

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 1 (1932)

**Artikel:** La stabilité de l'âme et des ailes des barres comprimées

**Autor:** Bleich, Friedrich

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-442>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## TRADUCTION

Les parties comprimées des constructions métalliques, telles que, par exemple, les barres d'un treillis, les poteaux, sont en règle générale déterminées en ne considérant que la stabilité au flambage de la pièce entière. Mais ces pièces sont souvent constituées d'éléments minces et plans qui, pris en eux-mêmes, peuvent présenter un état d'instabilité et se voiler souvent bien avant que ne commence le flambage de la barre elle-même. Ces éléments ont de ce fait une grande importance et jouent, particulièrement dans la construction des ponts, un rôle prédominant. Il paraît donc indiqué de disposer de règles et formules simples pour les calculer, d'autant plus que, par suite de l'emploi des aciers à haute résistance, on a toujours tendance à diminuer de plus en plus l'épaisseur des parois.

Cette étude se borne à résoudre le problème de la façon suivante : établir des règles simples pour proportionner l'épaisseur de la section par rapport aux autres dimensions des parois et des barres, et cela en se basant sur la théorie connue de la stabilité des plaques comprimées. On ne considérera dans ce rapport que des *parois minces appartenant à des barres uniformément comprimées*. Le problème analogue qui se pose pour l'âme mince des poutres fléchies sera traité dans le mémoire du professeur St. Timoschenko.

La question de la stabilité des plaques rectangulaires comprimées a été traitée pour la première fois par BRYAN, 1891<sup>1</sup>. Plus tard REISSNER<sup>2</sup>, TIMOSCHENKO<sup>3</sup> et LILLY<sup>4</sup> se sont occupés de ce problème. F. BLEICH<sup>5</sup> a établi des formules pratiques simples pour la construction métallique.

L'étude part de l'état d'équilibre, représenté par la figure 1, d'une plaque rectangulaire d'épaisseur  $\varepsilon$ , dont les côtés  $x = +\frac{a}{2}$  et  $x = -\frac{a}{2}$  supportent une pression uniforme  $\sigma \cdot \delta$ .

Les bords  $x = \pm \frac{a}{2}$  sont articulés, tandis que pour les côtés  $y = \pm \frac{b}{2}$  on considère les cas suivants :

1° Les côtés  $y = \pm \frac{b}{2}$  sont élastiquement encastrés.

2° Le côté  $y = +\frac{b}{2}$  est élastiquement encastré.

Le côté  $y = -\frac{b}{2}$  est complètement libre.

Dans le cas où  $a$  est grand par rapport à  $b$ , le mode de fixation des bords

1. G. K. BRYAN. On the Stability of a Plan Plate under Thrusts in its own Plane with Application on the « Buckling » of the Sides of a Ship. London Math. Soc. Proc., 1891, p. 54.

2. H. REISSNER. Über die Knicksicherheit ebener Bleche. Zentralblatt der Bauverwaltung, 1909, p. 93.

3. S. TIMOSCHENKO. Sur la stabilité des systèmes élastiques. Ann. des Ponts et Chaussées. Über die Stabilität versteifter Platten. Der Eisenbau, 1921, p. 147.

4. W. E. LILLY. Web Stresses in Plate Girders and Columns. Engineering, 1907, p. 156.

5. F. BLEICH. Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin, 1924.

$x = \pm \frac{a}{2}$  a peu d'influence sur le résultat. Dans les barres comprimées,  $a$  est toujours un multiple de  $b$ , on peut donc admettre, pour ces côtés, un genre de fixation qui conduise à des résultats aussi simples que possible.

L'étude théorique a pour point de départ l'équation différentielle de déformation des plaques minces, qui sont soumises, suivant une direction, à une compression uniforme  $\sigma \cdot \delta$ . Cette équation différentielle est :

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot \tau + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \sqrt{\tau} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \sigma \cdot \delta \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \dots \quad (1)$$

Pour généraliser l'équation différentielle (1) on a fait la supposition suivante :

Le matériau devient anisotrope lorsqu'on dépasse la limite d'élasticité, c'est-à-dire que le module de flambage  $T$  de KÁRMÁN (variable avec  $\sigma$ ) est valable dans la direction de la pression  $x$ , alors que le module d'élasticité  $E$  (invariable) est valable dans la direction perpendiculaire  $y$ . M. BLEICH a de cette façon généralisé l'équation différentielle, bien connue dans la théorie de l'élasticité, en introduisant les coefficients  $\tau$  et  $\sqrt{\tau}^{-1}$  où  $\tau = \frac{T}{E}$

$\tau = 1$  tant que  $\sigma$  ne dépasse pas la limite d'élasticité  $\sigma_E$ .

