l^2}{20}$$

Il n'est donc pas légitime d'appliquer la théorie de la dalle homogène de rigidité constante pour le calcul des dalles de béton armées en croix, car la résistance à la distorsion est alors surestimée et il n'est pas tenu compte de l'influence de soulagement importante qui s'exerce aux endroits exposés à la suite de la diminution de la rigidité à la flexion.

Il s'agit ici d'une influence spontanée de soulagement des points de la dalle qui sont les plus chargés, par suite d'une modification plus importante de la forme de la dalle (voir figures 7, 8, 15, 17), donc d'une augmentation de plasticité, grâce à laquelle la répartition des moments fléchissants, avant la rupture, s'effectue d'une manière plus uniforme sur la section. Pour étudier des problèmes tels que celui-ci, qui font partie de l'étude de la plasticité¹, on détermine, à partir des charges et des déformations constatées au cours des essais, les écarts qui se manifestent par rapport aux lois linéaires.

IV. Caractéristiques sur lesquelles doit porter l'interprétation des résultats fournis par les essais des dalles en béton armé.

Pour pouvoir tirer des conclusions générales précises du grand nombre de chiffres que donnent les essais sur les dalles de béton armé, il importe de dégager toute une série de caractéristiques déterminées.

1. *Sécurité de fissuration v_R .* La sécurité de fissuration v_R peut être définie

1. W. GEHLER. Festigkeit, Elastizität u. Schwinden von Eisenbeton. 2^e Réunion Intern. pour l'Essai des Matériaux. Zurich, 1931, p. 10. Il serait intéressant d'étudier le travail de déformation, ainsi qu'on le fait pour le diagramme de tension des aciers, où un allongement correspond, dans le domaine plastique, à un recul dans la variation du taux de travail. (Voir Gehler : Sicherheitssgrad und Beanspruchung, 2^e Réunion Intern. des Ponts et Charpentes. Vienne, 1928, p. 224. Julius Springer, Vienne.)

par le rapport entre la charge pour laquelle se produit la fissuration, soit q'_R et la charge admissible, soit q'_{zul} , que l'on désigne souvent également sous le nom de charge utile. On a par suite :

$$\nu_R = \frac{q'_R}{q'_{zul}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (16)$$

de même que l'on a pour la sécurité à la rupture :

$$\nu_B = \frac{q'_B}{q'_{zul}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (17)$$

2. *Tendance relative à la fissuration*¹ α . — La tendance relative à la fissuration peut être définie par le rapport entre la charge de rupture, soit :

$$\alpha = \frac{q'_R}{q'_B} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (18)$$

3. *La caractéristique β de traction du béton*. — La caractéristique de traction du béton, soit β , pour les dalles carrées, est définie par la charge totale de fissuration Q_R et le moment résistant d'une section homogène de béton armé, le long de la diagonale, dans la phase I de l'essai, moment qui peut être caractérisé par $W = \frac{l\sqrt{2}d^2}{6}$ en première approximation. Les différences entre les

armatures d'importances diverses n'interviennent que fort peu au cours du premier stade ; il n'en sera donc pas tenu compte au premier abord. En ce qui concerne le moment statiquement déterminé par rapport à la section diagonale, on a, pour une charge uniformément répartie (d'après l'équation 8) :

$M_D = \frac{1}{24} Q_R l\sqrt{2}$ de sorte que l'on obtient, pour la caractéristique moyenne de traction du béton, et uniquement pour servir de terme de comparaison :

$$\beta = \frac{M_D}{W} = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q_R}{d^2} = \text{approx. } \sigma_{bz} \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

Toutefois, le moment fléchissant ne se répartit pas uniformément sur toute la section diagonale de la dalle ; ce chiffre ne doit donc être considéré que comme une valeur moyenne.

4. *Taux de travail γ des armatures sur la diagonale*. — Pour les dalles carrées, la caractéristique de travail des fers peut être déterminée d'une manière approximative ainsi qu'il suit. Si l'on désigne par : $F e_x + F e_y$ la somme de toutes les sections des armatures dans la partie inférieure de la dalle ; dans les directions X et Y ; $z = 0,89 h$ le bras de levier des efforts internes, le moment des efforts internes est défini par :

$$M_i = [(F e_x + F e_y) \cos \varphi \cdot \sigma_e] \cdot 0,89 h.$$

Dans les dalles carrées, l'angle φ , qui désigne l'angle entre les fers et la diagonale, est égal à 45° . En remplaçant

$$M_i \text{ par } M_i = M_D = \frac{1}{24} Q_B l\sqrt{2} \quad \text{et } \cos \varphi \text{ par } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

on obtient :

$$\gamma = \text{approx. } \sigma_e = \frac{1}{10,7} \cdot \frac{Q_B l}{(F e_x + F e_y) h} \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

1. Au tableau désigné par « Coeff. caractéristique pour fissure-rupture ».

En fait, le moment fléchissant ne se répartit pas d'une manière uniforme sur toute la section diagonale ; de plus, l'hypothèse courante au sujet de la valeur du bras de levier des efforts internes $z = 0,89 h$, dans le cas de la rupture d'une dalle, par traction, peut ne pas être justifiée ; par suite, cette caractéristique ne doit être considérée que comme une valeur de première approximation pour le taux moyen de travail des armatures.

5. *Caractéristique de fléchissement, ξ .* — Ainsi qu'il résulte des essais de Stuttgart, aussi bien que des essais de Dresde, la courbe des fléchissements en fonction des charges (fig. 7) se compose toujours de deux droites (voir également fig. 18). On admettra donc les valeurs ξ_I et ξ_{II} comme caractérisant les accroissements des déformations, dans les phases respectives I et II, qui correspondent à un accroissement de la charge $\Delta q' = 1 t$ par m^2 .

Ces valeurs définiront la rigidité ou la plasticité de la dalle. Le coude R de cette courbe correspond à la charge de fissuration c'est-à-dire q'_R . Les angles entre ces deux portions rectilignes de la courbe et la direction de l'axe des ζ (fléchissements) sont proportionnels aux coefficients dits de rigidité EJ, car on a ici : $Q = q' l^2$ et $\zeta = C \cdot \frac{Q l^3}{EJ}$ donc $EJ = \frac{q'}{\zeta} \times \text{une constante } ^1$.

6. *Taux de travail des fers au centre de la dalle.* — En se basant sur les résultats des essais de Dresde (voir figure 18), la mesure des allongements des fers donne des courbes analogues (figure 8). A partir de ces courbes, on peut définir deux coefficients ϵ_I et ϵ_{II} qui caractérisent l'accroissement du taux de travail des armatures, dans le centre de la dalle, pour un accroissement de la charge égal à : $\Delta q' = 1 t$ par m^2 dans chacune des deux phases I et II de la déformation.

7. *Coefficient de comparaison des moments dus aux efforts principaux.* — Cette caractéristique est déterminée d'après les résultats des essais effectués sur des éléments de comparaison constituée, à Dresde aussi bien qu'à Stuttgart, par des bandes de 50 centimètres de large, que l'on a supposé découpées dans la région centrale des dalles, suivant la direction des armatures inférieures. Ces éléments ont été préparés avec les mêmes matières premières que les dalles elles-mêmes ; elles ont été chargées de la même manière et ont subi des essais allant jusqu'à la fracture, comme de simples poutres reposant sur deux appuis.

Si l'on compare la charge de rupture $q_B(\text{Str})$ d'un élément ci-dessus, à la charge de rupture obtenue pour une dalle, $q_B(\text{Pl})$ à égalité de section, on obtient un coefficient de comparaison qui indique quel est l'excédent de capacité de charge qu'accuse la tranche de 0,50 m. de large de la dalle, par rapport à la capacité de charge de l'élément d'essai ci-dessus, grâce à la répartition des efforts dans les deux dimensions.

Le moment fléchissant de l'élément statiquement déterminé est :

$$M_{B(\text{Str})} = \frac{q_B(\text{Str}) \cdot l^2}{8} \text{ et le moment correspondant pour la dalle est :}$$

$$M_{B(\text{Pl})} = \frac{q_B(\text{Pl}) \cdot l^2}{x}$$

1. Voir renvoi 1, page 224.

On a, par suite, en égalant ces deux valeurs, le coefficient :

$$\frac{1}{x} = \frac{M_B \text{ Str.}}{q_B (\text{Pl.}) \cdot l^2} \cdot \dots \dots \dots \dots \quad (21)$$

V. Les essais de dalles de Stuttgart.

Les fascicules 30 et 56, de 1915 et 1926, des Publications de la Commission Allemande du Béton Armé contiennent des rapports de C. BACH et de O. GRAF sur les essais qui ont été effectués à Stuttgart, sur 42 dalles carrées de 2 mètres de côté, ainsi que sur 11 dalles rectangulaires de 2×3 et de 2×4 mètres et, en outre, sur 3 dalles continues, reposant sur 2 panneaux carrés d'appui. Toutes ces dalles étaient appuyées librement sur tous leurs côtés, leurs angles pouvant se soulever librement. Ces essais ont été décrits par E. MÖRSCH, dans Der Eisenbetonbau¹. Ces essais sont commentés dans les lignes qui suivent, par comparaison avec les essais de dalles qui ont été effectués à Dresde.

A. Dalles carrées.

Les cotes et les résultats des essais sur les 10 séries sont groupés dans le tableau I. Les dalles ont été soumises, non pas à l'action d'une charge supposée uniformément répartie, mais en réalité à 16 charges individuelles réparties sur leur surface (figure 9 a).

Le tableau II indique les valeurs caractéristiques obtenues à partir des résultats des essais de Stuttgart. Ces dalles n'ont pas été calculées pour une charge utile déterminée ; par suite, les valeurs de q'_zul et celles de v_r et de v_B (équations (16) et (17), ne sont pas indiquées. Il en est de même pour les valeurs de ε_I et de ε_{II} (accroissements des efforts dans les armatures, voir figure 8), les allongements dans les fers n'ayant pas été mesurés directement.

Les résultats pratiques les plus importants qu'ont fourni les essais de Stuttgart sont indiqués ci-dessous :

1. *Processus de fissuration et de rupture.* — Les premières fissures dans le béton se sont produites à la surface inférieure et dans le milieu des dalles, parallèlement à leurs bords, ou suivant les diagonales ; ultérieurement, d'autres fissures se sont produites dans les autres parties des dalles, toujours à la surface inférieure. On a désigné sous le nom de « bâillement » de la fissure un élargissement de cette fissure d'environ 1 millimètre et on a considéré que la limite d'élasticité des armatures était atteinte pour cette valeur du bâillement. Les premiers bâillements des fissures se sont également produits vers le centre des dalles, sur la surface inférieure et, d'une manière générale, suivant une direction parallèle aux bords ; dans les autres parties des dalles, ces bâillements se sont produits à nouveau suivant la direction des diagonales. Quoique les angles n'aient pas été maintenus en position d'une manière rigide, on a toutefois constaté des fissurations, à la surface des dalles et dans des directions perpendiculaires aux diagonales, ces fissurations étant provoquées par la trac-

1. E. MÖRSCH. Der Eisenbetonbau, 6^e édition, 1929. Stuttgart, 1^{er} volume, 2^e partie, pages 403 à 442.

tion. Ultérieurement, des ruptures dues à la compression se sont manifestées à la surface supérieure, au-dessus des principales fissures de traction visibles à la surface inférieure le long des diagonales. Les figures de fissuration sont tout à fait semblables à celles qui ont été obtenues au cours des essais de Dresde (voir figure 15).

2. *Répartition des efforts dans les dalles.* — La répartition des efforts qui s'exercent dans les dalles peut être mise en évidence, en divisant la dalle en trois éléments qui interviennent d'une manière différente dans leur participation à ces efforts (figure 10). Les premières fissures se produisent dans la région centrale des dalles, soit « a b c d » et sur la face inférieure. Ici aussi, la limite d'élasticité des fers est dépassée dès le début. Les éléments d'angle « e f » accusent, sur la face inférieure, des fissures orientées suivant la direction des diagonales ; puis, en fin de compte, il se produit sur la face supérieure une destruction du béton par compression. Au cours des essais de Stuttgart, les angles des dalles n'étaient pas maintenus ; il en résulte que l'influence de porte à faux des éléments « g h » ne s'exerce que partiellement ; ils constituent, avec les éléments d'angle « e f » un ensemble rigide à trois dimensions qui s'oppose à une flexion libre telle qu'elle se produirait dans une dalle circulaire. Cette contrainte intérieure se manifeste d'une manière très nette par les fissures d'angle que l'on constate à la surface supérieure des dalles suivant la direction « e f ».

3. *Armatures.* — Les armatures qui se trouvent dans les deux bandes médianes (a b c d) de la dalle présentent une importance capitale pour la capacité de charge de cette dalle et pour l'apparition des premières fissures, ainsi qu'il résulte de la considération de la caractéristique γ (tableau II, colonne 7). En outre, la comparaison des dalles 3 et 5, qui ont une même épaisseur et une même densité d'armatures au centre (tableau I, colonnes 5 et 11), montre que c'est la totalité de l'armature de la face inférieure (tableau I, colonne 9) qui détermine la capacité de la charge. La diminution de l'importance de l'armature totale, pour la dalle 5, par rapport à la dalle 3, qui atteint 17 %, conduit à une réduction de 11 % sur la charge max. (tableau II, colonne 3). Il en résulte que la capacité de charge de la dalle n'est pas seulement déterminée par l'importance des armatures des tranches médianes a b c d, mais aussi par celle des armatures des bords ; par suite, la rigidité à la distorsion intervient encore, même lorsque les angles de la dalle peuvent se soulever.

Il est donc à recommander d'armer de la même manière la totalité de la face inférieure de la dalle, les éléments en bordure devant recevoir une armature aussi forte que les tranches médianes.

4. *Dalles armées en diagonale.* — Les dalles armées suivant les diagonales (séries 7 ou 8) donnent, en ce qui concerne la charge de rupture (tableau II, colonne 3), des résultats identiques à ceux que donnent les dalles correspondantes qui sont armées parallèlement aux directions des bords (séries 3 et 4).

5. *Tendance relative à la fissuration.* — L'examen de la caractéristique de tendance à la fissuration α ou rapport entre la charge de fissuration et la charge de rupture montre (tableau II, colonne 4), que pour les dalles armées suivant les directions de leurs bords, les fissures se produisent, dans la zone de béton travaillant à la traction, pour une charge atteignant environ, en moyenne,

32 % de la charge de rupture (séries 1 à 6). Par contre, pour les dalles très fortement armées (séries 9 et 10), la fissuration se produit, en moyenne, pour une charge n'atteignant que 21 % de la charge de rupture, par suite de l'affaiblissement de la partie du béton soumise à la traction.

6. *Taux de traction du béton β .* — Le taux de travail du béton à la traction a été calculé en admettant une répartition uniforme du moment sur la diagonale ; il oscille entre 21 et 33 kg par cm^2 ; il correspond donc aux valeurs courantes de résistance du béton à la traction (tableau II, colonnes 5 et 6).

7. *Taux de travail des armatures γ .* — Ce taux de travail a été déterminé en partant de la même hypothèse en ce qui concerne la répartition du moment sur la diagonale (tableau II, colonne 7) ; il est très nettement influencé par la formation des fissures avant la rupture et varie entre 42 et 62 kg par mm^2 . Si l'on détermine le rapport entre cette caractéristique de travail des armatures et la limite d'élasticité correspondante des fers d'armature, rapport que l'on désigne sous le nom de « facteur de plasticité »¹, on constate que ce facteur varie entre 1,14 et 1,78. Il dépend très nettement, ainsi qu'on le sait, de la manière dont la rupture se produit, ainsi que des conditions locales.

8. *Caractéristique de fléchissement δ .* — Cette caractéristique (tableau II, colonnes 9 et 10) montre que pour les séries 1 à 6 (voir figure 7), l'accroissement du fléchissement, dans la phase I, et pour une augmentation de charge de 1 t par m^2 , n'est que de 1/10 à 1/15 de ce qu'il est pour une même augmentation de la charge dans la phase II. On constate donc, pour les dalles, et par rapport aux poutres chargées suivant une seule dimension, l'avantage d'un plus faible fléchissement au-dessous de la charge de rupture.

9. *Comparaison des moments au milieu.* — Cette caractéristique a été déterminée par la comparaison des résultats d'essai sur les éléments de dalles ; on arrive à la valeur moyenne de :

$$M = \frac{1}{21,7} q l^2$$

pour les dalles carrées qui ont été essayées avec leurs angles non maintenus et pour une charge uniformément répartie ; on en déduit ce résultat extrêmement intéressant pour la pratique, par rapport aux résultats que donnent les deux premières méthodes de calcul par décomposition en tranches, soit : $M_m = \frac{1}{13,7} q l^2$

(équation 2) et $M_m = \frac{1}{16} q l^2$ (équation 4) que, dans les dalles de béton armé en croix et même lorsque les angles peuvent se soulever, la résistance à la distorsion, ou la réduction de la rigidité de flexion, concourt à l'influence favorable de la tendance à la plasticité dans la phase II (voir III, 2).

B. Essais de Stuttgart sur dalles rectangulaires.

Ces essais ont eu pour but de déterminer l'influence des dimensions respectives de la dalle (épaisseur) sur la manière dont elle se comporte, ainsi que

1. Voir page 12 du rapport mentionné au renvoi 1, page 230.

l'influence relative des armatures longitudinales et transversales sur la charge de rupture. Les résultats obtenus sont les suivants :

1. Les premières fissures se sont produites aux points d'intersection E et F des bissectrices (fig. 11). Les phénomènes de fissuration de ces dalles rectangulaires montrent d'une manière très nette que la pièce ne se comporte réellement comme une dalle que dans les régions « ADMJ » et « CBKL ». Dans le reste de la pièce soit la région « JKLM », elle se comporte comme une poutre reposant sur deux appuis.

2. Les essais décrits dans le fascicule 56, de 1926, des Publications de la Commission Allemande du Béton Armé concernent des dalles de 2×4 mètres donc à grande portée ; ils ont eu pour but de déterminer l'influence des armatures longitudinales et transversales ; les résultats obtenus sont les suivants :

Dalle	Densité des armatures		Poids des armatures G _e kg.	Charge maximum P _m kg.	Rendement des armatures P _m /G _e
	f_{ex} $l = 2$ m.	f_{ey} $l = 4$ m.			
a	f_e	f_e	55,7	35.000	628
b	f_e	$f_e/2$	42,7	31.000	726
c	f_e	$f_e/4$	36,5	29.000	794
d	f_e	0	33,2	28.000	870
e	$1,82 f_e$	0	57,8	48.000	830

Ces résultats montrent que l'on a obtenu la meilleure utilisation des armatures dans les dalles *d* et *e*. D'après les Règlements allemands, les moments au centre M_x et M_y sont entre eux dans le rapport de l^2_y à l^2_x . La dalle *c*, pour laquelle $f_{ey} : f_{ex} = 1 : 4$ répondrait donc à ces prescriptions.

En comparant les charges de rupture des dalles avec celles des éléments supposés découpés (voir IV, 7), on obtient de la même manière que pour les dalles carrées une valeur du moment au centre ; dans les dalles *d* et *e* également, qui n'ont pas d'armatures longitudinales, on a obtenu : $M_x = \frac{q l^2}{10}$ contre $\frac{q l^2}{8}$ pour les éléments étroits supposés découpés.

Ces essais montrent donc que les dalles armées sur une seule direction ont également une capacité de charge plus élevée que les éléments de dalles, que ce soit à cause d'une résistance, même faible, à la distorsion, ou à cause d'une diminution de la rigidité au fléchissement, c'est-à-dire par une augmentation de plasticité dans la phase 2, augmentation qui se manifeste plus nettement sur les dalles reposant sur leurs quatre bords que sur les éléments de dalles supposés, et qui ne reposaient que sur leurs deux extrémités (voir III, 2).

VI. Les essais de dalles de Dresden.

Au Laboratoire d'essai des matériaux de Dresden, de la Commission allemande du béton armé, on a procédé, de 1927 à 1930, à des essais de rupture portant, au total, sur 22 dalles de béton armé carrées, de 3 mètres de portée et sur quatre dalles de 2 mètres de portée. En outre, pour les séries 1 à 4 et 6, 8, 9, on a préparé des éléments de comparaison que l'on a considérés comme découpés dans la région médiane d'une dalle et auxquels on a également fait subir des essais allant jusqu'à la rupture, en les traitant comme des poutres reposant sur deux appuis (voir tableau III) !.

Ces essais ont été poussés plus loin que les essais de Stuttgart, ainsi qu'il est indiqué ci-après. Toutes les dalles, à l'exception des séries 8 et 9, qui servent de termes de comparaison avec les essais de Stuttgart, ont été calculées d'après une méthode de calcul déterminée (tableau III, colonne 4), pour les charges utiles indiquées dans la colonne 8, et munies d'armatures correspondantes (voir par exemple, figure 12). Pour se rapprocher, dans toute la mesure du possible, des conditions de la pratique, on a choisi une portée de 3 mètres, sauf pour les dalles des séries de comparaison 8 et 9, qui ont été essayées, de même que toutes les dalles de Stuttgart, pour une portée de 2 mètres. La disposition adoptée pour exécuter ces essais permettait, pour la portée de 3 mètres, de pousser le nombre des points d'application des charges jusqu'à 64 pour chaque dalle, de manière à réaliser une charge aussi uniformément répartie que possible (voir figure 9 b par comparaison avec la figure 9 a). Enfin, les allongements des armatures ont été mesurés directement.

A. Dalles des séries 1 à 4, 6, 8 et 9, reposant sur des rouleaux sur leurs quatre côtés.

Les caractéristiques tirées des essais de Dresden sont groupées sur le tableau IV.

1. *Sécurité de fissuration.* — La sécurité de fissuration (colonne 4) varie pour les séries 1 à 4 et la série 6, de :

$$\nu_R = \frac{q'_R}{q'_{zul}} = 1,36 \text{ à } 2,05 \dots \dots \dots \quad (22)$$

et est, en moyenne, de 1,8. (colonne 4)

Ce premier résultat capital des essais de Dresden démontre la supériorité des dalles armées en croix, sur les poutres en béton armé, pour lesquelles on a en effet : (figure 20)

$$\nu_R = \frac{\sigma_{e,R}}{\sigma_{e,zul}} = \text{environ } \frac{6}{12} = 0,5$$

2. *Sécurité à la rupture.* — La sécurité à la rupture (colonne 5) atteint ici :

$$\nu_B = \frac{q'_B}{q'_{zul}} = 4,24 \text{ à } 5,75 \dots \dots \dots \quad (23)$$

1. Un rapport détaillé sur ces essais a été publié par W. GEHLER, M. AMOS et M. BERGSTRÄSSER, dans un fascicule des publications de la Commission allemande du béton armé, Berlin, Wilhelm Ernst et Sohn, 1932.

et est, en moyenne, de 4,9. Elle est donc sensiblement plus élevée que celle de 2,5 à 3 que donnent les poutres en béton armé à armatures légères¹.

3. *Tendance relative à la fissuration.* — La tendance relative à la fissuration atteint, pour les séries du tableau (colonne 6) :

$$\alpha = \frac{q'_R}{q'_B} = 32,2 \text{ à } 42,0 \% \quad (24)$$

et, en moyenne, 37 %.

En tenant compte des résultats des essais de Stuttgart, on peut donc admettre une valeur minimum de $\alpha = 1/3$ (voir IV, 5).

4. *Taux de traction du béton.* — En admettant une répartition uniforme du moment fléchissant suivant la diagonale, on trouve, comme valeur moyenne (colonne 7) :

$$\beta = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q_R}{d^2} = 22,3 \text{ à } 36,0 \quad (25)$$

et, en moyenne, 30,2 kg par cm².

Cette valeur correspond aux résultats des essais de Stuttgart (voir V, 6) et aux valeurs courantes pour la résistance du béton à la traction de flexion ; on a en effet trouvé sur des poutres fléchies de 45 × 10 × 10 cm des valeurs de 27,2 à 47,9 en moyenne, de 33,2 kg par cm².

5. *Taux de travail des armatures.* — L'ordre de grandeur du taux de travail des armatures à la rupture (colonne 8) est de :

$$\gamma = \frac{1}{10,7} \cdot \frac{Q_B \cdot l}{(Fe_x + Fe_y) \cdot h} = 41 \text{ à } 58 \text{ kg. par mm}^2 \quad (26)$$

et, en moyenne 44 kg par mm², pour une limite d'écoulement de 32,5 à 34,2 kg. par mm². Pour cette détermination, on n'a pas tenu compte de la valeur de $\gamma = 67,8$ kg par mm² correspondant au treillis en fil d'acier de la série 9, à cause de la valeur sensiblement plus élevée de 56 kg par mm² de la limite d'écoulement correspondante.

Le rapport entre le taux γ et la limite d'écoulement, soit $\frac{\gamma}{\sigma_s}$ qui est très important en ce qui concerne la notion de la plasticité du béton armé, varie suivant la colonne 9 et pour des dalles se rapprochant davantage des dimensions courantes (portée de 3 mètres) de 1,33 à 1,79, soit en moyenne, 1,57 tandis que pour des dalles de 2 mètres de portée (séries 8 et 9) ce rapport atteint 1,20, ce qui concorde d'ailleurs avec les résultats des essais de Stuttgart.

6. *Caractéristique de fléchissement.* — Dans la première phase, les valeurs de δ_i varient régulièrement avec la portée et l'épaisseur des dalles. Les valeurs réciproques sont proportionnelles au coefficient de rigidité EJ (voir figure 14). Des dalles de mêmes épaisseurs et de mêmes portées donnent donc des caractéristiques δ_i équivalentes, malgré les différences dans les armatures. Il en résulte que dans la première phase, les dalles de béton armé se comportent à la déformation, comme des dalles homogènes ou isotropes, ce qui constitue un

1. Voir pages 7 et 14 du rapport mentionné au renvoi 1, page 230.

deuxième résultat capital. Dans la phase II, la caractéristique ε_u c'est-à-dire (colonne 11) l'augmentation du fléchissement qui correspond à une augmentation de charge $\Delta q' = 1.000 \text{ kg par m}^2$ est, en moyenne, 9 fois plus élevée que pour les dalles de 3 mètres et 5 fois plus élevé que pour les dalles de 2 mètres de la série 8. Un peu avant la rupture, le fléchissement a atteint sa valeur maximum dans les dalles de 3 mètres (série 6 par exemple), soit 210 millimètres, ou le $1/14$ de la portée. De telles valeurs du fléchissement sont supérieures à l'épaisseur des dalles (voir par exemple la dalle n° 692 de la série 3, figure 15). Il en résulte que, au voisinage de la rupture, le régime des efforts dans la dalle isotrope se confond avec celui d'une membrane.

7. *Accroissement des efforts dans les armatures.* — Dans la première phase, et pour un accroissement de la charge de 1.000 kg (colonnes 12 et 13), on atteint un accroissement :

$$\varepsilon_1 = 0,63 \text{ à } 1,26 \text{ kg par mm}^2, \text{ soit en moyenne } 0,92 \text{ kg/mm}^2.$$

pour les dalles des séries 1 à 4 et 6, calculées pour une charge utile déterminée, tandis que dans la deuxième phase, on atteint :

$$\varepsilon_{II} = 26 \text{ à } 48 \text{ kg par mm}^2, \text{ soit en moyenne } 33 \text{ kg par mm}^2.$$

Le rapport entre ces deux valeurs moyennes est de 1 à 36 environ, car l'influence des fissures locales est évidemment importante (voir figure 16).

8. *Comparaison des moments.* — A la suite des essais effectués sur les éléments supposés découpés et pour les 8 dalles des séries 2 à 4, armées pour résister à la distorsion, on a trouvé pour le moment au milieu :

$$M_m = \frac{q l^2}{28,4} \text{ à } \frac{q l^2}{29,4} \text{ soit, en moyenne : } M_m = \frac{q l^2}{28,7} \dots \quad (27)$$

Voir colonnes 14 et 15, la caractéristique $x = \frac{1}{x}$.

Par contre, pour les 6 dalles des séries 1, 6 et 8, calculées d'après la méthode de décomposition par tranches :

$$M_m = \frac{q l^2}{21,8} \text{ à } \frac{q l^2}{23,8} \text{ soit, en moyenne : } M_m = \frac{q l^2}{22,7} \dots \quad (28)$$

tandis qu'au cours des essais de Stuttgart, on a trouvé comme moyenne pour 28 dalles : $M_m = \frac{q l^2}{21,7}$

La valeur de la relation (27) doit être comparée avec la suivante :

$$M_m = \frac{q l^2}{27,4} \dots \quad (29)$$

que l'on obtient en effectuant le calcul d'après la théorie de la dalle résistant à la distorsion (voir équation 11). Cette théorie est donc légitime, en ce qui concerne les dalles de béton armé carrées, dans le cas où les angles sont fixes ; par contre l'expression :

$$M_m = \frac{q l^2}{20} \dots \quad (30)$$

est justifiée dans le cas où les angles ne sont pas maintenus, le calcul étant alors effectué suivant la méthode de décomposition en tranches (voir colonne 16), ce qui constitue un troisième résultat capital.

9. Les figures 17 et 18 représentent quelques systèmes de fissures qui sont, dans les grandes lignes, en concordance avec les résultats des essais de Stuttgart.

B. Dalles encastrées.

Les poutres encastrées (séries 5 et 7 du tableau III) ont été assemblées soit avec des poutres de bordure, avec appuis ponctuels dans les angles (c'est-à-dire avec un encastrement partiel), soit avec des poutres de bordure et des poteaux d'angle (c'est-à-dire avec un encastrement très prononcé). On est ainsi arrivé à ce résultat important que dans les ouvrages avec encastrement, que l'on rencontre le plus souvent dans la pratique, le coefficient de sécurité est encore sensiblement plus élevé que pour les dalles reposant sur leurs quatre bords.

VII. Résumé des résultats obtenus au cours des essais statiques de dalles.

1. La sécurité à la fissuration, pour les dalles armées en croix, est environ 3 fois plus grande que pour les poutres en béton armé ; la sécurité à la rupture est environ 1 1/2 fois plus grande (voir les équations 22 et 23).

2. La limite de fissuration, ou charge de fissuration, correspond, pour les dalles de béton armées en croix, à la limite de proportionnalité dans la charpente métallique, jusqu'à laquelle la loi de Hooke concernant l'élasticité est valable. Jusqu'à la charge de fissuration, les fléchissements dans la dalle croissent linéairement (voir fig. 7 et 14). Dans cette zone, la dalle se comporte comme une dalle isotrope. Tandis que dans l'acier de construction, le rapport entre la limite de proportionnalité et la charge admissible varie entre :

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_{zul}} = \frac{20}{12} = 1,67 \quad \text{à} \quad \frac{20}{16} = 1,25 \quad \text{dans ces dalles en béton armé, et}$$

d'après les essais de Dresde, le rapport $\frac{q'_n}{q_{zul}}$ varie entre 2 et 1,36. De même qu'il est légitime de déterminer les dimensions des charpentes métalliques d'après cette loi d'élasticité de Hooke, il est donc ici également légitime de calculer les dalles de béton armées en croix d'après la théorie de la dalle isotrope et de disposer les fers d'armature en tenant compte des efforts provoqués par les charges admissibles et en admettant un certain coefficient de choc.

