

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 1 (1932)

**Artikel:** Die Stabilität dünner Wände gedrückter Stäbe

**Autor:** Bleich, Friedrich

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-441>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## DIE STABILITÄT DÜNNER WÄNDE GEDRÜCKTER STÄBE

LA STABILITÉ DE L'AME ET DES AILES DES BARRES COMPRIMÉES

STABILITY OF THE WEBS AND THE FLANGES OF COMPRESSED BARS

Dr. Ing. Friedrich BLEICH,  
Zivilingenieur, Wien.

Die gedrückten Bauteile der Stahlbauten, wie Fachwerkstäbe, Stützen u. ä. werden in der Regel nur hinsichtlich ihrer Knicksicherheit als ganzer Stab untersucht. Nun bestehen diese Stäbe aber vielfach aus dünnen, plattenförmigen Elementen, die für sich genommen oft noch lange bevor der Stab als ganzer ausknickt, in einen unstabilen Gleichgewichtszustand geraten können, sie beulen aus. Da derartige plattenförmige Teile besonders im Brückenbau eine hervorragende Rolle spielen, so erscheint die Frage nach einfachen Regeln und Formeln für die Bemessung dieser Einzelteile äusserst wichtig, umso mehr, als durch die zunehmende Verwendung von hochwertigem Stahl im Brückenbau, das Bestreben dahin geht, die Wandstärken immer mehr zu verringern.

Die Aufgabe dieses Berichtes wird daher folgendermassen umgrenzt: Auf Grund der bekannten Theorie der Stabilität gedrückter Platten sind einfache Regeln für das Verhältnis der Plattenstärke zu den übrigen Wand- und Stababmessungen aufzustellen. Das Referat beschränkt sich auf die *dünnen Wände gleichmässig gedrückter Stäbe*. Das analoge Problem für den dünnen Steg von Biegungsträgern ist dem Referat des Herrn Prof. St. TIMOSCHENKO vorbehalten.

Die Frage der Stabilität gedrückter rechteckiger Platten ist erstmalig von BRYAN 1891<sup>1</sup> behandelt worden. Später haben sich REISSNER<sup>2</sup>, TIMOSCHENKO<sup>3</sup> und LILLY<sup>4</sup> mit dem Problem beschäftigt. Einfache Anwendungsformeln für den Stahlbau hat der Berichterstatter aufgestellt<sup>5</sup>.

---

1. G. K. BRYAN. On the Stability of a Plan Plate under Thrusts in its own Plane with Application on the « Buckling » of the Sides of a Ship. London, Math. Soc. Proc., 1891, p. 54.

2. H. REISSNER. Ueber die Knicksicherheit ebener Bleche. Zentralblatt der Bauverwaltung, 1909, S. 93.

3. S. TIMOSCHENKO. Sur la stabilité des systèmes élastiques. Ann. des Ponts et Chaussées, 1913. Ueber die Stabilität versteifter Platten. Der Eisenbau, 1921, S. 147.

4. W. E. LILLY. Web Stresses in Plate Girders and Columns. Engineering, 1907, p. 156.

5. F. BLEICH. Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin, 1924.

Die Untersuchung geht von dem in Abb. 1 dargestellten Gleichgewichtsfall der rechteckigen Platte von der Stärke  $\delta$ , deren Seiten  $x = -\frac{a}{2}$ , und  $x = +\frac{a}{2}$  durch gleichmässigen Druck  $\sigma \cdot \delta$  belastet sind, aus. Die Ränder  $x = \pm \frac{a}{2}$  sind frei drehbar befestigt, während für die Ränder  $y = \pm \frac{b}{2}$  folgende Fälle in Betracht zu ziehen sind.

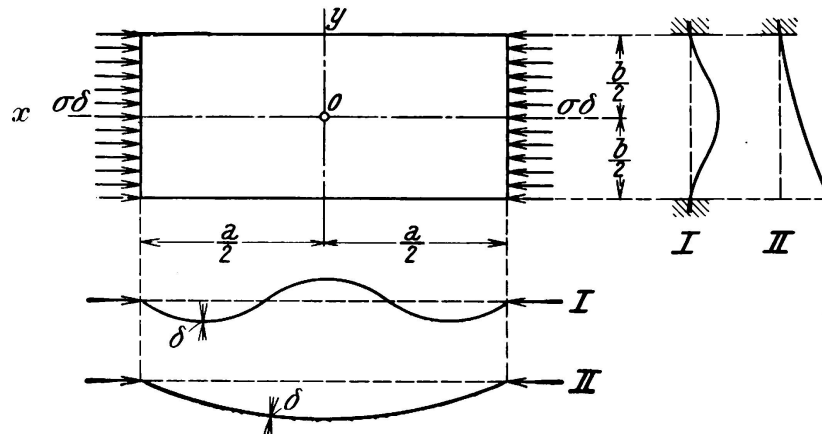


Fig. 1.

Fall I. Die Ränder  $y = \pm \frac{b}{2}$  sind elastisch eingespannt

Fall II. Der Rand  $y = +\frac{b}{2}$  ist elastisch eingespannt, der Rand  $y = -\frac{b}{2}$  ist vollständig frei.