$\tau < 1$  si  $\sigma$  dépasse  $\sigma_E$ .

Dans l'équation (1),  $D$  représente la rigidité :  $D = \frac{E \cdot J}{1 - \mu^2} = \frac{E \cdot z^3}{12(1 - \mu^2)}$   
( $\mu = 0,3$  pour l'acier).

La proposition (1) est justifiée par la concordance des valeurs critiques calculées de la pression spécifique  $\sigma$  avec les valeurs de  $\sigma$  observées au cours des essais.

**1<sup>er</sup> cas.** La plaque est articulée sur les côtés  $x = \pm \frac{a}{2}$  et encastree élastiquement sur les deux autres côtés  $y = \pm \frac{b}{2}$ .

La solution de l'équation différentielle (1) prend par raison de symétrie la forme :

$$w = \cos \frac{n \pi x}{a} \left[ A \cosh k_1 y + C \cos k_2 y \right] \dots \dots \dots \quad (2)$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont déterminés par les équations <sup>1</sup> :

$$k_1^2 = \frac{n \pi}{a} \left( \sqrt{\frac{\sigma \cdot \delta}{D}} + \sqrt{\frac{n \pi}{a}} \right)$$

$$k_2^2 = - \frac{n \pi}{a} \left( \sqrt{\frac{\sigma \cdot \delta}{D}} - \sqrt{\frac{n \pi}{a}} \right)$$

A et C sont des constantes qui sont déterminées par les conditions aux appuis  $y = \pm \frac{b}{2}$ .  $n$  indique le nombre des demi-ondulations dans la direction  $x$  quand la plaque se voile. Le long des deux côtés  $y = \pm \frac{b}{2}$  les conditions suivantes sont valables :

$$w = 0 \text{ et } M = \nu \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

---

1. F. BLEICH. Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin, 1924.

où  $M$  désigne le moment fléchissant au bord et  $\nu$  un facteur de proportionnalité, qui dépend du degré d'encastrement.

Comme d'après la théorie de l'élasticité nous avons pour les bords de la plaque :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$M = \frac{EJ}{1 - \mu^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Les deux conditions aux appuis se simplifient de la façon suivante :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\xi}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \dots \dots \dots \quad (3)$$

$\xi$  est une constante qui dépend du mode d'encastrement.

$\xi = \infty$  si le bord est articulé.

$\xi = 0$  si le bord est rigidement encastré.

Si on introduit la solution (2) dans les relations (3), on obtient, pour A et C, deux équations homogènes qui n'admettent de racines non nulles que lorsque leur déterminant s'annule.

La condition de flambage prend alors la forme

$$\operatorname{tg} \frac{v \cdot n}{\alpha} \sqrt{\rho - 1} \cdot \frac{\pi}{2} = - \frac{\pi \rho \xi}{\sqrt{\rho - 1}} \frac{v \cdot n}{\alpha} - \frac{\sqrt{\rho + 1}}{\sqrt{\rho - 1}} \dots \dots \quad (4)$$

où  $v$ ,  $\alpha$  et  $\rho$  sont définis par les relations suivantes :

$$v = \sqrt[4]{\tau}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad \rho^2 = \left( \frac{a}{n \pi} \right)^2 \cdot \frac{\delta}{\tau \cdot D} \sigma_k \dots \dots \quad (4')$$

De l'équation transcendante (4) on tire  $\rho$ , et par suite de l'équation (4') l'effort critique  $\sigma_k$ .