3. Dans la deuxième phase, c'est-à-dire après l'apparition des premières fissures, le régime des efforts dans ces dalles est nettement plus compliqué. Dans le voisinage de la fracture, il est déterminé par une superposition des efforts qui correspondent à une dalle rigide à la distorsion et des efforts qui correspondent à la théorie de la membrane. D'autre part, la sécurité à la rupture est, d'après l'équation (23), de 4 à 5, donc relativement élevée ; on peut donc, pour simplifier, se baser sur la théorie de la rigidité à la distorsion, en

ne tenant pas compte de l'effet de membrane, si le calcul doit être effectué pour la rupture, comme c'est généralement le cas pour le béton armé.

4. Dans le cas particulier des dalles carrées reposant librement sur leurs quatre bords, les résultats de ces essais montrent qu'il est légitime de prendre comme base du calcul des moments au milieu les expressions suivantes :

a. dans le cas où les angles ne peuvent pas se soulever :

$$M_m = \frac{q l^2}{27,4},$$

ainsi qu'il résulte de la théorie de la rigidité à la distorsion :

b. dans le cas où les angles peuvent se soulever :

$$M_m = \frac{q l^2}{20}$$

5. La disposition des armatures présente une importance capitale dans le mode de formation des fissures correspondant à la rupture, ainsi que pour la valeur de la charge de rupture ; on peut en effet mettre en évidence l'existence de différentes zones utiles particulières constituant en somme, ainsi que le montre la figure 10, trois types d'éléments intervenant dans la résistance propre de la dalle : les éléments médians en croix ; les éléments d'angles et, pour les dalles dont les angles sont fixes, les éléments travaillant en porte à faux.

6. L'enca斯特rement des bords des dalles au moyen de poutres de bordure, avec ou sans poteaux d'angle, s'est montré très efficace ; ce dispositif conduit à une augmentation notable du coefficient de sécurité, même lorsque l'on ne prévoit pas d'armatures de distorsion.

VIII. Prescriptions concernant les dalles dans les nouveaux règlements allemands pour le béton armé de 1932¹.

En se basant sur les résultats des essais de Dresden et de Stuttgart, et d'après les propositions de l'auteur, ces nouveaux règlement distinguent les cas suivants :

1. *Cas général.* — Dalles rectangulaires armées en croix qui sont assemblées d'une manière rigide avec les panneaux voisins, ou avec des poutres de bordure : aucune armature de distorsion particulière n'est nécessaire. Ces dalles peuvent être calculées d'après la méthode d'approximation de H. MARCUS, indiquée au paragraphe II, 5 c'est-à-dire dans le cas d'une dalle carrée reposant librement sur ses quatre bords et pour une charge q uniformément répartie, d'après la relation (11) donnant le moment au milieu :

$$M_m = \frac{q l^2}{27,4}$$

2. Dans le cas où, *exceptionnellement*, les dalles ne sont pas assemblées

1. Règlements de la Commission Allemande pour le Béton Armé. Partie A, chapitre 23. D.I.N. 1045. Dalles armées en croix.

d'une manière rigide avec les panneaux voisins ou avec des poutres de bordure (comme par exemple, dans le cas des deux dalles de couverture d'un puits, ou des angles libres d'une dalle de plancher), on peut faire intervenir le coefficient de réduction ν de l'équation (10) dans son intégralité, à condition d'assurer la sécurité des angles et la résistance aux moments de distorsion de la manière suivante : on prévoira, sur une largeur égale à $1/5 l_{\max}$, pour la face inférieure, parallèlement aux bords ou perpendiculairement à la direction de la diagonale et pour la face supérieure, parallèlement à la diagonale, la même section de fers d'armature, par mètre de largeur que celle que comporte la région le plus fortement armée (f_{ex}) du milieu de la dalle (armature fixe).

3. Dans le cas exceptionnel indiqué ci-dessus, on a encore la possibilité (par exemple lorsqu'il s'agit d'ouvrages simples) de renoncer à prévoir une armature spéciale de distorsion, en multipliant le moment $\mathcal{M}_{x \max}$ de l'équation (10) non plus par le coefficient de réduction ν lui-même, mais par le coefficient

$$\frac{1 + \nu}{2}$$

qui implique une réduction moins importante.

Dans le cas (voir équation (11)) d'une dalle reposant librement sur ses quatre bords, on a alors :

$$M_m = \frac{1 + \nu}{2} \cdot \mathcal{M}_{x \max} = \frac{1,584}{2} \cdot \frac{q l^2}{16} = \frac{1}{20,2} \cdot q l^2 = \text{environ } \frac{q l^2}{20},$$

valeur qui se trouve en concordance avec les résultats des essais sur les dalles calculées d'après la méthode de la décomposition en tranches (essais de Dresden).

Dans ce même cas exceptionnel, on peut également, en se basant sur un calcul exact des moments de distorsion, réaliser une économie sur les fers de distorsion, par rapport aux armatures fixes exigées sous (2) ; on pourra alors faire intervenir le coefficient de réduction ν dans son intégralité.

4. Pour les charges isolées, on peut de même employer la méthode d'approximation de H. MARCUS.

IX. Essais dynamiques des dalles.

A. Les buts des essais dynamiques.

L'étude dynamique des dalles peut tout d'abord répondre aux deux buts suivants :

1. *Détermination de la fréquence propre ν_0 d'oscillation de la dalle.* — Cette détermination peut permettre d'éviter les phénomènes de résonance qui pourraient se produire par suite des impulsions régulières de même fréquence que fournissent, par exemple, les vibrations communiquées par le sol ou par les charges constituées par des machines. L'étude théorique ne permet pas encore de déterminer d'une manière exacte les périodes d'oscillation propre des dalles ou des systèmes constitués par des dalles, en se basant uniquement sur des

considérations analytiques. Pour progresser dans cette voie, on devra tout d'abord déterminer les périodes propres d'ouvrages effectifs ; on étudiera ensuite les similitudes de ces ouvrages et de ceux que l'on se propose d'établir, ou de leurs éléments ; on pourra ensuite, en tenant compte de ces similitudes, déterminer l'ordre de grandeur des périodes propres cherchées. Une manière très simple de provoquer les oscillations des dalles consistera à faire tomber sur elles de petits corps pesants de dimensions appropriées ; l'enregistrement des oscillations, d'ailleurs très rapidement amorties, pourra se faire au moyen d'un sismographe sensible. Les mesures permettent également de déterminer l'importance de l'amortissement des oscillations fondamentales ; cette notion de l'amortissement permet de se faire une idée des résistances d'origines interne et externe au mouvement, ainsi que de l'état dans lequel se trouve la construction.

2. *Étude des déformations.* — On peut se proposer, en outre, de déterminer les déformations que subissent les systèmes constitués par des dalles sous l'influence de charges déterminées ; cette détermination permettra de contrôler les calculs et en particulier les hypothèses qui servent de point de départ. L'exécution d'essais de cet ordre suppose la connaissance préalable de la fréquence d'oscillation ; la fréquence d'excitation doit en effet être suffisamment au-dessous de la fréquence propre, afin que le rapport entre les amplitudes A dues aux efforts dynamiques et a dues aux charges statiques soit aussi faible que possible. Le diagramme de la figure 19 indique les variations du rapport $\frac{\omega}{\nu_0}$ de la fréquence d'excitation à la fréquence propre en fonction du rapport $\frac{A}{a}$ des amplitudes et du décalage φ de phases entre les oscillations d'excitation et les oscillations propres. Jusqu'à une valeur d'environ $\frac{\omega}{\nu_0} = 0,5$ on peut admettre que la dalle est pratiquement soumise à un régime statique de charge, car A et a sont très peu différents l'un de l'autre. Des oscillations de cet ordre peuvent provoquer les mêmes déformations que des charges statiques.

Cette méthode présente des avantages extrêmement importants par rapport aux mesures purement statiques, de déformations. Pour réaliser des charges statiques, il faut toujours faire intervenir des charges plus importantes, ce qui conduit souvent à de grosses difficultés pratiques et à des frais élevés. Il est, en outre, très difficile de trouver des appareils de mesure (systèmes de miroirs, tensomètres, etc.) qui soient parfaits et dont les repères ne se dérèglent pendant la durée des essais, par suite des influences calorifiques et des vibrations. Pour les essais dynamiques, il suffit en général d'une source d'excitation peu importante et d'ailleurs mobile ; les mesures au sismographe ne nécessitent pas un point de repère invariable.

B. Essais dynamiques de dalles effectués sur une construction.

Au cours de la construction de la nouvelle usine Ford de Cologne, des essais dynamiques ont été effectués pour le compte de la Commission Allemande du

Béton Armé, par le Bureau d'Essai et de Contrôle des Matériaux, de Dresde et par la Division de Mécanique de l'Institut Heinrich Hertz, de Berlin¹.

Le plancher-champignon de 52 cm. d'épaisseur ayant fait l'objet des essais est constitué par $3 \times 4 = 12$ panneaux carrés ; les appuis sont distants de 12,20 mètres (voir figure 20). Les observations ont été effectuées dans le panneau ABCD et les mesures ont porté sur la zone ABEF. La fréquence propre d'oscillation du plancher a été déterminée par la chute d'un poids de 70 kg., à partir d'une hauteur de 60 cent., et avec une fréquence $\nu_0 = 13,3$ hertz. Ensuite, le plancher a été soumis à un régime d'oscillations sinusoïdales de fréquence $\omega = 4,8$ hertz, au moyen d'une machine de mise en oscillation système LOSENHAUSEN, de Düsseldorf, machine à développer un effort d'excitation de 10 tonnes, à une fréquence maximum de 12 hertz.

On avait ainsi :

$$\frac{\omega}{\nu_0} = \frac{4,8}{13,3} = 0,36.$$

On a déterminé l'amplitude des oscillations en divers points et on a pu en déduire que l'effort dynamique correspondait à une charge statique isolée d'environ 1.600 kg. On a employé, comme appareils de mesure, un appareil à trois composantes des Askania-Werke, de Berlin, avec enregistrement photographique ainsi qu'un sismographe pour la mesure des composantes horizontales et verticales, avec enregistrement sur papier, modèle des Leunawerke de Merseburg. Les figures 21 a 21 b traduisent les résultats des mesures.

Si l'on compare la figure de déformation 21 b, qui correspond à l'action d'une charge statique isolée de 1.600 kg. avec les résultats trouvés par M. Roš et A. EICHINGER, de Zurich², par des mesures purement statiques effectuées sur le plancher-champignon de l'entrepôt de la Société pour l'Industrie Chimique, de Bâle (voir figure 22), on constate que les surfaces de déformation présentent une similitude d'allure complète. Malheureusement, les essais de Cologne ont été effectués dans des conditions très défavorables, peu de temps avant la mise en service des locaux et par conséquent dans la hâte de la fin des travaux. On n'a disposé que de deux jours, tant pour la préparation que l'exécution des essais. Au point de vue quantitatif, on ne peut donc considérer ces essais que comme des essais préparatoires, d'une exactitude assez limitée. Toutefois, au point de vue qualitatif, la comparaison avec les essais statiques de Roš-EICHINGER montre tout l'intérêt que présente l'essai dynamique des dalles et des planchers-champignons. Le développement ultérieur de cette méthode d'investigation peut contribuer à la détermination de la manière dont se comportent les différents éléments de construction sous l'action des efforts statiques et dynamiques et à résoudre les nombreuses questions qui se posent encore dans le domaine extrêmement important du béton armé.

1. L'idée de ces essais revient au Dr. Ing. REISINGER (Obercassel-Siekgkreis) et à la Deutsche-Beton-Verein. Les résultats des essais seront publiés prochainement par le Prof. GEHLER, de Dresde, et le Prof. HORT, de Berlin, dans une publication spéciale de la Commission Allemande du Béton Armé.

2. Voir le rapport présenté au cours du Premier Congrès International du Béton et du Béton Armé, Liège, 1930. Résultats de mesures de déformations et de tensions sur des dalles-champignons.

Zusammenfassung.

Die beiden hauptsächlichen Fragen bei der Bemessung der kreuzweise bewehrten Platten lauten : Wie gross ist die Riss- und Bruchsicherheit solcher Platten, ferner durch welches statische Berechnungsverfahren kann der verwickelte Spannungszustand in einer Eisenbetonplatte vor und nach der Rissbildung zweckmässig beschrieben werden und wie muss die Bewehrung bemessen und angeordnet sein ? Die bisherigen gebräuchlichen Rechnungsverfahren legen den Trägerrost, das Trägerkreuz oder die drillungssteife isotrope Platte mit festgehaltenen Ecken zu Grunde, die auch bei dem in den Deutschen Eisenbetonbestimmungen empfohlenen Näherungsverfahren von H. Marcus angenommen wird, wogegen im Schrifttum scharfe Einsprüche erhoben wurden.

Zuverlässige Grundlagen für die Bemessung können nur durch Bruchversuche mit Platten von baumässigen Abmessungen gewonnen werden. Der Deutsche Ausschuss für Eisenbeton hat Versuche mit insgesamt 82 Platten durchgeführt und zwar 1915 bis 1926 in Stuttgart mit Platten von 2 m Seitenlänge ohne Festhalten der Ecken und 1927 bis 1930 in Dresden mit Platten von zumeist 3 m Seitenlänge, die sowohl mit als auch ohne Festhalten der Ecken geprüft wurden.

Die Versuchsergebnisse sind im Bericht durch besondere Kennziffern übersichtlich dargestellt. Bis zur Risslast verhalten sich kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten wie isotrope Platten. Dehnungen und Spannungen wachsen linear mit der Belastung. Die Risslast ist im Mittel das 1,8-fache der Nutzlast, ist also etwa 3 mal so gross wie bei Eisenbetonbalken.

Nach dem Auftreten der ersten Risse bildet sich ein verwickelter Spannungszustand aus, der beim Bruch noch durch eine Membranwirkung der Platte überlagert wird. Die Bruchsicherheit ist 4- bis 5-fach, also etwa doppelt so gross wie bei Balken.

Ebenso wie im Stahlbau das Hookesche Gesetz als Grundlage für die Bemessungsrechnung angenommen wird, ist man hier berechtigt, kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten nach der Theorie der isotropen Platte zu berechnen und zu bemessen. Für den Sonderfall der quadratischen Platte darf man mit einem Mittenmoment von $\frac{1}{27,4} q l^2$ für drillungssteife, gegen Abheben der Ecken gesicherte Platten rechnen und mit $\frac{1}{20} q l^2$ für frei aufliegende, nicht eck-gesicherte Platten. Dies wurde durch Vergleichsversuche mit Plattenstreifen (Balken) bestätigt. Eingespannte Platten zeigen auch ohne besondere Drillungsbewehrung sehr hohe Sicherheiten gegen Rissbildung und Bruch.

Auf Grund dieser Versuchsergebnisse wurden die Plattenvorschriften der neuen Deutschen Eisenbetonbestimmungen aufgestellt.

Die *dynamische* Untersuchung von Eisenbetonplatten im Bauwerk, wie eine solche 1931 bei einem Fabrikgebäude in Köln vom Deutschen Ausschuss für

Eisenbeton erstmalig und versuchsweise durchgeführt wurde, gibt, bei entsprechender Wahl der Erregerfrequenz, dasselbe Formänderungsbild wie eine *statische* Belastung und ermöglicht es daher, mit einem kleinen und handlichen Schwingungsgerät grössere Belastungsversuche rasch und einfach durchzuführen.

Résumé.

Les deux principales questions que pose le calcul des dalles armées en croix sont les suivantes : Quelle est la sécurité que donnent de telles dalles contre les fissurations et la rupture, et en outre par quelle méthode de calcul statique peut-on définir d'une manière satisfaisante les conditions de charge compliquées auxquelles se trouve soumise une dalle en béton armé avant et après que les fissures apparaissent ? Comment l'armature doit-elle être calculée et réalisée ?

Les méthodes de calcul utilisées jusqu'à maintenant sont basées sur les dispositifs suivants : décomposition en poutres croisées en forme de grille, ou en deux poutres en diagonales, ou enfin calcul de la dalle isotrope résistant à la distorsion, avec fixation des angles. Ce sont ces dispositions qui sont adoptées dans la méthode de calcul approchée de H. MARCUS, préconisée dans les Règlements Allemands concernant le Béton Armé et contre laquelle de vives protestations s'élevaient dans la presse technique.

On ne peut arriver à des données de base qui soient satisfaisantes, en ce qui concerne le calcul, que par des essais de rupture portant sur des dalles ayant des dimensions répondant à celles que l'on rencontre en construction. La Commission Allemande pour le Béton Armé a effectué des essais portant sur un ensemble de 82 dalles. Les essais se sont poursuivis de 1915 à 1926, à Stuttgart, avec des dalles de 2 m. de côté, sans fixation des angles ; de 1927 à 1930, les essais eurent lieu à Dresde, avec des dalles ayant, pour la plus grande partie, 3 m. de côté, et qui ont été essayées tant avec que sans fixation des angles.

Les résultats des essais sont mis en évidence, dans le rapport correspondant, par des chiffres caractéristiques. Les dalles en béton armées en croix se comportent, jusqu'à la fissuration, comme des dalles isotropes. Les allongements et les efforts croissent linéairement avec les charges. La charge qui provoque la fissuration est, en moyenne, égale 1,8 fois la charge utile ; elle est donc environ trois fois plus grande que dans les poutres en béton armé.

Après l'apparition de la première fissure, la répartition des efforts devient compliquée et il s'y superpose encore, à la rupture, un « effet de membrane ». La sécurité à la rupture est 4 à 5, soit à peu près le double de celle que donnent les poutres en béton armé.

De même qu'en construction métallique, la loi de Hooke sert de base pour les calculs de dimensions, il est ici légitime de calculer les dimensions des dalles de béton armé munies d'armatures croisées d'après la théorie des dalles isotropes.

Dans le cas particulier des dalles carrées, on peut admettre un moment de

$\frac{1}{27,4} q l^2$ pour les dalles résistant à la torsion et qui sont protégées contre le détachement des angles de leur appui, et un moment de $\frac{1}{20} q l^2$ pour celles qui sont appuyées librement et dont les angles ne sont pas fixés. L'exactitude de ces chiffres fut confirmée par des essais de comparaison sur des éléments traités comme poutres et supposés découpés dans les dalles.

Les dalles encastrées, même lorsqu'elles ne sont pas munies d'armatures spéciales pour résister à la torsion, accusent une sécurité très élevée contre la fissuration et la rupture.

Les prescriptions concernant les dalles, dans les nouveaux Règlements Allemands sur le Béton Armé, ont été établies en se basant sur les résultats de ces essais.

L'étude de la manière dont se comportent les dalles en béton armé dans la construction, du point de vue *dynamique*, telle qu'elle a été effectuée par exemple, en 1931, pour la première fois, et sur des bases expérimentales, dans un bâtiment d'usine de Cologne par la Commission Allemande pour le Béton Armé, donne, pour un choix judicieux de la fréquence d'excitation, les mêmes types de déformations que pour une charge *statique*. Elle permet par suite d'exécuter rapidement et simplement avec un appareil d'essai d'oscillations simple et maniable, des essais en charge très étendus.

Summary.

The two principal questions in the dimensioning of cross-reinforced slabs are : How great is the security against the cracking and rupture of such slabs, further, through what static method of calculation can the complicated stressing in a reinforced concrete slab be suitably described before and after cracking occurs, and how must the reinforcement be dimensioned and arranged? The methods of calculation hitherto employed are based on the girder grillage-system girder cross-system or the non-twistable isotropic slab, which latter is also assumed in the approximation method of H. MARCUS recommended in the German reinforced concrete regulations ; it has met with severe criticism from several writers.

Reliable data for the dimensioning can only be obtained by tests to rupture on slabs of the sizes used in practice. The German committee for reinforced concrete has carried out tests on a total of 82 slabs ; these tests were made from 1915 to 1926 at Stuttgart with slabs 2 m long and without the corners being firmly held, and from 1927 to 1930 at Dresden with slabs mostly 3 m long, which were tested with and without the corners firmly held.

The results of the tests are shown in the report by means of special coefficients. Up to the breaking load, cross-reinforced concrete slabs behave like isotropic plates. Elongation and stressing increase directly in proportion to the load. The breaking load in the middle is 1.8 times the working load ; it is therefore about 3 times as great as in reinforced concrete beams.

After the first cracks appear, the stressing becomes complicated and at

rupture is again superimposed by a membrane action of the slab. The safety against rupture is 4 or 5 times, i.e. about twice as in beams.

Just as in steel construction, Hooke's law is taken as a basis for calculating the dimensions, and it is justifiable here to calculate and dimension cross-reinforced concrete slabs according to the theory of isotropic plates. In the particular case of the rectangular slab, an average moment of $\frac{1}{27,4} q l^2$ may be used for calculating non-twistable plates, whose corners are kept from rising, and $\frac{1}{20} q l^2$ for free-lying slabs with their corners also free. This was confirmed by comparative tests with plate strips (beams). Slabs firmly held show also very high safety against cracking and rupture, without any special reinforcement against twisting.

The rules for slabs of the new German Reinforced Concrete Regulations are based on the results of these tests.

The *dynamic* investigation of reinforced concrete slabs in structures, like that which was carried out for the first time and as an experiment in 1931 on a factory building in Cologne by the German Committee for Reinforced Concrete, gives, when the exciting frequency is suitably chosen, the same typical change of shape as under *static* load, and therefore makes it possible to carry out large-scale loading tests quickly and easily by means of small handy vibration apparatus.

II 3

THÉORIE DES DALLES A CHAMPIGNON

THEORIE DER PILZDECKEN

THEORY OF "MUSHROOM" SYSTEMS

Dr. M. T. HUBER,
Professeur à l'École Polytechnique de Varsovie.

I. Introduction.

Les « dalles à champignon » sont en général des constructions en béton armé, composées de hourdis horizontaux d'épaisseur constante et de piliers sur lesquels ils s'appuient et qui sont joints rigidement à eux. Les axes des piliers forment sur le plan des hourdis un réseau à mailles d'ordinaire rectangulaires ou carrées. Les fûts des piliers sont joints aux hourdis au moyen de chapiteaux qui s'élargissent considérablement vers le haut. Ce genre de construction est très avantageux par le fait qu'il se comporte comme un monolithe au point de vue de la stabilité, mais il rend difficile la détermination théorique des tensions et des déformations pour des charges données. Une autre difficulté théorique consiste dans le fait que le hourdis, en raison de son armature, ne se comporte pas exactement comme une plaque isotrope, et par conséquent, même pour des flèches insignifiantes, on ne devrait pas, au sens rigoureux, y appliquer l'équation différentielle de LAGRANGE :

$$(1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{B},$$

où p désigne la charge par unité de surface, B la rigidité au fléchissement cylindrique du hourdis, rapportée à l'unité de largeur de la section.

La théorie des plaques orthotropes^{4 à 9} qui tient compte de ce que les rigidités de flexion B_1 et B_2 dans deux directions perpendiculaires x et y de la plaque (l'armature étant supposée répartie uniformément) sont différentes, ne peut y remédier, car cette théorie ne correspond pas exactement non plus à la manière d'armer appliquée dans les hourdis des dalles-champignons. On sait que l'armature est plus dense le long des côtés et quelquefois aussi le long des diagonales de chaque panneau rectangulaire du hourdis disposé entre les quatre piliers les plus proches.

Cette théorie donne pour la surface élastique l'équation différentielle

$$(2) \quad B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p,$$

4 à 9. Voir l'annexe à la fin du rapport.

$$H \text{ étant égal à } \frac{1}{2} \frac{B_1}{m_2} + \frac{1}{2} \frac{B_2}{m_1} + 2C,$$

$\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}$ étant les constantes généralisées de Poisson,
 $2C$ la rigidité de torsion de la plaque.

Heureusement, dans ce qu'on appelle le premier stade (stade I) de la déformation de la dalle qui correspond à toutes les charges employées effectivement, les différences de résistance à la flexion pour les directions des différentes armatures sont tellement insignifiantes, qu'on ne commettra pas d'erreur grave en considérant la plaque comme isotrope. C'est pour cela que si l'on considère la plaque comme illimitée, chargée complètement et uniformément, on peut y appliquer la solution exacte de l'équation (1), d'après la méthode de NAVIER, qui consiste à se servir des séries de FOURIER. C'est M. LAVOINNE qui, en 1872, a le premier proposé cette solution¹. Une autre solution ancienne proposée par M. GRASHOF² et appliquée en 1913 par M. F. EDDY³ aux dalles-champignons ne peut être considérée que tout au plus comme une approximation assez grossière, parce qu'elle ne satisfait pas aux conditions limites pour l'effort tranchant.

La solution de M. LAVOINNE admet que les réactions du chapiteau rectangulaire sont réparties uniformément. En réalité, la répartition des réactions doit dépendre de la déformabilité du chapiteau, et la plaque se comporte, proprement dit, comme si elle était élastiquement encastrée autour du chapiteau.

En tâchant de résoudre le problème d'une manière exacte, on se heurte encore à la complication due à ce qu'on nomme « l'éclisse », c'est-à-dire au renflement de la plaque au-dessous et au-dessus du chapiteau (quelquefois aussi au-dessus de la plaque). Le contour de ce renflement est un carré, un octogone, etc. ; il sert à économiser une armature très forte autour du chapiteau du pilier. Cette éclisse (renflement) joue un rôle analogue à celui de la sellette des étais des poutres continues en bois.

Lorsqu'il s'agit d'une charge pour laquelle on peut considérer que la solution de M. LAVOINNE est satisfaisante, les piliers sur lesquels les hourdis s'appuient n'éprouvent qu'une simple compression sans qu'interviennent des moments fléchissants. Les cas des charges qui produisent les plus grands moments dans les piliers ont été étudiés, que je sache, pour la première fois par MM. N. J. NIELSEN¹⁰ et V. LEWE^{11, 12}.

Les solutions exactes de MM. LAVOINNE, LEWE, MESNAGER^{11a} et d'autres auteurs présentent des séries trigonométriques doubles qui sont pour la plupart trop compliquées pour permettre un calcul numérique pratique. Ce fait, à lui seul, prouve le besoin et l'utilité de théories et de méthodes approximatives. Le calcul des différences finies^{13 à 15}, surtout en connexion avec la méthode de M. H. MARCUS^{16, 17} qui a imaginé un intéressant modèle de « tissu élastique » (elastisches Gewebe), rendra un grand service dans ces théories.

L'importance et le besoin urgent de méthodes approchées dans la pratique découlent aussi de l'hétérogénéité des formes qui s'imposent pour des raisons de construction. Une certaine irrégularité inévitable du réseau des piliers ou bien des ouvertures dans le hourdis présentent des difficultés insurmontables

lorsqu'on s'efforce de résoudre le problème d'une manière exacte. C'est pour cela que, lorsqu'il s'agit d'applications pratiques immédiates, des méthodes approximatives simples, comme celles qui ont été proposées par MM. I. R. NICHOLS¹⁹, TURNEAURE et MAURER²⁰, MARCUS²¹ et d'autres, jouent un rôle important.

Toutes les théories qu'on a appliquées jusqu'à présent se rapportent aux tensions et aux déformations ayant lieu dans le stade I, c'est-à-dire à celles auxquelles participent les couches de béton qui s'étendent. Dans ce cas on peut, avec une grande approximation, considérer la rigidité au fléchissement de la plaque comme constante, car les écarts du béton par rapport à la loi de Hooke n'ont lieu presque exclusivement que dans le domaine des déformations permanentes (plastiques)^{22 à 26}. Cependant, si, conformément à la tendance de tous les calculs de résistance nous allions chercher les tensions et les déformations qui correspondent à la charge limite, nous nous heurterions à des difficultés considérables, même dans la conception théorique du problème. Dans le stade II, la rigidité au fléchissement B diminue considérablement et reste de nouveau invariable, presque dans l'intervalle entier. Cette nouvelle valeur de B ne se rapporte pas à la surface entière de la plaque; certaines portions pour lesquelles les valeurs des moments sont petites, conservent la valeur précédente de B . C'est pourquoi la plaque se comporte ensuite comme si elle était composée de parties dont les rigidités seraient différentes²⁷.

Évidemment, le principe de superposition cesse de s'appliquer dans le stade II, et par conséquent, au sens rigoureux, aucune équation différentielle linéaire d'une surface élastique n'est plus applicable. Néanmoins, un programme d'études théoriques futures, qui consiste à décomposer la charge totale en deux parties, paraît possible (fig. 1). La première partie Q' (la rigidité au fléchissement étant B') provoque des flèches w' et des tensions σ' qui correspondent à la fin du stade I, l'autre partie $Q-Q'$ provoque des flèches supplémentaires $w-w'$ et des tensions supplémentaires $\sigma-\sigma'$ qui leur sont proportionnelles (le coefficient de proportionnalité n'étant plus le même) et qui correspondent à une nouvelle rigidité au fléchissement \bar{B} plus faible du stade II. Au stade I, nous appliquons l'équation différentielle de la théorie; au stade II également, mais seulement pour les charges et les flèches supplémentaires.

Cependant, lorsque nous augmentons encore la charge, en passant au stade III, c'est-à-dire lorsque nous approchons la charge limite (charge de destruction), le diagramme théorique lui-même ne subsiste plus, car d'ordinaire les flèches deviennent si considérables, qu'elles produisent des réactions d'extension dans la plaque. Ces réactions empêchent un accroissement correspondant des flèches, c'est pourquoi la charge destructive est plus grande qu'on ne l'aurait supposé. On a constaté ceci depuis longtemps, non pas pour des dalles-champignons, mais pour des constructions en béton armé qui sont conçues d'une manière analogue.

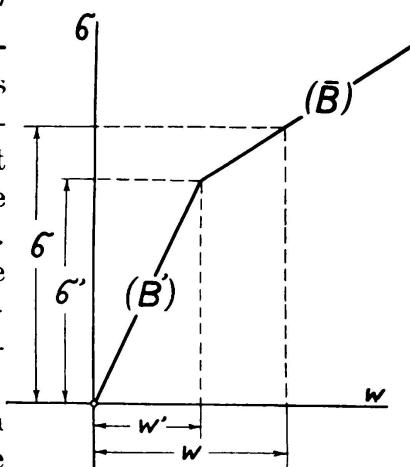


Fig. 1.

II. Théories basées sur les solutions exactes de l'équation du fléchissement des plaques isotropes « minces ».

1. La solution de M. LAVOINNE, dont il a déjà été question et qui a été ensuite trouvée indépendamment par M. LEWEE, donne l'équation de la surface élastique pour une charge totale et uniforme d'une plaque illimitée d'épaisseur constante h , lorsqu'on suppose ce qui suit : les piliers sur lesquels les hourdis s'appuient divisent la plaque en panneaux rectangulaires qui se touchent, de longueur $2a$ et de largeur $2b$ (fig. 2).

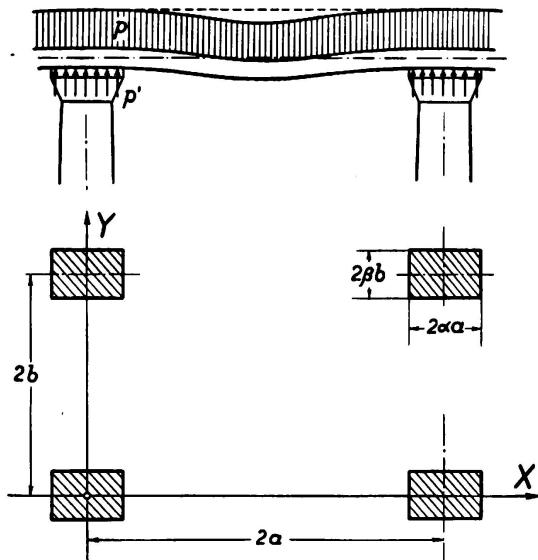


Fig. 2.