Der Einfluss der Befestigungsweise der Ränder  $x = \pm \frac{a}{2}$  auf das Ergebnis ist in Fällen, wo  $a$  gross gegen  $b$  ist, und bei Druckstäben ist  $a$  immer ein Vielfaches von  $b$ , geringfügig, so dass man berechtigt ist, für die Befestigungsweise dieser Ränder jene Annahme zu treffen, die zu einer möglichst einfachen Berechnungsweise führt.

Die Theorie nimmt ihren Ausgang von der Differentialgleichung der Ausbiegung dünner Platten, die in einer Richtung durch  $\sigma \delta$  gleichmässig gedrückt sind. Diese Differentialgleichung lautet :

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \tau + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \sqrt{\tau} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \sigma \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Unter der Voraussetzung, dass das Material bei Ueberschreiten der Elastizitätsgrenze anisotrop wird, d. h. dass in der Druckrichtung  $x$  der mit  $\tau$  veränderliche KÄRMÄNSCHE Knickmodul  $T$ , in der darauf senkrechten Richtung  $y$  aber der unveränderte Young'sche Elastizitätsmodul  $E$  gelten, hat BLEICH die aus der Elastizitätstheorie bekannte Differentialgleichung (1) durch Beifügung der Beiwerte  $\tau$  und  $\sqrt{\tau}$  verallgemeinert<sup>5</sup>. Hierbei bedeutet

$$\tau = \frac{T}{E},$$

$\tau$  ist gleich 1, solange  $\sigma$  nicht die Elastizitätsgrenze  $\sigma_E$  überschreitet, und ist kleiner als 1, wenn  $\tau$  über  $\sigma_E$  ansteigt. Unter  $D$  ist in Gl. (1) die Biegesteifigkeit

$$D = \frac{EJ}{1-\mu^2} = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \quad (\mu = 0,3 \text{ für Stahl})$$

zu verstehen. Die Zulässigkeit des Ansatzes (1) wird durch die Uebereinstimmung der berechneten kritischen Werte der Druckspannung  $\sigma$  mit den bei Versuchen beobachteten Werten von  $\sigma$  erwiesen.

**1. Fall.** Die Platte ist um die Ränder  $x = \pm \frac{a}{2}$  frei drehbar gelagert und ist an den beiden anderen Rändern  $x = \pm \frac{b}{2}$  elastisch eingespannt.

Die Lösung der Differentialgleichung (1) nimmt hier mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse die Form

$$w = \cos \frac{n\pi x}{a} [A \cosh k_1 y + C \cos k_2 y] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

an, wobei  $k_1$  und  $k_2$  durch die Gleichungen

$$k_1^2 = \frac{n\pi}{a} \left( \sqrt{\frac{\sigma\delta}{D}} + \sqrt{\tau} \frac{n\pi}{a} \right), \quad k_2^2 = -\frac{n\pi}{a} \left( \sqrt{\frac{\sigma\delta}{D}} - \sqrt{\tau} \frac{n\pi}{a} \right)$$

definiert sind.  $A$  und  $C$  sind Konstanten, die aus den Bedingungen an den Rändern  $y = \pm \frac{b}{2}$  bestimmt werden,  $n$  gibt die Zahl der Halbwellen an, in der die Platte in der Richtung  $x$  ausbeult. Entlang den beiden Rändern  $y = \pm \frac{b}{2}$  gelten die Randbedingungen

$$w = 0 \quad \text{und} \quad M = \nu \frac{\partial w}{\partial y},$$

wo  $M$  das Biegemoment am Rande und  $\nu$  ein Proportionalitätsfaktor ist, der von der Grösse der Einspannung abhängt. Da aber nach der Elastizitätstheorie an den Rändern der Platte wegen  $w = 0$  und  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

$$M = \frac{EJ}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

so reduzieren sich die beiden Randbedingungen auf

$$w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \xi \frac{b}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$\xi$  ist eine Konstante, die von der Art der Einspannung abhängt. Bei frei drehbarem Rand ist  $\xi = \infty$ , bei fest eingespanntem Rand ist  $\xi = 0$ . Führt man die Lösung (2) in die Bedingungen (3) ein, so gewinnt man 2 homogene Gleichungen für  $A$  und  $C$ , die nur dann von Null verschiedene Wurzeln liefern, wenn ihre Determinante verschwindet. Damit ist aber die Knickbedingung in der Form

$$\operatorname{tg} \frac{\nu n}{\alpha} \sqrt{\rho-1} \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi \rho \xi}{\sqrt{\rho-1}} \frac{\nu n}{\alpha} - \frac{\sqrt{\rho+1}}{\sqrt{\rho-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$



mit den Abkürzungen

$$v = \sqrt[4]{\tau}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad \rho^2 = \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \frac{\delta}{\tau D} \sigma_k. \quad (4')$$

gefunden. Aus der transzendenten Gleichung (4) kann  $\rho$  und damit nach (4') die kritische Spannung  $\sigma_k$  ermittelt werden.

Der durch Gl. (4) dargestellte transzendente Zusammenhang zwischen der Grösse  $\rho$  und  $\frac{vn}{\alpha}$  lässt sich nun mit sehr grosser Genauigkeit durch eine algebraische Gleichung von der Form

$$\rho^2 = 1 + p \left(\frac{\alpha}{vn}\right)^2 + q \left(\frac{\alpha}{vn}\right)^4 \quad (5)$$

ersetzen.  $p$  und  $q$  sind hierbei Funktionen der Einspannungszahl  $\xi$ . Im besonderen gilt:

für frei drehbare Ränder:  $p = 2 \quad q = 1$ ;

für fest eingespannte Ränder:  $p = 2,50 \quad q = 5$ .