On peut remplacer avec une grande approximation la relation transcendante entre les valeurs  $\rho$  et  $\frac{v \cdot n}{\alpha}$ , représentée par l'équation (4), par une équation algébrique de la forme

$$\rho^2 \approx 1 + p \left( \frac{\alpha}{v \cdot n} \right)^2 + q \left( \frac{\alpha}{v \cdot n} \right)^4 \dots \dots \quad (5)$$

dans laquelle  $p$  et  $q$  sont des fonctions du coefficient d'encastrement  $\xi$ .

En particulier :

Pour les bords articulés :  $p = 2$ ,  $q = 1$ .

Pour les bords rigidement encastrés :  $p = 2,50$ ;  $q = 5$ .

En réunissant les équations (4') et (5) on obtient, pour l'effort critique  $\sigma_k$ , la relation :

$$\sigma_k = \left[ \left( \frac{v \cdot n}{\alpha} \right)^2 + p + q \left( \frac{\alpha}{v \cdot n} \right)^2 \right] \cdot \frac{E \pi^2 \sqrt{\tau}}{12(1 - \mu^2)} \cdot \left( \frac{\delta}{b} \right)^2$$

de  $\frac{\partial \sigma_k}{\partial \frac{\alpha}{v \cdot n}} = 0$ , on tire enfin la valeur minimum de  $\sigma_k$  qui permet de déterminer les dimensions :

$$\sigma_k = \frac{E \pi^2 \sqrt{\tau}}{12(1 - \mu^2)} \left( \frac{\delta}{b} \right)^2 (p + 2\sqrt{q}) \dots \dots \quad (6)$$

Si l'on veut finalement calculer les parois des barres comprimées de telle façon que chaque paroi offre par elle-même la même sécurité contre le voilement que celle qu'offre l'élément dans son ensemble contre le flambage, la tension  $\sigma_k$  qui cause le voilement doit être égale à la tension critique sous laquelle flambe l'élément. On a donc la relation :

$$\frac{\pi^2 E \tau}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q})$$

$\left(\frac{l}{i}\right)$  étant l'indice de finesse, c'est-à-dire le rapport de la longueur de l'élément au rayon minimum de giration. On en déduit la loi suivante pour le rapport  $\frac{\delta}{b}$ , de l'épaisseur à la largeur de la plaque :

$$\frac{b}{\delta} = \frac{\sqrt{p + 2\sqrt{q}}}{2\sqrt{3(1-\mu^2)\sqrt{\tau}}} \left(\frac{l}{i}\right) = \frac{0,303}{\sqrt[4]{\tau}} \sqrt{p + 2\sqrt{q}} \cdot \left(\frac{l}{i}\right) \dots \quad (7)$$

Cette équation (7) fait ressortir, fait important, que le rapport  $\frac{b}{\delta}$  croît avec le rapport  $\frac{l}{i}$ .

Plus la barre est longue et plus sa section est faible, en un mot, plus sa finesse est grande, plus ses parois peuvent être minces.

L'équation (7) fournit les valeurs particulières suivantes pour les deux cas extrêmes qui sont représentés dans la figure 2 :

Dans une barre comprimée composée de quatre parois d'égale largeur et d'égale épaisseur, les parois elles-mêmes se comportent chacune comme des plaques prenant appui librement sur les deux bords, étant donné que ces parois se déforment simultanément, sans pouvoir se décharger mutuellement par l'intervention d'un encastrement. Si, dans ce cas, on introduit dans l'équation (7) les valeurs indiquées ci-dessus,  $p = 2$  et  $q = 1$ , on arrive à :

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0,606}{\sqrt[4]{\tau}} \left(\frac{l}{i}\right).$$

En général, si l'on considère les bords des plaques comme articulés, la valeur de  $\zeta$  est égale à  $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}$  pour différentes largeurs  $b$  et  $b'$  des deux parois.

Si, par contre, deux parois sont très rigides par rapport aux deux autres, le rapport  $\frac{b}{\delta}$  s'approche de la valeur limite pour l'encastrement rigide, qui est pour  $p = 2,5$ ;  $q = 5$ :

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0,800}{\sqrt[4]{\tau}} \left(\frac{l}{i}\right).$$

Dans ce cas,  $\zeta = \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} = 0$  (fig. 2 b).