Les chapiteaux des piliers sont en contact avec la dalle suivant des aires également rectangulaires, orientées de la même manière, et dont les dimensions sont $2a'$ et $2b'$. Nous admettons que les réactions des chapiteaux sont réparties uniformément, donc définies par la charge de l'unité de surface

$$p' = p \frac{a b}{a' b'}, \text{ ou } p' = \frac{p}{\alpha \beta}$$

en posant $a' = \alpha a$, $b' = \beta b$.

Les ordonnées de la flèche w , comptées à partir du plan horizontal passant par le milieu de la face supérieure du

chapiteau (comme origine du système x, y), sont alors déterminées par la formule (3), (en posant $x = a \xi$, $y = b \eta$) :

$$(3) \quad w = \frac{2p}{\pi^4 B} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^4}{m^4} \cdot \frac{\sin m \pi \alpha}{m \pi x} (1 - \cos m \pi \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{\sin n \pi \beta}{n \pi y} (1 - \cos n \pi \eta) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin m \pi x \cdot \sin n \pi \beta}{m \pi x \cdot n \pi \beta} \cdot \frac{1 - \cos m n \xi \cdot \cos n \pi \eta}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \right]$$

On en tire les formules (4) pour les moments « suppléants » :

$$(4a) \quad \dots \quad M_1' = -B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{2p a^2}{\pi^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{\sin m \pi \alpha}{m \pi x} \cdot \cos m \pi \xi + 2b^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 \cdot \frac{\sin m \pi \alpha \cdot \sin n \pi \beta}{m \pi x \cdot n \pi \beta} \cdot \frac{\cos m \pi \xi \cdot \cos n \pi \eta}{(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} \right]$$

$$(4b) \quad \dots \quad M_2' = -B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{2p b^2}{\pi^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\sin n \pi \beta}{n \pi y} \cdot \cos n \pi \eta + 2a^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\sin m \pi \alpha \cdot \sin n \pi \beta}{m \pi x \cdot n \pi \beta} \cdot \frac{\cos m \pi \xi \cdot \cos n \pi \eta}{(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} \right]$$

On voit que d'après la théorie des plaques minces, les moments véritables sont déterminés par les formules (5), ν étant la constante de POISSON (au lieu de $\frac{1}{m}$). Les efforts tranchants sont déterminés par les formules (6). Enfin nous calculons les moments de torsion D d'après la formule (7).

$$(5) \quad \begin{cases} M_1 = M'_1 + \nu M'_2 \\ M_2 = M'_2 + \nu M'_1 \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} V_1 = \frac{\partial}{\partial x} (M'_1 + M'_2) \\ V_2 = \frac{\partial}{\partial y} (M'_1 + M'_2) \end{cases}$$

$$(7) \quad D = B(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Les valeurs des moments dans le cas de panneaux et de chapiteaux carrés, et calculées d'après ces formules, sont représentées par les graphiques des fig. 3 et 4, empruntés en partie à la monographie importante de MM. WESTERGAARD et SLATER²⁸. Ces graphiques font voir clairement combien il est avantageux d'augmenter les chapiteaux. On diminue ainsi considérablement, non seulement les moments, mais aussi les efforts tranchants.

2. M. V. LEWE¹² a encore donné des solutions semblables pour de nombreux cas de charge d'une plaque illimitée, cas qui sont importants au point de vue pratique. En outre, il a calculé des tables qui facilitent beaucoup les applications. A l'exception d'un cas dans lequel $b : a = 2$, tous les autres se rapportent à un réseau carré de piliers, celui-ci étant le plus simple et le plus avantageux. On a toujours adopté des chapiteaux carrés, le rapport α étant de $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$; on a ensuite adopté également le rapport $\alpha = \frac{1}{3}$.

Il existe une solution qui est particulièrement importante; c'est celle pour laquelle la charge est la plus désavantageuse pour la construction entière de la dalle-champignon, ce qui est le cas lorsque les panneaux disposés entre des rangées parallèles de piliers sont chargés alternativement. Des moments de réactions apparaissent alors dans les chapiteaux. Dans l'hypothèse la plus simple au sujet de leur répartition, d'après la fig. 5, M. LEWE trouve la solution générale exacte semblable à (3) et il calcule une table pour le cas $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$; $a = b$.

3. Les solutions qu'on a trouvées pour une plaque illimitée ne sont évidemment plus justes lorsque la plaque est appuyée non pas seulement par le système de piliers, mais aussi le long des bords par les parois du bâtiment (fig. 6). Lorsque la projection horizontale de la dalle est un rectangle et que l'appui linéaire des bords ne permet pas que les coins de la plaque se soulèvent, il est souvent possible de trouver une solution exacte par une superposition de solutions particulières, comme on en trouve dans les travaux de MM. ESTANAVE²⁹, B. G. GALERKIN^{30 à 33}, H. HENCKY³⁴, M. T. HUBER^{5, 7}, H. LEITZ^{33, 36}, V. LEWE^{11, 12}, A. MESNAGER³⁷, A. NÁDAI³⁸, S. TIMOSHENKO³⁹ et d'autres auteurs⁴⁰.

Le cas d'un contour circulaire a été traité récemment par MM. W. FLÜGGE⁴¹ et K. HAJNAL-KÓNYI⁴².

L'encastrement des bords de la plaque rend très difficile la recherche de solutions exactes pour des plaques rectangulaires, mais il la facilite lorsqu'il s'agit de plaques circulaires.

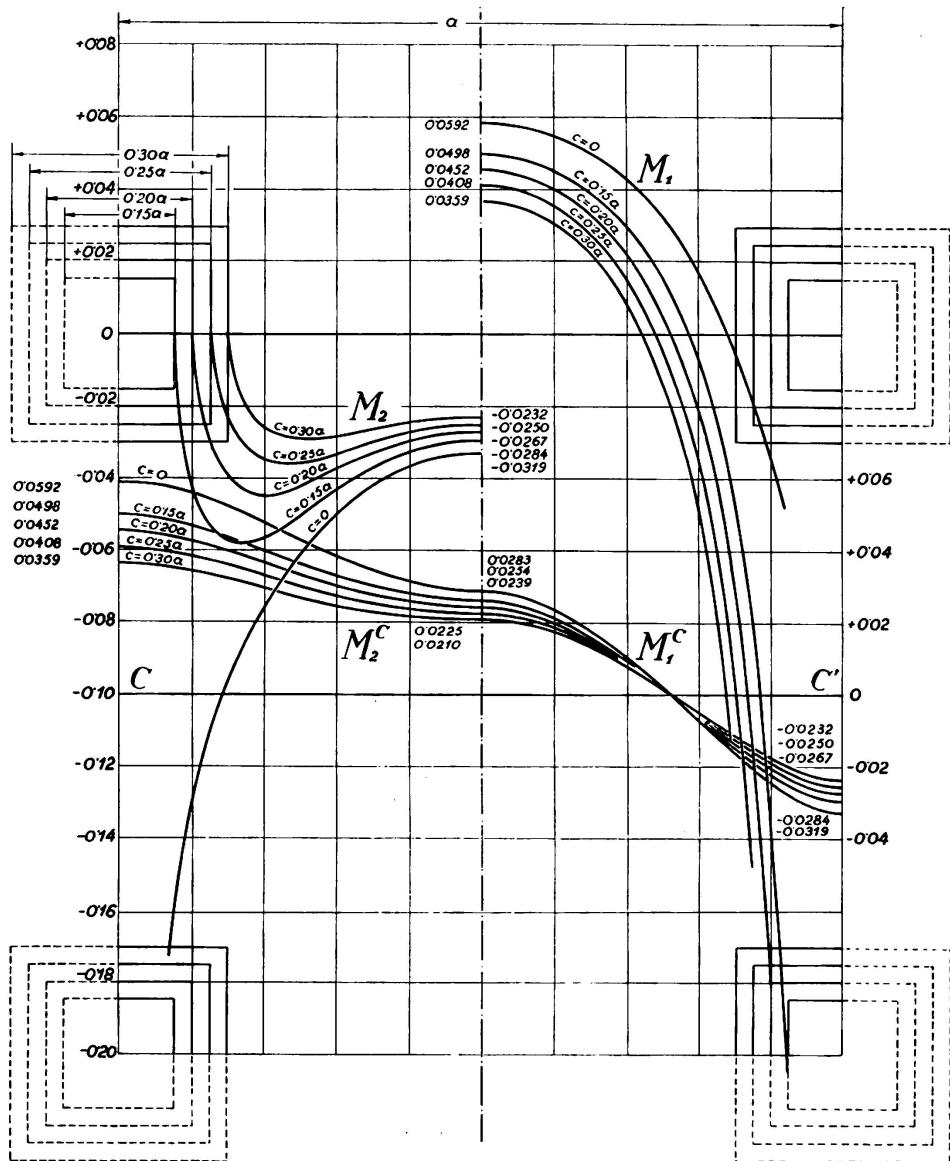


Fig. 3. — Coefficients ($= M/q a^2$) des moments fléchissants « supplémentaires » dans un panneau carré à l'intérieur d'une dalle chargée uniformément.

— Beiwerte ($= M/q a^2$) der Ersatzmomente in einem quadratischen Mittelfeld der gleichförmig belasteten unendlichen Pilzdecke.

— Coefficients of Bending Moments in a Square Panel in the Interior of a uniformly loaded Flat Slab.

Moments le long du bord (M_1) et de la ligne médiane (M_1^c). — Die Ersatzmomente längs der Seite (M_1) und längs des Medianschnittes (M_1^c). — Moments along the Edge (M_1) and the Centre Line (M_1^c).

Moments en travers du bord (M_2) et de la ligne médiane (M_2^c). — Die Ersatzmomente quer zur Seite (M_2) und quer zum Medianschnitte (M_2^c). — Moments across the Edge (M_2) and the Centre Line (M_2^c).

On peut d'ordinaire simplifier considérablement le calcul en admettant que les réactions des piliers agissent comme des forces et des moments concentrés en un même point; mais on ne trouve alors qu'une approximation de la

solution exacte. Cette approximation est tout à fait satisfaisante pour la portion entière de la plaque qui reste lorsqu'on en élimine les surfaces des chapiteaux, et qu'on peut prévoir aisément en vertu du principe de SAINT-VENANT.

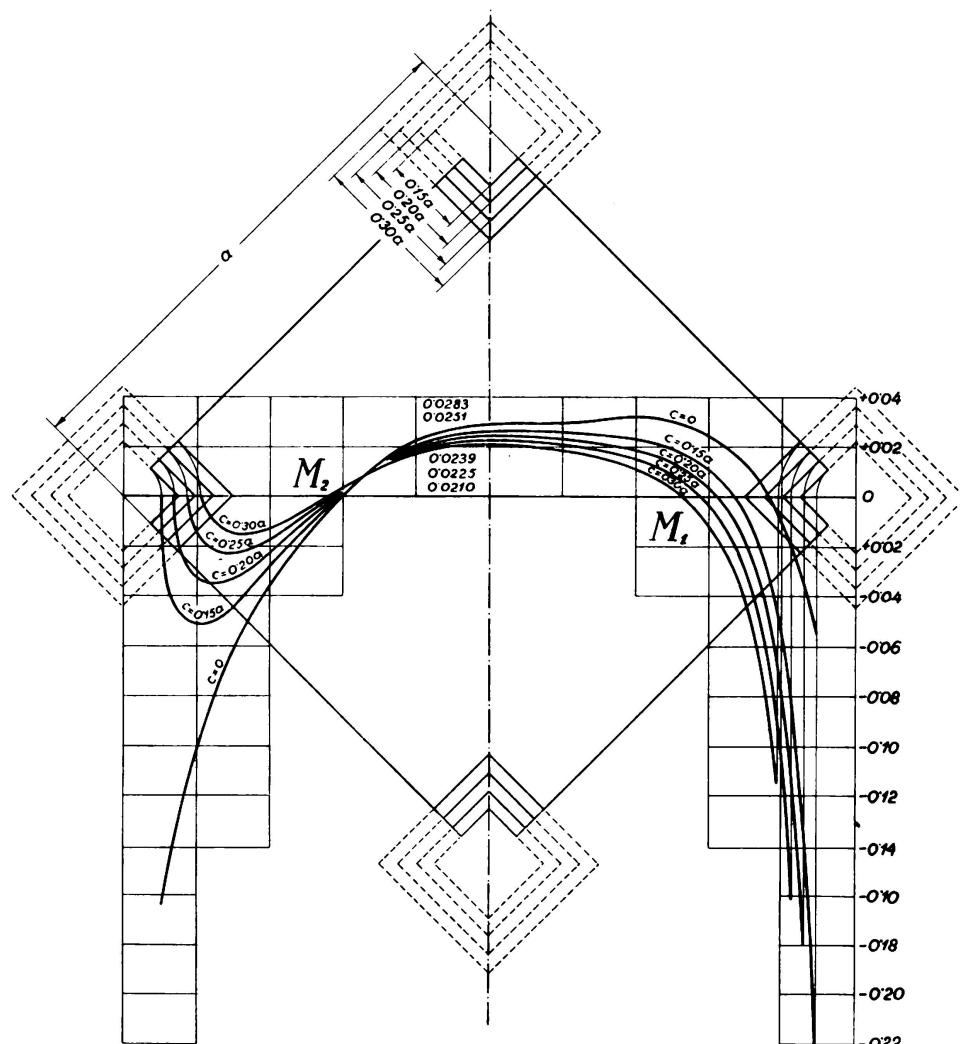


Fig. 4.

Moments le long des diagonales (M_1) et dans des sections perpendiculaires (M_2).

Die Ersatzmomente längs des Diagonalschnittes (M_1) und quer dazu (M_2).

Moments along the Diagonals (M_1) and across them (M_2).

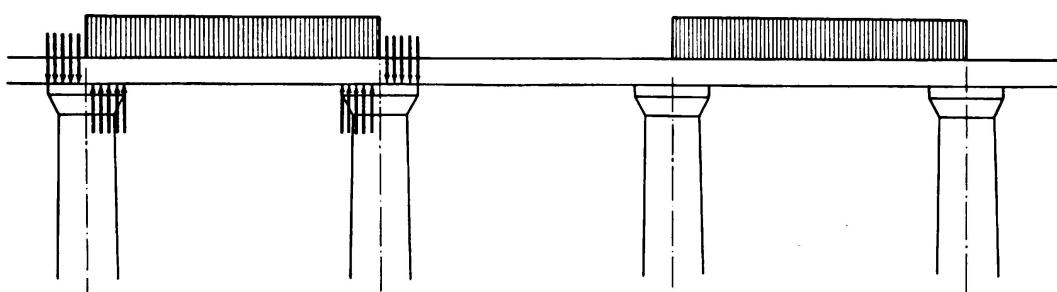


Fig. 5.

Nous citerons ici deux solutions auxiliaires pour les formes du contour de la dalle qu'on vient de nommer.

a) Contour rectangulaire appuyé (fig. 7). La charge P est concentrée au point (x_1, y_1) . La rigidité du fléchissement de la plaque dans les éléments longitudinaux parallèles à l'axe des X est égale à B_1 , dans les éléments perpendiculaires, à B_2 . En posant :

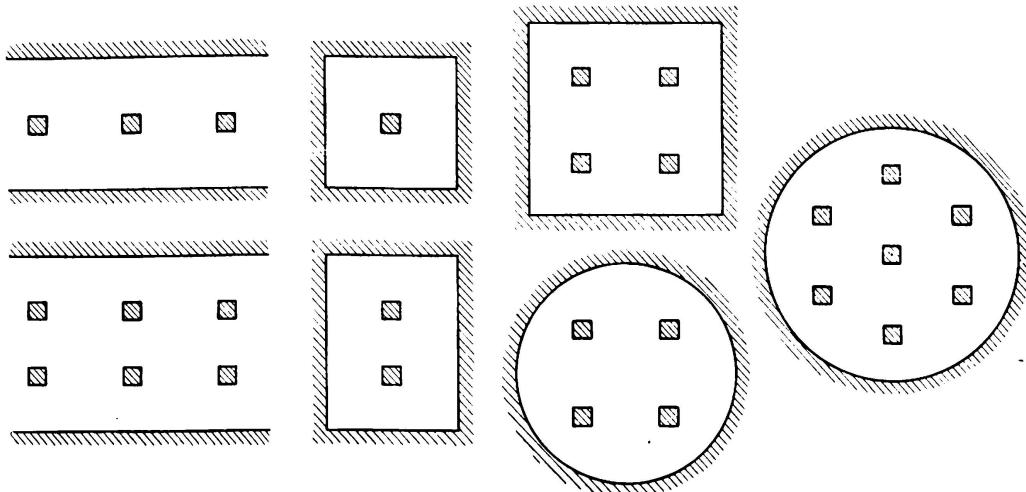


Fig. 6.

gitudinaux parallèles à l'axe des X est égale à B_1 , dans les éléments perpendiculaires, à B_2 . En posant :

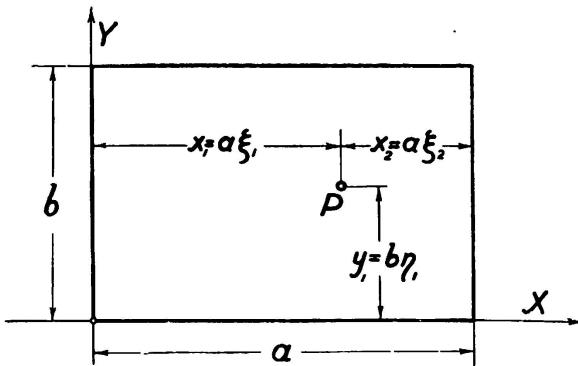


Fig. 7.

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \eta_1 = \frac{y_1}{b}, \quad \xi_2 = 1 - \xi_1; \quad \varepsilon = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}}$$

nous trouvons pour $\xi \leq \xi_1$:

$$(8) \quad w = \frac{P b^2}{\pi^3 B_2} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1 + n \pi \varepsilon \operatorname{Cth} n \pi \varepsilon - n \pi \varepsilon \xi_2 \operatorname{Cth} n \pi \varepsilon \xi_2 - n \pi \varepsilon \xi \operatorname{Cth} n \pi \varepsilon \xi) \frac{\operatorname{Sh} n \pi \varepsilon \xi_2 \cdot \operatorname{Sh} n \pi \varepsilon \xi}{\operatorname{Sh} n \pi \varepsilon} \cdot \sin n \pi \eta_1 \sin n \pi \eta$$

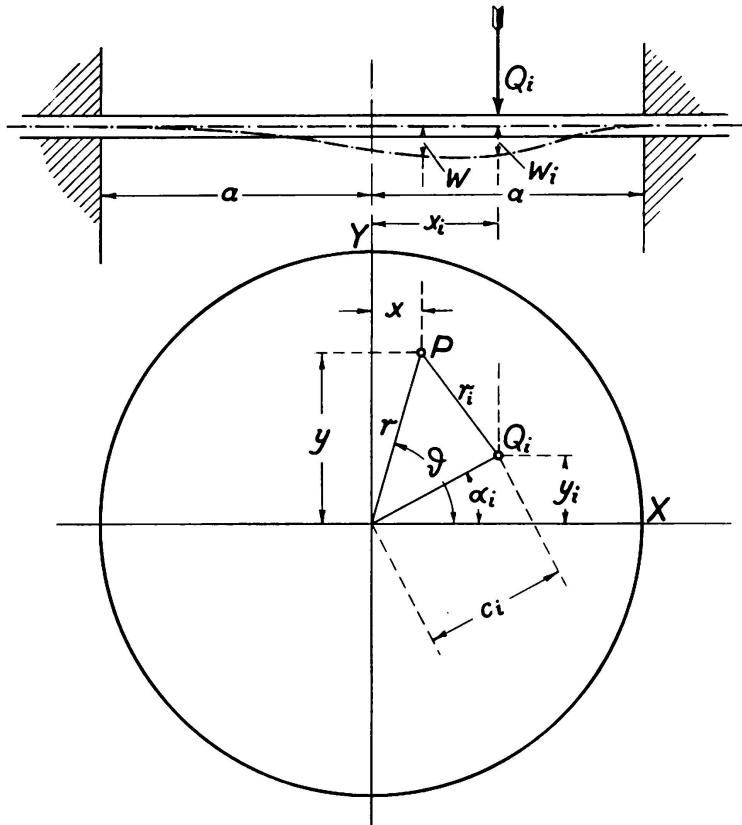
Pour $\xi \geq \xi_1$ il faut remplacer dans cette équation ξ_2 par ξ_1 .

b) Contour circulaire (fig. 8) d'une plaque isotrope. Lorsque le bord est parfaitement encastré, et en admettant la signification des lettres indiquée sur la figure, on peut représenter la flèche par la formule relativement simple ⁴³ :

$$(9) \dots w = \frac{Q_i a^2}{16 \pi B} \left\{ (1 - \gamma_i^2)(1 - \rho^2) - \rho_i^2 \log \operatorname{nat} \left[1 + (1 - \gamma_i^2)(1 - \rho^2) \frac{1}{\rho_i^2} \right] \right\}$$

Pour la flèche dans un point supportant la force concentrée Q_i , on trouve d'après l'équation (9) la formule :

$$(10) \dots \dots \dots w_i = \frac{Q_i a^2}{16 \pi B} \cdot \left(1 - \frac{c_i^2}{a^2} \right)^2$$



$$\gamma_i = \frac{c_i}{a}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\rho = \frac{r}{a}$$

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

$$\rho_i = \frac{r_i}{a}$$

$$r_i^2 = c_i^2 + r^2 - 2c_i r \cos(\vartheta - \alpha_i)$$

Fig. 8.

En vertu de la condition que dans les points d'appui les flèches dues aux charges doivent être annulées par des flèches dirigées vers le haut dues à des forces inconnues X_i , nous trouvons ces forces comme réactions des piliers.

Lorsque le contour circulaire de la plaque est appuyé et que les piliers sont disposés symétriquement par rapport au centre, on peut trouver une solution avec une grande approximation, en composant les flèches calculées, en tenant compte de l'encastrement du bord, avec celles qui sont dues aux moments d'encastrement de signes contraires, si l'on admet que ceux-ci sont répartis uniformément.

III. Théories basées sur des solutions approximatives pour des flèches de plaques isotropes minces.

La principale méthode générale pour trouver des solutions approximatives consiste à remplacer l'équation différentielle (1) pour la flèche de la plaque par une équation à différences finies. En divisant la plaque en un réseau de carrés dont les longueurs finies des côtés sont λ (fig. 9), et en désignant par p_1 la charge par unité de surface du carré hachuré dont le milieu se trouve au point 1, nous trouvons pour la surface élastique l'équation suivante à différences finies :

$$(11) \dots 20w_1 - 8(w_2 + w_3 + w_4 + w_5) + 2(w_6 + w_7 + w_8 + w_9) + \\ + w_{10} + w_{11} + w_{12} + w_{13} = \frac{\lambda^4 p_1}{B}$$

Cette équation fut appliquée par M. N. S. NIELSEN, dans son important mémoire ¹⁰ cité plus haut, à la solution d'une série de problèmes de fléchissement de plaques, et en particulier de dalles-champignon. Les solutions de M. NIELSEN s'accordent très bien avec les résultats qu'on obtient en intégrant l'équation différentielle de LAGRANGE, sauf, bien entendu, pour les points supportant une force unique. Ce côté faible ne diminue cependant pas la valeur pratique de la méthode, car les charges effectives sont toujours réparties sur une surface finie.

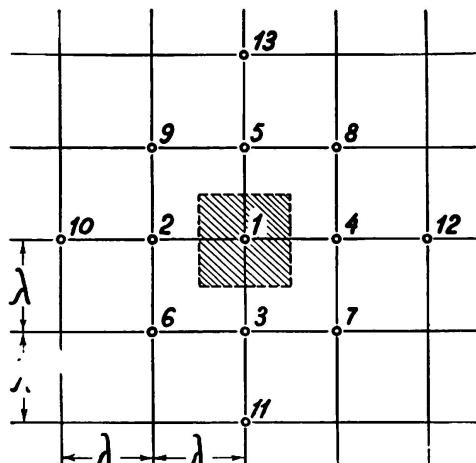


Fig. 9.

Nous devons une importante simplification de l'application du calcul des différences finies à la méthode du tissu élastique de M. H. MARCUS ¹⁷, dont on a déjà parlé. Cette méthode consiste à combiner l'équation différentielle pour la flèche de la plaque sous la forme de :

$$(12)^* \dots \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{B} \quad \left(\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

avec l'équation différentielle de la surface élastique d'une membrane, d'abord plate et tendue uniformément par un effort de S kg/cm, et infiniment faiblement enfoncé par une charge de p' kg/cm², perpendiculaire au plan de la membrane, c'est-à-dire avec l'équation :

$$\nabla^2 w' = - \frac{p'}{S}$$

Comme dans la théorie des plaques

$$(13) \dots \nabla^2 w = - \left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{1}{\rho_y} \right) = - \frac{M'_1 + M'_2}{B} \equiv - \frac{M}{B}$$

* ∇^2 = Désignation anglaise et allemande pour Δ .

est l'invariant qui détermine la courbure moyenne de la surface élastique, nous écrirons donc, en substituant $M = w'$, l'équation du fléchissement de la plaque sous la forme :

$$(14) \dots \nabla^2 w' = -p$$

Rigoureusement parlant, ceci n'est autre chose que l'équation du fléchissement d'une membrane tendue à 1 kg/cm et chargée comme la plaque.

En intégrant cette équation, nous trouvons la répartition des moments M sur la surface de la plaque. Maintenant, nous considérons M comme la charge par unité de surface d'une autre membrane tendue avec un effort égal à B , conformément à l'équation (13); la flèche de cette membrane donne en même temps celle de notre plaque.

M. MARCUS remplace par approximation le dispositif de la membrane tendue d'une manière continue par un tissu à mailles finies chargé seulement dans les noeuds. Les fils rectilignes de tissu s'appliquent tangentiellement à la surface élastique, tout comme les côtés d'un polygone funiculaire à la ligne de fléchissement d'une poutre, selon l'analogie de MOHR. La structure du tissu peut être différente, suivant le contour de la plaque. Le système du tissu permet de remplacer les équations différentielles (13) et (14) par des équations à différences finies, sous la forme :

$$(15) \dots 4w_1 - (w_2 + w_3 + w_4 + w_5) = \frac{\lambda^2 p_1}{B},$$

qui sont beaucoup plus commodes à appliquer que les équations citées au début de ce paragraphe (voir fig. 9).

C'est d'après cette méthode que M. MARCUS a calculé la répartition des moments dans une dalle-champignon pour une série de cas d'appui et de charge importants au point de vue pratique. Ces calculs ont servi à justifier une méthode pratique approximative qu'on nomme *méthode des cadres suppléants*¹⁷, admise par les règlements officiels allemands de 1925, si l'auteur du projet n'applique pas les résultats exacts de la théorie des plaques isotropes ou des tissus élastiques.

IV. Le rôle des piliers dans la théorie des dalles-champignons et la méthode approchée des cadres suppléants.

Le calcul aussi exact que possible des efforts dans les piliers sous l'influence des charges prévues pour la dalle est tout au moins aussi important pour la sécurité de celle-ci que le calcul des efforts dans la plaque. Il faut en même temps tenir compte de ce que la répartition la plus désavantageuse de la charge utile est différente par rapport à la plaque et par rapport au pilier.

C'est ici que se pose l'important problème des surfaces d'influence, lequel, que je sache, n'a pas été traité jusqu'à présent d'une manière exacte au point de vue théorique. Bien que les mesures des flèches et des tensions aient été effectuées au cours de nombreuses recherches expérimentales, surtout aux États-Unis²⁸, où les dalles-champignons se sont répandues plus tôt que dans

les autres pays, nous devons néanmoins le premier essai de détermination expérimentale des surfaces d'influence des flèches et des moments, aux recherches de MM. Roš et EICHINGER, effectuées en 1925-1929 ⁴⁴.

Cependant, ces recherches ne s'occupent que des panneaux qui touchent immédiatement le panneau étudié. Mais il n'est pas difficile de prévoir que, s'il agit des moments au milieu des panneaux et au milieu de leurs côtés, il faudrait tout au moins étudier également l'influence de la charge du troisième panneau voisin du panneau étudié. Il serait fort désirable que les mesures fussent complétées dans ce sens ; il est vrai que ceci demande un très gros travail.

Les moments dans la plaque, autour du chapiteau, diminuent évidemment à mesure que le diamètre de celui-ci croît, et elles atteignent leur valeur maximum lorsque tous les panneaux sont chargés. C'est pourquoi la surface d'influence n'aurait pour eux qu'une importance pratique minime. La surface d'influence

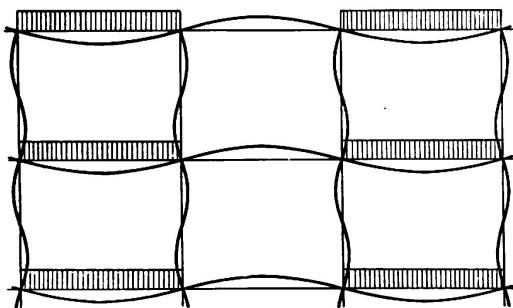


Fig. 10.

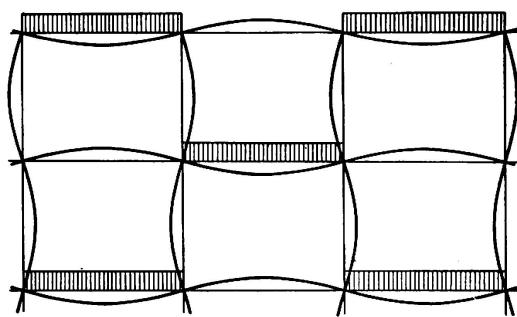


Fig. 11.

serait par contre fort importante pour les moments dans les piliers, mais sa détermination expérimentale serait encore plus difficile. Ce serait d'ailleurs une surface composée d'autant de parties qu'il y a d'étages dans le bâtiment. Une étude de ce genre confirmerait probablement l'avis de tous les spécialistes que la charge la plus désavantageuse par rapport aux piliers correspond bien au schéma de la fig. 10. Par contre le schéma de la fig. 11 correspond aux valeurs maxima des moments positifs des parties médianes des panneaux chargés.

Les moments de l'encastrement des chapiteaux dans la dalle peuvent être très exactement calculés, en prenant pour base la solution de M. LEWE, citée en II.2, d'après la condition que l'angle d'inclinaison de la section du pilier au sommet du chapiteau est égal à l'angle d'inclinaison de l'élément de la plaque qui y est superposée (LEWE, 1926, p. 52-54). On peut prévoir, même sans calcul, que la grandeur de ce moment M_c dépend surtout du rapport de la rigidité au fléchissement de la plaque B, à la rigidité relative du pilier, c'est-à-dire $\frac{EJ_c}{H}$. (J_c désigne le moment d'inertie de la section du pilier, H sa hauteur.)

