L'étude de l'arithmétique à l'aide de la couleur associée à la longueur : la méthode Cuisenaire

Géographie de la Suisse : Les caractères orographiques et hydrographiques du Jura. Les cantons du Jura. Les collines et les vallées du Plateau. Le canton de Fribourg, ses limites, son étendue. Les régions naturelles : la plaine et la montagne. Les cours d'eau.

9. Sciences physiques et naturelles

La physique selon l'art. 40, ch. 7 du règlement du brevet.

10. Branches graphiques

Selon le programme.

Observation : Il est rappelé que les notes de classe par groupe de branches ne seront pas prises en considération si elles s'écartent trop des moyennes du jury des examens.

Examens pour le renouvellement du brevet: Les épreuves auront lieu les 20 et 21 septembre 1956.

L'étude de l'arithmétique à l'aide de la couleur associée à la longueur

La méthode Cuisenaire

par C. Gattegno, professeur à l'Institut d'Education de l'Université de Londres

Nombreux sont les maîtres d'école qui font un usage systématique de la couleur dans la création de matériel éducatif. Le problème que nous abordons ici est plus spécial. Nous voulons donner une idée de ce que nous avons trouvé dans notre recherche, menée depuis plus de deux ans avec des milliers d'enfants dans divers pays, en faisant usage du matériel inventé par M. Georges Cuisenaire, de Thuin, pour simplifier le passage du concret à l'abstrait dans l'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire.

Ici, nous considérons le problème des points de vue mathématique, psychologique et pédagogique, brièvement il est vrai, mais assez clairement nous l'espérons, pour que les lecteurs, que cela intéressera, y trouvent une base suffisante pour reprendre ces questions d'une manière critique et constructive.

I. Dans les études sur la conception du nombre chez l'enfant, les psychologues utilisent un point de vue qui résulte de l'analyse adulte de la notion du nombre. Il est évident qu'on peut trouver beaucoup de choses intéressantes à dire même de ce point de vue. Les livres de M. Piaget en sont un témoignage. Mais il serait ridicule de croire qu'il n'y a plus rien à trouver dans ce domaine et nous voulons montrer ici qu'un point de vue nouveau vient d'être mis en évidence par un procédé qui n'aurait pu être prévu par des psychologues ou des mathématiciens. Du fait qu'il y a place pour le génie dans toutes les affaires humaines, les questions se renouvellent dès qu'un point de vue vraiment original fait son apparition.

Georges Cuisenaire a réalisé un matériel éducatif très élémentaire, formé de réglettes colorées [1] de 1 à 10 cm. de longueur, mais réunies intentionnellement en familles : les rouges, de longueur 2, 4, 8 cm. ; les bleues, de longueur 3, 6, 9 cm. ; les jaunes, de longueur 5, 10 cm. ; la noire de 7 cm. et la blanche de 1 cm. De la sorte, la couleur évoque tout de suite une longueur *et* des relations diverses. Mais une longueur déterminée n'est pas rapidement associée à une seule couleur puisque l'on peut produire cette longueur en associant d'un grand nombre de manières des réglettes de diverses couleurs.

Lorsque le travail actif avec les réglettes est avancé, on maintient la couleur comme symbole de la longueur, mais on supprime les réglettes et on peut faire faire tout un travail représentatif de caractère mathématique. Cela est le point que n'avaient pas prévu les a prioristes et les logiciens.

En fait, la question se posait ainsi : « Quand dirons-nous que *le* nombre existe dans l'esprit de l'enfant ? »

Mais la réalité mathématique est plus complexe et une étude de ce que l'histoire des mathématiques a à offrir nous assure rapidement que *le* nombre, même entier, a mis longtemps à surgir et à se préciser. Exiger de le trouver dans la pensée de l'enfant, conforme à sa définition épurée, c'est, à notre avis, imposer à la recherche une camisole de force. Ce qui est plus près de la manière dont l'esprit humain a traité de ces questions dans le courant de son dialogue mathématique, c'est de percevoir le dégagement, la libération de la pensée engagée dans certaines activités. S'il est vrai qu'il a fallu attendre la fin du siècle dernier pour que les mathématiciens se dégagent de l'emprise du numérique et s'orientent vers l'analyse de la mathématique qualitative, l'étude des problèmes que pose l'apprentissage de l'arithmétique ne peut manquer d'imposer en même temps une variété de points de vue.