Dans la pratique,  $\zeta$  varie en général entre 1 et 0, il suffit d'interpoler linéairement entre les deux valeurs limites  $\frac{0,606}{\sqrt[4]{\tau}} \left( \frac{l}{i} \right)$  et  $\frac{0,800}{\sqrt[4]{\tau}} \left( \frac{l}{i} \right)$ , qui ne diffèrent pas beaucoup l'une de l'autre. Nous arrivons ainsi à la formule simple suivante pour des sections en caisson :

$$\frac{b}{\delta} = \frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} \left( 0,8 - 0,2 \frac{\tilde{\delta}^3 b'}{\tilde{\delta}'^3 b} \right) \cdot \frac{l}{i} \dots \dots \dots \quad (8)$$

dans laquelle  $\tilde{\delta}$  et  $b$  sont les dimensions de la paroi la plus faible ;  $\frac{\tilde{\delta}^3 b'}{\tilde{\delta}'^3 b}$  est ainsi toujours plus petit que 1.

La valeur de  $\tau$  peut être représentée comme une fonction de la finesse  $\frac{l}{i}$ , si l'on se base sur le diagramme des tensions et des déformations correspondant à chaque catégorie d'acier. F. BLEICH propose la formule suivante pour l'acier ordinaire de construction, ayant une résistance à la traction de 37 à 45 kg/mm<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} \cdot \frac{l}{i} &= 33 + 0,67 \frac{l}{i} && \text{pour } \frac{l}{i} \leq 100 \\ \frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} &= 1 && \text{pour } \frac{l}{i} > 100. \end{aligned}$$

De la formule (8) on tire les deux formules suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \text{Pour } \frac{l}{i} &\leq 100 \\ \frac{b}{\delta} &= \left( 33 + 0,67 \frac{l}{i} \right) \left( 0,8 - 0,2 \frac{\tilde{\delta}^3 b'}{\tilde{\delta}'^3 b} \right) \\ \text{Pour } \frac{l}{i} &> 100 \\ \frac{b}{\delta} &= \left( 0,8 - 0,2 \frac{\tilde{\delta}^3 b'}{\tilde{\delta}'^3 b} \right) \cdot \frac{l}{i} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (8')$$

Les parois d'un élément semblable à celui de la figure 2a se voilent en formant des ondulations qui, pour les barres élancées, ont une longueur égale à la largeur  $b$  de la plaque. Dans le cas de la figure 2b, les ondulations sont plus courtes, à savoir égales à  $0,67 b$ . Il n'y aurait donc pas lieu de vouloir éviter le voilement par des entretoisements, car ces derniers devraient être disposés si près les uns des autres que ce renforcement ne serait pas économique. Ainsi, dans les barres comprimées à section en caisson, la capacité de charge n'est nullement augmentée par la disposition habituellement adoptée d'entretoisements séparés par des intervalles multiples de la largeur de la paroi la plus faible.

L'équation (8) trouve son application pour les barres comprimées dont la section est représentée par les figures 3 a-d. Dans les cas représentés par les figures 3c et 3d, les âmes se comportent comme des plaques librement articulées aux appuis. Pour ces deux types d'éléments, on a par conséquent les formules simples suivantes :

$$\text{Pour } \frac{l}{i} \leq 100. \dots \frac{b}{\delta} = 20 + 0,4 \frac{l}{i}, \quad \text{pour } \frac{l}{i} > 100. \dots \frac{b}{\delta} = 0,6 \frac{l}{i} \dots \quad (8'')$$

Dans les profilés, y compris les fers en C, le rapport  $\frac{b}{\delta}$  étant égal à 28 dans le cas le plus défavorable, de sorte que le voilement n'est pas à craindre pour les barres comprimées, pour lesquels l'indice  $\frac{l}{i}$  caractérisant la finesse est supérieur à 20.

**2<sup>e</sup> cas.** La plaque est articulée sur les deux bords  $x = \pm \frac{a}{2}$ ; le côté  $y = + \frac{b}{2}$  est encastré élastiquement et l'autre côté est complètement libre.