Vereinigt man Gl. (4') und (5), so erhält man für die kritische Spannung  $\sigma_k$  die Beziehung

$$\sigma_k = \left[ \left(\frac{vn}{\alpha}\right)^2 + p + q \left(\frac{\alpha}{vn}\right)^2 \right] \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2.$$

Aus  $\frac{\partial \sigma_k}{\partial \frac{\alpha}{vn}} = 0$  findet man schliesslich den Kleinstwert von  $\sigma_k$ , der für die Bemessung massgebend ist zu

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}). \quad (6)$$

Will man schliesslich die Wandteile der Druckstäbe so bemessen, dass die einzelnen Wände die gleiche Sicherheit gegen Ausbeulen bieten wie der ganze Stab gegen Knicken, so muss die Spannung  $\sigma_k$ , die das Ausbeulen bewirkt, gleich der kritischen Spannung sein, bei der der Stab mit dem Schlankheitsgrad  $\frac{l}{i}$  als ganzes knickt. Es gilt daher die Verknüpfung

$$\frac{\pi^2 E \tau}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}),$$

aus der folgende Regel für das Verhältnis  $\frac{\delta}{b}$  d. i. Plattenstärke zu Plattenbreite, folgt, nämlich

$$\frac{\delta}{b} = \frac{\sqrt{p + 2\sqrt{q}}}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}\sqrt{\tau}} \left(\frac{l}{i}\right) = \frac{0,303}{\sqrt[4]{\tau}} \sqrt{p + 2\sqrt{q}} \left(\frac{l}{i}\right). \quad (7)$$

Gleichung (7) lässt die wichtige Tatsache erkennen, dass das Verhältnis  $\frac{\delta}{b}$  wächst, wenn die Schlankheit  $\frac{l}{i}$  wächst. Je schlanker der Stab, umso dünner können seine Wände gemacht werden.

Gleichung (7) liefert für die beiden Grenzwerte, die in Abb. 2 a und b dargestellt sind, folgende Sonderwerte: In einem Druckstab aus 4 gleichbreiten und gleichstarken Wänden verhalten sich die einzelnen Wände so wie Platten, die an beiden Rändern biegefrei gelagert sind, da die Platten gleich-

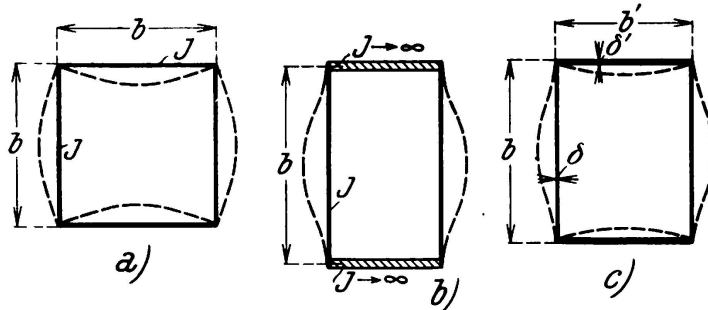


Fig. 2.

zeitig ausbeulen und keine die andere durch Einspannung entlasten kann. Man erhält aus Gl. (7), wenn man für diesen Fall wie oben angegeben  $p = 2$ ,  $q = 1$ , einführt,  $\frac{b}{\bar{z}} = \frac{0,606}{\sqrt[4]{\tau}} \left( \frac{l}{i} \right)$ . Allgemein muss bei verschiedenen Breiten  $b$

und  $b'$  der beiden Wände, Abb. 2 c die Steifigkeitszahl  $\xi = \frac{\bar{z}^3 b'}{\bar{z}'^3 b} = 1$  sein, wenn man die Plattenränder als frei drehbar betrachten will. Sind andererseits zwei Wände sehr steif gegenüber den beiden anderen, so nähert sich das Verhältnis  $\frac{b}{\bar{z}}$  dem Grenzwert für feste Einspannung, d. i. mit  $p = 2,5$ ,  $q = 5$ ,  $\frac{b}{\bar{z}} = \frac{0,800}{\sqrt[4]{\tau}} \left( \frac{l}{i} \right)$ . In diesem Falle ist  $\xi = \frac{\bar{z}^3 b'}{\bar{z}'^3 b} = 0$ . Abb. 2 b.

In praktischen Fällen wird  $\xi$  im allgemeinen zwischen 1 und 0 liegen; Fig. 2 c. In diesen Fällen genügt es, zwischen den beiden Grenzwerten  $\frac{0,606}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i}$  und  $\frac{0,800}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i}$ , die sich ja nicht allzu sehr voneinander unterscheiden, linear einzuschalten. So gelangen wir zu der folgenden einfachen Formel für geschlossene Querschnitte

$$\frac{b}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} \left( 0,8 - 0,2 \frac{\bar{z}^3 b'}{\bar{z}'^3 b} \right) \frac{l}{i} \dots \dots \dots (8)$$

Hierbei sind  $\bar{z}$  und  $b$  die Abmessungen der schwächeren Wand.  $\frac{\bar{z}^3 b'}{\bar{z}'^3 b}$  ist also immer kleiner als 1.