Aujourd'hui, nous savons regarder les situations avec plus de nuance, de tolérance et laisser les leçons se dégager plutôt que de les étouffer pour défendre une manière de voir.

Si donc nous nous proposons de comprendre ce qui a lieu réellement dans l'esprit de l'enfant apprenant l'arithmétique, nous devons pouvoir protéger l'esprit de l'enfant de notre interférence et le mettre en présence de l'objet de son dialogue pour pouvoir l'observer. Cette observation ne doit pas être confondue avec une prise de note de ses réactions, mais être une tentative authentique de saisir les démarches de l'enfant dans son auto-éducation. En fait, il n'est pas possible de définir ces démarches en dehors des situations où est placé l'enfant.

Donnant à des enfants le matériel Cuisenaire, il nous a été donné d'observer, parmi beaucoup d'autres choses, que le plus grand nombre, spontanément, sous tous les climats, quoique ayant subi des influences diverses dans des milieux divers, peuvent se rendre maîtres en peu de temps de l'algèbre contenue dans les exercices simples qu'on leur fait faire et en être si conscients qu'ils s'expriment, en toutes langues, comme mathématiciens. Les enfants de 5 ans sont mathématiciens si les ensembles qu'ils ont à structurer ont peu d'éléments (environ 10) ; à 6 ou 7 ans, ils le restent même si les ensembles s'élargissent pour contenir jusqu'à une centaine d'éléments.

Non seulement ils découvrent spontanément les structures évidentes inscrites dans le matériel par l'inventeur, mais aussi celles qu'il ignorait. En fait, si on

---

[1] La boîte complète compte 241 réglettes et coûte 12 fr. ; une boîte suffit pour quatre élèves.

laisse un enfant jouer avec les réglettes de couleur, il ne tarde pas à reconnaître trois structures fondamentales multivalentes de la mathématique moderne :

1. Les relations d'équivalences, c'est-à-dire que les réglettes d'une même couleur ont même longueur (par construction) et de couleurs différentes des longueurs différentes. De plus, ce qu'on appelle en mathématique *l'ensemble quotient* est aperçu également lorsque les enfants représentent par une seule réglette d'une couleur la *classe d'équivalence* de toutes les réglettes de cette couleur. Evidemment, les notions plus générales encore d'*ensemble* et de *sous-ensemble* sont perçues sinon désignées.

2. Les relations d'ordre, c'est-à-dire le fait que prenant deux réglettes a et b au hasard dans l'ensemble, l'enfant peut dire si a égale b ou si a diffère de b et lorsqu'il accepte d'appeler indifféremment a plus petit que b (ou b plus grand que a) ou leur opposé, il lie ce mot à la perception d'inégalité. Une telle comparaison entre réglettes est plus profondément structurée lorsque l'enfant peut combiner des couples d'inégalités pour former un ensemble transitif de propositions : si $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$, etc. Non seulement l'ensemble des réglettes donné est ordonné, mais aussi tout sous-ensemble de cet ensemble.