Lorsque ce rapport $\nu = \frac{BH}{EJ_c}$ croît, M_c décroît. M_c doit encore dépendre de la position du point zéro des moments sur l'axe du pilier; donc du schéma de la charge des étages, et encore de ce que la base du pilier peut être encastrée ou bien seulement librement appuyée.

S'il n'est pas possible d'adopter la division la plus avantageuse de la dalle en panneaux carrés, et si l'on a des panneaux rectangulaires de largeur $2b$ dans la direction de l'axe des Y, de longueur $2a$ dans la direction de l'axe des X, b étant $< a$, en diminuant le rapport $\frac{b}{a}$ nous nous approchons des conditions d'une plaque continue à travées égales. Si l'on imagine une zone d'une telle plaque découpée par des sections parallèles à X qui partagent en deux les portées les plus petites des deux côtés d'une rangée de piliers, cette zone se comporte, avec une grande approximation, comme une poutre continue posée sur des supports larges équidistants et qui réagissent élastiquement. Les dalles de tous les étages et les piliers peuvent être remplacées par le système approché d'un portique à plusieurs étages. Ceci n'est évidemment admissible que lorsque les charges portées par les différentes zones sont égales (fig. 12 a, b). Pour d'autres charges, par ex. pour des charges disposées en échiquier (fig. 12, c), un système de ce genre ne conviendrait pas.

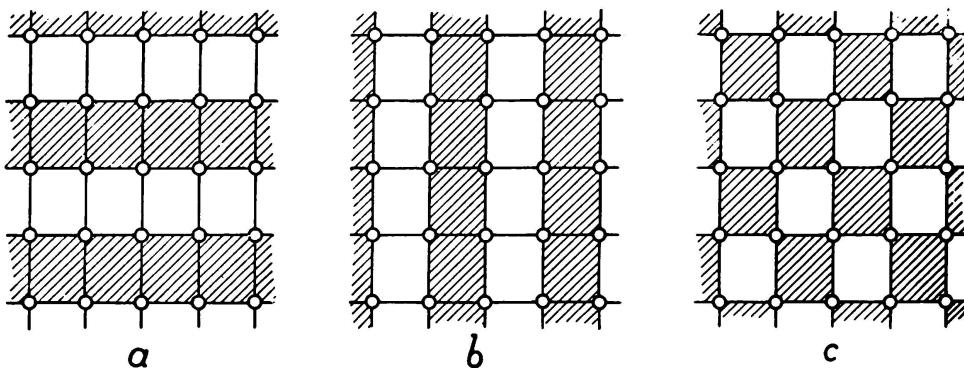


Fig. 12.

M. MARCUS affirme dans son livre qu'une charge disposée en échiquier donne pour les moments dans la plaque, des valeurs limites plus faibles qu'une charge alternée de rangées de panneaux (fig. 12, a, b), et c'est pour cela qu'il propose d'appliquer un portique fictif lorsqu'il s'agit de tous les rapports $a : b$ employés en pratique. Il y a par conséquent, pour chaque dalle-champignon, deux systèmes de portiques fictifs, perpendiculaires entre eux. Ce système est tout à fait analogue au système des plaques rectangulaires que M. MARCUS recommande pour le calcul approximatif de ces plaques, d'après les règlements officiels allemands. Il s'agit ici d'un damier fictif, formé par des zones de la plaque qu'on a découpée d'abord parallèlement au côté $2a$, et ensuite parallèlement au côté $2b$. De nombreux théoriciens sont choqués par le caractère factice de tels systèmes; on s'en sert néanmoins depuis longtemps en pratique, de même que l'on utilise, par exemple, des charges fictives pour calculer les poutres des ponts. Le remplacement d'une dalle-champignon par deux systèmes de portiques permet de se servir des méthodes du calcul de tels portiques qui sont perfectionnées et simplifiées depuis longtemps, et c'est pourquoi le système du portique fictif est bien accueilli par les constructeurs. Les moments dans la plaque fournis par le calcul doivent évidemment être répartis entre la zone des piliers et la zone intermédiaire entre les piliers, dans le rap-

port que déterminent les résultats de la théorie des plaques. Les règlements officiels allemands contiennent des formules simplifiées convenables.

V. Autres méthodes approximatives.

La seconde décade du siècle présent a apporté de nombreux essais d'application de la méthode de RAYLEIGH-RITZ à la solution des problèmes de plaques et par conséquent aussi de dalles-champignons. On a trouvé par ex., dans les cas de plaques appuyées sur les bords, des résultats complètement en accord avec les solutions exactes de l'équation différentielle de LAGRANGE, lorsqu'on posait un nombre infini de paramètres dans le développement de $w = f(x, y)$ suivant les fonctions satisfaisant aux conditions des bords. En n'introduisant

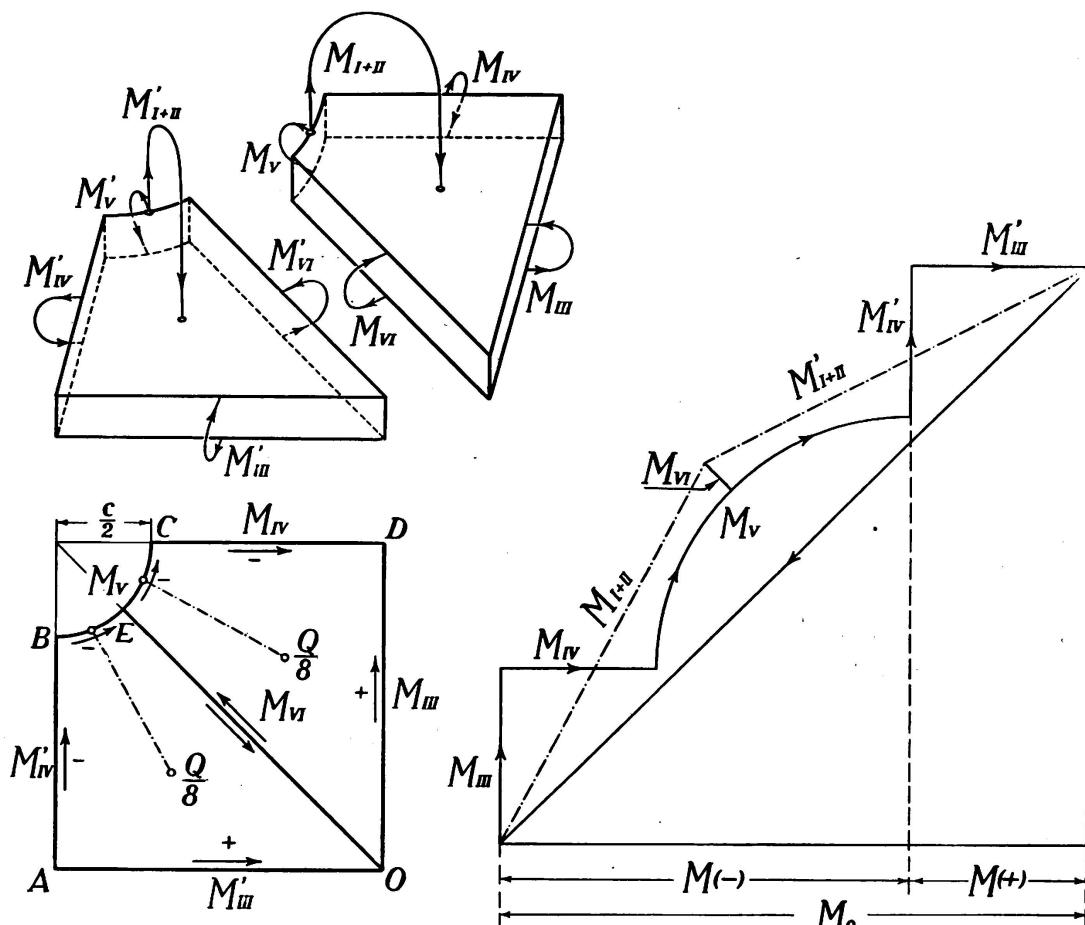


Fig. 13. — Graphique représentant l'équilibre des forces et des moments qui agissent sur un huitième ou un quart d'un panneau carré.

Das Gleichgewicht der Kräfte und Momente, welche ein Oktant und ein Quadrant eines quadratischen Deckenfeldes angreifen.

Diagram showing the Equilibrium of the Forces and Couples acting on an Octant and a Quadrant of a Square Panel.

que peu de paramètres, on trouvait néanmoins des approximations assez bonnes. Les efforts pour résoudre par cette méthode le problème des dalles-champignons n'ont cependant pas eu de succès, comme nous le savons maintenant. Nous renonçons à discuter les causes de ce fait, car cela nous demanderait des développements mathématiques étendus; nous nous bornons à cette brève mention,

sans citer les ouvrages qui s'y rapportent et dont on trouvera une appréciation dans l'ouvrage de M. V. LEWE¹².

Avant qu'on ait trouvé et appliqué les solutions exactes de la théorie dont il a été question dans les par. II et III, les ingénieurs praticiens des différents pays ont essayé de se rendre compte des tensions dans les dalles-champignons, au moins avec une approximation grossière, en se basant sur les plus simples considérations statiques. Les méthodes ainsi élaborées n'ont à présent qu'une valeur historique, la théorie ayant fait des progrès considérables ; c'est pour cela que nous pouvons nous borner à ne présenter ici que le principe théorique de l'une de ces méthodes, élaborée aux États-Unis et peu connue sur le continent européen. Ce schéma a été le point de départ des règlements officiels américains pour le calcul des dalles à champignon¹⁹.

En admettant une plaque illimitée et divisée en panneaux carrés, la surface étant chargée uniformément, et les chapiteaux des piliers étant circulaires, on considère l'équilibre de deux huitièmes du panneau, que l'on imagine découpés et qui sont représentés dans la fig. 13. Si l'on désigne par Q la surcharge du panneau total, celle de chaque huitième est $\frac{Q}{8}$. En raison de la symétrie, il n'y a pas d'efforts tranchants dans les sections AO, AB et OE, et il n'y a pas non plus de moments de torsion ; la résultante des efforts tranchants (des réactions) le long des BE doit donc être égale et directement opposée à la charge $\frac{Q}{8}$.

Par conséquent, le moment des forces extérieures peut être aisément évalué avec une grande approximation. Ce moment est équilibré par des moments fléchissants répartis le long des quatre arêtes de l'octant. Les vecteurs des moments (absolus, et non pas par unité de largeur comme dans les formules théoriques citées plus haut) forment un polygone fermé. La figure représente les polygones pour les deux huitièmes qui forment un quart du panneau. On s'aperçoit immédiatement que la composante horizontale du moment général donné des forces extérieures, désignée par M_0 , est égale à la somme $M(-)$ et $M(+)$, c.-à-d. à la valeur absolue des composantes des moments fléchissants négatifs et positifs. Si nous déterminons donc la valeur de l'un des membres de l'addition, nous trouvons facilement l'autre. On trouvera une application intéressante de ce schéma dans le mémoire de MM. WESTERGAARD et SLATER²⁸.

NOTES

1. LAVOINNE. Note sur la résistance des parois planes des chaudières à vapeur. Ann. des Ponts et Ch., 1872, 1, p. 276 à 303.

2. GRASHOF. Elastizität und Festigkeit. 2 Aufl. Berlin, 1878.

3. H. T. EDDY. The Theory of the Flexure and Strength of Rectangular Flat Plates applied to Reinforced Concrete Floor Slabs. Minneapolis, 1913.

4. M. T. HUBER. Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten. Z. d. Österr. Ing. u. Arch. Ver. 1914, № 30.

5. M. T. HUBER. Teoria płyt prostokątnie różnokierunkowych... Lwów, 1921.

6. M. T. HUBER. Comptes rendus de l'Académie des sciences. T. 170, 1920, p. 511 et 1305 ; T. 180, 1925, p. 1243.

7. M. T. HUBER. Der Bauingenieur, 1923, №s 12 et 13 ; 1924, №s 9 et 10 ; 1925, №s 1 et 2 ; 1926, №s 7, 8 et 9.

8. M. T. HUBER. Einige Anwendungen der Biegungstheorie orthotroper Platten. *Z. f. ang. Math. u. Mechanik.*, 1926, n° 3.
9. M. T. HUBER. Biegungsprobleme eines durch Querrippen verstiften orthotropen Plattenstreifens. *Zurich*, 1927.
10. N. J. NIELSEN. Bestemmelse af Spaendiger i Plader ved Anvendelse af Differensligninger. *Copenhagen*, 1920. Verl. E. C. Gad.
11. V. LEWE. Die Lösung des Pilzdeckenproblems durch Fouriersche Reihen. *Bauingenieur*, 1920, n° 22, 1922, n°s 4, 10, 11.
- 11a A. MESNAGER. Plaque mince indéfinie, uniformément chargée, portée par des points régulièrement espacés. *Comptes rendus... de l'Acad. des Sciences.* T. 176, 1923, p. 1773.
12. V. LEWE. Pilzdecken. *Berlin*, 1926.
13. P. FUNK. Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. *J. Springer*, Berlin, 1920.
14. G. WALLENBERG. Die Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Technik. *Zeitschr. f. ang. Math. und. Mech. I.*, 1921, s. 138.
15. FR. BLEICH w E. MELAN. Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. *Berlin, Wien*, Springer, 1927.
16. H. MARCUS. Armierter Beton, 1919.
17. H. MARCUS. Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. *Berlin*, Springer, 1924. II éd. 1932.
18. H. MARCUS. Die wirksame Stützfläche der trägerlosen Pilzdecken. *B. u. E.*, 1926. II., 19 u 20.
19. J. R. NICHOLS. Discussion on reinforced — concrete flat — slab floors. *Am. Soc. C. E.*, v. 77, 1914, p. 1735.
20. TURNEAURE and MAURER. Principles of Reinforced Concrete Construction. 2 ed. 1909.
21. H. MARCUS. Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten. *Berlin*, 1925, I. Springer.
22. K. EISENMANN. Druck- und Zugversuche an Beton mit Mikrokomparator. *Beton und Eisen*, 1926. № 14.
23. R. KNOOP. Feinmessungen für Zug und Druck an Betonbalken mit Mikrokomparator. *Diss. Braunschweig*, 1926.
24. A. MEHMEL. Untersuchungen über den Einfluss häufig wie lerholter Druckbeanspruchungen von Beton. *Berlin*, 1926.
25. O. DREVES. Über das elastische Verhalten von Beton infolge Biegungs- und Druckbeanspruchungen. *Diss. Braunschweig*, 1929.
26. H. YOSHIDA. Über das elastische Verhalten von Beton. *Berlin*, 1930.
27. M. RITTER. Die Anwendung der Theorie elastischer Platten auf den Eisenbeton. *C. R. du 2^e Congrès Intern. de Construction des Ponts et Charpentes*. Vienne, 1928, p. 694.
28. H. M. WESTERGAARD and W. A. SLATER. Moments and stresses in Slabs. *Proceedings of the Amer. Concrete Institute*, vol. 17, 1921.
29. E. ESTANAVE. Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque mince. *Thèse, Paris*, 1900.
30. B. G. GALERKIN. Les plaques rectangulaires.... Petrograd, 1915. Flexion des plaques rectangulaires... Petrograd, 1917-1918.
31. B. G. GALERKIN. Adaptation of curvilinear isothermal coordinates to integrate the equations of equilibrium of elastic plates. *Mess. of Math.*, novembre 1922.
32. B. G. GALERKIN. Equilibrium of thin rectangular elastic plates under the action of continuous and concentrated loads. *Mess. of Math.*, juin 1925.
33. B. G. GALERKIN. On the equilibrium of elastic plate, bounded by the isosceles rectangular triangle. *Journ. de la Société Phys.-Math. de Leningrad*, 1926, t. I.
34. H. HENCKY. Der Spannungszustand in rechteckigen Platten. *Munich*, 1913. R. Oldenbourg.
35. H. LEITZ. Die Berechnung der frei aufliegenden rechteckigen Platten. *Berlin*, 1914.
36. H. LEITZ. Eisenbewehrte Platten bei allgemeinem Biegungszustand. *Bautechnik*, 1923, p. 155.
37. A. MESNAGER. Moments et flèches des plaques rectangulaires minces. *Ann. des Ponts et Chaussées*, 1916-III.

38. A. NÁDAI. Die elastischen Platten. Berlin, 1923.
39. S. TIMOSHENKO. « Der Bauingenieur », 1922, p. 51.
40. T. INADA. Die Berechnung auf vier Seiten gestützter rechteckiger Platten. Berlin, 1930.
41. W. FLÜGGE. Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten. Berlin, 1928.
42. K. HAJNAL-KÓNYI. Die Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken. Berlin, 1929.
43. I. H. MICHELL. London Math. Soc. Proc. vol. 34, 1902, p. 223.
44. M. Roš et A. EICHINGER. Résultats des mesures de déformations et de tensions sur dalles à champignons. Liège, 1930.

Résumé

I. Introduction.

Les difficultés pour la détermination théorique des déformations et efforts dans une dalle à champignon proviennent :

- 1^o de la connexion rigide entre la dalle et les colonnes.
- 2^o de la flexibilité variable de la dalle et de l'influence des chapiteaux, ainsi que
- 3^o du changement considérable de la flexibilité qui se produit au début du stade II.

II. Les théories basées sur les solutions exactes de l'équation du fléchissement des plaques isotropes « minces ».

III. Les théories basées sur des solutions approximatives pour les flèches de plaques isotropes « minces ».

IV. Le rôle des colonnes dans la théorie des dalles à champignon et la méthode approximative des cadres suppléants.

V. Autres méthodes approximatives.

Zusammenfassung.

I. Einleitung. Die Schwierigkeiten der theoretischen Bestimmung der Formänderungen und Spannungen in einer Pilzdecke stecken :

1. in der steifen Verbindung der Säulen mit der Decke,
2. in der ungleichförmigen Biegssteifigkeit der Decke und der Wirkung der Säulenkopfplatte, und
3. im starken Wechsel der Biegssteifigkeit beim Uebergang in das Stadium II der Decke.

II. Die Theorien, welche sich auf strenge Lösungen der Biegungsgleichung einer isotropen « dünnen » Platte stützen.

III. Die Anwendung von angenäherten Lösungen der Plattentheorie. Differenzengleichungen und « elastische Gewebe ».

IV. Die Rolle der Säulen in der Theorie der Pilzdecken und die Methode des stellvertretenden Rahmens.

V. Andere Näherungsverfahren.

Summary.

I. Introduction. — Difficulties of theoretical investigation of stress and strain in flat slabs are found :

1. in the rigid joints between columns and ceiling ;
2. in non-uniform rigidity of ceiling and in the effect of abacus on the head of the column ;
3. in rapid change of rigidity of ceiling during the transformation into stage II.

II. The theories based on exact solution of the bending equation of a thin isotropic plate.

III. The application of approximate solutions of the plate theory. Difference equations method and " elastic web ".

IV. The function of columns in flat slabs theory and the method of " replacing frames ".

V. Other approximations.

II 4

SCHEIBEN UND SCHALEN IM EISENBETONBAU

PAROIS ET VOÛTES MINCES EN BÉTON ARMÉ

SLABS AND STRUCTURES WITH THIN PARTITIONS

Dr.-Ing. Wilhelm PETRY,
Geschäftsführendes Vorstandsmitglied
des Deutschen Beton-Vereins, Oberkassel-Siegkreis.

Die neueste Entwicklung ist gekennzeichnet durch die Verwendung von räumlichen Tragwerken. Bei derartigen räumlichen Gebilden wird die Lastübertragung im wesentlichen nur durch Dehnungskräfte bewirkt, während die Biegungsspannungen im Gegensatz zu dem ebenen Problem fast keine Rolle spielen. Infolgedessen können auf diese Weise im Eisenbetonbau grosse Spannweiten mit geringem Baustoffaufwand überbrückt werden. Wohl das bekannteste und oft angewendete Raumgebilde ist die Rotationsschale, mit der sich jedoch nur runde Grundrisse überspannen lassen. Dem Bedürfnis entsprechend ist dann in neuerer Zeit auch die Ueberdachung von rechteckigen und viereckigen Grundrissen mit Schalen gelungen, die sowohl einfach wie auch doppelt gekrümmmt ausgebildet werden können und zur Erzielung der räumlichen Kräfteinwirkung durch Scheiben ausgesteift werden müssen. In den letzten Jahren ging ferner das Bestreben dahin, auch die räumliche Kräfteinwirkung von solchen Flächentragwerken auszunutzen, die aus ebenen Scheiben zusammengesetzt sind. Diese aus Scheiben zusammengesetzten Flächentragwerke sind für Silo- und Hallenbauten von wesentlicher Bedeutung.

I. Scheiben.

1. Die tragende Wand als ebene Scheibe.

Während bei den in den vorhergehenden Berichten behandelten kreuzweise bewehrten Platten und bei den Pilzdecken in erster Linie die Biegungswirkung senkrecht zur Plattenebene in Frage kommt, handelt es sich bei den Scheiben vorzugsweise um die Beanspruchung in der Scheibenebene, also um das Problem der tragenden Wand, d. h. eines Trägers, dessen Höhe h im Verhältnis zur Spannweite l gross ist. Deckenplatten wirken in waagerechter Richtung als Scheiben bei Aufnahme und Uebertragung von Windkräften.

Die Ausnutzung der Tragfähigkeit von Wänden ist im Eisenbetonbau nicht neu. Die Anwendung in der Praxis war jedoch früher in vielen Fällen unbe-

wusst, oder die inneren Spannungen solcher Tragwände wurden — z. B. im Bunkerbau — auf Grund von mehr oder weniger willkürlichen Näherungsannahmen berechnet, da Untersuchungen über den tatsächlichen Spannungsverlauf nicht bekannt waren.

Neben vielen Silobauten, bei denen ausser den Silowänden noch besondere Abfangträger angeordnet waren, wurden auch viele Bauten ausgeführt, bei denen die Tragwirkung der Silowände nur auf Grund eines sicheren Konstruktionsgefühles richtig ausgenutzt wurde.

Ein Beispiel ist der von der Wayss und Freytag A.-G. ausgeführte Zementsilo in Hagendingen¹ (Abb. 1). Die geneigten Rutschflächen sind zum Teil durch inneres Aufbetonieren auf ebene Böden, zum Teil dadurch erhalten wor-

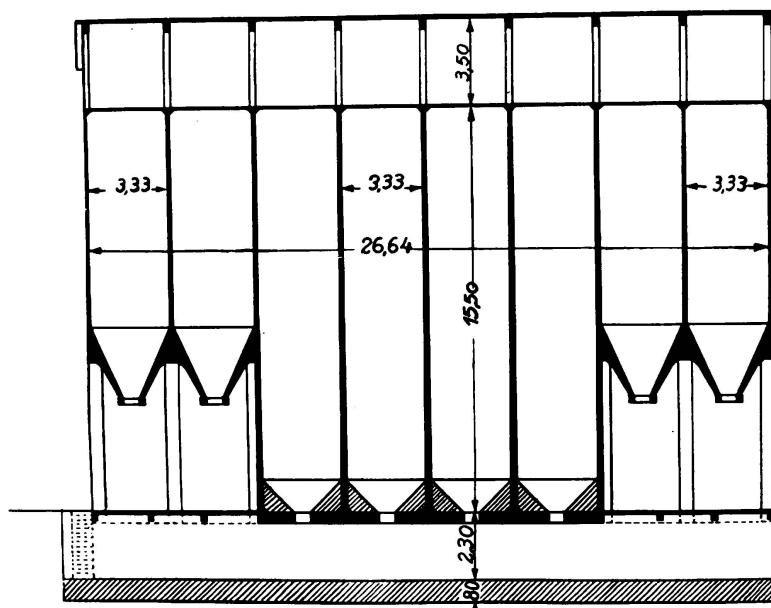


Fig
Zementsilo in Hagendingen.
Silo à ciment à Hagondange.
Cement Silo in Hagendingen.

den, dass die Trichter als hängende Pyramiden aus Eisenbeton ausgebildet wurden. Zur Ermittlung der Eiseneinlagen wurde ein geschätzter Teil der Wandhöhe als Träger berechnet, in den auch die Aufhängeisen für die Trichter hineingeführt sind. In Abb. 2 sind die Trichtereisen, die Aufhängung an den Wänden und die Trägerbewehrung der Wände zu sehen. Mit Rücksicht auf die grossen Querkräfte, die in den Wänden im Anschluss an die Säulen wirken, sind die Wände unten verbreitert und die Trägereisen abgebogen.

Bei der Berechnung derartig hoher Wände als Träger ist es naturgemäß für die Bestimmung der Eiseneinlagen von wesentlicher Bedeutung, welche Höhe der Wand als Träger in Anrechnung gebracht wird. Auf der II. Internationalen Tagung für Brückenbau und Hochbau 1928 in Wien wurden von Dr.-Ing. CRAEMER die Ergebnisse einer statischen Untersuchung eines hohen

¹ Dr.-Ing. E. Mörsch. Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung. 4. Aufl. S. 618, Abb. 682 u. S. 619, Abb. 684. Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart.

wandartigen Trägers bekannt gegeben¹, der sich bei feldweise wechselnder Belastung über unendlich viele Felderreihen erstreckt. In der Zwischenzeit sind auch die zugehörigen mathematischen Unterlagen veröffentlicht worden². Der von Dr.-Ing. CRAEMER behandelte Belastungsfall bei feldweise wechselnder Belastung ist ein Spezialfall einer von Dr.-Ing. BLEICH im Jahre 1923 veröffentlichten Arbeit³.

Diese Arbeit, die die Unterlagen für die Berechnung von durchlaufenden wandartigen Trägern enthält, ist von den Eisenbeton-Ingenieuren wohl des-

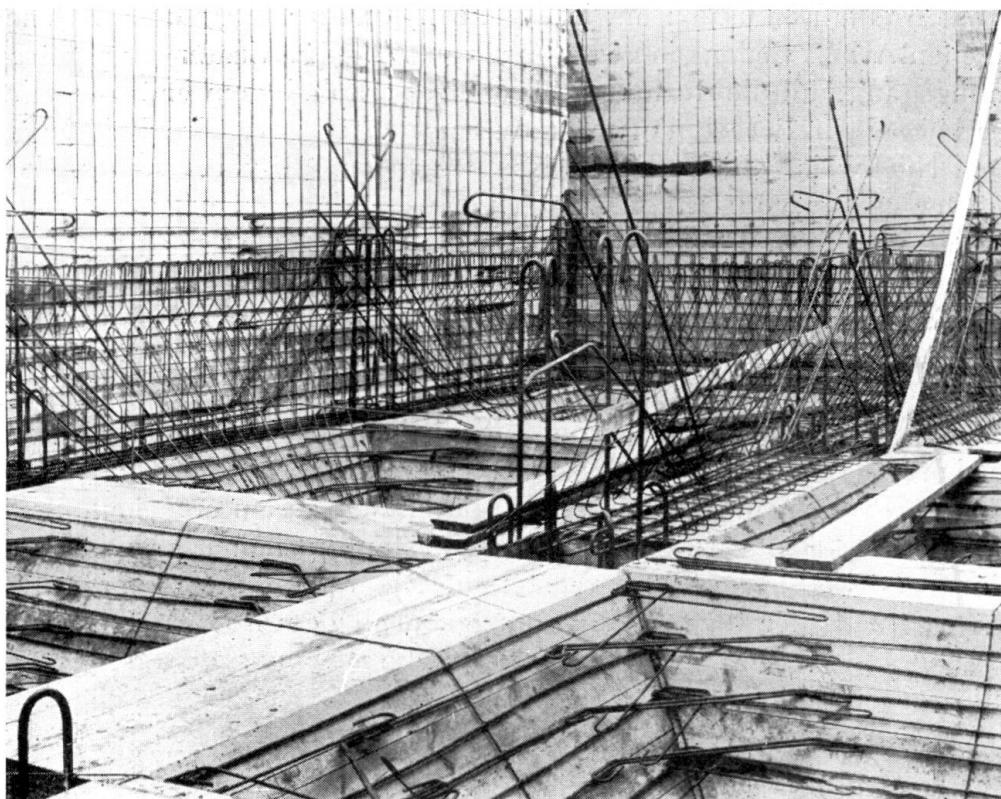


Fig. 2.

Zementsilo in Hagendingen. Aufhängung der Trichtereisen. Trägerbewehrung der Wände.
Silo à ciment à Hagondange. Suspension des fers de la trémie. Armature de poutre dans la paroi.
Suspension of the Hoppers. Beam Reinforcements of the Walls.

halb nicht besonders beachtet worden, weil sie auf den Stahlbau und vor allem auf die Lagerberechnung zugeschnitten ist.

Das Problem ist übrigens schon 1903 von L. N. G. FILON⁴ behandelt worden.

1. Dr.-Ing. CRAEMER. Spannungen in hohen, wandartigen Trägern unter besonderer Berücksichtigung des Eisenbeton-Bunkerbaues. Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau, S. 706. Verlag von Julius Springer, Wien, 1929.

2. Dr.-Ing. CRAEMER. Spannungen in wandartigen Trägern bei feldweise wechselnder Belastung. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 1930, Bd. 10, Heft 3.

3. Dr.-Ing. F. BLEICH. Der gerade Stab mit Rechteckquerschnitt als ebenes Problem. Zeitschrift «Der Bauingenieur», 1923, S. 255.

4. L. N. G. FILON. On an approximate solution of the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load. Phil. Transactions of the Royal Soc., London, 1903, Serie A, Vol. 201, S. 63.

Die Ausführungen von Filon sind jedoch sehr weitläufig und umständlich, während Dr.-Ing. BLEICH durch die Anwendung der Airyschen Spannungsfunktion eine kurze Fassung gelungen ist, die auch eine leichte Durchführung der Berechnung zulässt.

Ferner wurde das Problem der tragenden Scheiben im Jahre 1923 auch von Prof. Dr.-Ing. BORTSCHI behandelt¹, und zwar unter Zugrundelegung des strahligen Spannungszustandes, der von einer Einzelkraft auf die unendlich ausgedehnte halbe Scheibe ausgeübt wird. An den Vortrag von Dr.-Ing. CRAEMER auf der II. Internationalen Tagung für Brückenbau und Hochbau 1928 in Wien schloss sich eine Diskussion an, in der Prof. Dr.-Ing. BORTSCH auf Grund seiner eigenen Arbeit Bedenken gegen den von Dr.-Ing. CRAEMER vorgetragenen Rechnungsgang und die Rechnungsergebnisse erhob, indem er darauf hinwies, dass er bei seinen Berechnungen zu wesentlich anderen Ergebnissen gelangt sei. Den Nachweis, ob die Ergebnisse der Rechnung von Dr.-Ing. CRAEMER, die mit denjenigen von Dr.-Ing. BLEICH übereinstimmen, oder die Ergebnisse der Arbeit von Prof. Dr.-Ing. BORTSCH richtig sind, muss noch erbracht werden².

Mit dem Berechnungsverfahren von Dr.-Ing. BLEICH lassen sich durchlaufende Träger mit unendlich vielen Öffnungen bei beliebigem Eigengewicht und symmetrischer und antisymmetrischer Verkehrslast bei beliebigen Stützweiten berechnen. Schwierigkeiten ergeben sich jedoch bei Balken von begrenzter Länge. Dies veranlasste 1927 Prof. Dr. Th. v. KARMAN³ und F. R. SEEWALD, das gleiche Problem mit Hilfe von Einflusslinien zu untersuchen. Auf diese Weise gelang es SEEWALD, den Spannungszustand in hohen wandartigen Trägern in übersichtlicher Form darzustellen. Die Spannungen ergaben sich als Summe einerseits der Biegungsspannungen nach dem Navierschen Biegungsgesetz und andererseits der Spannungen, die sich aus der Einführung der Säulenlast in der Scheibe ergeben. Diese Arbeit ist auch im Handbuch für Physik⁴ auszugsweise veröffentlicht. Hiernach lassen sich gedrungene Träger nach dem Navierschen Biegungsgesetz und durch Hinzufügen der Einführungsspannungen der konzentrierten Säulenlasten, deren Grösse der Arbeit von SEEWALD entnommen werden kann, berechnen.