Die Zahl  $\tau$  lässt sich nun für jede Stahlsorte aus dem Spannungsdehnungsdiagramm als Funktion der Schlankheit  $\frac{l}{i}$  darstellen. Für gewöhnlichen Baustahl von 37-45 kg/mm<sup>2</sup> Festigkeit schlage ich folgende Formel vor<sup>1</sup>:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i} = 33 + 0,67 \frac{l}{i} \quad \text{giltig für } \frac{l}{i} \leq 100.$$

1. Die folgenden Beziehungen wurden mit Hilfe der Tetmajerschen Geradenformel für gewöhnlichen Baustahl abgeleitet.

Für  $\frac{l}{i} > 100$  gilt  $\frac{1}{\sqrt[3]{\tau}} = 1$ .

Damit geht Gleichung (8) in folgende zwei Formeln über :

$$\begin{array}{ll} \text{für } \frac{l}{i} \leq 100 & \text{für } \frac{l}{i} > 100 \\ \frac{b}{\bar{z}} = \left( 33 + 0,67 \frac{l}{i} \right) \left( 0,8 - 0,2 \frac{\bar{z}^3 b'}{\bar{z}'^3 b} \right) & \frac{b}{\bar{z}} = \left( 0,8 - 0,2 \frac{\bar{z}^3 b'}{\bar{z}'^3 b} \right) \frac{l}{i} \dots \dots (8') \end{array}$$

Die Wände eines Stabes nach Abb. 2 a beulen in Wellen aus, deren Länge bei schlanken Stäben gleich der Plattenbreite  $b$  ist. Im Falle 2 b sind die Wellen noch kürzer, nämlich  $0,67b$ . Es hätte daher keinen Sinn, die Ausbeulung durch Querschotten verhindern zu wollen, da diese so eng gesetzt werden müssten, dass ihre Anordnung unwirtschaftlich wird. Bei gedrückten geschlossenen Druckstäben hat daher die übliche Anordnung von Querschotten in Abständen von dem Mehrfachen der Breite der schwächeren Wandplatten keine Erhöhung der Tragfähigkeit zur Folge.

Gleichung (8') findet Anwendung auf die in Abb. 3 a-d im Querschnitt dargestellten Druckstäbe, wobei in den Fällen 3 c und 3 d die Stege sich wie frei

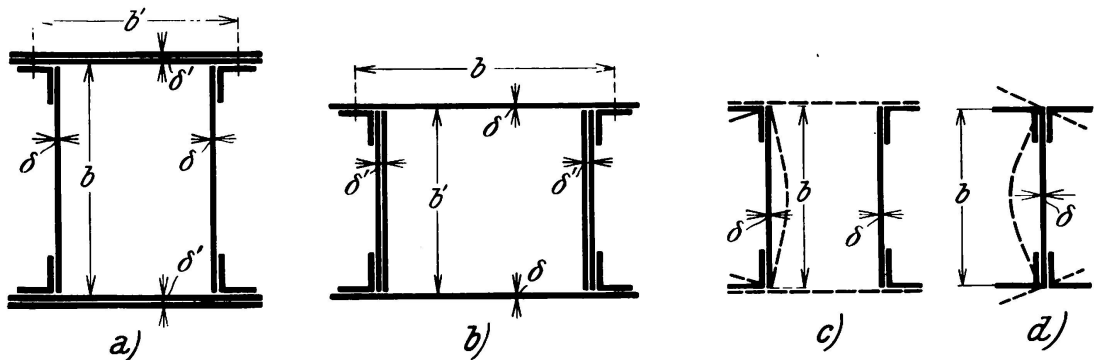


Fig. 3.

drehbar gelagerte Platten verhalten. Für diese beiden Stabformeln gelten sonach die einfachen Formeln

$$\text{für } \frac{l}{i} \leq 100 \dots \dots \frac{b}{\bar{z}} = 20 + 0,4 \frac{l}{i}; \quad \text{für } \frac{l}{i} > 100 \dots \dots \frac{b}{\bar{z}} = 0,6 \frac{l}{i}.$$

Bei Walzträgern und  $\square$ -Eisen liegt das Verhältnis  $\frac{b}{\bar{z}}$  ungünstigsten Falles bei 28, so dass ein Ausbeulen bei Druckstäben mit einem Schlankheitsgrad  $\frac{l}{i} > 20$  ausgeschlossen ist.

**2. Fall.** Die Platte ist an beiden Rändern  $x = \pm \frac{a}{2}$  frei drehbar gelagert. Am Rande  $y = +\frac{b}{2}$  ist sie elastisch eingespannt, am anderen Rande vollständig frei.

Die Integration der Differentialgleichung (1) führt auf ähnlichem Wege wie beim ersten Fall auf folgende Gleichung für die kritische Belastung  $\sigma_k$ <sup>5</sup>

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\bar{z}}{b} \right)^2 (p + 2\sqrt{q}) \dots \dots \dots (9)$$

Diese Gleichung zeigt den gleichen Bau wie Gl. (6), nur haben  $p$  und  $q$  andere Werte. Es ist jetzt :

wenn ein Rand frei drehbar ist :  $p = 0,425$   $q = 0$  ;

wenn ein Rand fest eingespannt ist :  $p = 0,570$   $q = 0,125$ .