De l'intégration de l'équation différentielle (1) conduite comme dans le premier cas, résulte l'équation suivante donnant l'effort critique  $\sigma_k$ <sup>1</sup>:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}) \dots \dots \dots \quad (9)$$

Cette équation présente la même structure que l'équation (6) toutefois avec d'autres valeurs pour  $p$  et  $q$ ; on a maintenant : si un côté est articulé :  $p = 0,425$ ;  $q = 0$ ; si un côté est totalement encastré :  $p = 0,570$ ;  $q = 0,125$ . Pour un encaissement élastique, les valeurs de  $p$  et  $q$  varient entre les limites ci-dessus.

La sécurité devant être la même contre le voilement des parois et le flambage de la barre entière, la relation ci-dessous doit être satisfaite :

$$\frac{\pi^2 E \tau}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}).$$

De celle-ci résulte la même formule que précédemment :

$$\frac{b}{\delta} = \frac{\sqrt{p + 2\sqrt{q}}}{2\sqrt{3(1-\mu^2)\sqrt{\tau}}} \left(\frac{l}{i}\right).$$

Dans les deux cas extrêmes, représentés par les figures 4 a et b, on obtient les résultats suivants :

Un des côtés présente un appui articulé (fig. 4 a;  $p = 0,425$ ;  $q = 0$ )

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0,197}{\sqrt[4]{\tau}} \cdot \frac{l}{i} \approx \frac{0,2}{\sqrt[4]{\tau}} \cdot \frac{l}{i}.$$

Un des côtés présente un encaissement rigide (fig. 4 b;  $p = 0,570$ ;  $q = 0,125$ )

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0,342}{\sqrt[4]{\tau}} \cdot \frac{l}{i} \approx \frac{0,34}{\sqrt[4]{\tau}} \cdot \frac{l}{i}.$$

Pour un encaissement élastique (fig. 4 c), si l'on introduit l'expression  $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}$  comme mesure de celui-ci, et si on interpole linéairement, on trouve :

$$\frac{b}{\delta} = \frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} \left(0,34 - 0,14 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right) \left(\frac{l}{i}\right) \dots \dots \dots \quad (10)$$

De cette équation on obtient, en utilisant la relation linéaire entre  $\tau$  et  $\frac{l}{i}$ , indiquée précédemment, les deux formules suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } \frac{l}{i} \leq 100 : \quad \frac{b}{\bar{\varepsilon}} = \left( 0,33 + 0,67 \frac{l}{i} \right) \left( 0,34 - 0,14 \frac{\bar{\varepsilon}^3 b'}{\bar{\varepsilon}'^3 b} \right) \\ \text{Pour } \frac{l}{i} > 100 : \quad \frac{b}{\bar{\varepsilon}} = \left( 0,34 - 0,14 \frac{\bar{\varepsilon}^3 b'}{\bar{\varepsilon}'^3 b} \right) \cdot \frac{l}{i} \end{array} \right\} \dots \quad (10')$$

Une plaque dont l'un des côtés est articulé se voile, quelle que soit sa longueur, suivant une demi-ondulation. Dans une plaque encastrée suivant l'un de ses côtés, il se forme plusieurs demi-ondulations si elle est suffisamment longue. Dans le cas représenté par la figure 4, il est indiqué de disposer des entretoisements pour augmenter la résistance de la barre. L'intervalle entre les entretoisements étant  $a$ , on a l'équation suivante :

$$\frac{b}{\bar{\varepsilon}} = \left( 10 + 0,2 \frac{l}{i} \right) \sqrt{\frac{b}{2a} + 0,42} \dots \dots \dots \quad (11)$$

valable pour  $\frac{l}{i} \leq 100$ .

La formule (10') trouve son application aux sections du type représenté par la figure 5 ; elle donne pour des degrés de finesse  $\frac{l}{i}$  petits des épaisseurs de tôle plus grandes que celles que l'on emploie habituellement. Les formules empiriques employées dans la construction des ponts ne donnent pas la sécurité nécessaire contre le voilement des parois des barres de courte longueur relative.