In seinem Bericht für den Ersten Internationalen Kongress für Beton und Eisenbeton in Lüttich 1930 hat Dr.-Ing. F. DISCHINGER⁵ darauf hingewiesen, dass bei Scheiben, die als durchlaufende Träger wirken, die Hebelarme der

1. Dr.-Ing. BORTSCH. Spannungen in Silowänden. Festschrift zum 70. Geburtstag von Melau, 1923.

2. In Vorbereitung zum selben Thema:

Dr.-Ing. F. DISCHINGER. Beitrag zur strengen Theorie der Halbscheibe und des gedrungenen wandartigen Balkens. Wissenschaftliche Beiträge, Band I.

3. Ueber die Grundlagen der Balken-Theorie, Abhandlung aus dem Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen, Heft 7 und SEEWALD: Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt, Abhandlung aus dem Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

4. Dr.-Ing. J. W. GECKELE. Handbuch für Physik. Bd. 6, Elastostatik S. 204.

5. Dr.-Ing. Franz DISCHINGER. Eisenbetonschalendächer Zeiss-Dywidag zur Ueberdachung weitgespannter Räume. Erster Internationaler Kongress für Beton und Eisenbeton, Lüttich, 1930. Verlag La Technique des Travaux, Lüttich.

inneren Kräfte über den Stützen geringer sind wie im Feld, und zwar umso mehr, je schnäler die Säulen im Verhältnis zur Stützweite werden. Dieser Gesichtspunkt ist bei der Bemessung der Bewehrung von Bedeutung.

Ungelöst war aber noch das Problem einer rechteckigen Scheibe, die als frei aufliegender Träger zwischen zwei Stützen wirkt. Hier versagen die Mittel der strengen Theorie, weil es nicht möglich ist, die Randbedingungen an allen 4 Rändern gleichzeitig zu erfüllen. Die Lücke wird durch eine Arbeit von Dr.-Ing. HERMANN BAY¹ geschlossen, die zur Erfüllung dieser Randbedingungen an den 4 Rändern die Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen ersetzt. Diese Lösung ist naturgemäß nur eine Näherung, die an Genauigkeit von der Anzahl der zugrunde gelegten Maschen abhängt.

Die erhaltenen Rechnungsergebnisse wurden durch polarisationsoptische Versuche geprüft und als richtig befunden. Es ergibt sich, dass bei der freiaufliegenden Wand nur ein quadratisch begrenzter Teil über der Unterkante der Wand bei der Aufnahme der Biegsungs- und Schubspannungen mitwirkt. Bei jeder freiaufliegenden Wand, bei der die Höhe grösser ist als die Spannweite, wirken die über diesem Quadrat liegenden Teile nicht mit, und im Falle oben liegender gleichmässig verteilter Last wird diese Last von der Wand wie von gleichmässig belasteten neben einander gestellten Säulen nach dem erwähnten Quadrat, durch das die Trägerwirkung erreicht wird, abgetragen. Bei einer Einzellast an der Trägeroberseite wird die Einzellast zuerst in die Wand hinein verteilt, sodass diese in ihrem unteren Teil wie ein mit gleichmässiger Last beanspruchter Träger wirkt. Bei Eigenlast sind die Drucklinienverhältnisse ähnlich denen für einen wandartigen Träger mit gleichmässiger Belastung an der Oberseite. Ein Vergleich des in Abb. 3 wiedergegebenen von Dr.-Ing. BAY entwickelten Bewehrungsbildes für mehrfeldrige Silowände mit der Bewehrung in Abb. 2 zeigt eine weitgehende Uebereinstimmung.

2. Miteinander verbundene, in verschiedenen Ebenen liegende Scheiben.

Verbindet man zwei oder mehrere Scheiben miteinander in den Längskanten, so entsteht ein Flächentragwerk, dessen einzelne Scheiben einen einheitlichen Träger bilden, dessen Spannungen sich jedoch noch viel weniger wie die der einzelnen Scheiben nach dem Navierschen Biegungsgesetz berechnen lassen.

1. Dr.-Ing. HERMANN BAY. Ueber den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetontragwänden. Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart, 1931.

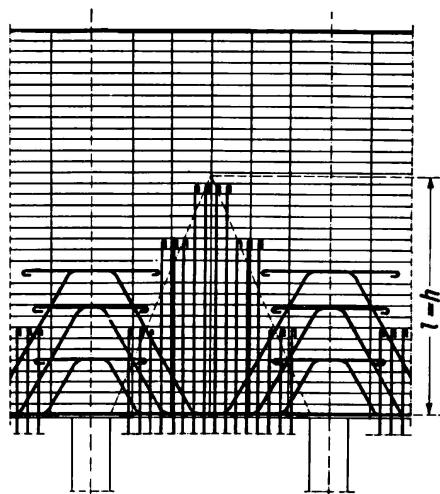


Fig. 3.
Bewehrungsbild für mehrfeldrige Silowände, nach Dr.-Ing. BAY.
Plan de l'armature pour des parois à plusieurs panneaux, d'après le Dr. Ing. BAY.
Reinforcement Plan for Silo Walls with several Panels, by Dr.-Ing. BAY.

Das Hauptanwendungsgebiet dieser Flächentragwerke bildet der Bunkerbau, bei dem die Wände und der Trichterboden zusammen ein einheitliches Flächentragwerk bilden. Auf diese einheitliche Wirkung von Wand und Trichterboden und die damit verbundene Ersparnis überflüssiger Balken unterhalb

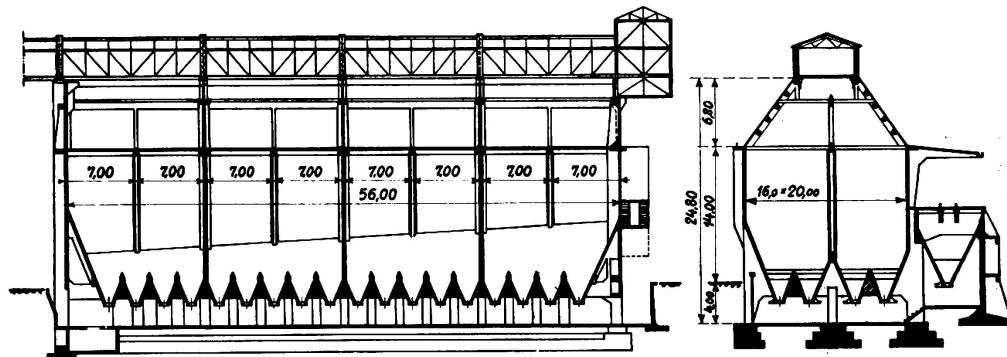


Fig. 4.
Kokskohlenbunker ohne Balken unter den schrägen Wänden.
Silo à coke sans poutres sous les parois inclinées.
Coke Bunker without Beams under the Sloping Walls.

der Schnittkanten der Scheiben hat Dr.-Ing. CRAEMER 1929 in « Beton u. Eisen » hingewiesen¹. In der Praxis waren diese Gedankengänge schon vielfach in die Tat umgesetzt². Ein Beispiel hierfür ist der in Abb. 4 dargestellte von

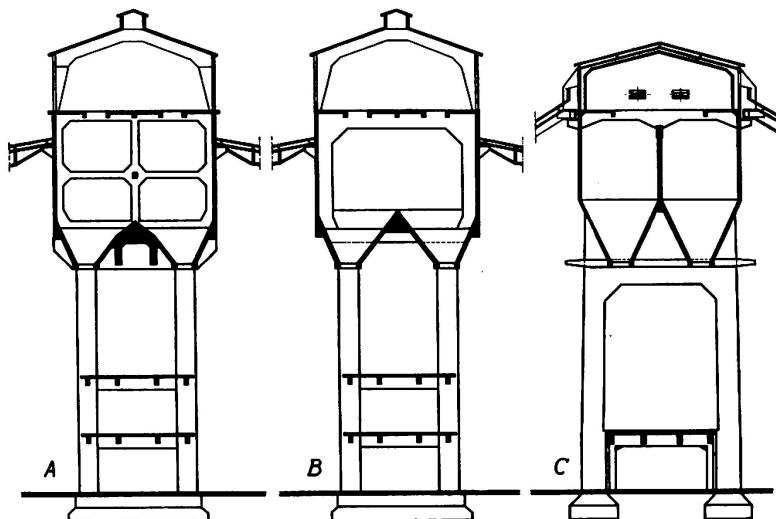


Fig. 5.
Querschnitte durch Bunker : 1915 (A), 1921 (B), 1925 (C).
Sections de trois silos : 1915 (A), 1921 (B), 1925 (C).
Cross Section through Bunkers : 1915 (A), 1921 (B), 1925 (C).

der Firma Dyckerhoff und Widmann A.-G. ausgeführte Koksbunker³. Sehr gut wird die fortschreitende Entwicklung durch den Vergleich der Bunker-Querschnitte der Abb. 5 dargestellt, die von der Firma Wayss und Freytag A.-G.

1. Dr.-Ing. CRAEMER. Scheiben und Faltwerke als neue Konstruktionselemente im Eisenbetonbau. Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1929, Heft 13, 14, 18.

2. Vgl. Handbuch für Eisenbetonbau, 3. Aufl., Band 14, Abb. 99, 116, 150, 161, 186, 197, 199, 202, 205, 215, 233. Verlag von W. Ernst und Sohn, Berlin.

3. Vgl. Dr.-Ing. W. STARK. Kokskohlenbunker für ein grosses industrielles Werk im Rheinland. Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1929, Heft 13, S. 244.

ausgeführt worden sind. Abb. 5A ist der Schnitt durch den Bunker I des Kraftwerkes Trattendorf, erbaut 1915. Er enthält im Innern zur Aussteifung noch ein umfangreiches System von Rippen und Querträgern, die den Seitendruck aufnehmen, jo sogar noch von Längsträgern, um wieder diese Rippen auszusteifen. Man sieht ferner die schweren Bodenträger, auf denen die Last des gesamten Bunkerinhalts ruht. Im Gegensatz dazu ist der in Abb. 5B dargestellte Bunker II in Trattendorf (erbaut 1921) schon wesentlich freier gehalten. Die Bodenträger sind verschwunden und durch die schrägen Bodenflächen selbst ersetzt. Dass dagegen die senkrechten Wände auch hier noch für sich, ohne Berücksichtigung des Zusammenhangs mit den Bodenflächen, als Träger betrachtet worden sind, zeigt sich äusserlich in den Verstärkungen am Fuss dieser Wände.

Verwirklicht aber sind die vorerwähnten neuen Erkenntnisse erst bei dem im Jahre 1923 erbauten Bunker für das Krafwerk Finkenheerd. (Abb. 5C). Bei diesem Bunker wird das gesante Tragwerk in senkrechter und waagerechter Richtung ausschliesslich von den Wand- und Bodenflächen selbst gebildet, die unter Berücksichtigung ihrer gegenseitigen Verbindung als zusammenhängendes System, also als reines Flächentragwerk, aufgefasst sind. Mit 20 cm Wand und 22 cm Bodendicke wird eine Spannweite von 13 m überwunden, ohne dass irgend welche Rippen oder Träger angeordnet sind. Die Querriegel über den Zellen sind zur Aufnahme der Förderbänder erforderlich.

Das neuartige Konstruktionsprinzip besteht in der systematischen Ausnutzung der Trägerwirkung aller Wandflächen unter Berücksichtigung ihrer gegenseitigen Verbindung. Auf das Letztere kommt es im Gegensatz zu ebenen scheibenartigen Wandträgern an. Der Zusammenhang der Wände und ihr Zusammenwirken ist das Wesentliche. Wird die senkrechte Bunkerwand belastet, so kann die mit ihr zusammenhängende schräge Bodenwand nicht spannungslos bleiben. Sie wirkt bei der Kräfteaufnahme mit, und es tritt ein Spannungsausgleich ein. Rippen längs den beiden Wänden gemeinsamen Kanten sind weder zur Aufnahme der Kräfte in der Wandebene noch solcher quer dazu erforderlich.

Die Theorie dieser « Flächentragwerke », also die Untersuchung der Frage, welche Kraftwirkungen zwischen zwei oder mehreren mit ihren Längskanten verbundenen Trägern entstehen und welche Änderungen der Spannungsverteilung diese Kraftwirkungen in den Trägern selbst hervorrufen, wurde bei Gelegenheit des Entwurfs des zuvor erwähnten Bunkers Finkenheerd von Dipl. Ing. G. EHLERS aufgestellt¹ und ebenso und mit wesentlich gleichen Ergebnissen auch von Dr.-Ing. Craemer², der derartige Tragwerke als « Faltwerke » bezeichnet, entwickelt.

Diese Flächentragwerke sind in hohem Masse statisch unbestimmt; denn an

1. Dipl.-Ing. EHLERS. « Ein neues Konstruktionsprinzip ». Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1930, Heft 8.

Derselbe. Die Spannungsermittlung in Flächentragwerken. Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1930, Heft 15 und 16.

2. Dr.-Ing. CRAEMER. « Allgemeine Theorie der Faltwerke ». Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1930, Heft 15.

jeder Linie, in der zwei Scheiben zusammenstossen, treten jeweils 4 unbekannte innere Kräfte auf, und zwar ein Biegungsmoment, die zugehörige Querkraft, ein Gewölbeschub und ausserdem eine Schubkraft längs den Kanten, an denen die Scheiben miteinander verbunden werden. Massgebend für das räumliche Zusammenwirken sind die zuletzt genannten Schubkräfte. Aus diesem Grunde wurden bei beiden Arbeiten zwecks Vereinfachung der Rechnung nur diese Schubkräfte als Unbekannte eingeführt, und die Biegungsmomente und Querkräfte wurden gleichgesetzt denen einer über die Kanten des Flächentragwerkes kontinuierlich gespannten Platte.

Weiter hat Dipl.-Ing. EHLERS bei seiner Untersuchung vorausgesetzt, dass das Naviersche Gradliniengesetz für die Spannungsverteilung der einzelnen Scheiben noch gilt, d. h. dass die Trägerhöhe im Vergleich zur Stützweite nicht zu gross ist ($h : l = \sim 1 : 1,5$). Dr. Ing. CRAEMER¹ ist der Ansicht, dass

die Grenze bei $h : l = \sim 1 : 2$ liege. Man wird EHLERS¹ zustimmen müssen, wenn er die Ansicht vertritt, dass die Lösung des Problems nicht allein mit Hilfe von theoretischen Untersuchungen gefunden werden kann, die ein homogenes Material voraussetzen, sondern dass eingehende praktische Versuche hinzukommen müssen. Auch die früher erwähnten Untersuchungen von Dr.-Ing. BAY dürften hier wertvoll sein.

Wie im Bunkerbau können solche Flächentragwerke im Behälterbau, ferner auch beim Bau von Kühlturnschloten und ähnlichen Bauwerken in Frage kommen, die bei geringer Wandstärke ohne Aussteifungsrippen gegenüber hohen Winddrücken widerstandsfähig gestaltet werden sollen. Abb. 6 ist der Grundriss eines im Jahre 1923 von der Wayss und Freytag A.-G. für ein chemisches Werk erbauten Kühlturnmes. Dort wurde bereits das Problem gestellt, die Tragwirkung gegenüber Winddruck ganz in die Hochkantebene der Wände zu verlegen. Die einzelnen Wände sind ebene Scheiben, die ihren Auflagerdruck jeweils an die Ecken abgeben. Er wird aber nicht in radia

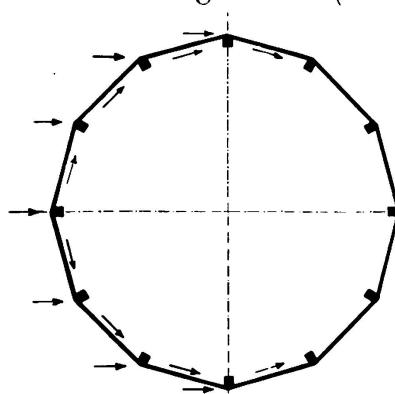


Fig. 6.
Grundrisschema eines
Kühlturnmes.
Plan schématique d'une tour
de réfrigération.
Plan of a Cooling Tower.

Kühlturnmes. Dort wurde bereits das Problem gestellt, die Tragwirkung gegenüber Winddruck ganz in die Hochkantebene der Wände zu verlegen. Die einzelnen Wände sind ebene Scheiben, die ihren Auflagerdruck jeweils an die Ecken abgeben. Er wird aber nicht in radia

1. Vgl. hierzu den Meinungsaustausch Dr.-Ing. CRAEMER -- Dipl.-Ing. EHLERS in der Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1930, Heft 21.

Problems vorlag, wusste man bei dem Kühlturm dieser Schwierigkeit konstruktiv nicht anders zu begegnen, als durch die Anordnung der Eckrippen, die

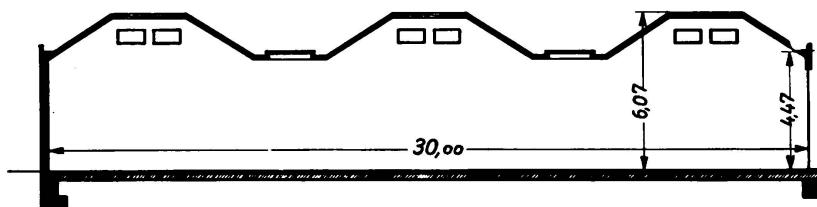


Fig. 7.
Eisenbetondach als Flächentragwerk.
Toiture en béton armé, composée uniquement par des dalles.
Reinforced Concrete Roof constructed without Beams.

als allein wirksamer- Druck- bzw. Zuggurt der Wandflächen aufgefasst wurden, während die Mitwirkung der Wandfläche selbst im Träger vernachlässigt wurde.

Ein solcher nur aus Scheiben zusammengesetzter Schlot geht bei entsprechend grosser Anzahl der Ecken dann in eine Zylinderschale über. In Form solcher Zylinderschalen sind von der Dyckerhoff und Widmann A.-G. mehrere Kühltürme ausgeführt¹.

Auch für die Gestaltung von Dächern ist das Konstruktionsprinzip der geknickten Scheiben von Bedeutung; denn durch den Fortfall aller Rippen und Verstärkungen werden Gewicht und Materialaufwand verringert. Dr.-Ing. DISCHINGER² und FINSTERWALDER haben im Jahre 1928 vorgeschlagen, bei Schalendächern die gekrümmte Querschnittskurve durch Vielecke und damit die Schale durch zusammengesetzte Scheiben zu ersetzen. Entwürfe für derartige Flächentragwerke mit ebenen aneinanderstossenden Flächen hat Dr.-Ing. CRAEMER³ veröffentlicht. In Abb. 7 z. B. beträgt die Spannweite des Daches senkrecht zur Bildebene 24 m, das Flächentragwerk ruht an seinen Enden auf Eisenbetonwänden. Eine kleinere Ausführung dieser Art ist das Dach des Pumpwerkes Gelsenkirchen-Bismarck, ausgeführt nach

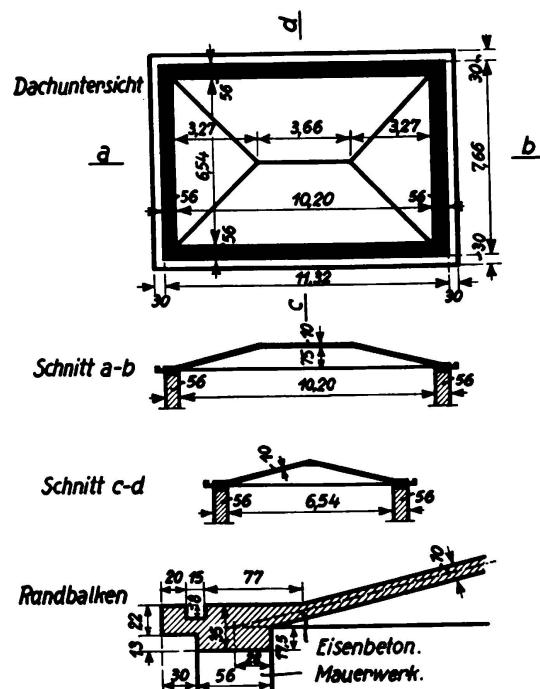


Fig. 8.
Dach des Pumpwerks Gelsenkirchen-Bismarck. (Flächentragwerk).
Toiture de la station de pompage de Gelsenkirchen-Bismarck. (Construction en dalles sans poutres).
Roof of the Gelsenkirchen-Bismarck pumping station. (Structures without beams).
Randbalken = Poutre = Beam.
Eisenbeton = Béton armé = Reinforced Concrete.
Mauerwerk = Maçonnerie = Masonry.

1. Dr.-Ing. DISCHINGER u. FINSTERWALDER. « Eisenbetonschalendächer System Zeiss-Dywidag ». Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1928, Heft 44 u. 46. Vgl. auch Handbuch für Eisenbetonbau 3. Aufl., 12. Band. « Schalen und Rippenkuppeln ». Verlag von W. Ernst u. Sohn, Berlin.

2. Dr.-Ing. DISCHINGER und FINSTERWALDER, Eisenbetonschalendächer System Zeiss-Dywidag. Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1928, Heft 44 und 46.

3. Dr.-Ing. CRAEMER, Scheiben und Faltwerke als neue Konstruktionselemente im Eisenbetonbau. Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1929, Heft 14.

dem Entwurf von Dr.-Ing. CRAEMER von der Firma Strecker & Roggel G. m. b. H., Gelsenkirchen, für die Emschergenossenschaft, Essen¹. In Abb. 8 kommt der Fortfall allen Balkenwerks deutlich zum Ausdruck. Die Dachhaut besteht aus 4 ebenen, also leicht einzuschalenden Teilen, die sich in den Graten gegenseitig abstützen und daher einer besonderen Unterstützung durch Unterzüge nicht bedürfen. Die erforderliche, ringsum laufende seitliche Aussteifung konnte im Gesims untergebracht werden, sodass für dieses Dach, dessen theo-

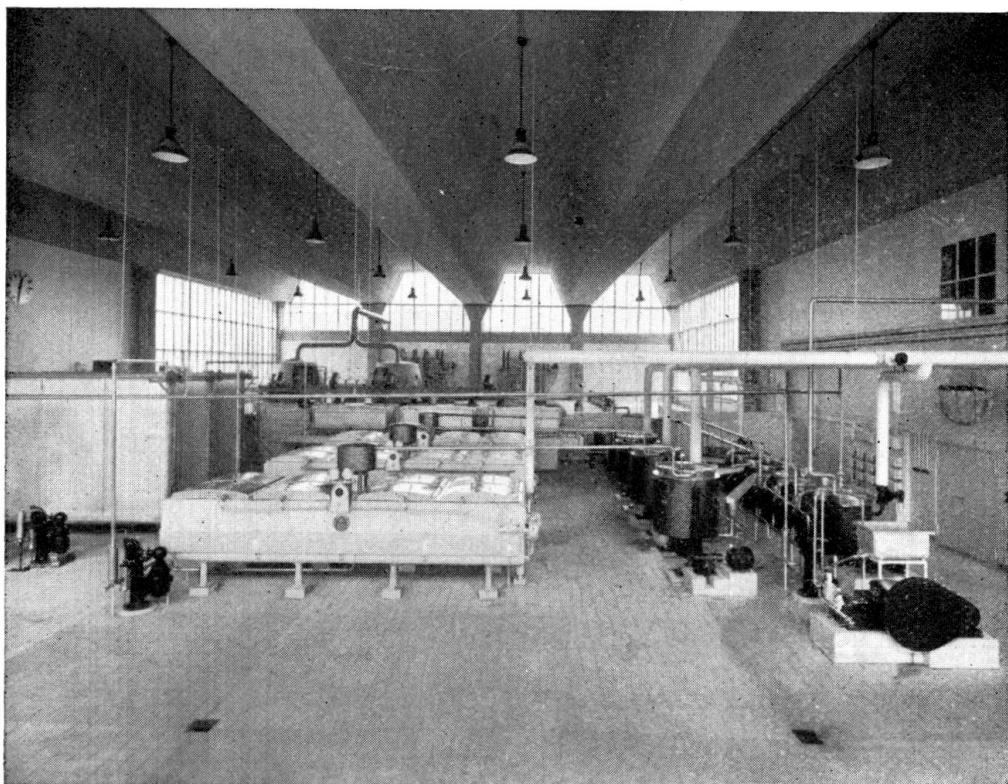


Fig. 9.

Eisenbetondach über dem Betriebsgebäude des Milchhofs in Nürnberg. (Flächentragwerk).

Toiture en béton armé du bâtiment de service du « Milchhof » à Nuremberg,
composée uniquement de dalles.

Reinforced Concrete Roof as flat over the Works of the Central Dairy in Nürnberg
composed only with Panels.

retische Stützweite $7,10 \times 10,76$ m beträgt, gar keine Rippe nötig war. Die Plattendicke beträgt 10 cm.

Eine grössere Ausführung dieser Art ist das Dach über dem Betriebsgebäude des Milchhofs in Nürnberg² (Ausführung durch die Firma Leonhard Jacobi, Nürnberg) (Abb. 9). Für die Ueberdachung des freien Raumes von 24×24 m und z. T. 37×24 m Weite wurden ebenflächige, waagerechte und schräge Wände so zusammengeschlossen, dass sie im gegenseitigen Zusammenwirken

1. Dr.-Ing. CRAEMER. Eisenbeton-Faltwerksdach von 7×11 m Stützweite ohne Unterzüge. Wochenschrift der Deutschen Gesellschaft für Bauwesen und ihrer Bezirksvereine, 1931, Nr. 32, VDI-Verlag G. m. b. H. Berlin. NW 7.

2. « Der Milchhof in Nürnberg » (Architekt O. E. SCHWEIZER, Karlsruhe). « Baugilde » Zeitschrift des Bundes Deutscher Architekten, 1931, Heft 16, S. 1325.

ihre Lasten auf wenige Punkte übertragen. Der Seitenschub hebt sich für jede Welle des Flächentragwerkes gegen den aus den Nachbarwellen stammenden auf; nur in den beiden äussersten Wellen muss er durch den oberen Teil der Stützen in die anschliessende senkrechte Wandscheibe geleitet werden. In dem Raumteil, in dem die Spannweite des Flächentragwerkes 37 m ist, reicht seine Höhe statisch nicht aus. Da jedoch eine Vergrösserung der Höhe unternlich erschien und Innenstützen nicht aufgestellt werden durften, wurde in diesem Teil durch Anordnung eines Ueberzuges über dem Dach ein Zwischenauflager geschaffen. Der quer über dem Flächentragwerk liegende Ueberzug ist 24 m lang, 2,90 m hoch und 70 cm breit und hat zur Gewichtsverminderung Hohlräume. Die Stützen unter dem Flächentragwerk sind im oberen Teil verbreitert (Abb. 9); dadurch spart man einen besonderen Querbalken für die Aufnahme des unteren waagerechten Teiles des Tragwerkes.

II. Schalen.

1. Rotationsschalen (Schalenkuppeln mit runden Grundrissen).

Von der Erörterung der technischen Entwicklung beim Bau von Rotationschalen wird hier abgesehen und auf das diesbezügliche Schrifttum verwiesen¹. Zu nennen ist das im Jahre 1922 von Dr. BAUERSFELD geschaffene Zeiss-Netzwerk, mit dem von der Dyckerhoff & Widmann A.-G. eine grosse Anzahl dünnwandiger Schalenkuppeln ausgeführt worden sind, bei denen das die Rüstung ersetzende Flechtwerk zum Teil einbetoniert und zum Teil nur als Schalungsträger verwendet und nachträglich zwecks nochmaliger Verwendung abgebaut wurde. Diese Ausführungen bringen statisch nichts neues.

Von neuen statischen Auffassungen gehen dagegen die Vorschläge von Dr.-Ing. DISCHINGER aus, bei Kuppeln grosse Säulenabstände dadurch zu erzielen, dass Ring und Schale zwischen den Säulen als einheitlicher Raumträger zusammenarbeiten. Um diese Tragwirkung zu erreichen, ist es notwendig, die Schale am Kämpfer kräftig auszusteifen. Eine derartig ausgesteifte Rotationschale besitzt eine so grosse Trägerwirkung, dass die Kuppelschale sich auch bei grössten Säulenentfernungen frei tragen kann. Der Ring trägt jetzt nicht mehr die Kuppel, sondern er hängt vielmehr an der Schale. Das Problem ist

1. Dr.-Ing. DISCHINGER. Schalen und Rippenkuppeln. Handbuch für Eisenbetonbau, 3. Aufl., 12. Bd., Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.

Dr.-Ing. F. DISCHINGER. Eisenbetonschalendächer Zeiss-Dywidag zur Ueberdachung weitgespannter Räume. Erster Internationaler Kongress für Beton und Eisenbeton, Lüttich, 1930. Verlag « La Technique des Travaux », Lüttich.

DERSELBE. Fortschritte im Bau von Massivkuppeln. Bericht über die 28. Hauptversammlung des Deutschen Beton-Vereins 1925, S. 415 (S. auch Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1925, Heft 10.)

Dr.-Ing. U. FINSTERWALDER. Die Schalendächer des Elektrizitätswerkes in Frankfurt a. M. Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1928, Heft 11.

Dr.-Ing. SCHERZINGER. Neuartige Ausführung einer weitgespannten Schalenkuppel in Torkret-Eisenbeton. Bericht über die 30. Hauptversammlung des Deutschen Beton-Vereins, 1927, S. 351 (S. auch Deutsche Bauzeitung 1927, Beilage « Konstruktion und Ausführung », S. 104, 124, 183.)

nach Dr.-Ing. DISCHINGER eng verwandt mit dem im ersten Abschnitt behandelten Problem der Scheiben. Je grösser der Stützenabstand wird, um so grösser wird auch die bei der Trägerwirkung mitarbeitende Höhe der Schale,

sodass die Dehnungsspannungen der Schale, bedingt durch die Trägerwirkung, unabhängig sind von dem Stützenabstand. Ebenso wie bei der Scheibe ergibt sich die auffallende Erscheinung, dass die Hebelarme der inneren Kräfte in Feldmitte wesentlich günstiger sind wie über den Stützen und dass diese Hebelarme über den Stützen mit Verringerung der Säulenbreiten ständig abnehmen (Vgl. Seite 270). Ein Beispiel ist der in Abb. 10 dargestellte Querschnitt einer Rotationskuppel von 75 m Spannweite, die auf 6 Säulen mit einem Abstand von 40 m aufgelagert ist. Ausgesteift wird die Rotationsschale durch die horizontale Decke des breiten Umbaues, die jede Deformation der Schale verhindert und dadurch die Trägerwirkung ermöglicht. Die

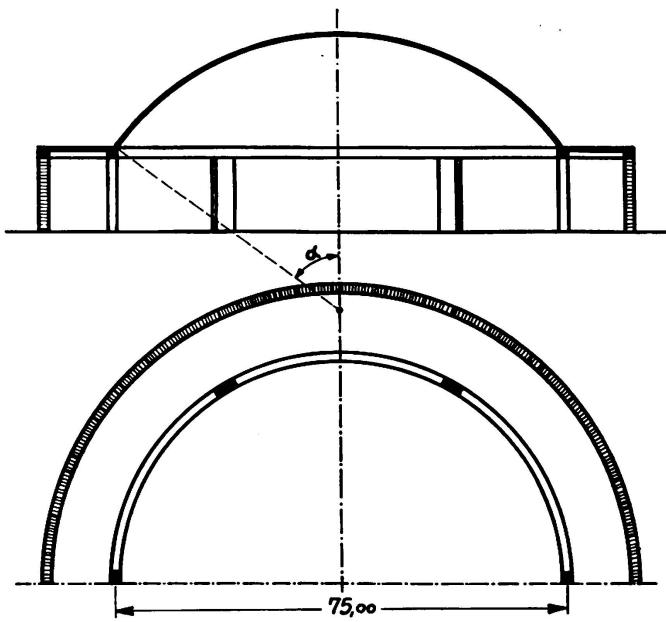


Fig. 10.