3. *Les relations algébriques* qui résultent de l'introduction d'une opération sur l'ensemble des réglettes. Tout enfant spontanément combine ses réglettes de diverses manières pour produire une variété extraordinaire de schèmes coloriés. S'il prend conscience que deux réglettes bout à bout remplacent quant à la longueur une autre réglette ou deux autres bout à bout, il a introduit explicitement une algèbre sur l'ensemble. Une algèbre représentée par le signe $+$ et telle que ses propriétés évidentes sont $a + b = b + a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$, (commutativité et associativité) ; de $a + b = c$ on tire par une nouvelle prise de conscience et une nouvelle notation() $a = c - b$ ou $b = c - a$. La soustraction apparaît comme l'*opération inverse* de l'addition et celle-ci comme l'opération inverse de la soustraction. A l'aide de ces notions, l'algèbre est celle d'un *anneau*, mais on peut également y introduire une seconde opération ou *multiplication* dont l'inverse sera la *fraction* et un élément *neutre*, qui transforment l'ensemble structuré en un *corps*. La multiplication sera l'addition d'une même réglette *itérée*.

C'est parce que l'enfant peut atteindre toutes ces structures fondamentales lorsqu'on lui donne un ensemble de réglettes et qu'il peut les recombiner pour donner des structures plus spéciales, plus riches et plus fécondes, que son auto-éducation mathématique peut avoir lieu sur une base réaliste et conforme à l'esprit.

Et c'est bien parce que le qualitatif peut être mathématisé et est plus accessible à l'enfant, que les mathématiques modernes sont plus proches de son esprit que celles que nous voulons lui imposer trop tôt.

II. Pour l'instant, nous n'avons regardé que le débutant dans ses rapports avec le matériel. Mais l'enfant grandit et son esprit combine les formes et les idées qu'il appréhende dans son dialogue avec le matériel. Il saisit, par exemple, qu'une même situation est susceptible de plusieurs interprétations et que le dynamisme mental la transforme au point qu'elle devient méconnaissable.

Ainsi, dans ses gestes toujours semblables qui lui ont permis de former diverses longueurs à l'aide de réglettes, il découvre que quelques-unes de ces longueurs ne peuvent jamais être formées à l'aide des mêmes combinaisons de plusieurs réglettes, c'est-à-dire que lorsqu'il réussit il trouve les nombres composés (donc leurs facteurs) et lorsqu'il n'y parvint pas, les nombres premiers. Pourtant, du point de vue de l'addition et même de la division avec reste, ces deux types de longueurs ne se distinguent pas.

Le petit enfant ne trouvera pas des énoncés tout à fait généraux, mais en rapport avec les nombres qu'il explore ce sera un savoir qu'on n'attend pas de lui lorsqu'on se préoccupe de décider par des expériences s'il possède ou non le nombre. L'enfant aura trouvé le moyen de décider de ces questions avancées au niveau de son expérience numérique.

D'ailleurs, il est aisé de voir que pour tout esprit jeune ou vieux, mathématicien ou autre, il y a trois niveaux par rapport aux nombres. Il y a les nombres familiers dont on sait beaucoup de choses et dont le nombre varie beaucoup d'un mathématicien à l'autre. Il y a les nombres dont on a quelque idée et que l'on peut étudier de plus près avec plus ou moins de difficultés, et il y a les nombres que l'on ne considère jamais mais que l'on *sent* exister, ceux dont le nombre de chiffres est supérieur à mille, disons.

Pourquoi donc ne maintiendrions-nous pas cette situation au niveau de l'élève et ne ferions-nous pas une étude poussée des nombres utiles, une incursion dans les nombres qui peuvent être intéressants et ne laisserions-nous pas tranquilles les autres ? Les seuils entre deux classes contiguës peuvent se déplacer avec l'expérience.

Ajoutons que la vraie activité du mathématicien consiste à considérer le virtuellement possible comme simplement possible et réalisable et qu'il accepte que tant qu'il n'y a aucune raison pour l'empêcher de poursuivre un processus trouvé opérant dans un certain nombre de cas, ce processus peut être érigé de démarche toujours possible. Par exemple, il trouvera le PPCM ou le PGCD de deux petits nombres et lorsqu'il aura vu que sa démarche dans ce cas peut être énoncée d'une façon indépendante de ce cas, il aura un processus sur lequel il travaillera pour en dégager les propriétés. Telle est la démarche la plus constante du mathématicien. Et elle a peu à faire avec le raisonnement logique.