Pour des âmes de hauteur relativement grande, il est absolument nécessaire de border le côté libre de la tôle avec des cornières et de disposer des entretoises afin d'éviter leur déversement latéral. La déformation de l'âme se produira alors à peu près comme elle est représentée sur la figure 6. L'âme est encastrée élastiquement d'un côté et articulée de l'autre. On peut donc utiliser une valeur moyenne tirée de la formule (8') :

$$\frac{b}{\bar{\varepsilon}} = \left( 33 + 0,67 \frac{l}{i} \right) \left( 0,7 - 0,1 \frac{\bar{\varepsilon}^3 b'}{\bar{\varepsilon}'^3 b} \right) \dots \dots \dots \quad (12)$$

valable pour  $\frac{l}{i} \leq 100$ .

Les âmes libres des barres dont les sections sont représentées dans les figures 7, se comportent comme des plaques articulées le long d'un côté. Dans ce cas on obtient la formule simple :

$$\frac{l}{i} \leq 100 : \quad \frac{b}{\bar{\varepsilon}} = \left( 6,6 + 0,134 \frac{l}{i} \right) \dots \dots \dots \quad (13)$$

En pratique, on propose donc d'appliquer les formules et les règles groupées dans le tableau, établies pour le calcul des parois minces des barres travaillant à la compression sous l'influence d'une charge appliquée suivant l'axe.

### Comparaison entre les résultats théoriques et les valeurs obtenues expérimentalement.

Jusqu'à maintenant il semble qu'aucun essai de laboratoire n'ait été entrepris dans le but d'étudier la stabilité des plaques comprimées dans leur plan. Toutefois, dans des publications concernant des essais sur des barres composées par assemblage de tôles, telles qu'elles sont connues dans la construction des ponts, F. BLEICH a signalé quelques cas particuliers permettant de vérifier l'exactitude des formules développées dans ce travail. Ces essais avaient été proposés par le Board of Engineers à l'occasion de la construction du nouveau pont de Québec et ont été exécutés en 1912 et 1913<sup>1</sup>.

Deux groupes d'essais doivent être pris ici en considération, dans lesquels la destruction de l'élément par voilement des parois est nettement visible.

Le métal employé présentait une limite élastique apparente moyenne de 30,1 kg/mm<sup>2</sup>, une résistance à la traction moyenne de 45,8 kg/mm<sup>2</sup> et un allongement de 23 % à la rupture.

Groupe d'essais I. Aux fins de vérification, on a pris en considération quatre éléments identiques de 286 cm. de longueur de flambage (fig. 8 ; essais n° TC 1,1 ; TC 1,2 ; TC 2,1 ; TC 2,2). Les barres étaient composées de deux tôles de 559.15,9, bordées de quatre cornières 103.15,9. Les deux parois étaient entretoisées au moyen d'un treillis en fers plats. Les dimensions des parois auraient dû être déterminées d'après le tableau I, 2<sup>e</sup> cas.

Pour une section  $F = 296 \text{ cm}^2$ , un rayon de giration  $i = 20,55 \text{ cm}$ . et une longueur  $l = 286 \text{ cm}$ ., on a  $\frac{l}{i} = 14$  et d'après la formule correspondant au 2<sup>e</sup> cas, on a

$$\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{adm.}} = 20 + 0,4 \frac{l}{i} = 25,6.$$

En réalité le rapport était de  $\frac{55,9}{1,59} = 35,2$ . De ce fait, toutes les barres de ce type devaient être détruites prématurément par voilement des tôles. D'après TETMAJER l'effort de flambage  $\sigma$  est 29,4 kg/mm<sup>2</sup>, tandis que lorsque les quatre barres ont cédé par voilement des âmes, la tension  $\sigma$  n'était que de 26, 27,4, 27 et 26,8 kg/mm<sup>2</sup>; soit en moyenne 26,8 kg/mm<sup>2</sup>.

Les calculs suivants vérifient la formule (6) qui entre ici en considération pour déterminer la tension critique  $\sigma_k$ : pour une plaque à appuis articulés  $p = 2$ ,  $q = 1$  et par conséquent :

$$\sigma_k = \frac{4\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 = 7770 \sqrt{\tau} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2$$

Si on remplace  $\tau$  par la formule connue d'ENGESSER, déduite des essais de TETMAJER :

$$\tau = \frac{\sigma_k}{E} \left(\frac{3,1 - \sigma_k}{0,0358}\right)^2$$

1. Dr. Ing. Rudolf MAYER. Die Knickfestigkeit. Berlin, 1921. P. 421, etc.

et si l'on introduit cette valeur dans l'équation précédente donnant  $\sigma_k$ , on obtient :

$$\sigma_k = \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - 9,61} \text{ où } r = \frac{\left(\frac{b}{\delta}\right)^4}{2190 \cdot 10^4} + 6,2$$

(en  $t$  et  $cm.$ ).