Entwurf einer Rotationskuppel von 75 m Spannweite.

Projet d'une coupole de révolution de 75 m. de portée.

Design for a Circular Cupola of 75 Metres Span.

Trägerwirkung der Rotationsschale ist so gross, dass sie in der Lage ist, nicht nur ihr Eigengewicht, sondern auch das Gewicht der Decke des Umbaues nach den Säulen abzutragen. Dieses Problem bildet einen Teil der von Dr.-Ing. DISCHINGER bei der Akademie des Bauwesens eingereichten und mit dem ersten Preis ausgezeichneten Arbeit « Eisenbetonschale als Raumträger¹ ». In dieser Arbeit wurde auch gezeigt, dass man auch Apsiden-Kuppeln (Halbkuppeln) gemäss Abb. 11 als selbständige Gebilde herstellen kann. Obwohl an den Schnittstellen die Ringkräfte, durch die in normaler Weise die Kuppelwirkung bedingt wird, zerstört werden, ist bei derartigen Gebilden ein reiner Dehnungs-Spannungszustand möglich, und nur an dem Uebergang von Schale und Ring ergeben sich, wie bei allen Kuppeln, geringe Biegungsmomente infolge der Unstetigkeitsspannungen.

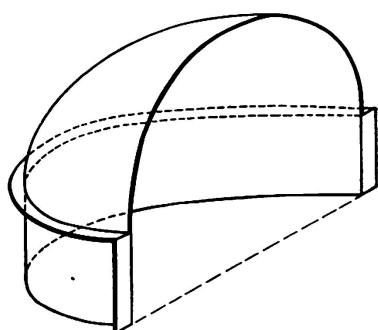


Fig. 11.

Apside (Halbkuppel).

Abside (Hémisphère).

Apside (Half Cupola).

1. Dr.-Ing. ELLERBECK. Preisaufgabe der Akademie des Bauwesens aus dem Gebiete des Eisenbetonbaues. « Zentralblatt der Bauverwaltung », 1930, Heft 24.

2. Das zylindrische, quer versteifte Schalendach¹.

Mit Schalenkuppeln mit runden und elliptischen Grundrissen lassen sich mit geringem Baustoffaufwand grosse Spannweiten herstellen, doch sind sie wegen der gekrümmten Grundrisse für viele Bauten nicht zu verwenden. Das Bestreben ging deshalb dahin, Schalenformen mit rechteckigen Grundrissen zu finden.

Der erste Vorschlag von Dr.-Ing. DISCHINGER im Jahre 1923 betraf doppelt gekrümmte Schalen, die durch lotrechte Binderscheiben ausgesteift werden sollten. Wegen der Schwierigkeiten in der Berechnung wurde jedoch hiervon zunächst abgesehen, und es wurden einfach gekrümmte, an den beiden Enden ausgesteifte Zylinderschalen gemäss Abb. 12 untersucht. Wird eine derartige Tonne an den Enden durch Binderscheiben verstieft, so wird ein räumlicher Kräftezustand erzeugt wie bei den Schalenkuppeln, bei denen nur geringe Biegungsmomente auftreten.

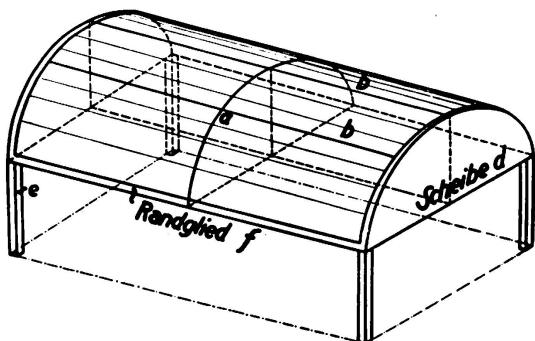


Fig. 12

Einfach gekrümmte, an den Enden ausgesteifte Zylinderschale.

Voûte à courbure simple, renforcée aux extrémités.

Simply bent Cylindrical Shell, stiffened at the Ends.

f = Poutre de retombée = End Beam.
d = Tympan = Stiffening Disc.

Die ersten Ausführungen aus dem Jahre 1924 bis 1926 hatten ellipsenförmige Querschnittsflächen (Abb. 13 A). Weil diese Dachflächen sehr steil und deshalb schwer herzustellen

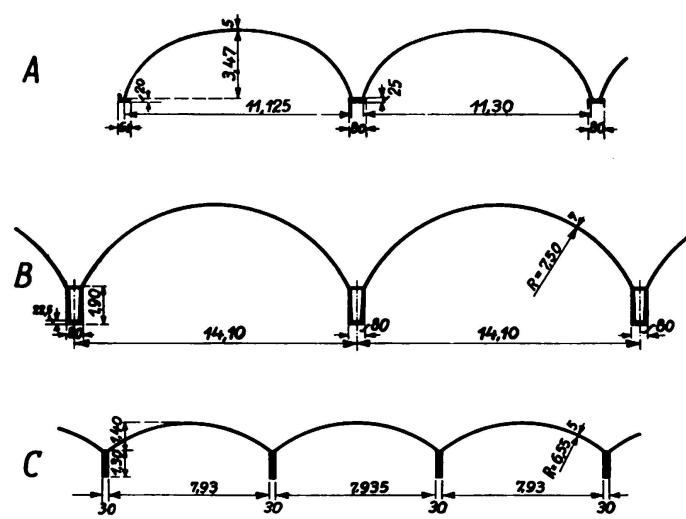


Fig. 13.

Querschnitte ausgesteifter Schalen.

Sections de voûtes renforcées.

Sections of Stiffened Shells.

Beton-Vereins, 1928, S. 165. (S. auch Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1928, Heft 44, 45, 46.)

Dr.-Ing. F. DISCHINGER und U. FINSTERWALDER. Die Dywidaghalle auf der Gesolei. Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1926, Heft 48.

Dr.-Ing. A. KLEINLOGEL. Die Schalendächer der Grossmarkthalle Frankfurt a. M. Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1928, Heft 1. u. 2.

Dr.-Ing. F. DISCHINGER und U. FINSTERWALDER. Eisenbetonschalendächer System Zeiss-Dywidag. Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1928, Heft 44.

1. Dr.-Ing. DISCHINGER. Eisenbetonschalendächer Zeiss-Dywidag zur Ueberdachung weitgespannter Räume. Erster Internationaler Kongress für Beton und Eisenbeton, Lüttich, 1930. Verlag « La Technique des Travaux », Lüttich.

DERSELBE. Schalen und Rippenkuppeln. Handbuch für Eisenbetonbau, 3. Aufl., 12. Bd., Verlag von W. Ernst & Sohn, Berlin.

DERSELBE. Zeiss-Dywidag-Schalengewölbe unter besonderer Berücksichtigung der Grossmarkthalle in Frankfurt a. M. Bericht über die 31. Hauptversammlung des Deutschen

waren und weil dabei zwischen den einzelnen Tonnen tiefe Schneesäcke entstanden, wurde gemäss Abb. 13 B bei der Grossmarkthalle in Frankfurt a. M. eine Form gewählt, die aus Segmentbogen und hohen Randbalken zusammengesetzt ist. Abb. 13 C zeigt den Querschnitt, wie er bei den neueren Ausführungen zugrunde gelegt wird. Er setzt sich aus einem ganz flachen Kreissegment und sehr hohen Randbalken zusammen. Das schwierige Randproblem, das bei den neueren Ausführungen nach Abb. 13 C noch bedeutungsvoller ist als bei den älteren nach Abb. 13 A (ein reiner Membranspannungszustand ist bei freitragenden Tonnen ohne Ueberlagerung durch Biegungsmomente nicht möglich), ist von Dr.-Ing. FINSTERWALDER in seiner von der Akademie des Bauwesens mit dem zweiten Preis ausgezeichneten Preisarbeit « Eisenbeton als Gestalter » behandelt und gelöst worden.

Am Uebergang von Schale und Randträger treten jeweils 4 statisch unbestimmte Kräfte auf, deren Grösse aus der gemeinsamen Formänderung von Schale und Randträger ermittelt werden muss. Die Spannungen in der Schale selbst ergeben sich aus einer Differentialgleichung 8. Grades, wobei sich sämtliche innere Kräfte von einer Spannungsfunktion ableiten lassen (in ähnlicher Weise, wie sich bei den Scheiben die inneren Spannungsfunktion ableiten lassen).



Fig. 14.

Autohalle « S.T.A. » in Rom. (Innenansicht).
Garage pour automobiles « S.T.A. » à Rome. (Vue de l'intérieur).
« S.T.A. » Garage in Rome. (View of Interior).

Dr. FINSTERWALDER hat nachgewiesen, dass die Biegungsmomente der Schale in Richtung der Erzeugenden bei der Uebertragung der Lasten nach den Binderscheiben keine Rolle spielen, da diese Lasten nur durch Dehnungsspannungen an den Binder abgegeben werden. Infolgedessen konnte in seiner Arbeit das Problem der Verträglichkeit der Spannungen von Schale und Binderscheiben abgespalten werden. Es ergibt sich hierfür bei nichtachsensymmetrischer Unstetigkeit eine Differentialgleichung 6. Ordnung, wobei sich die Spannungen wieder aus einer Spannungsfunktion ableiten lassen. Dieses letztere Problem wurde in ausführlicher Form auch von Dr.-Ing. K. MIESEL behandelt¹.

Bezüglich der früheren Ausführungen von Schalendächern sei auf die angeführten Veröffentlichungen hingewiesen. Hier sollen einige neuere Bauten

1. Dr.-Ing. MIESEL. Ueber die Festigkeit von Kreiszylinderschalen mit nicht achsensymmetrischer Belastung. « Ingenieurarchiv » vom Dezember 1929, Heft 4.

besprochen werden. Die Entwurfsbearbeitung und Berechnung dieser Bauten besorgte die Dyckerhoff & Widmann A.-G. und, wenn nichts anderes erwähnt ist, auch die Ausführung.

Dr.-Ing. DISCHINGER hat in seinem Referat auf dem Ersten Internationalen Kongress für Beton und Eisenbeton, Lüttich, 1930, einen Längs- und Querschnitt sowie eine perspektivische Innenansicht der Autohalle « S. T. A. » in Rom gebracht, die im Jahre 1929 durch die Firma Rodolfo Stoecker, Rom, ausgeführt und im Jahre 1931 erweitert wurde. Da der Innenraum dieser Halle möglichst wenig durch Konstruktionsteile

beeinträchtigt werden sollte, wurden die Binder über die Schale gelegt und die Tonne ohne Randträger ausgeführt. Der Zuggurt für die Trägerwirkung musste also durch die Schale selbst und durch die verstärkte Wasserkehle gebildet werden. Die über dem Dach liegenden Vollwandbinder sind ein System von Kragträgern, die in den Tonnenscheiteln gelenkig miteinander verbunden sind. Eine Innenansicht der Halle gibt Abb. 14.

Eine ähnliche Konstruktion zeigt die im Jahre 1931 von der Firma Stoecker, Rom, ausgeführte Autohalle « A. T. A. G. » in Rom. Einen Quer- und Längsschnitt, sowie einen Grundriss gibt die Abb. 15. Die vier über einen Mittelbinder durchgehenden Tonnen haben bei einer Spannweite von 13,9 m eine Trägerspannweite von $2 \times 20,775$ m.

Bei dem im Jahre 1930-31 erbauten Kaischuppen 59 im Hamburger Hafen wurden die Binderscheiben in Bogenrippen mit angehängtem Zugband aufgelöst. Einen Längs- und Querschnitt durch die Halle gibt Abb. 16. Die Grundfläche ist rd. 332×50 m. Die in Hallenmitte auf einem Zwischenbinder aufruhenden, also über 2 Felder durchlaufend konstruierten 36 Tonnengewölbe, die an den Hallenlängsseiten auf Frontbindern aufliegen, haben eine Trägerspannweite von $2 \times 24,375$ m und eine Spannweite in Richtung der Bogen = 9,16 m. Die Schalendicke beträgt 5,5 cm; der Bau ist durch sechs Dehnungsfugen unterteilt. In den Gewölbeknoten sind reichlich bemessene Oberlichter, an den Längsfronten Seitenfenster vorhanden. Hier konnte die neuartige Eisenbetonbauweise — zum erstenmal bei solchen Schuppenbauten in Deutschland — mit der seither üblichen Holzbauweise erfolgreich in Wettbewerb treten. Die einzelnen Rüstungsteile konnten immer wieder verwendet werden. Abb. 17 zeigt einen Teil der Schalen bereits fertiggestellt, einen anderen noch in der Rüstung.

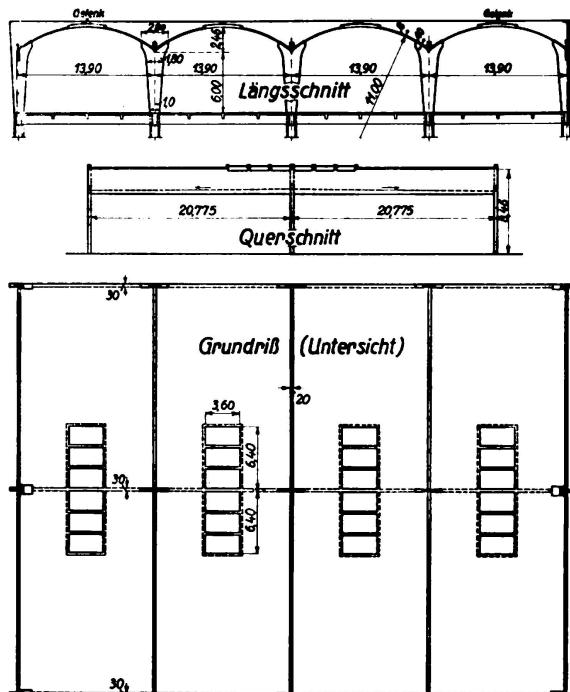


Fig. 15.
Autohalle « A. T. A. G. » in Rom.
Garage pour automobiles « A. T. A. G. » à Rome.
(Coupes et projection horizontale).
« A. T. A. G. » Garage in Rome. (Vues and Plan).
Gelenk = Articulation = Joint.

Die im Jahre 1931 erbaute Fasslagerhalle der Gross-Einkaufsgesellschaft Deutscher Konsumvereine m. b. H. in Hamburg hat ebenso wie der zuvor genannte Kaischuppen durch aufgelöste Binderscheiben versteifte Tonnen

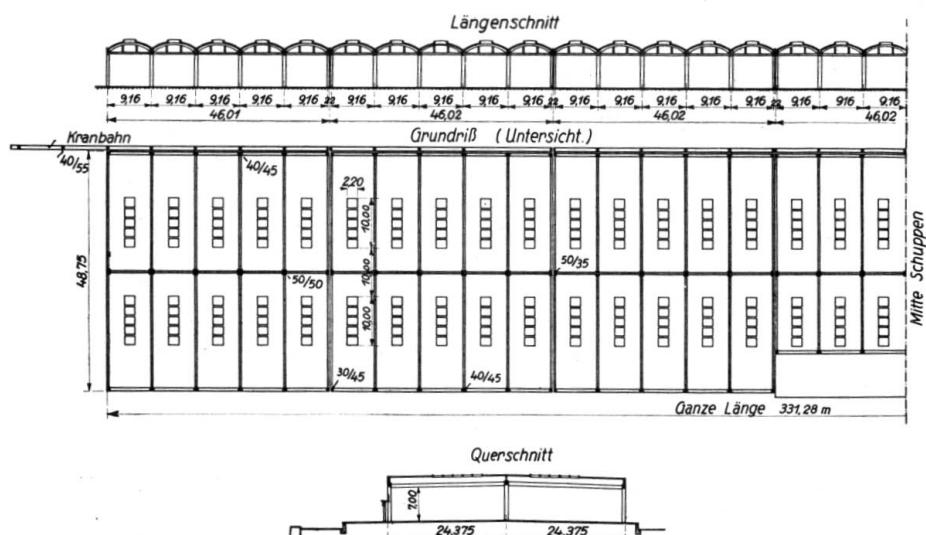


Fig. 16.

Kaischuppen 59 im Hafen zu Hamburg.
Hangar 59 du port de Hambourg. (Coupes et projection horizontale.)
Shed nr 59 in the Port of Hamburg. (Sections and Plan.)

Ganze Länge = Longueur totale = Total Length.
Mitte Schuppen = Milieu du hangar = Centre of the Shed
Kranbahn = Grue = Crane.

(Abb. 18). Es sind 12 Tonnen von 12 bis 23 m Binderabstand vorhanden. Die Gewölbespannweite beträgt 9,35 m, die Schalendicke 6 cm.

Im Jahre 1930 hat die Firma Antal Sorg, Budapest, die Städtische Strassen-

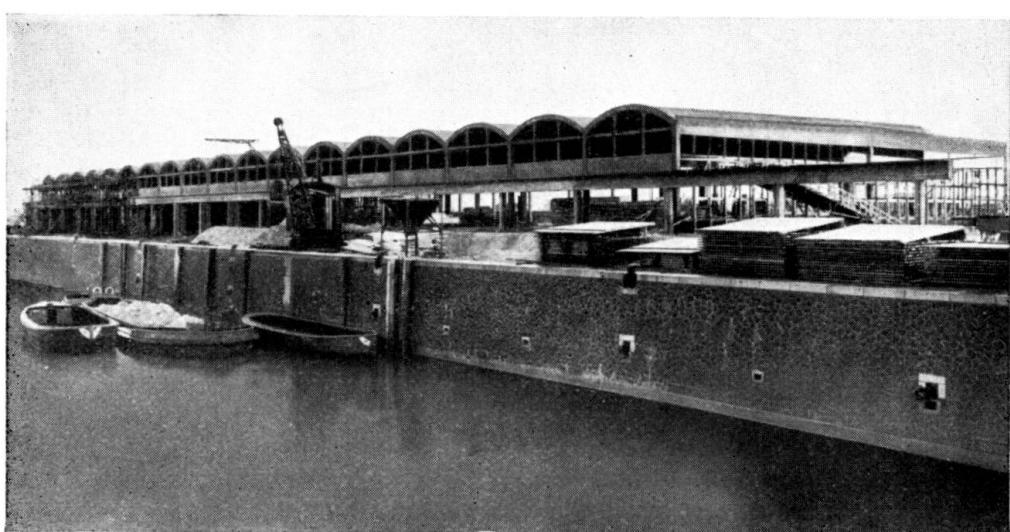


Fig. 17.

Kaischuppen 59 im Hamburger Hafen im Bau.
Hangar 59 du port de Hambourg en construction.
Shed Nr. 59 in the Port of Hamburg under Construction.

bahnhalle in Budapest ausgeführt (Abb. 19). Bei ihr sind je zwei Kragdach-elemente miteinander gekoppelt. Der Achsabstand ist 13,70 m, die Länge 30

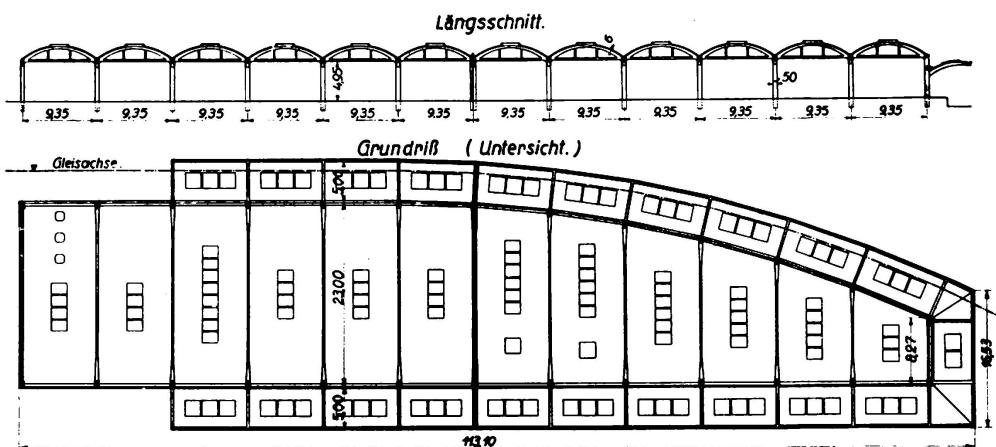


Fig. 18.

Fasslagerhalle in Hamburg.

Hangar à tonneaux à Hambourg. (Coupe et projection horizontale.)

Hall of Barrel Store in Hamburg. (Section and Plan.)

bis 40 m in Spannweiten von 8 bis 12 m, die Schalendicke 5 cm. Abb. 20 gewährt einen Blick in die fertige Halle.

Der kühnste Bau, der nach diesem System ausgeführt wurde, ist die Grossmarkthalle in Budapest. Bei

ihr besitzen die Tonnen eine Spannweite von 41 m bei einer Schalendicke von 6 cm. Diese grosse Trägerwirkung wurde erreicht durch eine sehr starke Wölbung der Querschnittskurve. Bemerkenswert ist hierbei auch die Bewehrung der 3,4 m hohen und nur 20 cm starken Randglieder. Bei der geringen Stärke der Randglieder war es nicht möglich, die Zug-eisen zwecks Aufnahme der Schubkräfte schräg nach oben abzubiegen; sie wurden durch schräge Bügel ersetzt. Diese Ausführungsart wurde an Probekörpern ausprobiert und hat sich auch bei der tatsächlichen Ausführung bestens bewährt. Nähere Angaben über die Grossmarkthalle Budapest, den Berechnungsgang und die eben erwähnte Bewehrung der Randglieder will Dr.-Ing. FINTERWALDER in einem Sonderbericht machen.

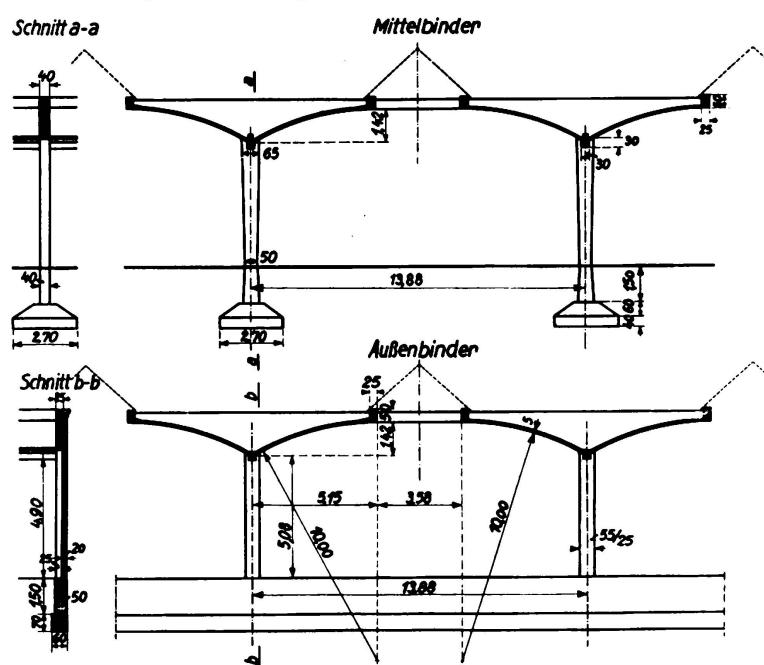


Fig. 19.

Städtische Strassenbahnhalle in Budapest.
Remise des Tramways municipaux à Budapest.

Municipal Tramway Depot in Budapest

Mittelbinder = Ferme centrale = Central Truss.
Aussenbinder = Ferme à l'extrême = End Truss.

3. Vieleckskuppeln, zusammengesetzt aus verstieften Zylinderschalen¹.

In Abb. 21 ist ein durch die beiden Binderscheiben ausgesteiftes Schalen gewölbe mit quadratischem Grundriss dargestellt. Denkt man sich nun dieses

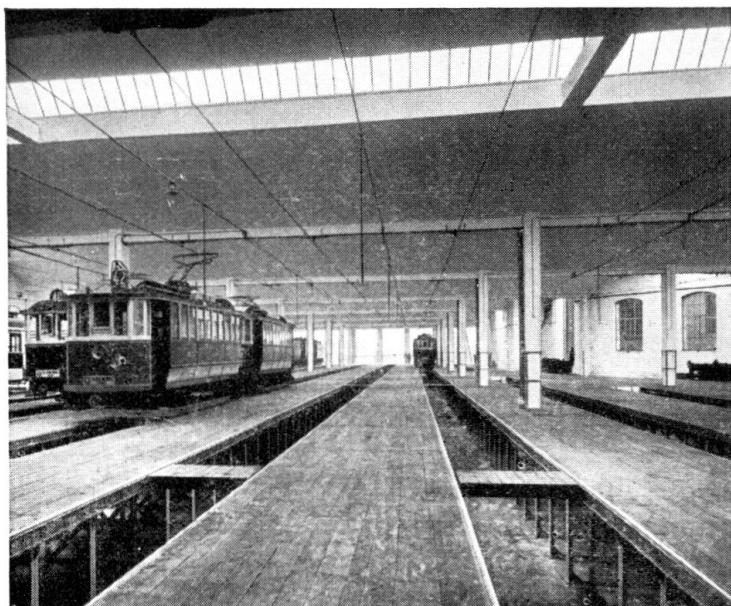


Fig. 20.
Blick in die städtische Strassenbahnhalle zu Budapest.
Remise des Tramways municipaux à Budapest.
View in the Municipal Tramway Depot in Budapest.

Tonnengewölbe durch 2 Diagonalschnitte in 4 Teile zerlegt, so nennt man die mit *a* bezeichneten Teile Walme, die mit *b* bezeichneten Kappen. Wenn die räumliche Kräftewirkung dieser durch Diagonalschnitte begrenzten 4 Teile erhalten bleiben soll, müssen die Schnittstellen wieder durch Scheiben aus gesteift werden. Ist dies der Fall, dann treten in den Schalen der Kappen und Walme, ebenso

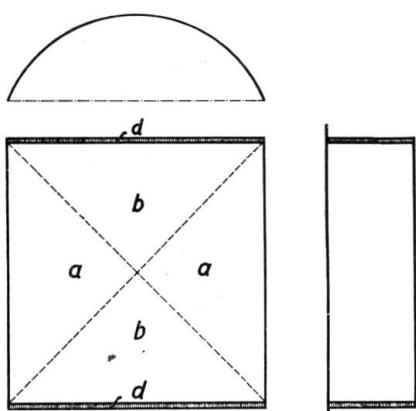


Fig. 21.

Ausgesteiftes Schalengewölbe über quadratischem Grundriss.
Voûte renforcée sur plan carré.

Stiffened Shell Vaulting with Square Ground Plan.

1. Dr.-Ing. DISCHINGER. Die Theorie der Vielecks kuppeln und die Zusammenhänge mit den einbeschriebenen Rotationsschalen. Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1929, Heft 5-9.

Dr.-Ing. F. DISCHINGER. Eisenbeton schalendächer Zeiss-Dywidag zur Ueberdachung weitgespannter Räume. Erster Internationaler Kongress für Beton und Eisenbeton, Lüttich, 1930. Verlag La Technique des Travaux, Lüttich.

DERSELBE. Schalen und Rippenkuppeln. Handbuch für Eisenbetonbau, 12. Bd., 3. Aufl., Verlag von W. Ernst & Sohn, Berlin.

DERSELBE. Grossmarkthalle Leipzig. Bericht über die 32. Hauptversammlung des Deutschen Beton-Vereins, 1929, S. 167.

wie bei dem geschlossenen Schalengewölbe, im wesentlichen nur Dehnungsspannungen auf.

Ein nur aus Walmen zusammengesetztes Gewölbe nennt man Klostergewölbe (Abb. 22), ein nur aus Kappen zusammengesetztes dagegen ein Kreuzgewölbe (Abb. 23). Anstelle solcher quadratischer Kuppeln lassen sich durch Verzerrung auch rechteckige Kuppeln und durch Zusammensetzen vieler Walme oder Kappen Vieleckskuppeln herstellen.

Durch die Kuppelwirkung entstehen, ebenso wie bei einer Rotationsschale, Ringkräfte, durch welche die Grate biegungsfrei gehalten werden. Die Ringkräfte sind im Vergleich zu denen der Rotationsschalen umso grösser, je geringer die Anzahl der Ecken ist. Bei unendlich vielen Ecken geht die Vieleckskuppel in eine Rotationsschale über. Die Kräfte der Vieleckskuppel infolge der Kuppelwirkung können in Abhängigkeit von den Kräften der einbeschrie-

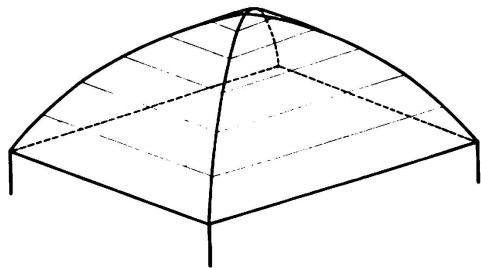


Fig. 22.
Klostergewölbe.
Voûte cloisonnée.
Cloister Vault.

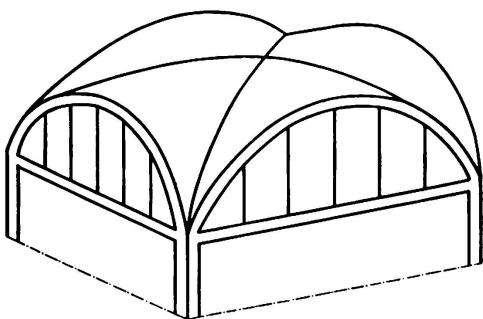


Fig. 23.
Kreuzgewölbe.
Voûte en arête.
Groined Vault.

benen Rotationsschale dargestellt werden. Zu dieser Kuppelwirkung tritt jedoch noch eine Trägerwirkung hinzu, denn die durch die Grate ausgesteiften zylindrischen Schalengewölbe wirken als grosse Raumträger zwischen den Graten und übertragen die Lasten der Dachfläche nach den Graten und damit nach den Ecksäulen. In dieser Vereinigung von Kuppel- und Trägerwirkung liegt der wesentliche Vorteil dieses Kuppelsystems gegenüber den bisherigen Rotationsschalen. Bei grossen Säulenabständen sind zur Uebertragung der Lasten keine schweren und teuren Absangkonstruktionen nötig, denn die Dachfläche wirkt selbst als Träger.