L'enfant sait faire de ces mathématiques-là, même s'il est totalement incapable de suivre une démarche logique parce qu'il y est peu intéressé.

Il me semble démontré par tout le travail fait avec les enfants à qui j'ai présenté le matériel Cuisenaire, que si nous les abordons en mathématiciens, ils répondent merveilleusement bien, et si nous les abordons en logiciens ils nous laissent là avec nos questions saugrenues. Leur connaissance *des* nombres est remarquable bien que leur compréhension *du* nombre puisse être fort mince.

III. *Une expérience concrète.* Voici, à titre d'exemple, une leçon donnée le 25 mai 1955 à Zurich à des élèves de 8 ans qui ont eu une année à l'école primaire de la ville où l'on entre à 7 ans et où l'année commence à Pâques.

Ces élèves, garçons et filles, avaient étudié les nombres entiers jusqu'à 20 durant leur année antérieure et doivent étudier ceux jusqu'à cent de Pâques 1955 à mars 1956. Je n'avais eu aucune consigne pour cette leçon et les élèves depuis février utilisent les réglettes pour l'étude de l'addition et la soustraction. J'ai donc pensé à investiguer les obstacles qui se présentent dans l'étude de certaines fractions sûrement laissées de côté à l'école puisqu'elles ne sont prescrites au programme que pour après l'âge de 10 ans.

Ayant reconnu que les élèves ajoutaient sans difficulté toute réglette à une autre rien qu'en les sentant par la main derrière leur dos, et voyant qu'il y avait une certaine rigidité d'association entre les premiers nombres entiers et les longueurs des réglettes reconnues par leur couleur, j'ai commencé par demander ce que faisaient 2×7. Puis, ayant obtenu une réponse exacte de tous les élèves, j'ai repris la réglette noire (7) et ai demandé ce qu'était son double, son quadruple. Nous avons mis 4 réglettes sur la table et mesuré à l'aide de 2 dix et 1 huit que la réponse était 28. J'ai demandé la moitié de 28, puis le quart. Nous avons alors formé 28 à l'aide de réglettes de longueur 4 et vu qu'il en fallait 7. J'ai redemandé le quart de 28 et de montrer une réglette qui le représentât. Sans exception, la réglette noire était brandie. Alors, j'ai osé poser la question : montrez-moi le 1/7 de 28, après avoir obtenu la réponse qu'il fallait 7 réglettes mauves pour faire 28. Personne ne sut répondre. J'ai posé les deux questions dans l'ordre ci-dessus plusieurs fois et un élève me montra la réglette mauve comme étant la réponse pour 1/7 de 28. Il y avait évidemment une difficulté linguistique et j'ai donné la définition du 1/7 en disant que l'on appelle un septième d'une longueur (ici 28) la longueur qui y entre 7 fois. Alors trois élèves me montrèrent la réglette mauve. En reposant la question et en ayant soin de demander à ceux qui avaient trouvé la réponse d'expliquer ce qu'ils avaient trouvé, le nombre de ceux qui découvraient par eux-mêmes la réponse augmentait. Mais il y en avait encore qui répondaient que le septième de 28 était 28 ou sept. Pour m'assurer qu'il n'y avait pas d'imitation entre ceux qui avaient trouvé la réponse, je demandai qu'on me donne les 2/7 de 28, mais cette fois en une seule réglette. Quelques instants après, il y avait un bon nombre de réglettes brunes (8) qui étaient brandies.