Bei elastischer Einspannung liegen die Werte  $p$  und  $q$  zwischen den beiden eben angegebenen Grenzen.

Soll gleiche Sicherheit gegen Ausbeulen der Wände wie gegen Ausknicken des ganzen Stabes bestehen, so muss wieder die Beziehung

$$\frac{\pi^2 E \tau}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q})$$

gelten, aus der die gleiche Formel wie oben

$$\frac{b}{\delta} = \frac{\sqrt{p + 2\sqrt{q}}}{2\sqrt{3(1-\mu^2)\sqrt{\tau}}} \left(\frac{l}{i}\right)$$

hervorgeht. In den beiden in Abb. 4 a und b dargestellten Grenzfällen erhält man folgende Ergebnisse :

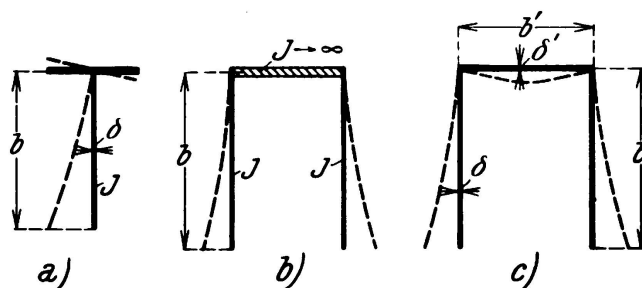


Fig. 4.

Freie Drehbarkeit des einen Randes, Abb. 4 a.  $p = 0,425$ ,  $q = 0$

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0,197}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i} \approx \frac{0,20}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i};$$

Feste Einspannung des einen Randes, Abb. 4 b.  $p = 0,570$ ,  $q = 0,125$

$$\frac{b}{\delta} = \frac{0,342}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i} \approx \frac{0,34}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{l}{i}.$$

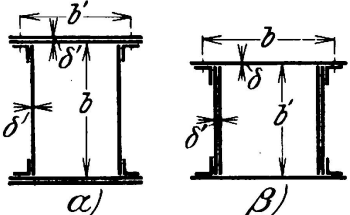
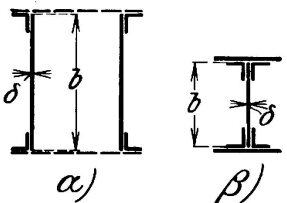
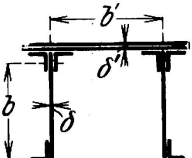
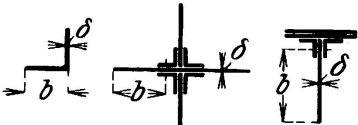
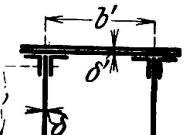
Für elastische Einspannung ergibt sich demnach, wenn man als Mass derselben  $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}$  einführt, siehe Abb. 4 c, bei linearer Einschaltung

$$\frac{b}{\delta} = \frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} \left( 0,34 - 0,14 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} \right) \frac{l}{i} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (10)$$

Aus dieser Gleichung erhält man unter Benützung des oben angegebenen linearen Zusammenhanges zwischen  $\tau$  und  $\frac{l}{i}$  die beiden folgenden Bemessungsformeln :

$$\frac{l}{i} \leq 100 : \quad \frac{b}{\delta} = \left( 33 + 0,67 \frac{l}{i} \right) \left( 0,34 - 0,14 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} \right) \cdot \cdot \cdot (10')$$

## Bemessungsformeln für gewöhnlichen Baustahl —

Nr	Stabquerschnitt — Coupe Section	$\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf}}$ erforderlich nécessaire
1		$\frac{l}{i} \leq 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf}} = \left(33 + 0,67 \frac{l}{i}\right) \left(0,8 - 0,2 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right)$ $\frac{l}{i} > 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf}} = \left(0,8 - 0,2 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right) \frac{l}{i}$
2		$\frac{l}{i} \leq 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf}} = 20 + 0,4 \frac{l}{i}$ $\frac{l}{i} > 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf}} = 0,6 \frac{l}{i}$
3		$\frac{l}{i} \leq 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf}} = \left(33 + 0,67 \frac{l}{i}\right) \left(0,7 - 0,1 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right)$
4		$\frac{l}{i} \leq 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf}} = \left(6,6 + 0,134 \frac{l}{i}\right)$ $\frac{l}{i} > 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf}} = 0,2 \frac{l}{i}$
5		$\frac{l}{i} \leq 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf}} = \left(33 + 0,67 \frac{l}{i}\right) \left(0,34 - 0,14 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right)$ $\frac{l}{i} > 100$ $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf}} = \left(0,34 - 0,14 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b}\right) \frac{l}{i}$

## Tableau — Table

## Formules pour Acier doux — Formulae for Soft Steel

Anmerkung — Annotation  
Remark

$\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} \leq 1$  Querschotten nur an den Stabenden.  
Weitere Schotten erhöhen nicht die Tragfähigkeit.

Entretoisements transversaux seulement aux extrémités de la barre. Des entretoisements supplémentaires n'augmentent pas la résistance.

Diaphragms only at the ends of the bar. Intermediate diaphragms don't increase the strength.