Die erste Anwendung fand dieses Kuppelsystem bei der Planetariumskuppel in Dresden, die als Sechszeheck bei 25 m Spannweite mit 4 cm Schalendicke ausgeführt wurde. Zwei Jahre später wurden dann die Kuppeln der Grossmarkthalle in Leipzig nach diesem System gebaut. Die Achteckkuppeln haben 76 m Spannweite und 9 cm Schalendicke. Sie sind die grössten Massivkuppeln der Welt. Es sei hier auf die verschiedenen Veröffentlichungen hingewiesen.

Eine ganz ähnliche Achteckkuppel von 60 m Spannweite wurde im Sommer 1929 von der Firma Ed. Züblin & Co., A.-G., Basel, nach den Plänen und Berechnungen der Dyckerhoff & Widmann A.-G. für die Grossmarkthalle in Basel ausgeführt. Die Schalengewölbe dieser Vieleckskuppeln haben eine

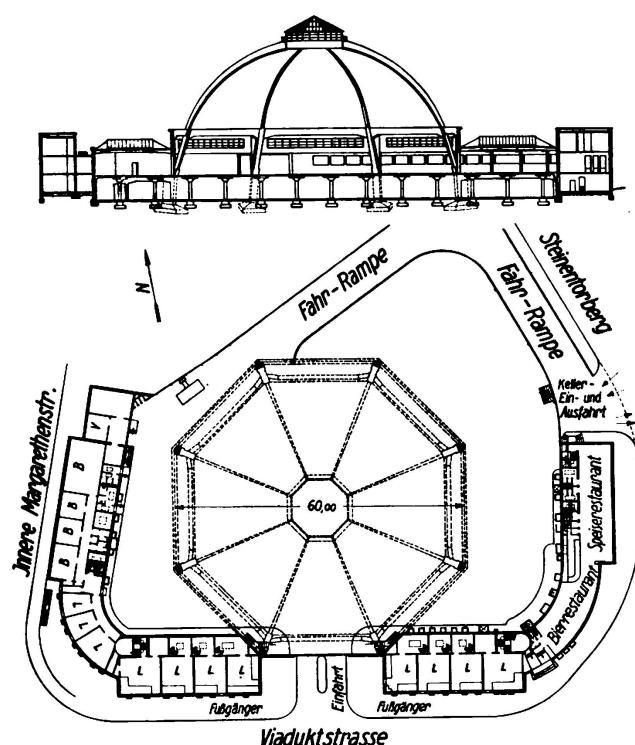


Fig. 24.

**Grossmarkthalle in Basel.
Marché couvert à Bâle.
Large Market Hall in Basle.**

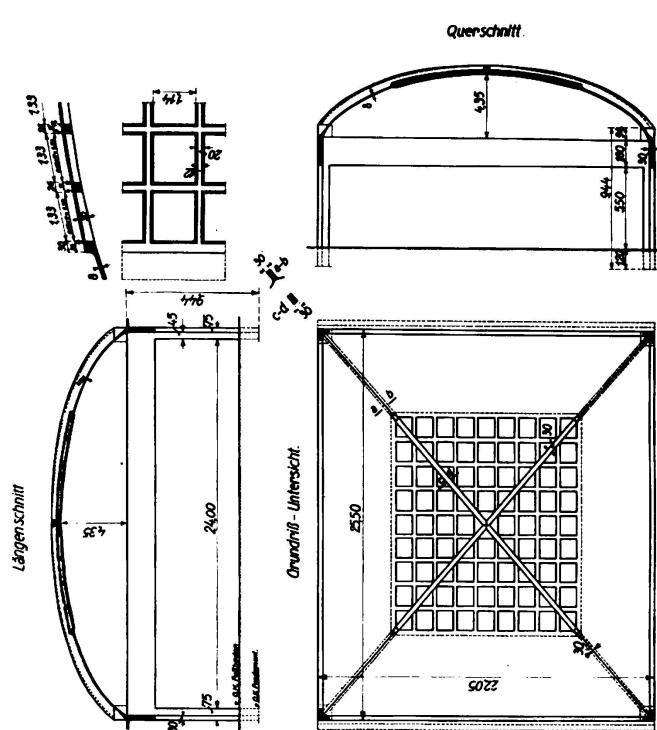


Fig. 25.

Autohall Fiat in Rom.
Hall d'automobiles Fiat à Rome.
Fiat Auto Garage in Rome.

Stärke von 8,5 cm und die Form von Zykloiden. Die Schalengewölbe sind am Kämpfer im Gegensatz zu den Leipziger Kuppeln nicht durch Tragbögen unterstützt, sondern sie tragen sich ganz frei von Grat zu Grat als Träger durch. In Abb. 24 ist Grundriss und Aufriss der Kuppel dargestellt.

Ein Klostergewölbe über recht-eckigem Grundriss ist die im Jahre 1931 von der Firma R. Stoelcker, Rom, ausgeführte Auto-halle Fiat in Rom (Abb. 25). Die Grundfläche beträgt $25,5 \times 22,0$ m. Die Halle wird durch zwei ellip-tische Tonnengewölbe von 8 cm Schalenstärke überdacht. Die Pfeilhöhe ist 4,35 m, die Rand-träger sind 1,60 m hoch. Die Oberlichter bestehen aus Luxfer-Prismen.

4. Doppelt gekrümmte, ausgesteifte Schalendächer.

Nach dem Bericht von Dr.-Ing. DISCHINGER auf dem Internationalen Kongress in Lüttich betragen die grössten Trägerspannweiten, die sich mit den einfach gekrümmten zylindrischen Schalen in wirtschaftlicher Weise noch erreichen lassen, 45 m bei freiaufliegenden Tonnen und 55 bis 60 m bei kontinuierlich gelagerten Tonnen. Bei grösseren Spannweiten kommen doppelt gekrümmte Schalen in Frage, die Dr.-Ing. DISCHINGER in der schon erwähnten Preisarbeit der Akademie des Bauwesens behandelt hat. Bei diesen doppelt gekrümmten Schalen spielen die Biegmomente nur noch eine ganz untergeordnete Rolle; die Dehnungskräfte werden wesentlich geringer und die Knicksicherheit erheblich grösser.

Besonders geeignet für die doppelt gekrümmten Schalen sind die Translationsflächen, mit denen sich sowohl quadratische, als auch rechteckige Grundrisse überdachen lassen. Für quadratische Grundrisse ist auch die Kugelfläche sehr geeignet, die zugleich den Vorteil hat, dass sich die inneren Kräfte genau berechnen lassen. Eine derartige Kuppel mit quadratischem Grundriss steht als Modell auf dem Hofe der Dyckerhoff & Widmann A.-G. in Wiesbaden-Biebrich (Abb. 26). Die Kugelschale wird auf allen 4 Seiten durch vertikale Binderscheiben begrenzt. Die Binderscheiben wirken mit der Schale zusammen als ein einheitlicher grosser Raumträger, der die gesamten Lasten bei ganz geringen Dehnungsspannungen nach den 4 Eckpunkten abträgt. Die Grundfläche dieser Modellkuppel beträgt $7,30 \times 7,30$ m, die Schalendicke 1,5 cm; sie ist am Uebergang zu den Bindern auf 2,5 cm

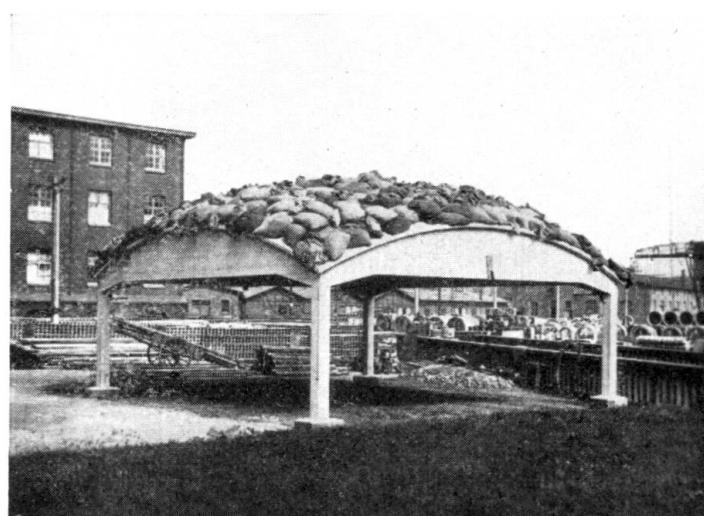


Fig. 26.
Modellbau einer doppelt gekrümmten ausgesteiften Schale.
Modèle d'une voûte renforcée à double courbure.
Model Construction of a Doubly Bent Stiffened Shell.

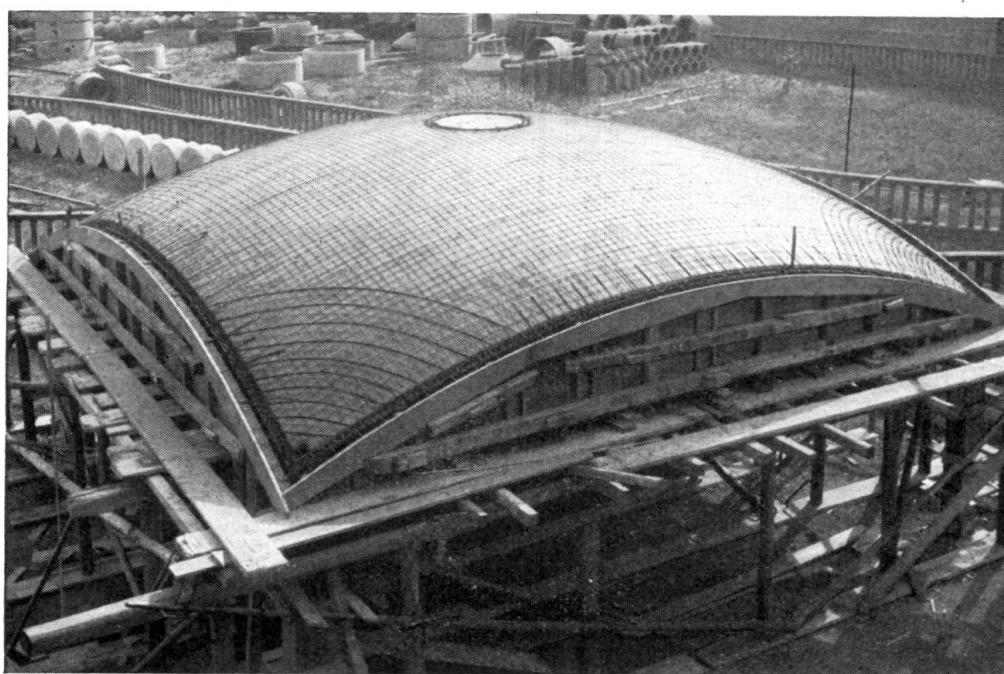


Fig. 27.
Bewehrung der Schalenkuppel Fig. 26.
Armature de la voûte fig. 26.
Reinforcement of the Shell Cupola in fig. 26

verstärkt. Die Schale ist durch ein 3 mm Maschennetz bewehrt, und an den Ecken sind Zulageeisen angeordnet (Abb. 27). Bei der Probebelastung wurde diese nur 1,5 cm starke Kuppel mit 300 kg/m^2 sowohl ganzseitig als auch halbseitig belastet; ausserdem wurde ein Belastungsversuch mit 50 dicht

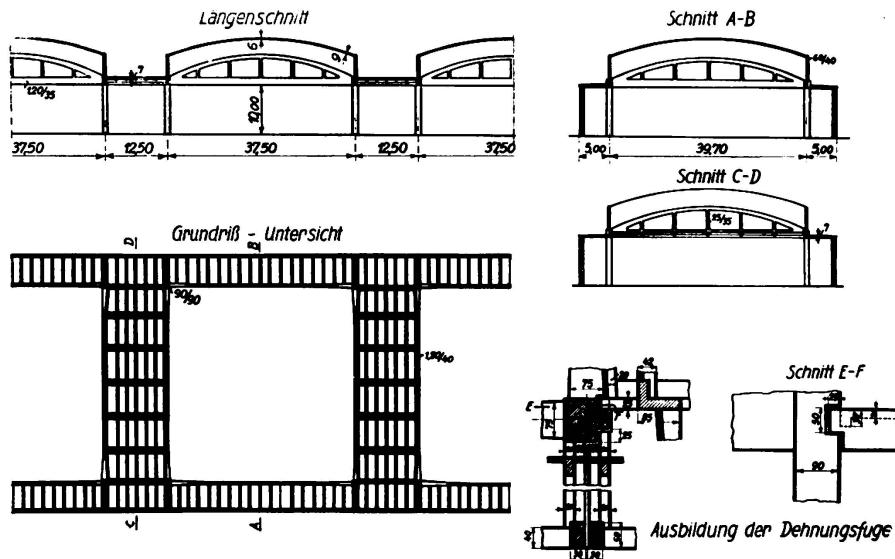


Fig. 28.
Schalenkuppeln der Großmarkthalle in Dresden. (Projekt).
Coupole du Marché couvert à Dresde. (Projet).
Shell Cupolas of the Large Market Hall in Dresden. (Projected).
Ausbildung der Dehnungsfuge = Joint de dilatation = Expansion Joint.

beieinanderstehenden Menschen durchgeführt. Trotz dieser hohen Belastung blieb die Schale vollständig rissefrei.

Die Kuppel in Wiesbaden-Biebrich diente als Modell für die fünfmal grös-

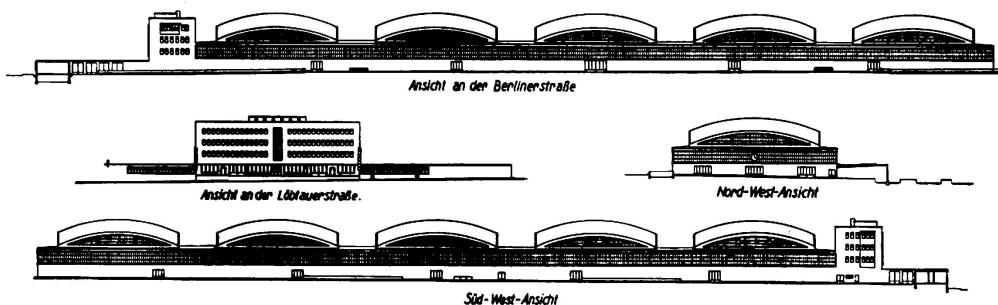


Fig. 29.
Ansichtszeichnung der Großmarkthalle Dresden.
Croquis du Marché couvert à Dresde. (Vues).
View of the Large Market Hall in Dresden. (Sights).

seren Kuppeln der Großmarkthalle Dresden, die im Projekt durchgearbeitet, aber noch nicht ausgeführt sind. Die Systemzeichnung gibt Abb. 28. Die Kuppeln haben $37,50 \times 37,50$ m Grundfläche, die Dicke der Kugelschale ist 6 cm. Abb. 29 zeigt die Ansichten der Halle mit den Kopfbauten nach dem Entwurf der Architekten KLOPHÄUS, SCHOCH, ZU PUTLITZ, Hamburg, und Lossow und Professor KÜHNE, Dresden.

Dieses Kuppelsystem ist auch sehr geeignet für die Herstellung von Viieleckskuppeln. Es lassen sich damit noch wesentlich grössere Säulenabstände erzielen, als mit den in Abschnitt 3 beschriebenen Vieleckskuppeln. Es bereitet keine Schwierigkeiten, eine Vieleckskuppel gemäss Abb. 30 bei einer Spannweite von 150 m nur auf 6 Säulen aufzulagern und dadurch einen Säulenabstand von 80 m zu erzielen.

5. Das Prinzip des statischen Massen-Ausgleiches.

In der schon erwähnten Preisarbeit für die Akademie des Bauwesens hat Dr.-Ing. DISCHINGER auf das für alle Raumsysteme wichtige Prinzip des statischen Massen-Ausgleiches hingewiesen. Dieses Prinzip gestattet auch die Berechnung von Raum-Systemen, die durch Verzerrung aus symmetrischen Gebilden hervorgegangen sind. So ist es z. B. möglich, die Spannungen einer Kuppel mit elliptischem Grundriss auf die Spannungen einer Rotationsschale zurückzuführen, wenn zwischen der Schalendicke der Rotationsschale und der Schalendicke der Kuppel mit elliptischem Grundriss bestimmte durch das Prinzip des Massen-Ausgleiches gegebene Beziehungen vorhanden sind. In gleicher Weise lassen sich auch die Gebilde der Abschnitte 3 und 4 verzerren und berechnen.

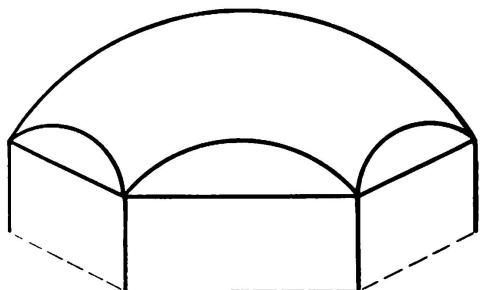


Fig. 30.

Projekt einer Vieleckskuppel mit 150 m Spannweite ; Säulenabstand 80 m.

Projet d'une coupole polygonale de 150 m de portée ; Distance des piliers 80 m.

Project for a Polygonal Cupola of 150 m Span ; 80 Metres between Columns.

TRADUCTION

Les tendances nouvelles sont caractérisées par l'utilisation de systèmes spatiaux. Dans de tels systèmes, la transmission de la charge s'opère essentiellement par l'intermédiaire de forces centrales, tandis que les efforts de flexion, à l'inverse de ce qui se produit dans les systèmes plans, ne jouent presque aucun rôle. Il en résulte que l'on peut ainsi couvrir en béton armé de grandes portées très économiquement. Le plus connu et le plus souvent utilisé de ces systèmes spatiaux est la coupole qui ne permet toutefois de couvrir que des espaces circulaires en plan. Mais pour répondre aux exigences nouvelles, on a réussi récemment à couvrir des ouvrages à plan rectangulaire ou polygonal à l'aide de minces coques qui peuvent être à simple ou à double courbure, et qui doivent être raidies par des tympans afin de réaliser l'action spatiale des forces. On s'est, de plus, efforcé ces dernières années de profiter de cet effet spatial dans les ouvrages formés d'un assemblage de tympans plans. Ce genre de construction joue un rôle important dans les silos et les halles.

A. Tympons.

1. La paroi portante considérée comme tympan.

Tandis que dans les dalles à armatures croisées et les dalles champignons traitées dans les mémoires précédents, c'est la flexion perpendiculaire au plan de la dalle qui intervient en premier lieu ; dans un tympan au contraire, ce sont les fatigues s'exerçant dans le plan même de ce dernier qui jouent le rôle prépondérant. Il s'agit ici du problème de la paroi portante, c'est-à-dire d'une poutre dont la hauteur h est grande relativement à la portée l . Les dalles agissent comme tympans dans le sens horizontal quand elles reçoivent et transmettent les efforts du vent.

L'utilisation de parois comme poutres n'est pas nouvelle en béton armé, mais sa pratique était autrefois incertaine dans bien des cas, ou bien le calcul des tensions intérieures de ces parois était basé, dans la construction des silos par exemple, sur des hypothèses plus ou moins arbitraires, à défaut de connaissances précises sur la répartition réelle des fatigues.

A côté de nombreuses constructions de silos, où des sommiers de support spéciaux ont été disposés en plus des parois proprement dites, on a aussi exécuté beaucoup d'ouvrages où les parois ont été utilisées rationnellement comme sommiers, grâce à un sens constructif aigu des auteurs de ces ouvrages.

Le silo à ciment exécuté par la maison Wayss et Freytag A. G., à Hagon-dange¹, en est un exemple (fig. 1). Les surfaces inclinées de glissement ont été réalisées en partie à l'aide d'un remplissage de béton sur des fonds horizontaux, en partie en donnant aux entonnoirs la forme de pyramides suspendues en béton armé. Pour le calcul de l'armature, on a considéré comme sommier une certaine hauteur de la paroi, dans laquelle on a fait pénétrer les fers qui supportent l'entonnoir. La figure 2 montre l'armature des entonnoirs, leur attache aux parois et l'armature de la partie de ces dernières considérée comme sommier. Les parois sont élargies à leur partie inférieure et les fers des sommiers sont pliés en raison des efforts tranchants considérables qui agissent au droit des piliers.

Lors du calcul de telles parois, la hauteur que l'on admet comme agissant à la manière d'un sommier est naturellement d'une grande importance pour la détermination des armatures. À la II^e Réunion Internationale des Ponts et Charpentes, en 1928, à Vienne, le Dr. Ing. CRAEMER a donné les résultats d'une étude statique d'un sommier du genre tympan² s'étendant sur une infinité de travées et soumis à des charges variables d'une travée à l'autre.

Entre temps, il en a publié les bases mathématiques³. Le cas d'une charge

1. Dr.-Ing. E. Mörsch. Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung. 4. Aufl. S. 618, Abb. 682 u. S. 619, Abb. 684 Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart.

2. Dr.-Ing. CRAEMER. « Spannungen in hohen, wandartigen Trägern unter besonderer Berücksichtigung des Eisenbeton-Bunkerbaues. » Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau. S. 706. Verlag von Julius Springer, Wien, 1929.

3. Dr.-Ing. CRAEMER. « Spannungen in wandartigen Trägern bei feldweise wechselnder Belastung. » Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1930, Bd. 10, Heft 3.

variable d'une travée à l'autre, que le Dr. Ing. CRAEMER a traité, est un cas particulier d'une étude publiée par le Dr. Ing. BLEICH, en 1923¹.

Cette étude, qui fournit la base du calcul des poutres-tympons continues, n'a pas retenu particulièrement l'attention des ingénieurs du béton armé, sans doute parce qu'elle visait la construction métallique et spécialement le calcul des appuis.

Le problème a d'ailleurs déjà été traité en 1903 par L. N. G. FILON². L'exposé de ce dernier est toutefois long et compliqué, tandis que celui du Dr. Ing. BLEICH est beaucoup plus simple, grâce à l'utilisation qu'il a faite de la fonction Airyenne des tensions, qui facilite aussi l'exécution du calcul.

Le problème des tympans portants a encore été traité en 1923 par le Prof. Dr. Ing. BORTSCH³, qui a pris comme base la répartition radiale des tensions créées par une force agissant sur un demi-tympan d'étendue illimitée. A la 11^e Réunion Internationale des Ponts et Charpentes, à Vienne, en 1928, la conférence du Dr. Ing. CRAEMER fut suivie d'une discussion au cours de laquelle le Prof. Dr. Ing. BORTSCH, se basant sur son propre travail, émit des objections au sujet de la méthode de calcul du Dr. Ing. CRAEMER et de ses résultats, en faisant valoir que ses propres calculs l'avaient conduit à d'autres conclusions. La question de savoir si les résultats de la méthode du Dr. Ing. CRAEMER coïncident avec ceux du Dr. Ing. BLEICH, ou si ce sont les calculs du Dr. Ing. BORTSCH qui sont exacts n'est pas encore tranchée⁴.

Le procédé du Dr. Ing. BLEICH permet de calculer les tympans continus d'un nombre infini de travées, de portées quelconques, pour n'importe quelle valeur du poids propre et pour des charges mobiles symétriques ou asymétriques. Mais lorsqu'il s'agit de poutres de longueur limitée, on se heurte à certaines difficultés, ce qui a incité en 1927 le Prof. Dr. Th. v. KARMAN⁵ et F. R. SEEWALD⁶ à étudier le même problème à l'aide de lignes d'influence. SEEWALD a ainsi réussi à représenter sous une forme claire le régime des efforts dans une poutre de grande hauteur. Ces tensions se composent d'une part, des fatigues de flexion, selon la loi de Navier et, d'autre part, des sollicitations produites par les réactions des colonnes. Des extraits de cette étude ont aussi été publiés dans le « Handbuch für Physik »⁶. Ce procédé permet donc de calculer les poutres-tympons d'après la loi de Navier, en introduisant ensuite les sollicitations dues aux charges concentrées des colonnes, qui peuvent se calculer d'après le travail de SEEWALD.

1. Dr.-Ing. F. BLEICH. « Der gerade Stab mit Rechteckquerschnitt als ebenes Problem ». Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1923, S. 255.

2. L. N. G. FILON. « On an approximate solution of the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load. » Phil. Transactions of the Royal Soc. London, 1903. Serie A. Vol. 201. S. 63.

3. Dr.-Ing. BORTSCH. « Spannungen in Silowänden ». Festschrift zum 70. Geburtstag von Melan, 1923.

4. En préparation : Dr.-Ing. F. DISCHINGER. « Beitrag zur strengen Theorie der Halbscheibe und des gedrungenen wandartigen Balkens ». Wissenschaftliche Beiträge, Tome I.

5. « Ueber die Grundlagen der Balken-Theorie », Abhandlung aus dem Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen, Heft 7, und SEEWALD : « Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt », Abhandlung aus dem Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

6. Dr.-Ing. J. W. GECKELE. Handbuch für Physik, Bd. 6. Elastostatik S. 204.

Dans son mémoire présenté au premier Congrès International du Béton et du Béton Armé, qui s'est tenu à Liège en 1930, le Dr. Ing. F. DISCHINGER¹ a fait remarquer que dans les tympans qui agissent comme poutres continues, les bras de levier des efforts intérieurs sont plus faibles sur les appuis que dans les travées et ceci d'autant plus que les colonnes sont plus minces relativement à la portée.

Cette considération est importante pour le calcul des armatures.

Le problème du tympan rectangulaire, formant poutre simple sur deux appuis, était néanmoins resté encore sans solution. Ici les moyens basés sur la théorie pure, demeurent inopérants, car il n'est pas possible de traduire les conditions aux appuis sur tout le périmètre. Cette lacune a été comblée par un travail du Dr. Ing. Hermann BAY² qui a remplacé les équations différentielles par des équations aux différences, afin de traduire les conditions aux appuis. Cette solution est naturellement une approximation dont l'exactitude dépend du nombre de mailles choisi.

Les résultats du calcul ont été vérifiés par la photo-élasticimétrie qui a confirmé leur exactitude. On constate que dans les tympans sur deux appuis, seule une région de forme carrée, au-dessus de l'arête inférieure, entre en jeu pour supporter les fatigues de flexion et de cisaillement. Dans toute paroi reposant librement sur deux appuis, et dont la hauteur est plus grande que la portée, la région située au-dessus de ce carré n'intervient pas. Si le haut de la paroi supporte une charge uniformément répartie, cette dernière est simplement transmise par le haut de la paroi, comme le ferait une série de colonnes juxtaposées, jusqu'à la partie carrée mentionnée ci-dessus. Si la surcharge est concentrée à la partie supérieure, elle se répartit tout d'abord à l'intérieur de la paroi dont la région inférieure se trouve ainsi sollicitée de la même manière que par une charge uniformément répartie. Pour le poids propre, l'allure de la ligne des pressions est semblable à celle d'une charge répartie agissant sur le bord supérieur du tympan. On remarquera combien le type d'armature proposé par le Dr. Ing. BAY pour les parois de silos à plusieurs travées se rapproche de l'armature reproduite dans la figure 2.

2. Tympons situés dans les plans différents et assemblés entre eux.

En reliant deux ou plusieurs tympans suivant leurs arêtes longitudinales, on réalise un système de surfaces portantes solidaires, mais dont les fatigues n'obéissent pas à la loi de Navier, moins encore que ce n'est le cas pour les tympans considérés isolément.

Le principal champ d'application de ces systèmes est constitué par la construction des silos, où les parois et les radiers des trémies forment un système porteur unique. Le Dr. Ing. CRAEMER a signalé en 1929, dans la Revue « Beton und Eisen », cette action d'ensemble des parois et radiers et l'économie qu'elle permet de réaliser par la suppression de sommiers superflus au-dessous des

1. Dr.-Ing. Franz DISCHINGER « Eisenbetonschalendächer Zeiss-Dywidag zur Ueberdachung weitgespannter Räume. » Erster Internationaler Kongress für Beton und Eisenbeton, Lüttich, 1930. Verlag : La Technique des Travaux. Liège.

2. Dr.-Ing. Hermann BAY. « Ueber den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetontragwänden. » Verlag von Konrad Wittwer. Stuttgart, 1931.

tympans¹. Cette idée avait déjà été utilisée fréquemment dans la pratique², Nous en donnons un exemple dans la figure 4, qui représente un silo à coke exécuté par la maison Dyckerhoff et Widmann A. G. On se rendra très bien compte des progrès successifs en comparant les diverses coupes de silos (fig. 5) exécutés par la maison Wayss et Freytag A. G. La figure 5 a donne la coupe du silo I de l'Usine de Trattendorf, construit en 1915. L'intérieur est raidi par tout un système de nervures et d'entretoises qui supportent la poussée latérale, complété encore par des longerons destinés à raidir les entretoises. Le radier, très lourd, supporte toute la charge du contenu du silo. A l'inverse de celui-ci le silo II exécuté à Trattendorf, en 1921 (fig. 5 b), est notablement libéré de cette construction intérieure. Les sommiers du radier ont disparu et sont remplacés par les surfaces obliques du radier lui-même. On voit par contre au renforcement du pied des parois que ces dernières ont été calculées isolément, sans tenir compte de leur solidarité avec les radiers.

Ce n'est qu'en 1925 que furent appliquées les nouvelles conceptions décrites plus haut, lors de la construction du silo de l'usine de Finkenheerd (fig. 5 c). Dans ce dernier, le système porteur est exclusivement formé des parois et des radiers, qui ont été calculés en tenant compte de leur solidarité, c'est-à-dire uniquement comme ensemble de surfaces. La portée de 13 m. est franchie uniquement, à l'aide de parois de 20 cm. d'épaisseur et de radiers de 25 cm. sans aucune nervure ou sommier. Les traverses posées sur les cellules sont disposées pour supporter les rubans transporteurs.

Cette nouvelle conception constructive repose sur l'utilisation systématique de la résistance de toutes les parois en tenant compte de leur interdépendance. C'est cette solidarité qui joue ici le rôle principal, à l'opposé de ce qui se passe dans les tympans considérés isolément. Si l'on charge une paroi verticale, le radier oblique qui lui est relié ne peut pas rester sans tension ; il intervient dans le jeu des forces en équilibrant les fatigues. Il n'est pas besoin de nervures le long des arêtes communes à deux parois ni pour supporter les forces qui agissent dans le plan de ces parois, ni pour les forces perpendiculaires à ces dernières.

La théorie de ces ensembles porteurs formés de surfaces, autrement dit l'étude des réactions réciproques de deux ou plusieurs tympans reliés par leurs arêtes et l'examen des modifications que cette interdépendance apporte à la répartition des fatigues dans les tympans eux-mêmes, a été établie par l'ingénieur diplômé G. EHLERS à l'occasion de l'élaboration du projet de silo à Finkenheerd dont il vient d'être question⁴. Elle a été également développée par le Dr. Ing. CRAEMER⁵,

1. Dr.-Ing. CRAEMER. « Scheiben und Faltwerke als neue Konstruktionselemente im Eisenbetonbau. » Zeitschrift « Beton u. Eisen. » 1929. Heft. 13, 14, 18.

2. Vgl. Handbuch für Eisenbetonbau, 3. Aufl. Band 14, Abb. 99, 116, 150, 161, 186, 197, 199, 205, 202, 215, 233. Verlag von W. Ernst und Sohn, Berlin.