Mes efforts n'ayant pas réussi à faire pénétrer certains enfants dans la recherche mentale d'une solution à une question tout à fait nouvelle pour eux, je tentai la voie suivante. Cuisenaire ayant introduit la notation de deux réglettes en croix l'une sur l'autre pour indiquer leur produit, je tentai d'obtenir d'abord la lecture du produit par les facteurs, par exemple au lieu de dire 28 les enfants disent 4×7 et lorsque je renverse l'ordre 7×4. Nous essayons d'abord de lire des produits connus 2×3, 4×2, 5×2, 7×2, 5×10, etc. Nous les lisons tous des deux côtés et donnons le produit lorsqu'il est connu, mais lorsqu'il ne l'est pas, les enfants peuvent toujours dire 7×8, 9×7, 9×6, etc., sans énoncer le résultat. Il s'agit d'une simple combinaison mentale et d'une association verbale. Dans certains cas, il y a une opération additionnelle qui fournit un produit connu. Je ne me préoccupe aucunement de leur faire apprendre les produits, tout ce que je cherche c'est le mécanisme qui permet d'associer à un symbole que l'on sait lire comme association multiplicative d'entiers, deux démarches qui fournissent les fractions du produit représenté par ses facteurs. Ainsi, si 4×7 est le produit, on peut voir que le quart du produit est 7 et le septième 4 sans connaître la réponse $4 \times 7 = 28$.

Pour m'assurer que l'activité mentale était passée de la compréhension additive, que les réglettes bout à bout nous donnaient au début, à la compréhension multiplicative, je prenais le « tableau des produits » inventé par Cuisenaire. Ce tableau est organisé selon les principes suivants : un signe arbitraire, formé d'un cercle blanc entouré d'un couple de lunules diamétralement opposées et coloriées comme les réglettes, représente un produit. Le cercle blanc peut être recouvert d'un carton portant un nombre. Par exemple, $15 = 5 \times 3$ est à placer sur le symbole ci-dessus portant une lunule vert clair et une jaune, le $16 = 2 \times 8 = 4 \times 4$ correspond à un signe où le cercle blanc est entouré de deux couples de lunules diamétralement opposées, un couple rouge et brun, l'autre mauve et mauve.

En quelques instants, nous reconnaissions les produits 4, 6, 8, 10, 12, 15, 25, 50. Sans aller plus loin, je leur montrai que si je disais un cinquième d'un nombre que je n'énonçais pas, mais qui était indiqué du doigt et où du jaune apparaissait, ils répondaient en nommant l'autre nombre qui apparaissait dans le signe. Ainsi, pour 12 le 1/4 était 3, pour 25 le 1/5 était 5, et pour 50 le 1/10, 5.

En fait, nous étions en présence du mécanisme suivant : appelant c le résultat inconnu du produit $a \times b$ nous pouvions avec certitude dire que $a =$ cb ou $a =$ la b^e partie de c, ou b égale la a^e partie de c.

En quelques instants les élèves savaient tous parfaitement répondre que le neuvième de 9×6 était 6 et le sixième 9 et aucun des produits non effectués présentés n'offrait plus de difficulté qu'un autre.

Si ces élèves apprennent les résultats, le mécanisme ci-dessus restera exactement le même, mais une ou deux phrases pourraient être ajoutées. Par exemple, on demandera quel est ce produit ? soit 56, quel en est le 1/7 ou le 1/8 ? et la réponse immédiate sera 8 ou 7, visibles comme avant sur le tableau. Durant cette leçon, le mécanisme a été démonté et nous a renseigné sur le travail rapide fait par les élèves de Cuisenaire qui paraissent des prodiges. En fait, cette partie de la leçon, bien qu'elle ait surpris des instituteurs expérimentés présents, était remarquablement utile pour nous faire comprendre la façon dont s'opère le travail mental des élèves qui apprennent l'arithmétique à l'aide du matériel Cuisenaire. La démarche de l'enfant est celle à laquelle a recours le mathématicien qui a pu abstraire une opération d'une multitude d'actions et passant par cette opération peut virtuellement résoudre en quelques instants une cascade de gestes mentaux qui, s'ils étaient actuellement faits, auraient demandé un gros effort. La pédagogie mathématique tend à rendre le mathématicien le plus habile possible dans l'art d'éviter les gestes inutiles et de faire fonctionner un mode de compensation qui facilite sa tâche, il n'y avait pas compréhension effective de ce que voulait dire 1/9 ou 1/7, puisque les réglettes n'avaient pas illustré qu'en fait il fallait 9 ou 7 réglettes d'une certaine couleur pour construire une certaine longueur. Mais il y avait opération mentale pure et verbalisation adéquate et une petite marge d'incertitude qu'une ou deux leçons suffiraient à éliminer.