Querschotten im Falle  $\alpha$ ) nur an den Stabenden. Weitere Schotten erhöhen nicht die Tragfähigkeit.

Pour la barre  $\alpha$ ) entretoisements transversaux seulement aux extrémités. Des entretoisements supplémentaires n'augmentent pas la résistance.

In case  $\alpha$ ) only end diaphragms. Intermediate diaphragms don't increase the strength.

Querschotten nur an den Stabenden.  
Weitere Schotten erhöhen nicht die Tragfähigkeit.

Entretoisements transversaux seulement aux extrémités de la barre. Des entretoisements supplémentaires n'augmentent pas la résistance.

Diaphragms only at the ends of the bar. Intermediate diaphragms don't increase the strength.

Säumt man den Querschnitt am freien Rande mit Winkeln, so können die nach nebenstehenden Formeln errechneten Verhältnisse  $\frac{b}{\delta}$  zweimal so gross genommen werden.

Lorsque les bords libres des tôles sont renforcés par des fers cornières, les coefficients  $\frac{b}{\delta}$  peuvent atteindre le double de la valeur indiquée.

When bordering the free edge of the web with angle iron,  $\frac{b}{\delta}$  may increase up to its double value.

Wird  $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} < 1$  [schwache Deckbleche], so ist es zweckmässig Schottenbleche anzuordnen.

Ist ihr Abstand  $a$ , so beträgt für  $\frac{l}{i} \leq 100$ :

Pour  $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} < 1$  [semelles faibles], des entretoisements intermédiaires sont à recommander.

Si la distance entre elles est  $a$ , on trouve pour  $\frac{l}{i} \leq 100$ :

When  $\frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} < 1$  [thin booms], intermediate diaphragms are desirable. If their distance is  $a$ , and  $\frac{l}{i} \leq 100$ , then will be:

$$\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf. necess.}} = \left(10 + 0,2 \frac{l}{i}\right) \sqrt{\frac{b}{2a} + 0,42}$$

$$\frac{l}{i} > 100 : \quad \frac{b}{\delta} = \left( 0,34 - 0,14 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} \right) \frac{l}{i} \dots \dots \dots (10')$$

Ist der eine Plattenrand frei drehbar gelagert, so beult die Platte, gleichgültig welche Länge sie hat, in einer Halbwelle aus. Ist die Platte einerseits eingespannt, so bilden sich bei genügender Länge  $a$  mehrere Halbwellen aus. Es ist daher in dem in Abb. 4 dargestellten Fall zweckmässig, Querschotten einzubauen, um die Tragkraft der Stäbe zu vergrössern. Ist die Entfernung der Schotten  $a$ , so gilt folgende Gleichung<sup>5</sup>

$$\frac{b}{\delta} = \left( 10 + 0,2 \frac{l}{i} \right) \sqrt{\frac{b}{2a} + 0,42} \dots \dots \dots (11)$$

giltig für  $\frac{l}{i} \leq 100$ .

Die Formeln (10') finden Anwendung auf die in Abb. 5 dargestellten Quer-

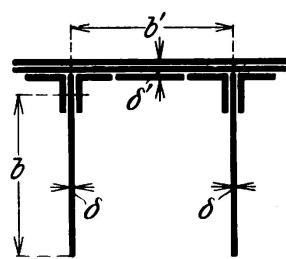


Fig. 5.

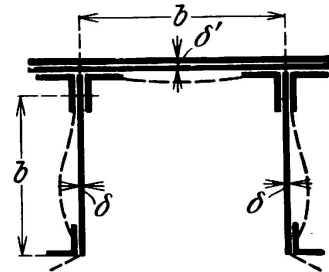


Fig. 6.

schnittsformen. Sie liefern bei kleinen Schlankheitsverhältnissen  $\frac{l}{i}$  grössere Blechstärken als man gewohnt ist auszuführen. Die im Brückenbau gebräuchlichen Erfahrungsregeln geben bei gedrungen gebauten Stäben nicht die nötige Sicherheit gegen Ausbeulen.

Will man grössere Steghöhen erzielen, dann ist es unbedingt notwendig, den freien Rand der Bleche durch Winkel zu säumen und diese Winkel durch Querschotten gegen seitliches Ausweichen zu sichern. Die Stegverformung wird dann etwa so wie in Abb. 6 dargestellt erfolgen. Der Steg ist einerseits elastisch eingespannt, andererseits frei drehbar gelagert. Man kann daher einen aus Formel (8') errechneten Mittelwert

$$\frac{b}{\delta} = \left( 33 + 0,67 \frac{l}{i} \right) \left( 0,7 - 0,1 \frac{\delta^3 b'}{\delta'^3 b} \right) \dots \dots \dots (12)$$

benützen, Formel (12) gilt für  $\frac{l}{i} \leq 100$ .

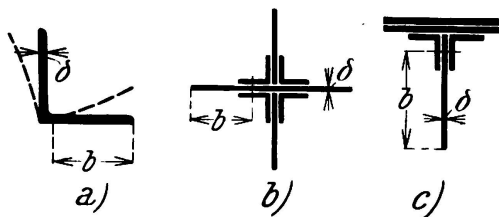


Fig. 7.