Lorsque  $\frac{b}{\delta} = 35,2$  on obtient :  $\sigma_k = 26,7 \text{ kg/mm}^2$ . Cette tension critique correspond assez exactement à la valeur observée de  $26,8 \text{ kg/mm}^2$ . La déformation des tôles de la barre TC 1,1 est représentée sur la figure 8.

Groupe d'essais II. La section des barres était semblable à celle des barres du groupe I (fig. 9), mais leur longueur de flambage était de 1.020 cm. et  $\left(\frac{l}{i}\right)$  de 50,7. Deux barres identiques ont été essayées et ont flambé sous un effort de  $\sigma_k = 25,5 \text{ kg/mm}^2$  et  $23,3 \text{ kg/mm}^2$ , la valeur moyenne étant  $24,4 \text{ kg/mm}^2$ .

Pour les tôles des parois de 559.12,7, on avait :  $\frac{b}{\delta} = 44$ . En employant la même formule que ci-dessus, on obtient :

$$\sigma_k = 24,6 \text{ kg/mm}^2.$$

Les deux barres ont cédé par voilement des tôles des âmes. La valeur moyenne des essais  $24,4 \text{ kg/mm}^2$  correspond bien à la valeur calculée de  $24,6 \text{ kg/mm}^2$ .

### Zusammenfassung.

Von der auch für den nicht elastischen Bereich erweiterten Differentialgleichung der Ausbiegung dünner Platten ausgehend, wird die das Eintreten der Instabilität kennzeichnende kritische Druckbelastung einer langen, schmalen Platte, die in ihrer Längsrichtung gleichmäßig gedrückt ist, bestimmt. An den Längsrändern können die Platten frei drehbar oder beliebig stark elastisch eingespannt sein. Unter der Annahme, dass gleiche Sicherheit für das Ausbeulen der Wände und für das Knicken des ganzen Stabes bestehen soll, werden einfache Bemessungsformeln, die die Tragfähigkeit als Funktion von  $\frac{\delta}{b} = \frac{\text{Blechstärke}}{\text{Blechbreite}}$  angeben, für die praktisch wichtigen Fälle des Stahlbaues abgeleitet und in einer Tafel zusammengestellt.

### Résumé.

En partant de l'équation différentielle exprimant la flexion de plaques minces, étendue à l'application aux cas non élastiques, on détermine, pour une plaque longue et mince sollicitée uniformément à la compression dans le sens de sa

longueur, la charge critique à partir de laquelle il y a instabilité. Sur leurs côtés longitudinaux, ces plaques peuvent soit être montées sur appuis libres, soit être encastrées d'une façon plus ou moins élastique. En admettant la même sécurité par rapport au voilement des parois que par rapport au flambage de la barre entière, on développe, pour le calcul des dimensions, des formules simples qui donnent la capacité en fonction du rapport  $\frac{\delta}{b} = \frac{\text{épaisseur de la tôle}}{\text{largeur de la tôle}}$ . Les formules relatives aux cas les plus importants qui se présentent pour les constructions métalliques sont reportées dans un tableau.

### Summary.

Starting with the differential equation for the bending of thin plates, and extending it also to the non-elastic field, the critical pressure characterising the commencement of instability is determined for a long narrow plate, uniformly compressed in the direction of its longest axis. Along the edges parallel to this axis, the plate may be left free to turn, or be held quite elastically in any desired manner. Assuming that the same certainty shall exist for the bulging of the web as for the buckling of the whole test piece, simple formulae, giving the carrying capacity as a function of  $\frac{\delta}{b} = \frac{\text{thickness of plate}}{\text{breadth of plate}}$ , are deduced for important cases occurring in practice in steel construction, and are given in a table.

---