Pour terminer la leçon, nous reprîmes la ligne du haut du tableau des produits, formée des produits 4, 8, 16, 32, 64, chacun étant (sauf 4) le double du précédent. Sur cette ligne, nous pouvions doubler un nombre et en prendre la moitié, mais nous pouvions appliquer la règle précédente et obtenir le 1/8 de 32 ou 64. Mais une fois assurés de cela, nous avons également doublé 64 et aussi 128. La joie des enfants lorsqu'ils entendirent, après avoir obtenu 128, qu'il fallait le doubler, était le signe évident que cette incursion dans le domaine des grands nombres exerce une attraction très grande sur leur esprit.

IV. Nous sommes bien loin, par cette méthode, des exercices précautionneux habituels où l'addition de 1 est la mesure de tout et, bien qu'il soit difficile de défendre tout à fait une leçon comme celle-ci, qui a mis en trois quarts d'heure des bouchées doubles, je ne crains pas de dire que les résultats d'expériences semblables dans des centaines et des centaines de classes, avec plusieurs milliers d'enfants de tous âges et tous niveaux, nous placent nettement devant de nouveaux problèmes psychologiques et pédagogiques.

Jusqu'ici, nos élèves ont été paralysés par notre conception logique de la mathématique et nous-mêmes, médusés par les exigences de rigueur des mathématiciens, nous avons voulu exiger de nos élèves, avant l'expérience mathématique, sa codification.

Si nous laissons l'intuition jouer son rôle, si nous ne demandons pas de nos enfants d'être prélogiques dans le domaine logique, mais si nous leur permettons d'organiser leur expérience propre suivant les critères dont ils sont capables à l'intérieur d'ensembles qu'ils peuvent dominer, le résultat ressemblera à ce qu'offre le mathématicien dans son domaine créateur.

Nous avons trop souligné dans l'apprentissage de l'enfant le rôle du social. Nous nous sommes trop penchés sur la façon dont il assimile les connaissances adultes, au point que certains trouvent scandaleux que l'enfant connaisse quoi que ce soit sans que l'adulte le lui ait appris. Pourtant, il est donné à chacun de s'assurer que l'enfant, s'il est placé dans une situation à sa portée, renverse toutes les manières de faire qu'on lui a attribuées et qu'il offre toujours un point de vue original au chercheur attentif.

Je ne crains pas de me tromper en redisant que dans le travail arithmétique l'apparition de la couleur, telle que l'a conçue Cuisenaire, a permis de libérer l'enfant de mille obstacles placés sur son chemin par l'adulte malhabile. Nos savants psychologues auront beaucoup de joie à reprendre leurs études sur la pensée numérique de l'enfant, s'ils acceptent de ne plus questionner l'enfant en vue de savoir à quel point il pense comme certains adultes et, au contraire, utilisent pour leur édification une situation complexe où l'enfant est absorbé et créateur comme dans celles que nous lui avons offertes.

Nos enseignants, eux aussi, trouveront dans le matériel Cuisenaire un moyen radical de renouveler leur enseignement, maintenu dans son aridité pendant des siècles,du fait de la prédominance de l'unité et de l'absence de vraie communication avec l'esprit chercheur de l'enfant beaucoup plus près de nos conceptions mathématiques modernes en partie qualitatives.

Des démonstrations de la méthode seront faites en Suisse en mai par le professeur Gattegno. Pour tous renseignements, s'adresser aux Editions Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.