Die freien Stege der in Abb. 7 im Querschnitt dargestellten Stäbe verhalten sich so wie Platten, die entlang des einen Randes frei drehbar gelagert sind. Hierfür ergibt sich die einfache Formel

$$\frac{l}{i} \leq 100 \dots \dots \frac{b}{\delta} = \left( 6,6 + 0,134 \frac{l}{i} \right) \dots \dots \dots (13)$$

Für den praktischen Gebrauch bei der Bemessung der dünnen Wände von auf zentrischen Druck beanspruchten Stäben werden daher die in der Tafel zusammengestellten Formeln und Regeln vorgeschlagen.

### Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit Versuchswerten.

Laboratoriumsversuche an einzelnen in ihrer Ebene gedrückten Platten zur Feststellung ihrer Stabilität sind meines Wissens bisher noch nicht durchgeführt worden. Doch habe ich in den Veröffentlichungen über Versuche mit aus Platten zusammengesetzten Stäben, die den im Brückenbau verwendeten Stabformen nachgebildet waren, einzelne Fälle gefunden, die ganz gut geeignet sind, die oben abgeleiteten Formeln auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen. Es sind dies Versuche, die in den Jahren 1912 und 1913 mit Stäben aus gewöhnlichem Baustahl auf Veranlassung der Board of Engineers gelegentlich des Neubaues der Quebecbrücke durchgeführt wurden<sup>1</sup>.

Zwei Versuchsgruppen, bei denen deutlich die Zerstörung des Stabes durch Ausbeulen der Stabwände ersichtlich ist, kommen hier in Betracht.

Das verwendete Material hatte eine mittlere Streckgrenze von  $3,01 \text{ t/cm}^2$  und eine mittlere Festigkeit von  $4,58 \text{ t/cm}^2$  bei  $23\%$  Bruchdehnung.

1. Versuchsgruppe. Für die Nachrechnung kommen 4 gleiche Stäbe von  $2,87 \text{ m}$  Knicklänge nach Abb. 8 in Betracht. Versuche Nr. TC 1,1 TC 1,2

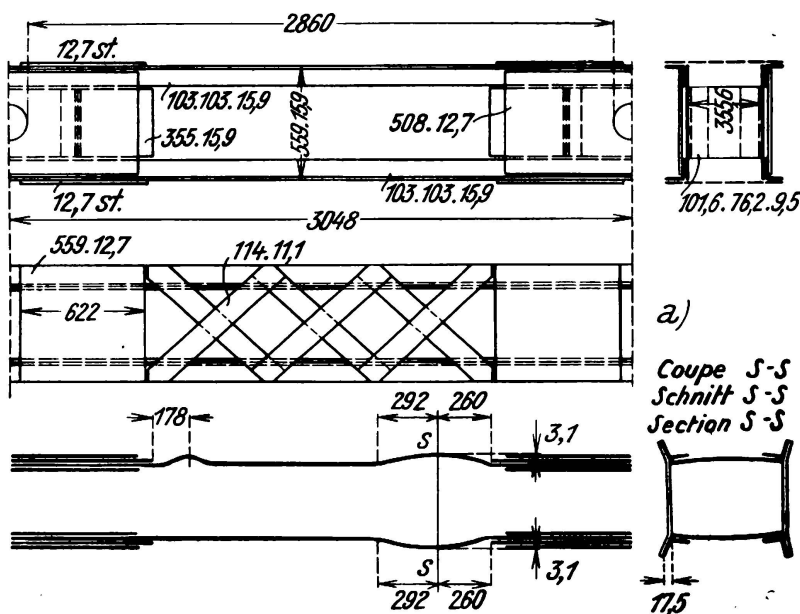


Fig. 8.

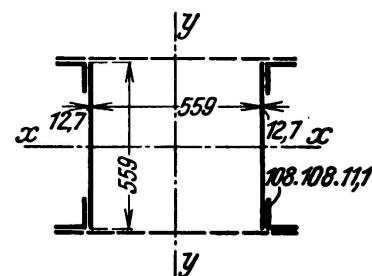


Fig. 9.

TC 2,1 TC 2,2. Die Stäbe bestanden aus zwei Blechen  $559.15,9$  und 4 Gurtwinkeln  $103.15,9$ . Die beiden Wände waren durch Flacheisenvergitterung verbunden. Die Bemessung der Wände dieser Stäbe hätte nach Fall 2 in der oben stehenden Tafel zu erfolgen.

1. Dr. Ing. Rudolf MAYER. Die Knickfestigkeit. Berlin, 1921, S. 421 ff.



Mit den Querschnittswerten  $F = 296 \text{ cm}^2$ ,  $i = 20,55 \text{ cm}$ ,  $l = 286 \text{ cm}$  findet man  $\frac{l}{i} = 14$  und daher nach der in der Tafel unter 2 angegebenen Formel

$$\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{erf}} = 20 + 0,4 \frac{l}{i} = 25,6.$$

Das tatsächliche Verhältnis war aber  $\frac{55,9}{1,59} = 35,2$ .

Es mussten daher alle Stäbe dieser Bauart vorzeitig durch Ausbeulen der Bleche zugrunde gehen. Tatsächlich beträgt die Knickspannung nach Tetmajer  $\sigma = 2,94 \text{ t/cm}^2$ , während die 4 Stäbe bei 2,60, 2,74, 2,70 und 2,68  $\text{t/cm}^2$ ; i. M. also bei 2,68  $\text{t/cm}^2$  vollständig durch Verbeulen der Stege versagten.