3. Vgl. Dr.-Ing. W. STARK. « Kokskohlenbunker für ein grosses industrielles Werk im Rheinland. » Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1929. Heft. 13, S. 244.

4. Dipl. Ing. EHLERS. « Ein neues Konstruktionsprinzip. » Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1930. Heft 8.

Du même : « Die Spannungsermittlung in Flächentragwerken ». Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1930. Heft 15. u. 16.

5. Dr.-Ing. CRAEMER. « Allgemeine Theorie der Faltwerke ». Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1930. Heft. 15.

qui aboutit pour ces systèmes, qu'il appelle « Faltwerke », à des résultats très proches de ceux de l'ingénieur Ehlers.

Ces systèmes ont un degré élevé d'hyperstaticité, car à chaque ligne de contact entre deux tympans, s'exercent quatre forces intérieures inconnues, à savoir, un moment fléchissant, l'effort tranchant correspondant, une poussée de voûte et, de plus, un effort de cisaillement s'exerçant le long de l'arête de contact. Ce dernier effort est déterminant pour l'action spatiale. C'est pourquoi, dans les deux méthodes, lui seul a été introduit comme inconnu, dans le but de simplifier les calculs, tandis que les moments fléchissants et les efforts tranchants ont été identifiés avec ceux d'une dalle continue reposant sur les arêtes de la charpente.

L'ingénieur EHLENS a de plus admis dans son étude que la loi de Navier, de la répartition linéaire des fatigues, était encore valable pour les tympans, c'est-à-dire que la hauteur des parois n'était pas trop grande relativement à leur portée ($h : l = \sim 1 : 1,5$). Le Dr. CRAEMER¹ estime que la limite se trouve à $h : l = 1 : 2$. On tombera d'accord avec EHLENS que le problème ne saurait être résolu à l'aide de considérations théoriques seule qui supposent toujours la matière homogène, et qu'il faut avoir recours à des essais pratiques approfondis. Les recherches du Dr. Ing. Bay, dont il a été question plus haut, seraient certainement précieuses ici. Ces systèmes de surfaces solidaires peuvent intervenir non seulement pour des silos, mais aussi dans la construction de réservoirs, de tours de réfrigération et d'ouvrages analogues à parois minces qui doivent résister à de fortes pressions du vent sans être munis de nervures de raidissement. La figure 6 donne le plan d'une tour de réfrigération construite en 1923 par Wayss et Freytag pour une fabrique de produits chimiques. Là précisément se posait le problème d'obtenir la résistance voulue aux efforts du vent, tout à fait sur l'arête supérieure des parois. Les diverses parois sont des tympans plans, dont les réactions sur appui sont reçues dans les angles. Ces réactions ne sont toutefois pas supportées en direction radiale par les nervures d'angle, mais tangentielle en se décomposant dans les directions des deux parois en contact. Chacune de ces dernières reçoit ainsi une charge déterminée, agissant dans son plan. La paroi constitue, vis-à-vis de cette charge, une poutre qui posséderait d'un côté une membrure tendue et l'autre une membrure comprimée. Par suite de la constitution monolithique du béton armé, la membrure tendue d'une poutre est liée à la membrure comprimée de la poutre adjacente ; il est par conséquent impossible que la ligne de suture soit sollicitée d'un côté à la compression et de l'autre à la traction. L'ouvrage aurait donc dû être calculé, d'après ce qui précède, comme système de surfaces solidaires, ce qui aurait évité les nervures d'angle. Mais comme à l'époque de l'exécution, le problème n'avait pas encore été élucidé, on dut se borner à tourner la difficulté en prévoyant les nervures d'angle considérées comme membrures tendues et comprimées des parois, sans tenir compte de la résistance propre de ces dernières.

Une cheminée formée ainsi de tympans devient une coque cylindrique, lorsque

1. Voir à ce sujet l'échange de vues entre le Dr. Ing. CRAEMER et l'ingénieur diplômé EHLENS paru dans la revue « Der Bauingenieur », 1930. Heft. 21.

le nombre des angles est très grand. Plusieurs tours de réfrigération ont été exécutés par Dyckerhoff et Widmann A. G. sous forme de coques cylindriques¹.

Le principe constructif des ensembles de tympans est également important pour les toitures, car la suppression des nervures et raidissements se traduit par une économie de matière et de poids. Les Dr. Ing. DISCHINGER² et FINSTERWALDER ont proposé, en 1928, de remplacer dans les toitures minces la section incurvée par un polygone, c'est-à-dire la coque, par un assemblage de tympans. Le Dr. Ing. CRAEMER³ a publié des projets de constructions de ce genre. Dans la figure 7 par exemple, la portée de la toiture perpendiculairement à la figure est de 24 m. Le système de surfaces repose à ses extrémités sur des parois en béton armé. Le toit de la station de pompage de Gelsenkirchen-Bismarck est une construction de ce genre, de petites dimensions. Il a été exécuté par la maison Stocker et Roggel G. m. b. H. à Gelsenkirchen, pour la « Emschergenossenschaft » d'Essen⁴ d'après le projet du Dr. Ing. CRAEMER. La figure 8 montre clairement l'absence de tout système de poutres. La couverture se compose de quatre parties planes, donc faciles à coiffer, qui s'étaient mutuellement suivant leurs arêtes et n'ont ainsi pas besoin de sommiers spéciaux comme appuis. Le raidissement périphérique latéral qu'exigeait la construction est dissimulé dans la corniche, de sorte que cette toiture, d'une portée théorique de 7,10 m. \times 10,76 m., ne présente aucune nervure.

Une exécution de ce genre sur plus grande échelle, est offerte par le bâtiment d'exploitation de la laiterie de Nuremberg (exécuté par la maison Leonhard Jacobi Nuremberg) (fig. 9)⁵. L'espace libre de 24 \times 24 m. et en partie de 37 \times 24 m. de portée est couvert par un ensemble de surfaces planes, horizontales et obliques, agencées de telle façon que sous l'effet de leurs réactions mutuelles, elles reportent leurs charges en quelques points seulement. Les poussées latérales des diverses coques s'équilibrent mutuellement ; seules les deux poussées extrêmes sont transmises par les têtes de colonnes à la paroi verticale adjacente formant tympan. Dans la partie de la construction où la portée est de 37 m., la hauteur disponible n'est pas suffisante au point de vue statique. Mais comme il ne paraissait pas indiqué d'augmenter cette hauteur et que, d'autre part, il n'était pas possible de placer des colonnes intérieures, on recourut ici à un appui intermédiaire sous forme d'un sommier subjacent placé au-dessus du toit. Ce sommier, placé transversalement au système de surfaces, a 24 m. de lon-

1. Dr.-Ing. DISCHINGER u. FINSTERWALDER. « Eisenbetonschalendächer, System Zeiss-Dywidag. » Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1928. Heft 44. u. 46. Vgl. auch Handbuch für Eisenbetonbau 3. Aufl., 12. Band. « Schalen und Rippenkuppeln. » Verlag von W. Ernst und Sohn, Berlin.

2. Dr.-Ing. DISCHINGER und FINSTERWALDER. « Eisenbetonschalendächer System Zeiss-Dywidag ». Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1928. Heft 44. und 46.

3. Dr.-Ing. CRAEMER. « Scheiben und Faltwerke als neue Konstruktionselemente im Eisenbetonbau ». Zeitschrift « Beton und Eisen », 1929. Heft 14.

4. Dr.-Ing. CRAEMER. « Eisenbeton-Faltwerksdach von 7 \times 11 m. Stützweite ohne Unterzüge », Wochenschrift der Deutschen Gesellschaft für Bauwesen und ihrer Bezirksvereine, 1931, Nr. 32, VDI-Verlag G. m. b. H. Berlin. NW 7.

5. « Der Milchhof in Nürnberg » (Architect O.E. SHWEIZER, Karlsruhe). « Baugilde » Zeitschrift des Bundes Deutscher Architekten, 1931, Heft 16. S. 1325.

gueur, 2,90 m. de hauteur et 70 cm. de largeur ; il est percé d'ouvertures d'élegissement. Les colonnes de support du système s'élargissent à leur sommet (fig. 9) ; ceci épargne une entretoise spéciale qui supporterait la partie inférieure horizontale.

B. Les coques.

1. Surfaces de révolution (coupoles minces sur plan circulaire).

Nous nous abstiendrons de décrire le développement de la construction des coques affectant la forme d'une surface de révolution, et nous renvoyons à la littérature qui traite du sujet¹. Mentionnons le système à mailles de Zeiss conçu en 1922 par le Dr. BAUERSFELD et que la maison Dyckerhoff et Widmann A. G. a utilisé pour la construction d'un grand nombre de coupoles de faible épaisseur, où le réseau métallique qui remplace le coffrage est tantôt enrobé de béton, tantôt démonté pour être utilisé à nouveau. Ces constructions n'apportent rien de nouveau au point de vue statique.

Il en est autrement de la conception statique du Dr. Ing. DISCHINGER qui propose de réaliser de grandes distances entre les colonnes d'appui de la coupole en faisant travailler spécialement ensemble la ceinture et la coque. Il est nécessaire à cet effet, de renforcer considérablement la coque aux retombées. La coque ainsi renforcée possède une résistance si grande que la coupole peut se porter seule, même pour de grandes distances entre colonnes. La ceinture ne porte plus la coupole, elle est plutôt suspendue. D'après le Dr. Ing. DISCHINGER, le problème est étroitement lié à celui des tympans traité dans la première partie de ce mémoire. Plus la distance entre colonnes est grande, plus la hauteur portante de la coupole est considérable, de sorte que les fatigues centrales dans la coupole, dues à son action portante, sont indépendantes de l'écartement des colonnes. De même que dans le problème des tympans se présente ici le fait remarquable que les bras de levier des forces internes sont beaucoup plus favorables dans les travées que sur les appuis, et que ces derniers bras de levier décroissent en même temps que les colonnes se rapprochent (voir page 5). La coupole de révolution de 75 m. de portée représentée dans la figure 10 en est un exemple. Cette coupole repose sur six colonnes distantes de 40 m. Elle est raidie par la dalle horizontale très étendue de la construction environ-

1. Dr.-Ing. DISCHINGER. « Schalen und Rippenkuppeln ». Handbuch für Eisenbetonbau. 3. Aufl., 12. Bd. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin.

Dr.-Ing. DISCHINGER. « Eisenbetonschalendächer Zeiss-Dywidag zur Ueberdachung weitgespannter Räume ». Erster Internationaler Kongress für Beton und Eisenbeton, Lüttich, 1930. Verlag : La Technique des Travaux. Liège.

Du même : « Fortschritte im Bau von Massivkuppeln. » Bericht über die 28. Hauptversammlung des Deutschen Beton-Vereins, 1925. S. 115. (S. auch Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1925. Heft 10.)

Dr.-Ing. FINSTERWALDER. « Die Schalendächer des Elektrizitätswerkes in Frankfurt a. M. ». Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1928. Heft 11.

Dr.-Ing. SCHERZINGER. « Neuartige Ausführung einer weitgespannten Schalenkuppel in Torkret-Eisenbeton ». Bericht über die 30. Hauptversammlung des Deutschen Beton-Vereins 1927, S. 351. (S. auch Deutsche Bauzeitung, 1927. Beilage « Konstruktion und Ausführung ». S. 104, 124, 183.)

nante qui s'oppose à toute déformation de la coque et rend ainsi possible son action portante. Cette action est si considérable qu'elle suffit non seulement au poids propre de la coupole mais encore à celui de la dalle adjacente. Ce problème constitue une partie du travail présenté par le Dr. Ing. DISCHINGER à l'« Akademie des Bauwesens », intitulé « Eisenbetonschale als Raumträger » et qui fut couronné du premier prix¹. Dans cette étude, l'auteur montre que l'on peut aussi construire des absides (demi-coupoles) suivant la figure 11, comme formes constructives indépendantes. Bien que le long de la coupure les tractions annulaires, dont la présence est nécessaire dans une coupole normale, soient supprimées, il est néanmoins possible de réaliser un état tensoriel purement central; ce n'est qu'au passage entre la coque et la ceinture que se produisent de petits moments fléchissants, à cause de la discontinuité des déformations du système statiquement déterminé.

2. La coque cylindrique raidie transversalement².

Les coupoles minces à plan circulaire ou elliptique permettent de couvrir de grandes portées avec une faible dépense de matière. Pour un grand nombre d'ouvrages, elles ne sont toutefois pas utilisables à cause de la forme courbe de leur base. C'est pourquoi les efforts des constructeurs se sont portés vers la réalisation de coques à plan rectangulaire.

La première proposition de ce genre, formulée en 1923 par le Dr. Ing. DISCHINGER, concernait des coques à double courbure qui devaient être raidies par des fermes-tympans verticales. On renonça toutefois au début à cette forme, à cause des difficultés du calcul et on étudia des coques cylindriques à simple courbure, raidies aux deux extrémités (fig. 12). Lorsqu'une voûte de ce genre est raidie à ses extrémités, par des fermes-tympans, il se produit un système spatial de forces analogue à celui qui se présente dans une coupole, et dans lequel les moments fléchissants sont minimes. Les premières exécutions de ce genre remontent à 1924 et 1926 et ont une section transversale elliptique (fig. 13 a). Comme ces toitures présentent des surfaces de forte déclivité, d'exécution difficile, et qu'entre deux voûtes adjacentes se produisent de fortes accumulations de neige, on a choisi pour la grande halle du marché de Francfort-s.-M. une forme composée de segments d'arcs et de hautes poutres de bordure. La figure 13 c. donne la coupe en travers qui a servi de base pour les

1. Dr.-Ing. ELLERBECK. « Preisaufgabe der Akademie des Bauwesens aus dem Gebiete des Eisenbetonbaues ». Zentralblatt der Bauverwaltung, 1930. Heft. 24.

2. Dr.-Ing. DISCHINGER. « Eisenbetonschalendächer Zeiss-Dywidag zur Deberdachung weitgespannter Räume ». Erster Internationaler Kongress für Beton Eisenbeton, Lüttich, 1930. lag : La Technique des Travaux. Liège.

Du même : « Schalen und Rippenkuppeln ». Handbuch für Eisenbetonbau, 3. Aufl., 12. Bd., Verlag von W. Ernst und Sohn, Berlin.

Du même : Zeiss-Dywidag Schalengewölbe unter besonderer Berücksichtigung der Grossmarkthalle in Frankfurt a. M. Bericht über die 31. Hauptversammlung des Deutschen Beton-Vereins, 1928. S. 163. (S. auch. Zeitschrift « Der Bauingenieur », 1928. Heft 44, 45, 46.)

Dr.-Ing. F. DISCHINGER und U. FINSTERWALDER. « Die Dywidaghalle auf der Gesolei ». Zeitschrift : Der Bauingenieur, 1926. Heft 48.

Dr.-Ing. KLEINLOGEL. Die Schalendächer der Grossmarkthalle Frankfurt a. M. Zeitschrift Beton u. Eisen, 1928. Heft 1. u. 2.

Dr.-Ing. DISCHINGER und. U. FINSTERWALDER. Eisenbetonschalendächer System Zeiss-Dywidag. Zeitschrift : Der Bauingenieur, 1928. Heft. 44.

récentes exécutions. Elle se compose d'un segment d'arc très surbaissé et de poutres de bordure élevées. Le problème très délicat qui se présente sur les bords est encore d'une importance plus grande dans les récentes constructions du genre de la figure 13 c que dans les anciennes de la figure 13 a (un état tensoriel purement membranaire n'est possible dans une voûte se portant librement que s'il est accompagné de moments fléchissants). Ce problème a été traité et résolu dans l'étude présentée par le Dr. Ing. FINSTERWALDER à l'*« Akademie des Bauwesens »*, étude intitulée « Eisenbeton als Gestalter » et qui reçut le deuxième prix.

A chaque suture de la coque à un sommier de bordure agissent quatre grandeurs statiquement indéterminées qui dépendent de la déformation commune à la coque et au sommier. Les fatigues dans la coque elle-même sont données par une équation différentielle du 8^e ordre; toutes les forces internes dérivent d'une fonction de fatigue (de même que dans les tympans les forces internes peuvent se calculer à l'aide d'une fonction Airyenne des fatigues).

Le Dr. FINSTERWALDER a démontré que les moments fléchissants de la coque dans la direction des génératrices, engendrés par le report des charges jusqu'aux tympans ne jouent aucun rôle, car ce report des charges s'effectue exclusivement par l'intermédiaire de forces internes centrales. Il en résulte qu'il a pu dans son étude séparer le problème des fatigues dans la coque de celles des tympans. On est conduit ici, dans le cas d'une discontinuité asymétrique, à une équation différentielle de 6^e ordre, où les fatigues se déduisent à nouveau d'une fonction de fatigues. Ce dernier problème a été aussi étudié en détail par le Dr. Ing. K. MIESEL¹.

En ce qui concerne les premières exécutions du genre, nous renvoyons à la littérature technique. Nous décrirons ici quelques ouvrages récents. Les projets et les calculs de ces ouvrages ont été élaborés par la maison Dyckerhoff et Widmann A.G. qui les a également exécutés sauf indication contraire.

Dans le rapport qu'il a présenté au Premier Congrès International du Béton et du Béton Armé, Liège, 1930, le Dr. Ing. DISCHINGER a donné les coupes en long et en travers ainsi qu'une vue perspective de la halle pour automobile S.I.A. à Rome, construite en 1929 par la maison Rodolfo Stoecker à Rome, et agrandie en 1931. Comme l'intérieur de cette halle devait rester autant que possible libre d'éléments de construction, les fermes ont été disposées au-dessus de la coque et le berceau a été exécuté sans sommier de bordure. La membrane tendue devait donc être constituée par la coque elle-même et par le chéneau renforcé. Les fermes à paroi pleine situées au-dessus du toit forment un système de poutre en porte à faux reliées entre elles par des articulations à la clef des berceaux. La figure 14 donne une vue intérieure de la halle.

Le hall du garage A.T.A.G., exécuté en 1931 par la maison Stoecker à Rome, est du même genre. La figure 15 en donne les coupes en long et en travers ainsi qu'un plan. Les quatre berceaux traversés par une ferme médiane ont une portée de 13,9 m. chacun et agissent comme poutres sur une portée de 2 × 20,7 m.

1. Dr.-Ing. MIESEL. « Ueber die Festigkeit von Kreiszylinderschalen mit nicht achsen-symmetrischer Belastung ». « Ingenieurarchiv », vom Dezember 1929. Heft 1.

Dans les hangars 59 du port de Hambourg, construits en 1930-31, les fermes tympans ont été transformées en nervures arquées avec tirant suspendu. La figure 16 en donne la coupe en long et en travers. Leur superficie est de 332×50 m. en chiffres ronds. Les 36 berceaux reposent sur les fermes des fronts longitudinaux et sur une ferme médiane intermédiaire. Ils sont donc continus sur deux travées de 24,4 m. et leur portée dans le sens des arcs est de 9,16 m. L'épaisseur de la coque est de 5,5 cm. ; la construction est coupée par 6 joints de dilatation. Des lanterneaux largement dimensionnés sont disposés à la clef des voûtes ; les tronçons longitudinaux sont percés de fenêtres. Ici, ce nouveau procédé de béton armé entra avec succès en concurrence avec la construction en bois habituelle. Les divers éléments du coffrage furent utilisés de nombreuses fois. La figure 17 montre une partie des coques déjà achevées ; une autre partie se trouve encore dans les coffrages.

Les entrepôts à tonneaux de la « Gross-Einkaufgesellschaft Deutschen Konsumvereine m. b. H. » à Hambourg, sont aussi couverts de berceaux renforcés par des fermes-tympans ajourées (fig. 18). Il y a 12 voûtes de 12 à 23 m. de distance entre fermes. La portée des voûtes est de 9,35 m., l'épaisseur de 6 cm.

En 1930, la maison Antal Sorg, à Budapest, a construit le hall des tramways municipaux de cette ville (fig. 19). Ce hall est couvert d'éléments de toiture en console, accouplés deux à deux. L'écartement des axes est de 13,70, la longueur de 30 à 40 m., les portées 8 à 12 m. et l'épaisseur 5 cm. La figure 20 donne une vue du hall terminé.

L'ouvrage le plus audacieux construit suivant ce système est la grande halle du marché de Budapest. Les berceaux ont une portée de 41 m. et une épaisseur de 6 cm. L'importante action de poutre fut obtenue grâce à une forte courbure de la section transversale.

On remarquera ici aussi l'armature des bordures, hautes de 3,4 m. et larges de 20 cm. seulement. Cette faible épaisseur ne permettait pas de plier obliquement les fers d'armature pour supporter les efforts tranchants ; ils furent remplacés par des étriers obliques. Ce dispositif fut essayé au préalable sur des poutres d'épreuve et a donné, à l'exécution aussi, les meilleurs résultats. Le Dr. Ing. FINSTERWALDER a l'intention de publier un mémoire spécial sur cette halle, sur les calculs et sur l'armature spéciale des sommiers de bordure.

3. Coupoles polygonales composées de coques cylindriques renforcées¹.

La figure 21 représente une coque à plan carré renforcée par deux tympans. Imaginons cette coque subdivisée en quatre parties par deux coupes en diagonale, on appellera les parties *a*, « les croupes » et les parties *b*, « les voussettes ». Si l'on

1. Dr.-Ing. DISCHINGER. « Die Theorie der Vieleckskuppeln und die Zusammenhänge mit den einbeschriebenen Rotationsschalen ». Zeitschrift « Beton u. Eisen », 1929, Heft 5-9.

Dr.-Ing. F. DISCHINGER. « Eisenbetonschalendächer Zeiss-Dywidag zur Ueberdachung weitgespannter Räume ». Erster Internationaler Kongress für Beton und Eisenbeton, Liège, 1930. Verlag La Technique des Travaux, Liège.

Du même : « Schalen und Rippenkuppeln ». Handbuch für Eisenbetonbau 12. Bd., 3 Aufl., Verlag von W. Ernst et Sohn, Berlin.

Du même : « Grossmarkthalle Leipzig ». Bericht über die 32. Hauptversammlung des Deutschen Beton-Vereins, 1929. S. 167.

veut que l'action spatiale des forces de ces quatre parties limitées par des coupes en diagonales soit conservée, les coupures doivent être raidies par des tympans. Si cette condition est réalisée, les voussettes et les croupes ne sont soumises principalement qu'à des efforts centraux.

Une voûte qui n'est composée que de croupes s'appelle voûte cloisonnée (fig. 22); celle qui n'est formée que de voussettes se nomme voûte en arête (fig. 23). On peut aussi réaliser par déformation linéaire des coupoles dont le plan soit rectangulaire, au lieu d'être carré, et en combinant un grand nombre de croupes ou de voussettes on obtient des coupoles polygonales.

L'action de coupole fait naître des efforts de ceinture analogues à ceux d'une coupole de révolution et grâce auxquelles les arêtes ne sont pas sollicitées à la flexion. Ces forces annulaires sont d'autant plus grandes relativement à celles d'une surface de rotation que le nombre d'angles est plus faible. Si ce nombre devient au contraire infini, la coupole polygonale devient une surface de révolution. Les efforts d'une coupole polygonale, dus à l'action de coupole, peuvent être représentés en fonction de ceux de la surface de révolution inscrite; mais à cette action de coupole vient s'ajouter une action de poutre, car les coques cylindriques raidies suivant les arêtes, agissent à la manière de grandes poutres spatiales entre ces arêtes et reportent les charges sur les colonnes d'angle par l'intermédiaire des arêtes. C'est dans cette action combinée de coupole et de poutre que réside l'avantage principal du système sur les surfaces de révolution. Lorsque les colonnes sont très écartées, il n'est pas besoin, pour supporter l'ouvrage, d'une construction supplémentaire lourde et coûteuse, puisque la toiture agit elle-même comme sommier.

La première application en fut faite au Planetarium de Dresde, polygone de 16 côtés, d'une portée de 25 m. et d'une épaisseur de 4 cm. Deux ans plus tard on construisit, selon le même principe, les grandes halles du marché de Leipzig. Ces coupoles octogonales ont 76 m. de portée et une épaisseur de 9 cm. Ce sont les plus grandes coupoles massives du monde. Nous renvoyons à ce sujet aux publications dont cet ouvrage a fait l'objet.

Une coupole octogonale semblable, de 60 m. de portée, fut exécutée en été 1929 par la maison Ed. Züblin & Cie S. A., à Bâle, suivant les plans et les calculs de Dyckerhoff et Widmann A. G., pour la grande halle du marché de Bâle. Les coques, de forme cycloïdale, ont une épaisseur de 8,5 cm. À l'encontre des coupoles de Leipzig, les coques ne sont pas soutenues aux retombées par des arcs porteurs; elles se portent elles-mêmes librement d'une arête à l'autre. La figure 24 donne le plan et l élévation de cette coupole.

4. Coques de toitures renforcées à double courbure.

Suivant le mémoire présenté par le Dr. Ing. DISCHINGER, au Congrès International de Liège, les plus grandes portées longitudinales qui soient encore économiques pour les coques cylindriques à courbure simple sont de 45 m. pour les berceaux à une travée et de 55 à 60 m. pour les berceaux continus sur plusieurs appuis. Pour de plus grandes portées, il faut recourir à des coques à double courbure que le Dr. Ing. Dischinger a étudiées dans le travail de concours de l'« Akademie des Bauwesens » mentionné plus haut.

Dans ces coques à double courbure, les moments fléchissants ne jouent plus

qu'un rôle tout à fait secondaire, les fatigues centrales sont notablement plus faibles et la sécurité au flambage beaucoup plus élevée. Les surfaces de translation se prêtent particulièrement bien à la réalisation de formes de ce genre qui permettent de couvrir des superficies rectangulaires aussi bien que carrées. Pour ces dernières, la surface sphérique convient aussi admirablement et offre l'avantage de permettre un calcul rigoureux des fatigues.

Un modèle de ce genre sur plan carré se trouve dans les chantiers de Dyckerhoff et Widmann A. G., à Wiesbaden-Biebrich (fig. 26). La coque sphérique est limitée des quatre côtés par des fermes-tympans verticales. Ces dernières agissent solidairement avec la coque, avec laquelle elles forment un système spatial qui reporte les charges aux quatre angles tout en n'étant soumis qu'à de très faibles fatigues centrales. La superficie est de $7,30 \text{ m.} \times 7,30 \text{ m.}$, l'épaisseur 1,5 cm. ; à la suture avec les tympans, l'épaisseur est portée à 2,5 m. La coque est armée d'un réseau à mailles de 3 mm. et les angles sont munis de fers supplémentaires (fig. 27). Lors des essais, cette coupole de 1,5 cm. d'épaisseur a supporté une charge de 300 kg/m^2 , agissant, soit sur toute la surface, soit sur la moitié seulement. On fit de plus un essai de charge avec 50 hommes serrés les uns contre les autres ; néanmoins aucune fissure ne se produisit.

La coupole de Wiesbaden-Biebrich a servi de modèle pour les coupoles de la halle du marché de Dresde, dont le projet est achevé, mais qui ne sont pas encore exécutées. La figure 28 en donne le schéma. Les coupoles ont une superficie de $37,50 \times 37,50 \text{ m.}$. L'épaisseur prévue pour la coque est de 6 cm. La figure 29 donne les vues de la halle avec les construction de tête, suivant le projet des architectes KLOPHÄUS, SCHOCH, zu PUTLITZ, à Hambourg, ainsi que Lossow et le Prof. KÜHNE, à Dresde.

Ce système se prête également bien à la réalisation de coupoles polygonales. Il permet de franchir de beaucoup plus grandes distances entre colonnes qu'avec les coupoles polygonales, décrites dans le chapitre 3. Il n'y a aucun obstacle à réaliser une coupole du type de la figure 30, d'une portée de 150 m. et reposant sur 6 colonnes seulement distantes de 80 m.

5. Le principe de l'équilibrage statique des masses.

Dans son travail couronné par l'« Akademie des Bauwesens », le Dr. Ing. DISCHINGER a signalé l'importance du principe de l'équilibrage statique des masses, pour tous les systèmes spatiaux. Ce principe permet de calculer aussi des systèmes spatiaux qui dérivent de formes symétriques par déformation linéaire. Il est par exemple possible de ramener le calcul des fatigues d'une coupole à plan elliptique à celles d'une coupole de révolution, s'il existe entre les épaisseurs des deux coupoles certaines relations fixées par le principe de l'équilibrage des masses. De même les systèmes des chapitres 3 et 4 peuvent être déformés linéairement et calculés.

Zusammenfassung.

Für *Flächentragwerke*, und zwar solche aus ebenen Flächen (Scheiben), die auch geknickt sein, also Winkel mit einander bilden können, und für solche aus gekrümmten Flächen (Schalen) wird dargetan, was seit der II. Internationalen Tagung für Brückenbau und Hochbau 1928 in Wien an Fortschritten festzustellen ist.

Im einzelnen werden behandelt : Die tragende Wand als ebene Scheibe. — Mit einander verbundene, in verschiedenen Ebenen liegende Scheiben. — Rotationsschalen (Schalenkuppeln mit runden Grundrissen) und Halbkuppeln (Apsiden). — Das zylindrische, quer versteifte Schalendach. — Vieleckschalen, zusammengesetzt aus verstieften Zylinderschalen. — Doppelt gekrümmte, ausgesteifte Schalendächer. — Das Prinzip des statischen Massenausgleiches.

Die bei den einzelnen Baugebilden vorhandenen Probleme, die zum Teil noch weiterer Erforschungs- und Versuchsarbeiten bedürfen, werden kurz erörtert und die Entwicklung und neuartige Anwendung dieser Flächentragwerke im Eisenbetonbau an Beispielen gezeigt.

Résumé.

Ce mémoire expose les progrès qui ont été réalisés depuis la II^e Réunion Internationale pour Ponts et Charpentes en 1928 à Vienne dans le domaine des constructions sans poutres, et plus précisément de celles constituées par des parois et voûtes minces¹.

Il traite en détail : la paroi portante sous forme de paroi plane mince [tympan] — les constructions constituées exclusivement à l'aide de parois minces — les coupoles de révolution et coupoles à section demi-circulaire (absides) — la voûte cylindrique renforcée au sens transversal — les coupoles polygonales composées de voûtes cylindriques renforcées — les toitures en voûtes renforcées à double courbure — le principe de la compensation statique des masses.

L'auteur discute brièvement les problèmes relatifs aux différentes dispositifs qui réclament encore des travaux de recherches et d'essais, et démontre par quelques exemples le développement et les applications nouvelles de ces constructions sans poutres, c'est-à-dire uniquement composées de parois et voûtes minces.

Summary.

For structures without beams, i. e. consisting of flat surfaces (slabs), which may be sharply bent, i. e. form an angle with each other, and for those with rounded surfaces (shells), — it is shown what progress may be noted since the 2nd International Session for Bridge and Structural Engineering was held in 1928 at Vienna.

The following cases are treated separately : — Slabs connected to each other and lying in different planes. — Circular shells (shell cupolas with circular ground plan) and half cupolas (apside). — The cylindrical shell roof with cross reinforcement. — Polygonal cupolas, built up of reinforced cylindrical shells. — Doubly bent, reinforced shell roofs. — The principle of compensating the static masses.

The problems arising in the individual types of construction which partly require still further research and experimental work, are briefly mentioned, and examples are given showing the development and recent application of these flat supporting surfaces in reinforced concrete buildings.

1. Ce rapport désigne les parois minces avec « tympan », les voûtes minces avec « coques ».