Zur Ueberprüfung der Richtigkeit der hier in Betracht kommenden Formel (6) für die kritische Spannung  $\sigma_k$  führen wir folgende Rechnung durch:

Für frei drehbare Plattenränder ist  $p = 2$ ,  $q = 1$  daher

$$\sigma_k = \frac{4 \pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 = 7770 \sqrt{\tau} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2.$$

Stellt man  $\tau$  nach der bekannten aus den Versuchen Tetmajers abgeleiteten Formel Engessers

$$\tau = \frac{\sigma_k}{E} \left(\frac{3,1 - \sigma_k}{0,0358}\right)^2$$

dar und führt man diesen Wert in die voranstehende Gleichung für  $\sigma_k$  ein, so erhält man  $\sigma_k$  in der Form

$$\sigma_k = \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - 9,61} \quad \text{mit } r = \frac{\left(\frac{b}{\delta}\right)^4}{2190 \cdot 10^4} + 6,2 \text{ (in t und cm)}.$$

Da  $\frac{b}{\delta} = 35,2$ , so folgt

$$\sigma_k = 2,67 \text{ t/cm}^2.$$

Diese kritische Beanspruchung stimmt nahezu vollständig mit der beobachteten Spannung von 2,68  $\text{t/cm}^2$  überein. Die Verformung der Bleche bei Stab TC 1,1 lässt Fig. 8 gut erkennen.

2. Versuchsgruppe. Die Querschnittsgestaltung der Stäbe war ähnlich wie vor, siehe Abb. 9, doch hatten die Stäbe 1020 cm Knicklänge.  $\frac{l}{i}$  war hier 50,7. Geprobt wurden zwei gleiche Stäbe, die bei  $\sigma_k = 2,55$  und  $\sigma_k = 2,33 \text{ t/cm}^2$  knickten. Der Mittelwert beträgt 2,44  $\text{t/cm}^2$ .

Für die Wandbleche 559.12,7 war  $\frac{b}{\delta} = 44$ . Damit erhält man nach der gleichen Formel für  $\sigma_k$ , die oben benützt wurde.

$$\sigma_k = 2,46 \text{ t/cm}^2.$$

Beide Stäbe gingen durch Ausbeulen der Stegbleche zugrunde. Der Mittelwert des Versuches 2,44  $\text{t/cm}^2$  stimmt sehr gut mit dem Rechnungswert 2,46  $\text{t/cm}^2$  überein.

et si l'on introduit cette valeur dans l'équation précédente donnant  $\sigma_k$ , on obtient :

$$\sigma_k = \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - 9,61} \quad \text{où } r = \frac{\left(\frac{b}{\delta}\right)^4}{2190 \cdot 10^4} + 6,2$$

(en  $t$  et  $cm.$ ).

Lorsque  $\frac{b}{\delta} = 35,2$  on obtient :  $\sigma_k = 26,7 \text{ kg/mm}^2$ . Cette tension critique correspond assez exactement à la valeur observée de  $26,8 \text{ kg/mm}^2$ . La déformation des tôles de la barre TC 1,1 est représentée sur la figure 8.

Groupe d'essais II. La section des barres était semblable à celle des barres du groupe I (fig. 9), mais leur longueur de flambage était de 1.020 cm. et  $\left(\frac{l}{i}\right)$  de 50,7. Deux barres identiques ont été essayées et ont flambé sous un effort de  $\sigma_k = 25,5 \text{ kg/mm}^2$  et  $23,3 \text{ kg/mm}^2$ , la valeur moyenne étant  $24,4 \text{ kg/mm}^2$ .

Pour les tôles des parois de 559.12,7, on avait :  $\frac{b}{\delta} = 44$ . En employant la même formule que ci-dessus, on obtient :

$$\sigma_k = 24,6 \text{ kg/mm}^2.$$

Les deux barres ont cédé par voilement des tôles des âmes. La valeur moyenne des essais  $24,4 \text{ kg/mm}^2$  correspond bien à la valeur calculée de  $24,6 \text{ kg/mm}^2$ .

### Zusammenfassung.

Von der auch für den nicht elastischen Bereich erweiterten Differentialgleichung der Ausbiegung dünner Platten ausgehend, wird die das Eintreten der Instabilität kennzeichnende kritische Druckbelastung einer langen, schmalen Platte, die in ihrer Längsrichtung gleichmässig gedrückt ist, bestimmt. An den Längsrändern können die Platten frei drehbar oder beliebig stark elastisch eingespannt sein. Unter der Annahme, dass gleiche Sicherheit für das Ausbeulen der Wände und für das Knicken des ganzen Stabes bestehen soll, werden einfache Bemessungsformeln, die die Tragfähigkeit als Funktion von  $\frac{\delta}{b} = \frac{\text{Blechstärke}}{\text{Blecbreite}}$  angeben, für die praktisch wichtigen Fälle des Stahlbaues abgeleitet und in einer Tafel zusammengestellt.

### Résumé.

En partant de l'équation différentielle exprimant la flexion de plaques minces, étendue à l'application aux cas non élastiques, on détermine, pour une plaque longue et mince sollicitée uniformément à la compression dans le sens de sa